

Fakultät Mechanical and Medical Engineering

Sommersemester 2024

Hausarbeit

**Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen, Roboter und
Bewegungsachsen**

Studiengang: Advanced Precision Engineering

Semester: 2

Dozent: Dr. -Ing. Dipl. Betriebswirt Gunter Ketterer

Studierende: Niklas Kleindienst (277016), Marcel Neugart (277508),

Selina Sivac (277488)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	2
Abbildungsverzeichnis	3
Tabellenverzeichnis.....	4
Aufgabenteil 1	5
Aufgabe 1a).....	5
Aufgabe 1b).....	7
Aufgabe 1c).....	8
Aufgabe 1d).....	9
Aufgabe 1e).....	10
Aufgabe 1f).....	12
Aufgabenteil 2	15
Aufgabenteil 3	22
Aufgabe 3.1	22
Aufgabe 3.2.....	33

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Arbeitsraum in der x_0 - z_0 -Ebene	5
Abbildung 2: Arbeitsraum in der y_0 - z_0 -Ebene	6
Abbildung 3: Arbeitsraum in der x_0 - y_0 -Ebene	6
Abbildung 4: Schematisches Ersatzbild des Roboters in Symboldarstellung mit entsprechenden Koordinatensystemen nach Denavit-Hartenberg	7
Abbildung 5: Ablauf zur Berechnung des Sollprofils	33
Abbildung 6: Profile für Ruck, Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg für φ_0	35

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Ermittlung der DH-Parametern gemäß der Vorgehensweise nach Denavit Hartenberg im Skript von APE „Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen und Roboterachsen“	8
Tabelle 2: Ermittlung der DH-Parameter gemäß der Vorgehensweise nach Denavit Hartenberg im Skript von APE „Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen und Roboterachsen“ für die Jaocbi-Matrizen	15
Tabelle 3: ruckbegrenzte Lagesollprofile für die Achsen 1 – 4.....	33
Tabelle 4: Ergebnisse für φ_0 nach Fall 3a Nein, φ_1 nach Fall 3a Nein, φ_2 nach Fall 3a Nein, φ_4 nach Fall 3a Nein und H3 nach Fall 2b.....	34
Tabelle 5: Berechnung über eigendefinierte Funktion on Python, Python Dateiwerte	34
Tabelle 6: Übersicht der Lagesoll und tau-Stimulation	36

Aufgabenteil 1

Aufgabe 1a)

Bestimmen Sie zunächst zeichnerisch den Arbeitsraum in der x_0 - z_0 und y_0 - z_0 und x_0 - y_0 Ebene und prüfen Sie mögliche Kollisionsräume, die Sie entsprechend grafisch kennzeichnen. Wie müsste man die Schwenk- und Hubbereiche (φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_4 und H_3) softwaretechnisch einschränken, damit es nie zu einer Kollision kommen aber der Arbeitsraum dennoch möglichst maximal ausgenutzt werden kann?

Antwort:

Delta H3 beträgt laut Aufgabenstellung 400 mm. Dies entspricht somit -200 mm bis +200 mm.

Bei Ausfahren von H3 auf -200 mm würde der TCP jedoch mit dem Boden kollidieren.

Delta H3 muss eingeschränkt werden auf den Verfahrbereich -80 mm bis +200 mm (= 280 mm).

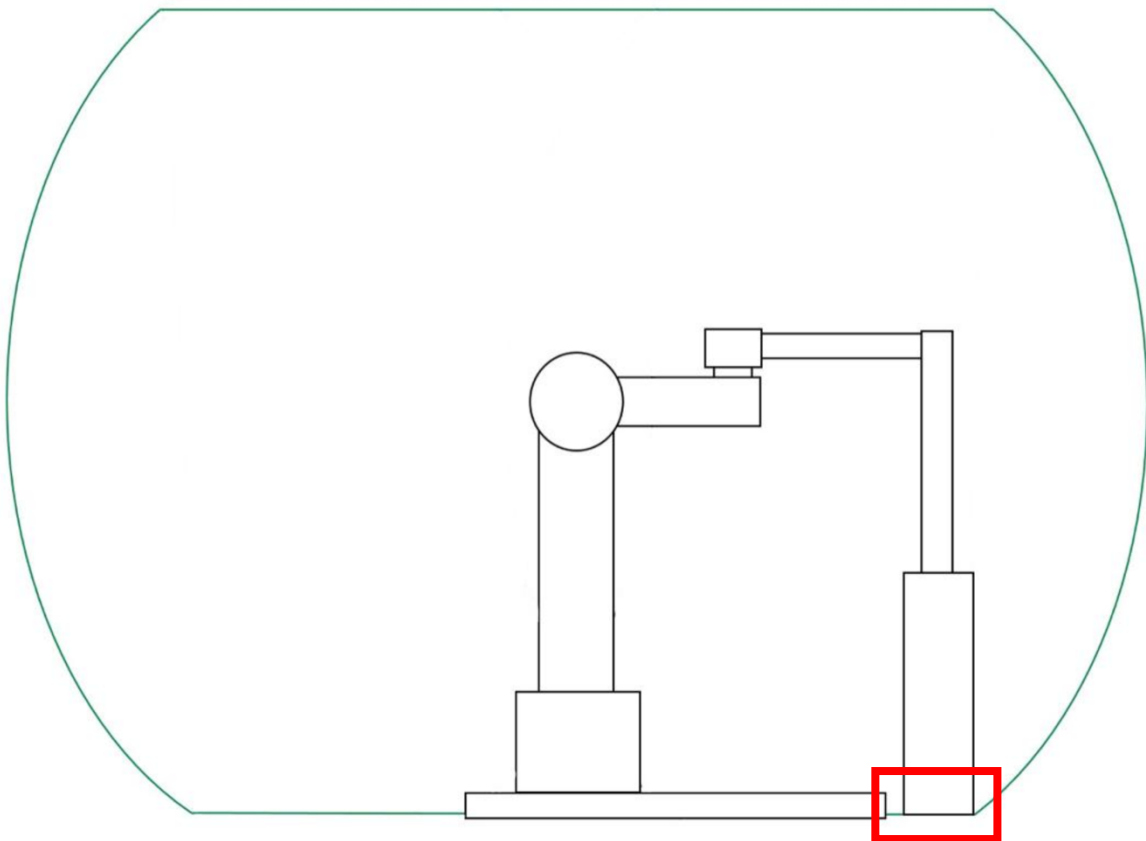


Abbildung 1: Arbeitsraum in der x_0 - z_0 -Ebene

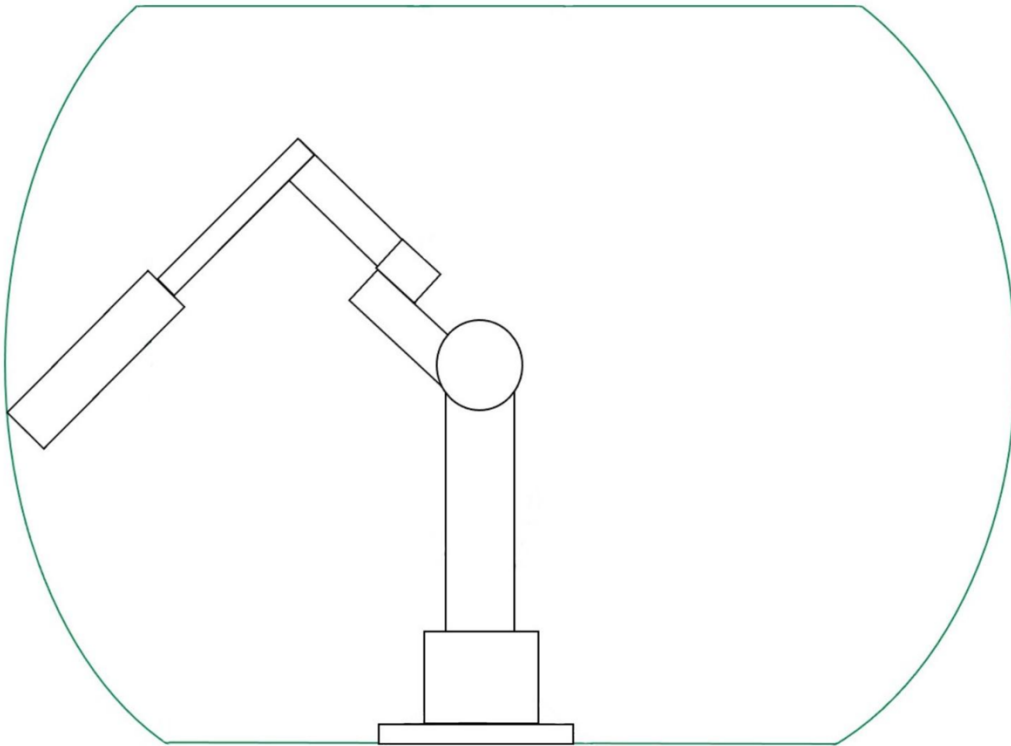


Abbildung 2: Arbeitsraum in der y_0-z_0 -Ebene

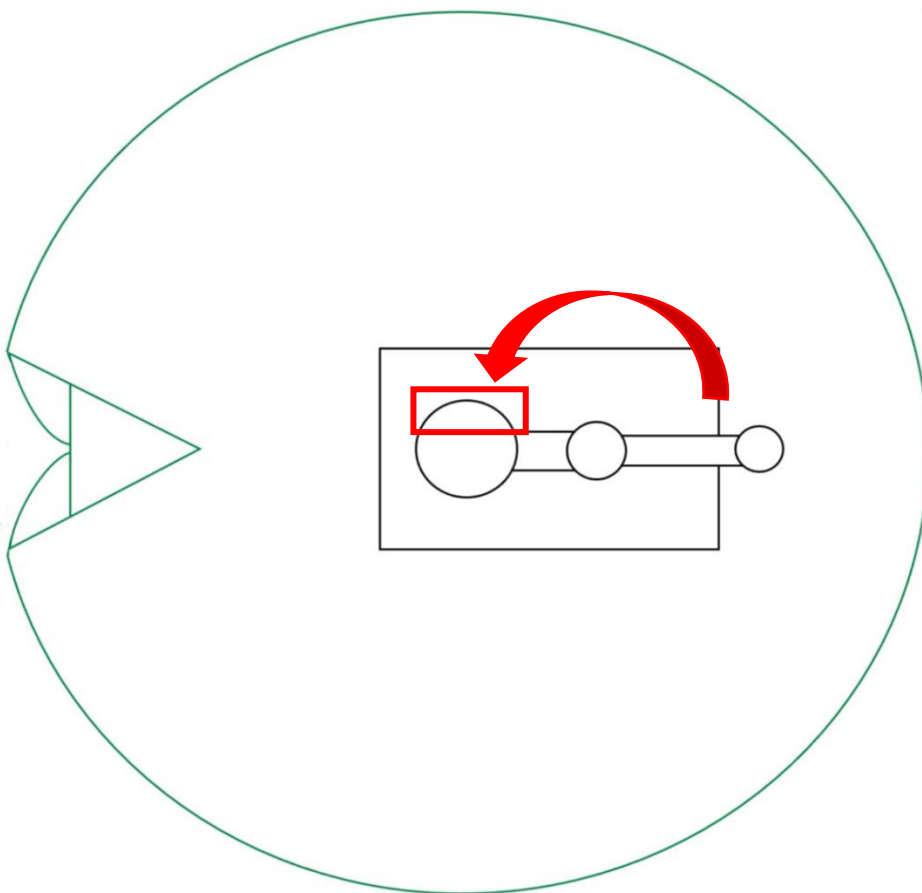


Abbildung 3: Arbeitsraum in der x_0-y_0 -Ebene

Des Weiteren muss φ_2 limitiert werden, da ansonsten die Hubachse mit der Turmsäule kollidiert.

$$\rightarrow -162^\circ < \varphi_2 < 162^\circ$$

Aufgabe 1b)

Zeichnen Sie das schematische Ersatzbild des Roboters in Symboldarstellung mit den entsprechenden Koordinatensystemen nach Denavit Hartenberg in den mit „•“ gekennzeichneten Gelenkpunkten. (Hinweis: Gehen Sie dabei gemäß der Vorgehensweise nach Denavit Hartenberg wie im Skript von APE- „Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen und Roboterachsen“ beschrieben vor).

Antwort:

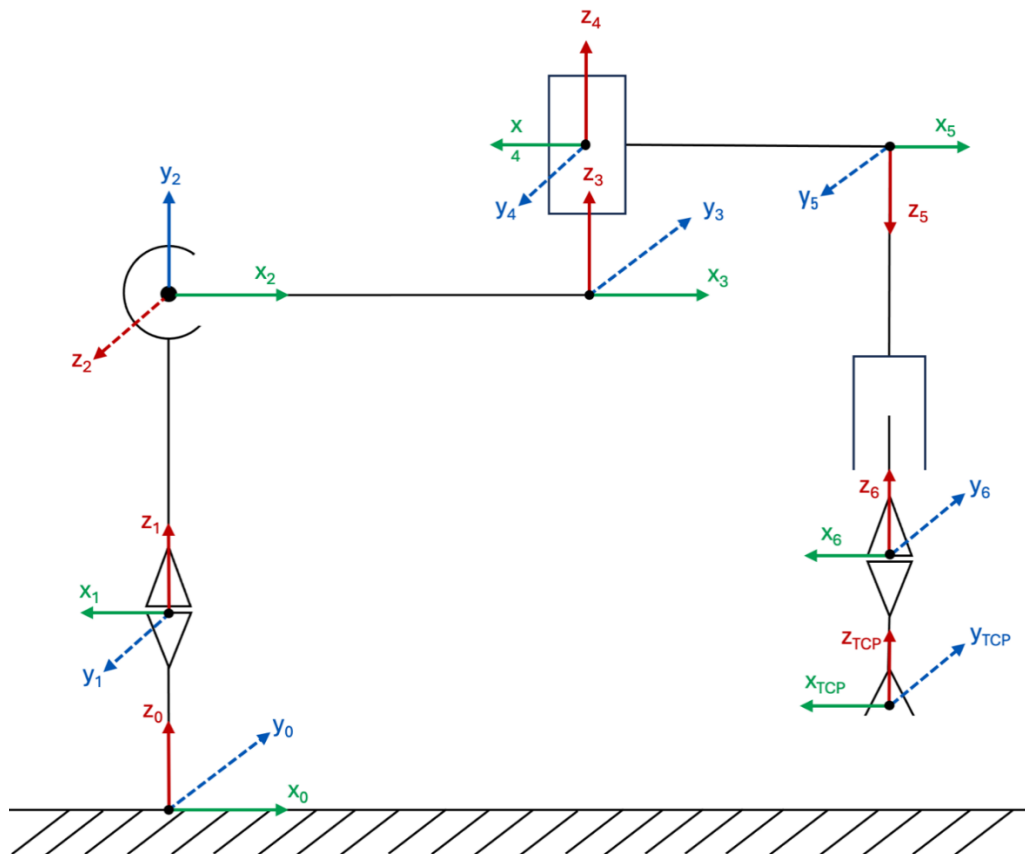


Abbildung 4: Schematisches Ersatzbild des Roboters in Symboldarstellung mit entsprechenden Koordinatensystemen nach Denavit-Hartenberg

Aufgabe 1c)

Bestimmen Sie die DH-Parameter beginnend vom Grundkoordinatensystem

(Weltkoordinatensystem x_0, y_0, z_0) über alle Achsgelenkpunkte bis zum TCP und leiten Sie daraus die Einzeltransformationsmatrizen 0A_1 , 1A_2 , 2A_3 und ${}^3A_4=\text{TCP}$ in Abhängigkeit der Achsvariablen φ_0 ; φ_1 ; φ_2 ; φ_4 und H_3 ab. Falls notwendig sind ebenfalls die angegebenen Robotergrößen (z.B. H_s , L_0 , L_1 , L_2 , D_1 , L_3 etc.) als Parameter (ohne Werte) mitzuverwenden.

Antwort:

Tabelle 1: Ermittlung der DH-Parametern gemäß der Vorgehensweise nach Denavit Hartenberg im Skript von APE „Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen und Roboterachsen“

AKS	α	L	D	φ
1	0°	0	$H_s - H_0$	180°
2	90°	0	$L_0 + H_0$	$180^\circ + \varphi_0$
3	-90°	L_1	0	φ_1
4	0°	0	D_1	180°
5	180°	L_2	0	$180^\circ + \varphi_2$
6	180°	0	$\frac{D_{A,2}}{2} + L_3$	180°
7 (TCP)	0°	0	$H_3 - L_3$	φ_4

Anhand der ermittelten DH-Parametern aus der Tabelle 1, kann durch das Einsetzen in die Formel 1 die Einzeltransformationen bestimmt werden.

$$\bar{A} = \text{rot}(\varphi_z) * \text{trans}(D_z) * \text{trans}(L_x) * \text{rot}(\alpha_x) = \begin{bmatrix} C_\varphi & -C_\alpha * S_\varphi & S_\alpha * S_\varphi & L * C_\varphi \\ S_\varphi & C_\alpha * C_\varphi & -S_\alpha * C_\varphi & L * S_\varphi \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \overline{DH}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_s - H_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} -C_0 & 0 & -S_0 & 0 \\ -S_0 & 0 & C_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_0 + H_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & L_1 * C_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & L_1 * S_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} -C_2 & -S_2 & 0 & -C_2 * L_2 \\ -S_2 & C_2 & 0 & -S_2 * L_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{D_{A,2}}{2} + L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^6A_{7=TCP} = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_3 - L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1d)

Bestimmen Sie die Gesamttransformation $T = {}^0A_4$ in allgemeiner Darstellung in Abhängigkeit der Achsvariablen und geometrischen Robotergrößen (ohne Werte).

$${}^0A_7 = [\text{Siehe Matlab}]$$

Aufgabe 1e)

Bestimmen Sie die Achsvariablen φ_0 ; φ_1 ; φ_2 ; φ_4 und H_3 mit Hilfe der Rücktransformation in Abhängigkeit der notwendigen geometrischen Robotergrößen (z.B. H_s , L_0 , L_1 , L_2 , D_1 , L_3 , etc.) und einer allgemein angenommenen TCP-Stellung und TCP-Orientierung (TCP-Orientierungsvektoren \mathbf{n} , \mathbf{u} , \mathbf{a} sowie dem TCP-Stellungsvektor \mathbf{p} bezogen auf das Basiskoordinatensystem).

Antwort:

Nach Rücksprache mit Hr. Ketterer kann die Kinematik so weit vereinfacht werden, dass die allgemeinen Zusammenhänge eines Knickarmroboters verwendet werden können. Nachfolgend sind dennoch die ersten 3 Zusammenhänge dargestellt, welche für das Lösen der Rückwärtstransformation aufgestellt werden können:

Zusammenhang 0

$$\begin{bmatrix} n_x & u_x & a_x & p_x \\ n_y & u_y & a_y & p_y \\ n_z & u_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) + S_4(S_0C_2 + C_1C_0S_2) & C_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) - S_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) & -C_0S_1 & L_1C_0C_1 - D_1C_0S_1 + C_0S_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) - C_0S_1(H_3 - L_3) - L_2S_0S_2 + L_2C_0C_1C_2 \\ -C_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) - S_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & S_4(C_0C_2 + C_1S_0C_2) - C_4(C_0C_2 - C_1S_2S_0) & -S_0S_1 & L_1C_1S_0 + L_2C_0S_2 - D_1S_0S_1 + S_0S_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) - S_0S_1(H_3 - L_3) + L_2C_1C_2S_0 \\ S_2S_4S_1 - S_1C_2C_4 & C_2S_1S_4 + C_4S_1S_2 & C_1 & H_5 + L_0 + D_1C_1 - C_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) + C_1(H_3 - L_3) + L_1S_1 + L_2C_2S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zusammenhang 1

$$\begin{bmatrix} -n_x & -u_x & -a_x & -p_x \\ -n_y & -u_y & -a_y & -p_y \\ n_z & u_z & a_z & H_0 - H_5 + p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) - S_4(S_0C_2 + C_1C_0S_2) & S_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) - C_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) & C_0S_1 & D_1C_0S_1 - L_1C_0C_1 - C_0S_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) + C_0S_1(H_3 - L_3) + L_2S_0S_2 - L_2C_0C_1C_2 \\ C_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) + S_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & C_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) - S_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) & S_0S_1 & D_1S_0S_1 - L_2C_0S_2 - L_1C_1S_0 - S_0S_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) + S_0S_1(H_3 - L_3) - L_2C_1C_2S_0 \\ S_1S_2S_4 - C_2C_4S_1 & C_2S_1S_4 + C_4S_1S_2 & C_1 & H_0 + L_0 + D_1C_1 - C_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) + C_1(H_3 - L_3) + L_1S_1 + L_2C_2S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zusammenhang 2

$$\begin{bmatrix} \frac{n_xC_0 + n_yS_0}{C_0^2 + S_0^2} & \frac{u_xC_0 + u_yS_0}{C_0^2 + S_0^2} & \frac{a_xC_0 + a_yS_0}{C_0^2 + S_0^2} & \frac{p_xC_0 + p_yS_0}{C_0^2 + S_0^2} \\ n_z & u_z & a_z & p_z - L_0 - H_5 \\ \frac{n_xS_0 - n_yC_0}{C_0^2 + S_0^2} & \frac{u_xS_0 - u_yC_0}{C_0^2 + S_0^2} & \frac{a_xS_0 - a_yC_0}{C_0^2 + S_0^2} & \frac{p_xS_0 - p_yC_0}{C_0^2 + S_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1S_2S_4 - C_1C_2C_4 & C_1C_2S_4 + C_1C_4S_2 & -S_1 & L_1C_1 - D_1S_1 + S_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) - S_2(H_3 - L_3) + L_2C_1C_2 \\ S_1S_2S_4 - C_2C_4S_1 & C_2S_1S_4 + C_4S_1S_2 & C_1 & D_1C_1 - C_1\left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3\right) + C_1(H_3 - L_3) + L_1S_1 + L_2C_2S_1 \\ C_2S_4 + C_4S_2 & C_2C_4 - S_2S_4 & 0 & -L_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Rücktransformation und das Berechnen der Winkel $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ kann mithilfe folgender Zusammenhänge berechnet werden:

Dazu werden die allgemeinen Zusammenhänge eines Knickarmroboters verwendet.

In diesem Fall ist $x = 400\text{mm}$, $y = 0\text{mm}$, $z = 100\text{mm}$, $L_1 = 400\text{mm}$ und $L_2 = 500\text{mm}$.

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = 0^\circ$$

$$\varphi_0 = \left(\arctan\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \pm \left(\arccos\frac{x^2 + y^2 + z^2 + L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$\varphi_0 = -61,9275^\circ \text{ und } 90^\circ$$

$$\varphi_2 = \pm \arccos\frac{x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}$$

$$\varphi_2 = 126,8699^\circ \text{ und } -126,8699^\circ$$

$$\varphi_4 = 0^\circ$$

$$\Delta H_3 = H_s + L_0 + D_1 - \frac{D_{A2}}{2} - L_3 - \frac{L_4}{2} - L_5 - p_z = 30 \text{ mm}$$

$$H_3 = -30 \text{ mm}$$

Aufgabe 1f)

Während der Produktion verändert sich die Temperatur von morgens $T_0=18^\circ\text{C}$ auf abends $T_1=30^\circ\text{C}$. Die Endeffektor-Stellung liegt zu Arbeitsbeginn wie in der vorderen

Aufgabenbeschreibung vorgegeben: Hierbei gilt für das temperaturabhängige Achsverhalten in der Länge: $L = L_0 \cdot e^{(\alpha \cdot \Delta T)}$ mit dem angegebenen Temperaturkoeffizienten $\alpha = \alpha_{St}$

Welche Auswirkung hat dies auf die Lage und Orientierung (d. h. die Positionier- und Winkelabweichungen) des End-Effektors gegenüber der Stellungssituation bei

Produktionsbeginn. Welche Achsvariablen φ_0 ; φ_1 ; φ_2 ; φ_4 und H_3 vorzunehmen, damit die gleiche Stellung wie bei Arbeitsbeginn erreicht werden kann?

Antwort:

Während der Produktion verändert sich die Temperatur von morgens $T_0=18^\circ\text{C}$ auf abends $T_1=30^\circ\text{C}$. Die Endeffektor-Stellung liegt zu Arbeitsbeginn bei:

- den auf das 0. Koordinatensystem bezogenen Positionskoordinaten

$$\mathbf{p} = (400\text{mm}, 100\text{mm}, 50\text{mm})$$

und

- den im 0. Koordinatensystem beschriebenen Greiferorientierung mit den 3 Orientierungsvektoren \mathbf{n} , \mathbf{u} und \mathbf{a} mit:

$$\mathbf{n} = (\cos(30^\circ); \sin(30^\circ); 0)^T,$$

$$\mathbf{u} = (\cos(60^\circ); -\sin(60^\circ); 0)^T \text{ und}$$

$$\mathbf{a} = (0; 0; -1)^T:$$

Hierbei gilt für das temperaturabhängige Achsverhalten in der Länge:

$$\Delta L = L \cdot e^{\alpha \cdot \Delta T} \text{ mit dem Temperaturkoeffizienten } \alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

Eine Temperaturveränderung (hier $T_0 = 18^\circ\text{C}$ auf $T_1 = 30^\circ\text{C}$) bewirkt eine Ausdehnung der Materialien/Achsen des Roboters und folglich eine Verschiebung des TCPs. Um diese

Verschiebung auszugleichen und die Position des TCPs zu gewährleisten, müssen die Achsstellungen nachjustiert werden. Die Achsstellungen für die Ausgangstemperatur ergibt sich aus dem Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte aus der Aufgabenstellung:

Verschiebung in X-Richtung

$$400 * e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 400,060 \text{ mm}$$

Verschiebung in Y-Richtung

$$100 * e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 100,015 \text{ mm}$$

Verschiebung in Z-Richtung

$$50 * e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 50,007 \text{ mm}$$

$$\mathbf{p_{T30} = (400.060 \text{ mm} , 100.015 \text{ mm} , 50.007 \text{ mm})}$$

Für die Achslängen L und H ergeben sich folgende Werte:

Vertikal:

$$H_{S T30} = H_S \cdot e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 200,03 \text{ mm}$$

$$\Delta H_S = H_{S T30} - H_S = 0,03 \text{ mm}$$

$$L_{0 T30} = L_0 \cdot e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 800,120009 \text{ mm}$$

$$\Delta L_0 = L_{0 T30} - L_0 = 0,120009 \text{ mm}$$

$$D_{1 T30} = D_1 \cdot e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 110,016501 \text{ mm}$$

$$\Delta D_1 = D_{1 T30} - D_1 = 0,016501 \text{ mm}$$

$$L_{3 T30} = L_3 \cdot e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 630,0945071 \text{ mm}$$

$$\Delta L_3 = L_{3 T30} - L_3 = 0,945071 \text{ mm}$$

$$L_{4 T30} = L_4 \cdot e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 600,090068 \text{ mm}$$

$$\Delta L_4 = L_{4 T30} - L_4 = 0,900068 \text{ mm}$$

Horizontal

$$L_{1 T30} = L_1 \cdot e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 400,0600045 \text{ mm}$$

$$\Delta L_1 = L_{1 T30} - L_1 = 0,0600045 \text{ mm}$$

$$L_{2 T30} = L_2 \cdot e^{12,5 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 12K} = 500,0750056 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = L_{2 T30} - L_2 = 0,0750056 \text{ mm}$$

Mit den neuen Achslängen können nun die neuen Winkel berechnet werden.

$$\varphi_{1 T30} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = 0^\circ$$

$$\varphi_{0 T30} = \left(\arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \pm \left(\arccos \frac{x^2 + y^2 + z^2 + L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\varphi_{0T30} = -61,9345^\circ \text{ und } 90,007^\circ$$

$$\varphi_{2T30} = \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}$$

$$\varphi_{2T30} = 126,879^\circ \text{ und } -126,879^\circ$$

$$\varphi_4 = 0^\circ$$

$$\Delta H_{3T30} = H_{sT30} + L_{0T30} + D_{1T30} - \frac{D_{A2T30}}{2} - L_{3T30} - \frac{L_{4T30}}{2} - L_{5T30} - p_z = 30,0075 \text{ mm}$$

$$H_{3T30} = -30,0075 \text{ mm}$$

Mit folgenden Winkeldifferenzen $\Delta\varphi$ und Längendifferenz ΔH_3

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_{0T30} - \varphi_0 = 0,007^\circ$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_{2T30} - \varphi_2 = 0,009^\circ$$

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_{1T30} - \varphi_1 = 0^\circ$$

$$\Delta\varphi_4 = \varphi_{4T30} - \varphi_4 = 0^\circ$$

$$\Delta H_3 = H_{3T30} - H_3 = 0,075 \text{ mm}$$

Aufgabenteil 2

Bestimmen Sie die JACOBI Matrix und berechnen Sie jeweils die 4 Achsmomente in [Nm] in den Antriebsachsen 0, 1, 2, und 4 sowie die benötigte Verschiebekraft in [N] in der Achse 3.

Hierbei wird als Einpresskraft eine im TCP-Koordinatensystem definierte Montagekraft am TCP mit $f_{TCP} = ({}^{TCP}f_x, {}^{TCP}f_y, {}^{TCP}f_z)^T = (-50N; 25N; 75N)^T$ und ein Montage-Drehmoment $M_{TCP} = ({}^{TCP}M_x, {}^{TCP}M_y, {}^{TCP}M_z) = (30Nm, 0 Nm, 100Nm)$ vorgesehen. HINWEIS: Umrechnung auf das 0.-

Koordinatensystem durch Verwendung der Gesamtrationsmatrix von **T**. Bestimmen Sie ebenfalls die Positionen, an denen Singularitäten auftreten.

Antwort:

Für die Erstellung der Jacobi-Matrizen wird eine neue DH-Konvention benötigt, da in der vorherigen Konvention zwei Hilfskoordinatensysteme definiert wurden, die weder eine Translations- noch eine Rotationsachse enthalten.

Tabelle 2: Ermittlung der DH-Parameter gemäß der Vorgehensweise nach Denavit Hartenberg im Skript von APE „Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen und Roboterachsen“ für die Jacobi-Matrizen

AKS	α	L	D	φ
1	0°	0	$H_s - H_0$	180°
2	90°	0	$L_0 + H_0$	$180^\circ + \varphi_0$
3	-90°	L_1	0	φ_1
4	180°	L_2	0	φ_2
5	0°	0	$\frac{D_A}{2}$	φ_4

Anhand der neu definierten DH-Konvention können nun im Folgenden die neuen Einzeltransformationen berechnet werden und mit Hilfe dessen die Jacobi-Matrizen.

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_S - H_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} -C_0 & 0 & -S_0 & 0 \\ -S_0 & 0 & C_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_0 + H_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & L_1 * C_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & L_1 * S_1 \\ 0 & -1 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} -C_2 & -S_2 & 0 & -C_2 * L_2 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & -S_2 * L_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{D_2}{2} + L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -H_3 + L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die geometrische Jacobi-Matrix wird anhand den Formeln 2 und 3 bestimmt. Über die Formel 2 ergibt sich die Jacobi-Matrix der rotatorische Achsen. Hingegen bezieht sich die Formel 3 auf translatorische Achsen.

$$J_{i+1} = \begin{pmatrix} {}^0b_i \times ({}^0p_e - {}^0p_i) \\ {}^0b_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$J_{i+1} = \begin{pmatrix} {}^0b_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Im ersten Schritt wird der Positionsvektor ${}^0\mathbf{p}_e$ anhand der Gesamttransformationsmatrix 0A_5 aus der letzten Spalte abgelesen. Dabei wird die letzte Zeile für die Bestimmung des Positionsvektors vernachlässigt.

$${}^0A_5 = \begin{pmatrix} n_x & u_x & a_x & L_1 * C_{01} + C_0 S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ n_y & u_y & a_y & L_1 * C_1 S_0 + L_2 * C_0 S_2 + S_{01} * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_{12} S_0 \\ n_z & u_z & a_z & H_S + L_0 - C_1 * (DA2/2 + H_3) + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^0\mathbf{p}_e = \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ L_1 * C_1 * S_0 + L_2 * C_0 * S_2 + S_{01} * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_{12} * S_0 \\ H_S + L_0 - C_1 * (DA2/2 + H_3) + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 * S_1 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix für rotatorische Achse 1

Anhand der Matrix 0A_1 kann ${}^0\mathbf{b}_1$ und ${}^0\mathbf{p}_1$ bestimmt werden:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_S - H_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^0\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_S - H_0 \end{pmatrix}$$

Beim Einsetzen des Richtungsvektors ${}^0\mathbf{b}_1$ und des Positionsvektors ${}^0\mathbf{p}_1$ ergibt sich folgende Jacobi-Matrix:

$$J_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ L_1 * C_1 * S_0 + L_2 * C_0 * S_2 + S_{01} * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_{12} * S_0 \\ H_S + L_0 - C_1 * (DA2/2 + H_3) + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 * S_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_S - H_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

+

$$J_2 = \begin{pmatrix} -L_1 * C_1 * S_0 - L_2 * C_0 * S_2 - S_{01} * (DA2/2 + H_3) - L_2 * C_{12} * S_0 \\ L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jakobi-Matrix für rotatorische Achse 2

Anhand der Matrix 0A_2 kann 0b_2 und 0p_2 bestimmt werden:

$${}^0A_2 = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & S_0 & 0 \\ S_0 & 0 & -C_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & H_s + L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0b_2 = \begin{pmatrix} S_0 \\ -C_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^0p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_s + L_0 \end{pmatrix}$$

Beim Einsetzen des Richtungsvektors 0b_2 und des Positionsvektors 0p_2 ergibt sich folgende Jacobi-Matrix:

$$J_3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ -C_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ L_1 * C_1 * S_0 + L_2 * C_0 * S_2 + S_{01} * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_{12} * S_0 - (H_s + L_0) \\ H_s + L_0 - C_1 * (DA2/2 + H_3) + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 * S_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} S_0 \\ -C_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -C_0 * (L_1 * S_1 - C_1) * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_2 * S_1 \\ -S_0 * (L_1 * S_1 - C_1) * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_2 * S_1 \\ L_1 * C_1 + (DA2 * S_1/2 + H_3 * S_1 + L_2 * C_{12}) \\ S_0 \\ -C_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jakobi-Matrix für rotatorische Achse 4 bzw. 3

Die Achse 4 wird zu **Achse 3**. Anhand der Matrix 0A_2 kann 0b_2 und 0p_2 bestimmt werden:

$${}^0A_3 = \begin{bmatrix} C_{01} & -S_0 & -C_0S_1 & L_1 * C_{01} \\ C_0 * S_0 & C_0 & -S_{01} & L_1 * C_1 * S_0 \\ S_1 & 0 & C_1 & H_S + L_0 + L_1 * S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0b_3 = \begin{pmatrix} -C_0S_1 \\ -S_{01} \\ C_1 \end{pmatrix}$$

$${}^0p_3 = \begin{bmatrix} L_1 * C_{01} \\ L_1 * C_1 * S_0 \\ H_S + L_0 + L_1 * S_1 \end{bmatrix}$$

Beim Einsetzen des Richtungsvektors 0b_3 und des Positionsvektors 0p_3 ergibt sich folgende Jacobi-Matrix:

$$J_4 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_0S_1 \\ -S_{01} \\ C_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} + C_0S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ L_1 * C_1S_0 + L_2 * C_0S_2 + S_{01} * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_{12}S_0 \\ H_S + L_0 - C_1 * (DA2/2 + H_3) + L_1 * S_1 + L_2 * C_2S_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} \\ L_1 * C_1 * S_0 \\ H_S + L_0 + L_1 * S_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C_0S_1 \\ -S_{01} \\ C_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -L_2 * C_2 * S_0 + C_{01} * S_2 \\ L_2 * C_{02} - C_1 * S_{02} \\ -L_2 * S_{12} \\ -C_0 * S_1 \\ -S_{01} \\ C_1 \end{pmatrix}$$

Jakobi-Matrix für Achse 5 bzw. 4

Achse 5 wird zu **Achse 4**. Anhand der Matrix 0A_4 kann 0b_4 und 0p_4 bestimmt werden:

$${}^0A_4 = \begin{bmatrix} C_{012} - S_{02} & C_2 * S_0 + C_{01} * S_2 & C_0 S_1 & L_1 * C_{01} - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ C_0 * S_2 + C_{12} * S_0 & C_1 * S_{02} - C_{02} & S_{01} & L_1 * C_1 * S_0 + L_2 * C_0 * S_2 + L_2 * C_{12} * S_0 \\ C_2 * S_1 & S_{12} & -C_1 & H_S + L_0 + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 * S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0b_4 = \begin{pmatrix} C_0 S_1 \\ S_{01} \\ -C_1 \end{pmatrix}$$

$${}^0p_4 = \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ L_1 * C_1 * S_0 + L_2 * C_0 * S_2 + L_2 * C_{12} * S_0 \\ H_S + L_0 + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 * S_1 \end{pmatrix}$$

Beim Einsetzen des Richtungsvektors 0b_4 und des Positionsvektors 0p_4 ergibt sich folgende Jacobi-Matrix:

$$J_5 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 S_1 \\ S_{01} \\ -C_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ L_1 * C_1 S_0 + L_2 * C_0 S_2 + S_{01} * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_{12} S_0 \\ H_S + L_0 - C_1 * (DA2/2 + H_3) + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 S_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_1 * C_{01} - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ L_1 * C_1 S_0 + L_2 * C_0 S_2 + L_2 * C_{12} S_0 \\ H_S + L_0 + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 S_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C_0 S_1 \\ S_{01} \\ -C_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_0 * S_1 \\ S_{01} \\ -C_1 \end{pmatrix}$$

Anhand der Matrix 0A_5 kann 0b_5 bestimmt werden:

$${}^0A_5 = \begin{bmatrix} S_4 C_2 S_0 + C_{01} S_2 - C_4 S_{02} - C_{012} & C_{42} S_0 + C_{01} S_2 + S_4 S_{02} - C_{012} & C_0 S_1 & L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} \\ C_{40} S_2 + C_{12} S_0 - S_4 C_{02} - C_1 S_{02} & -C_{402} - C_1 * S_{02} - S_4 * C_0 * S_2 + C_{12} * S_0 & S_{01} & L_1 * C_1 * S_0 + L_2 * C_0 * S_2 + S_{01} * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_{12} * S_0 \\ S_{124} + C_{24} S_1 & C_4 * S_{12} - C_2 * S_{14} & -C_1 & H_S + L_0 - C_1 * (DA2/2 + H_3) + L_1 * S_1 + L_2 * C_2 * S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0b_5 = \begin{pmatrix} C_0 S_1 \\ S_{01} \\ -C_1 \end{pmatrix}$$

Beim Einsetzen des Richtungsvektors 0b_5 ergibt sich folgende Jacobi-Matrix:

$$J_6 = \begin{pmatrix} C_0 S_1 \\ S_{01} \\ -C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus den Jacobi-Matrizen J_2 bis J_6 ergibt sich folgende Gesamtjacobimatrix:

$$J = \begin{pmatrix} -L_1 * C_1 * S_0 - L_2 * C_0 * S_2 - S_{01} * (DA2/2 + H_3) - L_2 * C_{12} * S_0 & -C_0 * (L_1 * S_1 - C_1) * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_2 * S_1 & -L_2 * C_2 * S_0 + C_{01} * S_2 & 0 & C_0 * S_1 \\ L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} & -S_0 * (L_1 * S_1 - C_1) * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_2 * S_1 & L_2 * C_{02} - C_1 * S_{02} & 0 & S_{01} \\ 0 & L_1 * C_1 + (DA2 * S_1)/2 + H_3 * S_1 + L_2 * C_{12} & -L_2 * S_{12} & 0 & -C_1 \\ 0 & S_0 & -C_0 * S_1 & C_0 * S_1 & 0 \\ 0 & -C_0 & -S_{01} & S_{01} & 0 \\ 1 & 0 & C_1 & -C_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Um tau berechnen zu können, wird die transponierte Jacobi-Gesamtmatrix und der Kraft-Momentenvektor multipliziert (siehe Formel 4)

$$J^T = \begin{pmatrix} -L_1 * C_1 * S_0 - L_2 * C_0 * S_2 - S_{01} * \left(\frac{DA2}{2} + H_3\right) - L_2 * C_{12} * S_0 & L_1 * C_{01} + C_0 * S_1 * (DA2/2 + H_3) - L_2 * S_{02} + L_2 * C_{012} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -C_0 * (L_1 * S_1 - C_1) * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_2 * S_1 & -S_0 * (L_1 * S_1 - C_1) * (DA2/2 + H_3) + L_2 * C_2 * S_1 & L_1 * C_1 + (DA2 * S_1)/2 + H_3 * S_1 + L_2 * C_{12} & S_0 & -C_0 & 0 \\ -L_2 * C_2 * S_0 + C_{01} * S_2 & L_2 * C_{02} - C_1 * S_{02} & L_2 * S_{12} & -C_0 * S_1 & -S_{01} & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_0 * S_1 & S_{01} & -C_1 \\ C_0 * S_1 & S_{01} & -C_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$KM = \begin{pmatrix} -50N \\ 25N \\ 75N \\ 30Nm \\ 0Nm \\ 100Nm \end{pmatrix}$$

$$\tau = J^T * KM \quad (4)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 114.92 \\ -21.42 \\ 127.86 \\ -100 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Singularität muss anstelle einer 6x5 Jacobi-Matrix eine 5x5 Jacobi-Matrix vorliegen, um die Determinante berechnen zu können. Hierfür muss eine Nullzeile entfernt werden. Daraus sollte sich eine 5x5 Jacobi-Matrix ergeben. Nach der Eingabe der Werte aus der Aufgabenstellung und aus der Rücktransformation wurde festgestellt, dass keine Nullzeile vorhanden ist. Aus diesem Grund konnte die Singularität nicht bestimmt werden. Die weitere Vorgehensweise hätte darin bestanden, die Determinante gleich 0 zu setzen. Danach sollten alle Werte bis auf die Winkel eingefügt werden. Anschließend hätten die Winkel nacheinander eingesetzt werden sollen, um herauszufinden wann die Singularität vorhanden ist.

Aufgabenteil 3

Aufgabe 3.1

Bestimmen Sie für den oben angegebenen SCARA Roboter die Bewegungsgleichung nach Lagrange. Die Erdbeschleunigung g weist entgegen der z_0 -Richtung.

Antwort:

Hierzu werden Matrizen aufgestellt, die Trägheitsmatrix und die Rotationsmatrix

Aufstellung der Trägheitsmatrizen iI_i in die Gliederschwerpunkte der einzelnen Achsglieder im jeweiligen Gliedkoordinatensystem $\{i\}$. Für die Ermittlung Rotationsmatrizen \mathbf{R} werden die Transformationsmatrizen 0T_1 bis 0T_7 benötigt. Dazu werden die Massenträgheitsmomente der Achsen in den Koordinaten des Basiskoordinatensystems $\{0\}$ ausgedrückt.

$${}^iI_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

Die Trägheitsmomente der einzelnen Glieder lautet die Transformationsbeziehung:

$$\text{Allgemein: } {}^0I_i = {}^0R_i \cdot {}^iI_i \cdot {}^0R_i^T$$

Achsglied 1:

$$\text{Trägheitsmatrix : } {}^1I_1 = \begin{bmatrix} 6,845550333 & 0 & 0 \\ 0 & 6,845550333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7489661197 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

$${}^0R_2 = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & S_0 \\ S_0 & 0 & -C_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0I_1 = {}^0R_2 \cdot {}^1I_1 \cdot {}^0R_2^T$$

$${}^0I_1 = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & S_0 \\ S_0 & 0 & -C_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6,845550333 & 0 & 0 \\ 0 & 6,845550333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7489661197 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

$$\cdot \begin{bmatrix} C_0 & S_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_0 & -C_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Achsglied 2:

Trägheitsmatrix : ${}^2I_2 = \begin{bmatrix} 0,030504 & 0 & 0 \\ 0 & 0,164052 & 0 \\ 0 & 0 & 0,164052 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$

$${}^0R_3 = \begin{bmatrix} C_0C_1 & -S_0 & -C_0S_1 \\ C_1S_0 & C_0 & -S_0S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

$${}^0I_2 = {}^0R_3 \cdot {}^2I_2 \cdot {}^0R_3^T$$

$${}^0I_2 = \begin{bmatrix} C_0C_1 & -S_0 & -C_0S_1 \\ C_1S_0 & C_0 & -S_0S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,030504 & 0 & 0 \\ 0 & 0,164052 & 0 \\ 0 & 0 & 0,164052 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

$$\cdot \begin{bmatrix} C_0C_1 & C_1S_0 & S_1 \\ -S_0 & C_0 & 0 \\ -C_0S_1 & -S_0S_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

Achsglied 3:

Trägheitsmatrix : ${}^3I_3 = \begin{bmatrix} 0,00527 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00527 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00775 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$

$${}^0R_4 = \begin{bmatrix} -C_0C_1 & S_0 & -C_0S_1 \\ -C_1S_0 & -C_0 & -S_0S_1 \\ -S_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

$${}^0I_3 = {}^0R_4 \cdot {}^3I_3 \cdot {}^0R_4^T$$

$${}^0I_3 = \begin{bmatrix} -C_0C_1 & S_0 & -C_0S_1 \\ -C_1S_0 & -C_0 & -S_0S_1 \\ -S_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,00527 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00527 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00775 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -C_0C_1 & -C_1S_0 & -S_1 \\ S_0 & -C_0 & 0 \\ -C_0S_1 & -S_0S_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

Achsglied 4:

Trägheitsmatrix : ${}^4I_4 = \begin{bmatrix} 0,1365885946 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2965506385 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2965506385 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} C_0C_1C_2 - S_0S_2 & C_2S_0 + C_0C_1S_2 & C_0S_1 \\ C_0S_2 + C_1C_2S_0 & C_1S_0S_2 - C_0C_2 & S_0S_1 \\ C_2S_1 & S_1S_2 & -C_1 \end{bmatrix}$$

$${}^0I_4 = {}^0R_5 \cdot {}^4I_4 \cdot {}^0R_5^T$$

$${}^0\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} C_0C_1C_2 - S_0S_2 & C_2S_0 + C_0C_1S_2 & C_0S_1 \\ C_0S_2 + C_1C_2S_0 & C_1S_0S_2 - C_0C_2 & S_0S_1 \\ C_2S_1 & S_1S_2 & -C_1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0,1365885946 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2965506385 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2965506385 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

$$\cdot \begin{bmatrix} C_0C_1C_2 - S_0S_2 & C_0S_2 + C_1C_2S_0 & C_2S_1 \\ C_2S_0 + C_0C_1S_2 & C_1S_0S_2 - C_0C_2 & S_1S_2 \\ C_0S_1 & 0S_0S_1 & -C_1 \end{bmatrix}$$

Achsglied 5:

Trägheitsmatrix : ${}^5\mathbf{I}_5 = \begin{bmatrix} 0,8215475276 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8215475276 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01963369745 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$

$${}^0\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} S_0S_2 - C_0C_1C_2 & C_2S_0 + C_0C_1S_2 & -C_0S_1 \\ -C_0S_2 - C_1C_2S_0 & C_1S_0S_2 - C_0C_2 & -S_0S_1 \\ -C_2S_1 & S_1S_2 & C_1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{I}_5 = {}^0\mathbf{R}_6 \cdot {}^5\mathbf{I}_5 \cdot {}^0\mathbf{R}_6^T$$

$${}^0\mathbf{I}_5 = \begin{bmatrix} S_0S_2 - C_0C_1C_2 & C_2S_0 + C_0C_1S_2 & -C_0S_1 \\ -C_0S_2 - C_1C_2S_0 & C_1S_0S_2 - C_0C_2 & -S_0S_1 \\ -C_2S_1 & S_1S_2 & C_1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0,8215475276 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8215475276 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01963369745 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

$$\cdot \begin{bmatrix} S_0S_2 - C_0C_1C_2 & -C_0S_2 - C_1C_2S_0 & -C_2S_1 \\ C_2S_0 + C_0C_1S_2 & C_1S_0S_2 - C_0C_2 & S_1S_2 \\ -C_0S_1 & -S_0S_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

Achsglied 6:

Trägheitsmatrix : ${}^6\mathbf{I}_6 = \begin{bmatrix} 24,07109731 & 0 & 0 \\ 0 & 24,07109731 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1042927698 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$

$${}^0\mathbf{R}_7 = \begin{bmatrix} C_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) + S_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) & C_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) - S_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) & -C_0S_1 \\ -C_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) - S_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & S_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) - C_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & -S_0S_1 \\ S_1S_2S_4 - C_2C_4S_1 & C_2S_1S_4 + C_4S_1S_2 & C_1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{I}_6 = {}^0\mathbf{R}_7 \cdot {}^6\mathbf{I}_6 \cdot {}^0\mathbf{R}_7^T$$

$${}^0\mathbf{I}_6 = \begin{bmatrix} C_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) + S_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) & C_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) - S_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) & -C_0S_1 \\ -C_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) - S_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & S_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) - C_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & -S_0S_1 \\ S_1S_2S_4 - C_2C_4S_1 & C_2S_1S_4 + C_4S_1S_2 & C_1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1,524569754 & 0 & 0 \\ 0 & 1,524569754 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1566751526 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

$$\cdot \begin{bmatrix} C_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) + S_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) & -C_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) - S_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & S_1S_2S_4 - C_2C_4S_1 \\ C_4(C_2S_0 + C_0C_1S_2) - S_4(S_0S_2 - C_0C_1C_2) & S_4(C_0S_2 + C_1C_2S_0) - C_4(C_0C_2 - C_1S_0S_2) & C_2S_1S_4 + C_4S_1S_2 \\ -C_0S_1 & -S_0S_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

Der nächste Schritt ist die Erstellung der translatorischen Unter-JACOBI-Matrizen.

Dazu werden die einzelnen Schwerpunkte der Achsen, bezogen auf das Basiskoordinatensystem $\{0\}$ benötigt.

Der Schwerpunktvektor ${}^0\mathbf{r}_{is}$ beschreibt den Ortsvektor zum Schwerpunkt S_i von Achse i in den Koordinaten von $\{0\}$.

Schwerpunkt Achsglied 1

$${}^0\mathbf{r}_{1s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_s + \frac{L_0}{2} \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt Achsglied 2:

$${}^0\mathbf{r}_{2s} = \begin{bmatrix} \frac{L_1C_0}{2} \\ \frac{L_1S_0}{2} \\ H_s + L_0 \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt Achsglied 3:

$${}^0\mathbf{r}_{3s} = \begin{bmatrix} L_1C_0C_1 - \frac{D_1C_0S_1}{2} \\ L_1C_1S_0 - \frac{D_1S_0S_1}{2} \\ H_s + L_0 + \frac{D_1C_1}{2} + L_1S_1 \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt Achsglied 4:

$${}^0\mathbf{r}_{4s} = \begin{bmatrix} L_1 C_0 C_1 + \frac{L_2 C_0 C_1}{2} - D_1 C_0 S_1 \\ L_1 C_1 S_0 + \frac{L_2 C_1 S_0}{2} - D_1 S_0 S_1 \\ H_s + L_0 + D_1 C_1 + L_1 S_1 + \frac{L_2 S_1}{2} \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt Achsglied 5:

$${}^0\mathbf{r}_{5s} = \begin{bmatrix} L_1 C_0 C_1 - D_1 C_0 S_1 + \frac{L_3 C_0 S_1}{2} - L_2 S_0 S_2 + L_2 C_0 C_1 C_2 \\ L_1 C_1 S_0 + L_2 C_0 S_2 - D_1 S_0 S_1 + \frac{L_3 S_0 S_1}{2} + L_2 C_1 C_2 S_0 \\ H_s + L_0 + D_1 C_1 - \frac{L_3 C_1}{2} + L_1 S_1 + L_2 C_2 S_1 \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt Achsglied 6:

$${}^0\mathbf{r}_{6s} = \begin{bmatrix} L_1 C_0 C_1 - D_1 C_0 S_1 - H_3 C_0 S_1 + C_0 S_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) - L_2 S_0 S_2 + L_2 C_0 C_1 C_2 \\ L_1 C_1 S_0 + L_2 C_0 S_2 - D_1 S_0 S_1 - H_3 S_0 S_1 + S_0 S_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) + L_2 C_1 C_2 S_0 \\ H_s + L_0 + D_1 C_1 - C_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) + H_3 C_1 + L_1 S_1 + L_2 C_2 S_1 \end{bmatrix}$$

Der allgemeine Aufbau der translatorischen Unter-JACOBI-Matrix von Glied i lautet
(Differenzieren des Schwerpunktvektors ${}^0\mathbf{r}_{is}$ nach $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, H_3$):

$$J_{Ti} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^0r_{is,x}}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial {}^0r_{is,x}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial {}^0r_{is,x}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial {}^0r_{is,x}}{\partial \varphi_4} & \frac{\partial {}^0r_{is,x}}{\partial H_3} \\ \frac{\partial {}^0r_{is,y}}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial {}^0r_{is,y}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial {}^0r_{is,y}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial {}^0r_{is,y}}{\partial \varphi_4} & \frac{\partial {}^0r_{is,y}}{\partial H_3} \\ \frac{\partial {}^0r_{is,z}}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial {}^0r_{is,z}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial {}^0r_{is,z}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial {}^0r_{is,z}}{\partial \varphi_4} & \frac{\partial {}^0r_{is,z}}{\partial H_3} \end{bmatrix}$$

Die Translatorischen Unter-JACOBI Matrizen ergeben sich somit zu:

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 1:

$$J_{T1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 2:

$$J_{T2} = \begin{bmatrix} \frac{-L_1 S_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_1 C_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 3:

$$J_{T3} = \begin{bmatrix} -L_1 S_0 C_1 + \frac{D_1 S_0 S_1}{2} & -L_1 C_0 S_1 - \frac{D_1 C_0 C_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ L_1 C_1 C_0 - \frac{D_1 C_0 S_1}{2} & -L_1 S_1 S_0 - \frac{D_1 S_0 C_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-D_1 S_1}{2} + L_1 C_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 4:

$$J_{T4} = \begin{bmatrix} -L_1 S_0 C_1 - \frac{L_2 S_0 C_1}{2} + D_1 S_0 S_1 & -L_1 C_0 S_1 - \frac{L_2 C_0 S_1}{2} - D_1 C_0 C_1 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 C_1 C_0 + \frac{L_2 C_1 C_0}{2} - D_1 C_0 S_1 & -L_1 S_1 S_0 - \frac{L_2 S_1 S_0}{2} - D_1 S_0 C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_1 S_1 + \frac{L_2 C_1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 5:

$$J_{r5} = \begin{bmatrix} -L_1 S_0 C_1 + D_1 S_0 S_1 - \frac{L_3 S_0 S_1}{2} - L_2 C_0 S_2 - L_2 S_0 C_1 C_2 & -L_1 C_0 S_1 - D_1 C_0 C_1 + \frac{L_3 C_0 C_1}{2} - L_2 C_0 S_1 C_2 & -L_2 S_0 C_2 - L_2 C_0 C_1 S_2 & 0 & 0 \\ L_1 C_1 C_0 - L_2 S_0 S_2 - D_1 C_0 S_1 + \frac{L_3 C_0 S_1}{2} + L_2 C_1 C_2 C_0 & -L_1 S_1 S_0 - D_1 S_0 C_1 + \frac{L_3 S_0 C_1}{2} - L_2 S_1 C_2 S_0 & L_2 C_0 C_2 - L_2 C_1 S_2 S_0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_1 S_1 + \frac{L_3 S_1}{2} + L_1 C_1 + L_2 C_2 C_1 & -L_2 S_2 S_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 6:

$$J_{r6} = \begin{bmatrix} -L_1 S_0 C_1 + D_1 S_0 S_1 + H_3 S_0 S_1 - S_0 S_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) - L_2 C_0 S_2 - L_2 S_0 C_1 C_2 & -L_1 C_0 S_1 - D_1 C_0 C_1 - H_3 C_0 C_1 + C_0 C_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) - L_2 C_0 S_1 C_2 & -L_2 S_0 C_2 - L_2 C_0 C_1 S_2 & 0 & -C_0 S_1 \\ L_1 C_1 S_0 - L_2 S_0 S_2 - D_1 C_0 S_1 - H_3 C_0 S_1 + C_0 S_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) + L_2 C_1 C_2 C_0 & -L_1 S_1 S_0 - D_1 S_0 C_1 - H_3 S_0 C_1 + S_0 C_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) - L_2 S_1 C_2 S_0 & L_2 C_0 C_2 - L_2 C_1 S_2 S_0 & 0 & -S_0 S_1 \\ 0 & -D_1 S_1 + S_1 \left(\frac{D_{A2}}{2} + L_3 \right) - H_3 S_1 + L_1 C_1 + L_2 C_2 C_1 & -L_2 S_2 S_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

Für die rotatorischen Unter-JACOBI-Matrizen werden für die einzelnen Achsen die Winkelgeschwindigkeiten benötigt. Anschließend können durch Differenzieren der Winkelgeschwindigkeitsvektoren die rotatorischen Unter-JACOBI-Matrizen \mathbf{J}_{Ri} gebildet werden.

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_4 \end{bmatrix}$$

$$J_{Ri} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \dot{\phi}_0} & \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \dot{\phi}_1} & \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \dot{\phi}_2} & \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \dot{\phi}_4} \\ \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \dot{\phi}_0} & \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \dot{\phi}_1} & \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \dot{\phi}_2} & \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \dot{\phi}_4} \\ \frac{\partial \omega_{i,3}}{\partial \dot{\phi}_0} & \frac{\partial \omega_{i,3}}{\partial \dot{\phi}_1} & \frac{\partial \omega_{i,3}}{\partial \dot{\phi}_2} & \frac{\partial \omega_{i,3}}{\partial \dot{\phi}_4} \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich folgende Matrizen:

Anmerkung: Letzte Spalte muss mit Nullen aufgefüllt werden.

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 1:

$$J_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 2:

$$J_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 3:

$$J_{R3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 4:

$$J_{R4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 5:

$$J_{R5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 6:

$$J_{R6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Für das Aufstellen der kinetischen Energie E_{Kin} des Roboters, muss die Roboterträgheitsmatrix \mathbf{M} bestimmt werden.

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (J_{Ti}^T \cdot m_i \cdot J_{Ti} + J_{Ri}^T \cdot {}^0I_i \cdot J_{Ri}) \quad \text{mit } n = \text{Achszahl (hier 6)}$$

$$m_1 = 95,86766332 \text{ kg}$$

$$m_2 = 11,16 \text{ kg}$$

$$m_3 = 4,65 \text{ kg}$$

$$m_4 = 10,95630438 \text{ kg}$$

$$m_5 = 24,54212181 \text{ kg}$$

$$m_6 = 63,20773927 \text{ kg}$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 1:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 6,85 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 2:

$$\mathbf{M}_2 = [\text{Matrix zu groß, siehe Matlab Datei}]$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 3:

$$\mathbf{M}_3 = [\text{Matrix zu groß, siehe Matlab Datei}]$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 4:

$$\mathbf{M}_4 = [\text{Matrix zu groß, siehe Matlab Datei}]$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 5:

$$\mathbf{M}_5 = [\text{Matrix zu groß, siehe Matlab Datei}]$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 6:

$$\mathbf{M}_6 = [\text{Matrix zu groß, siehe Matlab Datei}]$$

Gesamte Roboterträgheitsmatrix M:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_6 = [\text{Matrix zu groß, siehe Matlab Datei}]$$

Nachdem die Roboterträgheitsmatrix \mathbf{M} bestimmt wurde, kann die kinetische Energie E_{kin} und potenzielle Energie E_{pot} des Roboters berechnet werden.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{\varphi}_0 \quad \dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{\varphi}_4 \quad \dot{H}_3) \cdot \mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_0 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \\ \dot{H}_3 \end{pmatrix}$$

$$E_{pot} = - \sum_{i=1}^n m_i \cdot (0 \quad 0 \quad -g) \cdot \begin{pmatrix} {}^0r_{is,x} \\ {}^0r_{is,y} \\ {}^0r_{is,z} \end{pmatrix}$$

Dadurch erhält man die Lagrange-Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$

$$L = \dot{\varphi}_2 ((\dot{\varphi}_0 ((C_2 S_1 S_4 + C_4 S_1 S_2) * ((2407 * C_2 S_1 S_4 \dots \text{Ausdruck zu lang, siehe Matlab Datei})$$

Die Lagrange-Gleichungen Q_i ergibt sich aus dem Differenzieren nach $\dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_4, \dot{H}_3$ und anschließendem Differenzieren nach der Zeit t . Zusätzlich Differenzieren nach $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, H_3$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \right) = Q_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_0} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_0} \right) = \tau_0$$

$$\tau_0 = -\dot{\varphi}_1 ((\dot{\varphi}_0 ((2407 * S_1 S_2 S_4 \dots \text{Ausdruck zu lang, siehe Matlab Datei})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \right) = 1$$

$$\tau_1 = \dot{\varphi}_2 ((\dot{H}_3 (m_6 \dots \text{Ausdruck zu lang, siehe Matlab Datei})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \right) = \tau_2$$

$$\tau_2 = \dot{H}_3((\dot{\varphi}_1(m_6 \dots \dots \text{Ausdruck zu lang, siehe Matlab Datei}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_4} \right) = \tau_3$$

$$\tau_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{H}_3} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial H_3} \right) = 4$$

$$\tau_4 = \dot{\varphi}_0((\dot{H}_3(m_6 \dots \dots \text{Ausdruck zu lang, siehe Matlab Datei}$$

Aufgabe 3.2

Simulieren und zeichnen Sie grafisch mit Hilfe von MATLAB die Gelenkmomente /- kräfte als Zeitfunktionen für folgende zeitgleich überlagerten Bewegungsgleichungen: Folgende ruckbegrenzte, sich periodisch wiederholende Lagesollprofile für φ_0 ; φ_1 ; φ_2 ; φ_4 ; H_3 sind vorgegeben:

Tabelle 3: ruckbegrenzte Lagesollprofile für die Achsen 1 – 4

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_4	H_3
Ruck [rad/sec ³], [m/sec ³]	10000 rad/sec ³	5000 rad/sec ³	25000 rad/sec ³	50000 rad/sec ³	100000 m/sec ³
Zulässige Beschleunigung [rad/sec ²], [m/sec ²]	2π rad/sec ²	π rad/sec ²	4π rad/sec ²	7π rad/sec ²	0,8 m/sec ²
Zulässige Geschwindigkeit [rad/sec], [m/sec]	$0,5\pi$ rad/sec	$0,5\pi$ rad/sec	π rad/sec	2π rad/sec	100 m/min
Weg [Grad], [m]	$\pm 150^\circ$	$0 \leq \varphi_1 \leq 90^\circ$	$\pm 130^\circ$	$\pm 160^\circ$	$0,8 \text{ m} \leq H_3 \leq 1 \text{ m}$

Antwort:

Anhand der Abbildung 5 werden die $a_{\max,e}$ und $v_{\max,e}$ für die Winkel und für H_3 berechnet. Die Ergebnisse sind aus der Tabelle 4 zu entnehmen.

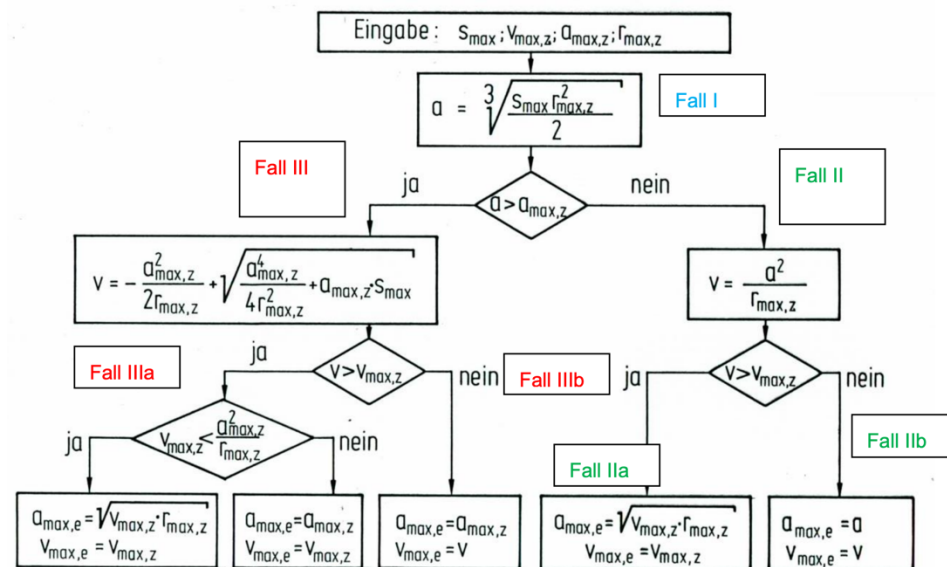


Abbildung 5: Ablauf zur Berechnung des Sollprofils

Tabelle 4: Ergebnisse für φ_0 nach Fall 3a Nein, φ_1 nach Fall 3a Nein, φ_2 nach Fall 3a Nein, φ_4 nach Fall 3a Nein und H3 nach Fall 2b

Variable	Für φ_0 nach Fall 3a Nein	Für φ_1 nach Fall 3a Nein	Für φ_2 nach Fall 3a Nein	Für φ_4 nach Fall 3a Nein	Für H3 nach Fall 2b
$a_{\max,e}$	6,283185	3,141593	12,566371	21,991149	0,800000
$v_{\max,e}$	1,570796	1,570796	3,141593	6,283185	0,894424

Die Zeiten wurden über die Formeln aus dem Skript zur Vorlesung „Servomechanismen“ Seite 39 und Seite 40 berechnet. Die Berechnung wurde über eine eigendefinierte Funktion in Python (siehe Python Dateiwerte) durchgeführt.

Tabelle 5: Berechnung über eigendefinierte Funktion on Python, Python Dateiwerte

Zeit	φ_0	φ_1	φ_2	φ_4	H3
t_1	0,0006283185307179586	0,0006283185307179586	0,0005026548245743669	0,000439822971502571	8e-06
t_2	0,25	0,5	0,25	0,2857142857142857	1.11803
t_3	0,250628318530718	0,500628318530718	0,25050265482457434	0,2861541086857883	1.118038
t_4	1,6679213298072226	1,0012554527089077	0,7232262685620077	0,44532321988834145	1.1180539773927767
t_5	1,6685496483379407	1,0018837712396258	0,723728923386582	0,445763042859844	1.1180619773927767
t_6	1,9179213298072229	1,501255452708908	0,9732262685620077	0,7310375056026271	2.2360839773927768
t_7	1,9185496483379407	1,5018837712396258	0,973728923386582	0,7314773285741297	2.2360919773927765

Anhand der Tabelle 5 konnten die Profile für Ruck, Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg erstellt werden (siehe Python Code, siehe Abbildung 6).

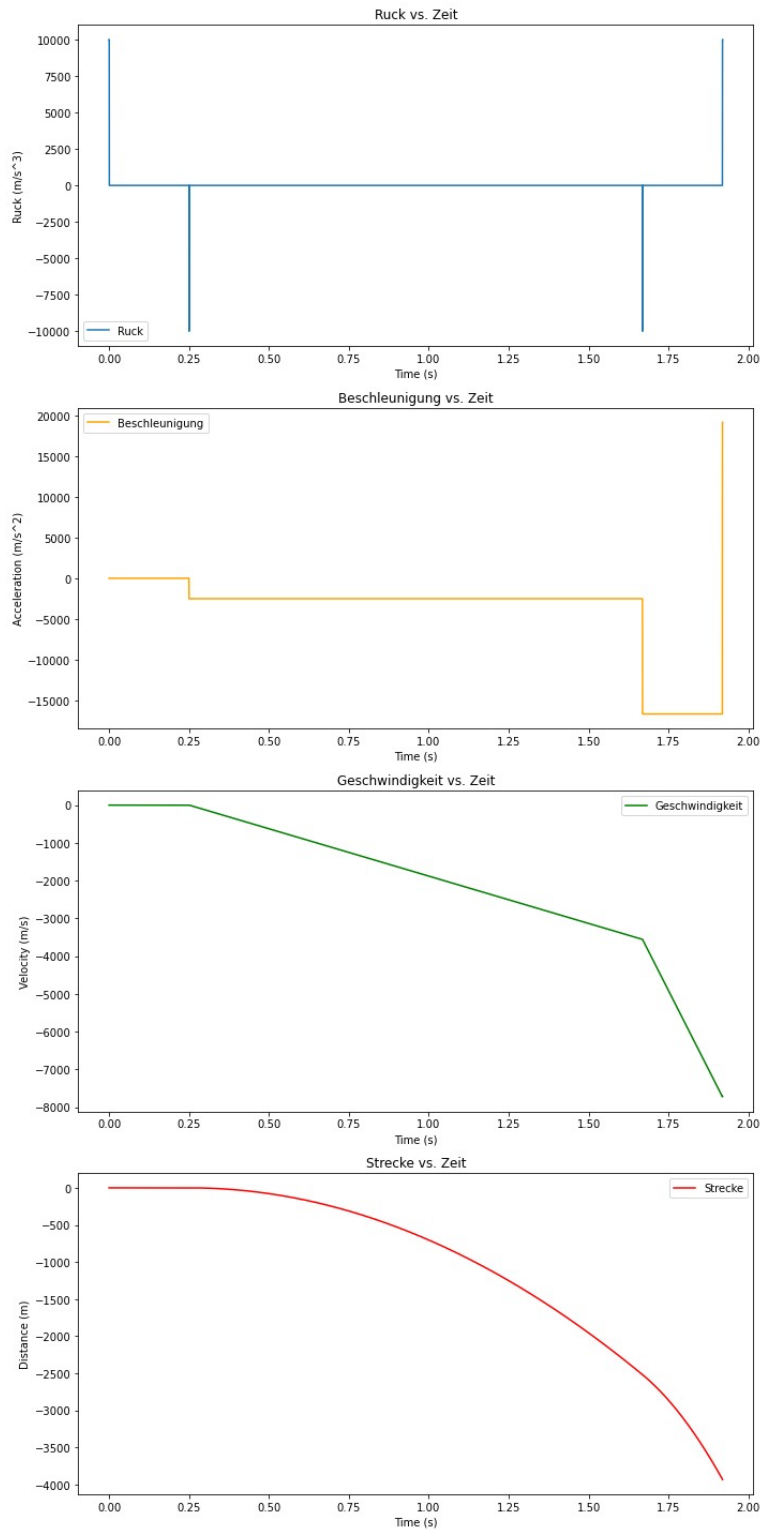


Abbildung 6: Profile für Ruck, Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg für φ_0

Die Umsetzung erfolgte in Python (siehe Python Datei). Die Darstellung des Ruckprofils ist plausibel. Die Profile der Geschwindigkeit, Beschleunigung und des Weges scheinen an dieser Stelle fragwürdig. Es würde also Sinn machen, einen weiteren Blick in das Python Skript zu werfen, um dies falls nötig zu korrigieren oder dementsprechend anzupassen. Die Profile der anderen Winkel und H_3 ist ebenso dem Python Skript und der daraus resultierenden Plots zu entnehmen.

Nach der Berechnung der Profile kann mithilfe der Lagrange-Gleichung und der daraus resultierenden τ -Gleichungen für die Winkel φ und H_3 die Simulation des Roboters durchgeführt werden. Dazu sind folgende Schritte erforderlich:

Die Geschwindigkeit sowie die Strecke aus der Berechnung der Lagesollprofile werden in einer Excel-Datei mithilfe eines passenden Python-Skripts gespeichert. Anschließend werden diese Daten sowie die τ -Gleichungen in Python importiert. Für jeden Zeitschritt Δt werden die Werte in die τ -Gleichungen eingesetzt. Dabei werden die Variablen mit p (z. B. $\varphi_0 p$) durch die Geschwindigkeit und die Variablen ohne p durch den Weg ersetzt. Dies ermöglicht es, mithilfe der τ -Gleichungen die Kräfte an jedem Zeitschritt t zu berechnen. Schließlich können die berechneten Kräfte über der Zeit in einem Plot dargestellt werden, um die Simulation des Roboters zu visualisieren. Durch diese Schritte wird eine detaillierte und nachvollziehbare Simulation des Roboters ermöglicht.

Es ist wichtig zu erwähnen, dass die Berechnung der Kräfte in jedem Zeitschritt ttt einen erheblichen Rechenaufwand erfordert. Leider war es uns aufgrund der hohen Rechenanforderungen nicht möglich, die Kräfte zu berechnen und zu plotten. Der Übersicht ist in Tabelle 6 zu entnehmen.

Tabelle 6: Übersicht der Lagesoll und tau-Simulation

Dateiname	Programmiersprache	Beschreibung
Lagesoll Fluss	Matlab	Flussdiagramm, um auf amaxe und vmax zu schließen
Berechnung der Zeiten für Lagesoll	Python	Berechnung der Zeitschritte für das Lagesoll Profil
Lagesoll phi0	Python	Berechnung der Profile für φ_0 sowie abspeichern der Daten in einer Excel Datei
Lagesoll phi1	Python	Berechnung der Profile für φ_1 sowie abspeichern der Daten in einer Excel Datei
Lagesoll phi2	Python	Berechnung der Profile für φ_2 sowie abspeichern der Daten in einer Excel Datei
Lagesoll phi4	Python	Berechnung der Profile für φ_4 sowie abspeichern der Daten in einer Excel Datei
Lagesoll H3	Python	Berechnung der Profile für H_3 sowie abspeichern der Daten in einer Excel Datei
_Taus_Simulation	Python	Simulation des Roboters, Importieren der Tau-Gleichungen und einsetzen der Profile, um auf die Kräfte zu schließen → hier zu intensiver Rechenaufwand.

