Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen, Roboter und Bewegungsachsen

Aufgabe Hausarbeit

vorgelegt von

Anmar Al-Masoudi

Studiengang

Advanced Precision Engineering

Semester

Sommersemester 2018

Dozent

Prof. Dr.-Ing. Gunter Ketterer

Eingereicht am 13. Juli 2018

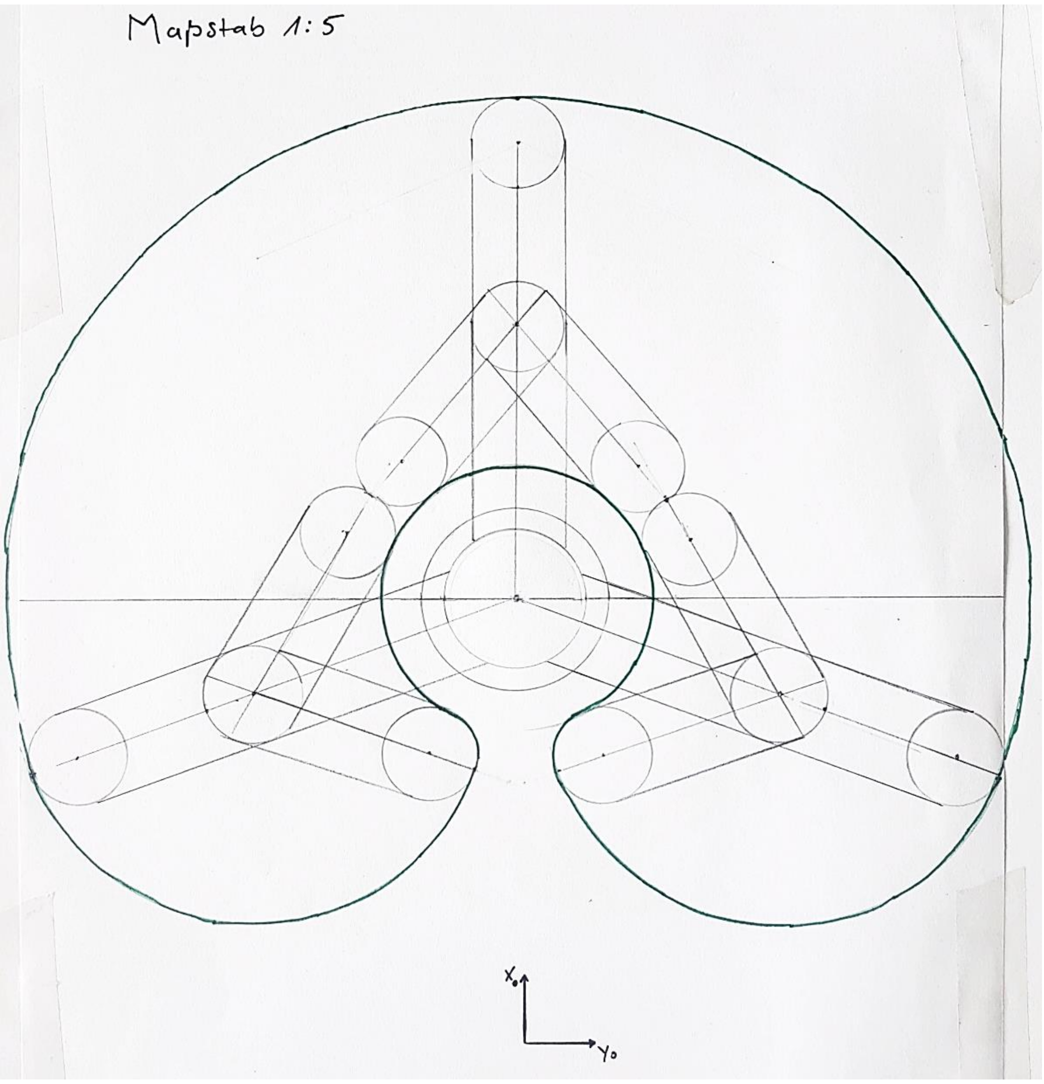
Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

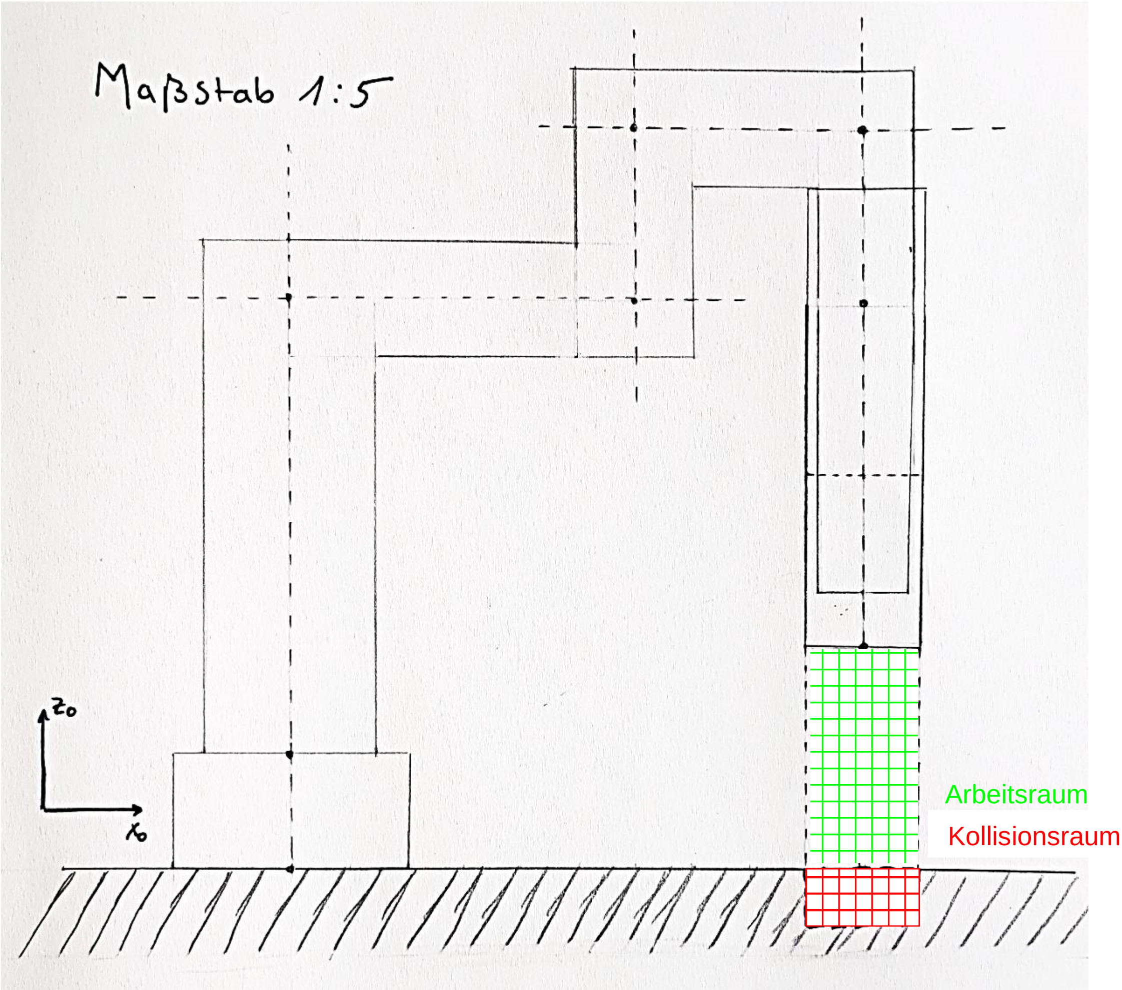
a) Bestimmung des Arbeitsraumes

Bestimmen Sie zunächst zeichnerisch den Arbeitsraum in der x0-z0 sowie x0-y0 Ebene und prüfen Sie mögliche Kollisionsräume, die Sie entsprechend grafisch kennzeichnen.

Darstellung des Arbeitsraums in der $x_0 - y_0$ Ebene im Maßstab 1:5

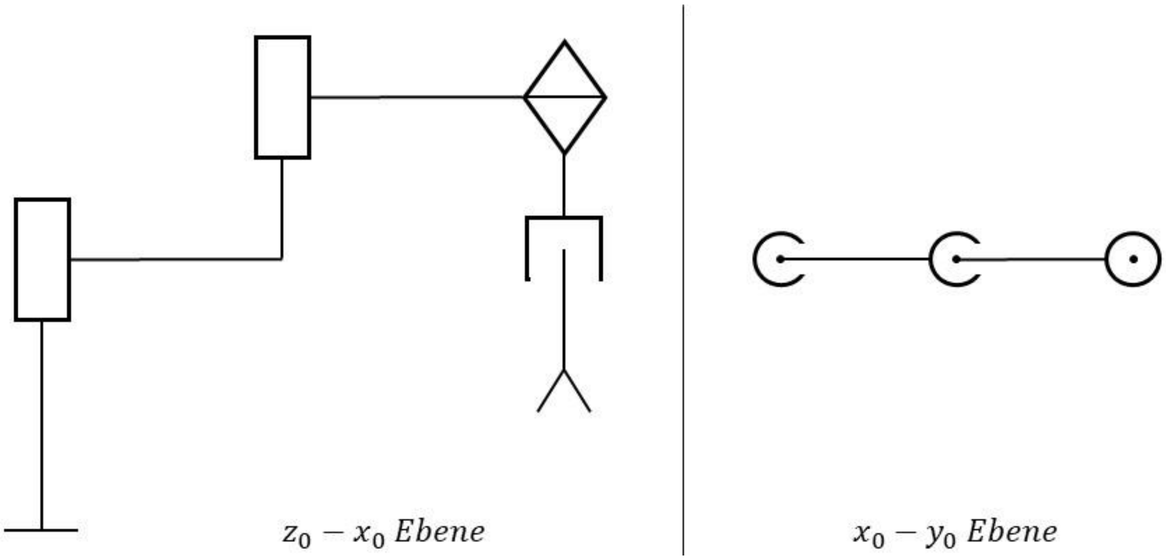


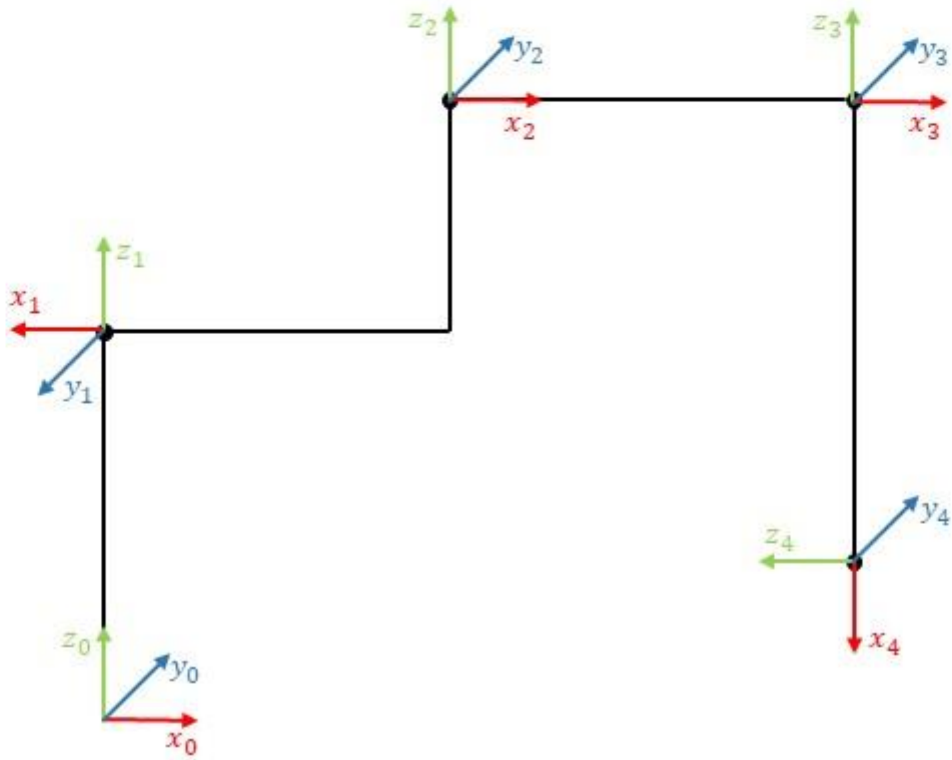
Darstellung des Arbeitsraums in der $z_0 - x_0$ Ebene im Maßstab 1:5



b) Schematische Ersatzschaltbild des Roboters in Symboldarstellung

Zeichnen Sie das schematische Ersatzbild des Roboters in Symboldarstellung mit den entsprechenden Koordinatensystemen nach Denavit Hartenberg in den mit „●“ gekennzeichneten Gelenkpunkten. (Hinweis: Gehen Sie dabei gemäß der Vorgehensweise nach Denavit Hartenberg wie im Skript von APE-„Dynamische Auslegung von Werkzeugmaschinen und Roboterachsen“ beschrieben vor.





c) Denavit-Hartenberg Parameter

Bestimmen Sie die DH-Paramter in allen 4 Achsgelenkpunkten und leiten Sie daraus die Einzeltransformationsmatrizen ${}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}$, ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}$, ${}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{3}}$ *und* ${}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{4}}$ *in Abhängigkeit der Achsvariablen* $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$ *und H4 ab.*

Falls notwendig sind ebenfalls die angegebenen Robotergrößen (z.B. HS, L0, L1, L2, D1, etc.) ohne Werte mit zu verwenden.

AKS / Trans-formationen	$\boldsymbol{\alpha}$	**L**	**D**	$\boldsymbol{\varphi}$
${}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}$	$0°$	0	$L_0 + H_S$	$180°$
${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}$	$0°$	L_1	D_1	$180° + \varphi_2$
${}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{3}}$	$0°$	L_2	0	φ_2
${}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{4}}$	$180°$	0	$-D_1 - H_4$	$180° + \varphi_3$

d) Bestimmung der Gesamttransformation $\boldsymbol{T} = {}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{4}}$

Bestimmen Sie die Gesamttransformation $\boldsymbol{T} = {}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{4}}$ *in allgemeiner Darstellung in Abhängigkeit der Achsvariablen und geometrischen Robotergrößen (ohne Werte).*

Mithilfe der homogenen Transformationsmatrix (DH-Matrix) können die Einzeltransformationen bestimmt werden und anschließen die Gesamtmultiplikation bestimmt werden.

$$\overline{A} = rot(\varphi_Z) \cdot trans(D_Z) \cdot trans(L_X) \cdot rot(\alpha_x) = \begin{bmatrix} C_\varphi & -C_\alpha \cdot S_\varphi & S_\alpha \cdot S_\varphi & L \cdot C_\varphi \\ S_\varphi & C_\alpha \cdot C_\varphi & -S_\alpha \cdot C_\varphi & L \cdot S_\varphi \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{DH}$$

mit $C_\varphi = \cos(\varphi)\,;\ C_\alpha = \cos(\alpha);\ S_\varphi = \sin(\varphi)\,;\ S_\alpha = \sin(\alpha)$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

Daraus ergeben sich folgende Einzeltransformationen

$$^{0}A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_S + L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{1}A_2 = \begin{bmatrix} -C_1 & S_1 & 0 & -L_1 \cdot C_1 \\ -S_1 & -C_1 & 0 & -L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}A_3 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{3}A_4 = \begin{bmatrix} -C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -D_1 - H_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Durch die Multiplikation der Einzeltransformationen erhält man die Gesamttransformationsmatrix T

$$T = {}^{0}A_4 = {}^{0}A_1 \cdot {}^{1}A_2 \cdot {}^{2}A_3 \cdot {}^{3}A_4$$

$$T = {}^{0}A_4 = \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 & L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 & L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & -1 & H_S - H_4 + L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Bestimmung der Variablen durch Rücktransformation

Bestimmen Sie die Achsvariablen $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$ und H_4 mit Hilfe der Rückwärtstransformation in Abhängigkeit der notwendigen geometrischen Robotergrößen (z.B. H_S, L_0, L_1, L_2, D_1, etc.) und einer allgemein angenommenen TCP-Stellung und TCP-Orientierung (TCP-Orientierungsvektoren **n**, **u**, **a** sowie dem TCP-Stellungsvektor **p** bezogen auf das Basiskoordinatensystem).

Die Roboterstellung lautet:

$$^{0}A_{4\,best} = \begin{bmatrix} n_x & u_x & a_x & p_x \\ n_y & u_y & a_y & p_y \\ n_z & u_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $^{0}A_{4\,best} = {}^{0}A_1 \cdot {}^{1}A_2 \cdot {}^{2}A_3 \cdot {}^{3}A_4$

Durch die bestimmte Roboterstellung lassen sich mit Hilfe der Rückwärtstransformationen folgende Achsvariablen bestimmen: $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; H_4$

$$\begin{bmatrix} n_x & u_x & a_x & p_x \\ n_y & u_y & a_y & p_y \\ n_z & u_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 & L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 & L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & -1 & H_S - H_4 + L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$p_x = L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1$

$p_y = L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1$

$Index\ 1, 2, 3, \ldots = \varphi_{1,2,3,\ldots}\, ; C_{123} = \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$

Bestimmung der Achsvariable φ_2

$$C_2 = \frac{{p_x}^2 + {p_y}^2 - {L_2}^2 - {L_1}^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}$$

$$\boldsymbol{\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - C_2^2}}{C_2}\right)}$$

Bestimmung der Achsvariable φ_1

$$S_1 = \frac{p_y \cdot (L_2 \cdot C_2 + L_1) - p_x \cdot L_2 \cdot S_2}{(L_2 \cdot C_2 + L_1)^2 + {L_2}^2 \cdot {S_2}^2}$$

$$c_1 = \frac{p_x \cdot (L_2 \cdot C_2 + L_1) + p_y \cdot L_2 \cdot S_2}{(L_2 \cdot C_2 + L_1)^2 + {L_2}^2 \cdot {S_2}^2}$$

$$\boldsymbol{\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{p_y \cdot (L_2 \cdot C_2 + L_1) - p_x \cdot L_2 \cdot S_2}{p_x \cdot (L_2 \cdot C_2 + L_1) + p_y \cdot L_2 \cdot S_2}\right)}$$

Um H_4 zu bestimmen, wird durch die Multiplikation von der Inverse ${}^0A_1$ der Ausdruck auf die linke Seite der Gleichung gebraucht

$${}^0A_{4\,best} = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \qquad | \cdot \left({}^0A_1\right)^{-1}$$

$${}^0A_{4\,best} \cdot \left({}^0A_1\right)^{-1} = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4$$

$$\begin{bmatrix} -n_x & -u_x & -a_x & -p_x \\ -n_y & -u_y & -a_y & -p_y \\ n_z & u_z & a_z & p_z - L_0 - H_S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{123} & S_{123} & 0 & -L_2 \cdot C_{12} - L_1 \cdot C_1 \\ S_{123} & -C_{123} & 0 & -L_2 \cdot S_{12} - L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & -1 & -H_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-H_4 = p_z - L_0 - H_S$$

$$\boldsymbol{H_4 = H_S + L_0 - p_z}$$

Bestimmung von φ_3 durch Multiplikation der Inversen von ${}^1A_2$ und anschließender Multiplikation der neuen Matrix mit der Inversen von ${}^2A_3$

$${}^0A_{4\,best} \cdot \left({}^0A_1\right)^{-1} = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \qquad | \cdot \left({}^1A_2\right)^{-1}$$

$${}^0A_{4\,best} \cdot \left({}^0A_1\right)^{-1} \cdot \left({}^1A_2\right)^{-1} = {}^2A_3 \cdot {}^3A_4$$

$$\begin{bmatrix} n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12} & u_x \cdot C_{12} + u_y \cdot S_{12} & a_x \cdot C_{12} + a_y \cdot S_1 & L_1 + p_x \cdot C_{12} + p_y \cdot S_{12} - L_2 \cdot C_1 \\ n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12} & u_y \cdot C_{12} - u_x \cdot S_{12} & a_y \cdot C_{12} - a_x \cdot S_1 & p_y \cdot C_{12} - p_x \cdot S_{12} + L_2 \cdot S_{12} \\ n_z & u_z & a_z & p_z - L_0 - H_S - D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -D_1 - H_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_{4\,best} \cdot \left({}^0A_1\right)^{-1} \cdot \left({}^1A_2\right)^{-1} = {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \qquad | \cdot \left({}^2A_3\right)^{-1}$$

$${}^0A_{4\,best} \cdot \left({}^0A_1\right)^{-1} \cdot \left({}^1A_2\right)^{-1} \cdot \left({}^2A_3\right)^{-1} = {}^3A_4$$

$$-C_3 = n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12}$$

$$-S_3 = n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12}$$

$$\frac{-C_3}{-S_3} = \frac{n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12}}{n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{T_3} = \frac{n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12}}{n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12}}$$

$$T_3 = \frac{n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12}}{n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12}}$$

$$\boldsymbol{\varphi_3 = tan^{-1}\left(\frac{n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12}}{n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12}}\right)}$$

f) Auswirkung von Temperaturveränderungen auf Lage und Orientierung

Während der Produktion verändert sich die Temperatur von morgens T0=20°C auf abends T1=30°C.

Die Endeffektor-Stellung liegt zu Arbeitsbeginn bei:

- *den auf das 0. Koordinatensystem bezogenen Positionskoordinaten*
  p = (400mm, 100mm, 50mm)

und

- *den im 0. Koordinatensystem beschriebenen Greiferorientierung mit den 3 Orientierungsvektoren **n**, **u** und **a** mit:*

$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{cos}(\mathbf{30}°);\ \boldsymbol{sin}(\mathbf{30}°);\ \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$,
$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{cos}(\mathbf{60}°);\ -\boldsymbol{sin}(\mathbf{60}°);\ \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$ ***und***
$\boldsymbol{a} = (\mathbf{0};\ \mathbf{0};\ -\mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}$:

Hierbei gilt für das temperaturabhängige Achsverhalten in der Länge:
$\Delta L = L \cdot e^{\alpha \cdot \Delta T}$ *mit dem Temperaturkoeffizienten* $\alpha_{ALU} = 23{,}1 \cdot 10^{-6}\, K^{-1}$

Welche Auswirkung hat dies auf die Lage und Orientierung (d.h. die Positionier- und Winkelabweichungen) des End-Effektors gegenüber der Stellungssituation bei Produktionsbeginn.

Welche Achskorrekturen sind am Abend steuerungstechnisch in den Achsvariablen $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$ *und* H_4 *vorzunehmen, damit die gleiche Stellung wie bei Arbeitsbeginn erreicht werden kann.*

Eine Temperaturveränderung (hier $T_0 = 20°C\ auf\ T_1 = 30°C$) bewirkt eine Ausdehnung der Materialien/Achsen des Roboters und folglich eine Verschiebung des TCPs. Um diese Verschiebung auszugleichen und die Position des TCPs zu gewährleisten, müssen die Achsstellungen nachjustiert werden.

Die Achsstellungen für die Ausgangstemperatur ergibt sich aus dem Einsetzten der gegebenen Zahlenwerte aus der Aufgabenstellung:

$$\varphi_1 = tan^{-1}\left(\frac{p_y \cdot (L_2 \cdot C_2 + L_1) - p_x \cdot L_2 \cdot S_2}{p_x \cdot (L_2 \cdot C_2 + L_1) + p_y \cdot L_2 \cdot S_2}\right) \quad = \mathbf{-13,1787°}$$

$$\varphi_2 = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - C_2^2}}{C_2}\right) \quad = \mathbf{70,5288°}$$

$$\varphi_3 = tan^{-1}\left(\frac{n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12}}{n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12}}\right) \quad = \mathbf{-27,3501°}$$

$$H_4 = H_S + L_0 - p_z \quad = \mathbf{450mm}$$

Für die Achslängen L und H ergeben sich folgende Werte ($f$ür L_0, L_1, L_2 und H_S mit $\alpha_{ALU} = 23,1 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$) und Differenzen:

$L_{0\,T30} = L_0 \cdot e^{23,1 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 10K} = 400,0924\ mm$ $\quad\quad$ $\Delta L_0 = L_{0\,T30} - L_0 = 0,0924\ mm$

$L_{1\,T30} = L_1 \cdot e^{23,1 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 10K} = 300,0693\ mm$ $\quad\quad$ $\Delta L_1 = L_{1\,T30} - L_1 = 0,0693\ mm$

$L_{2\,T30} = L_2 \cdot e^{23,1 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 10K} = 200,0462\ mm$ $\quad\quad$ $\Delta L_2 = L_{2\,T30} - L_2 = 0,0462\ mm$

$H_{S\,T30} = H_S \cdot e^{23,1 \cdot 10^{-6} K^{-1} \cdot 10K} = 100,0231\ mm$ $\quad\quad$ $\Delta H_S = H_{S\,T30} - H_S = 0,0231\ mm$

Mit den neuen Achslängen können nun die neuen Winkel berechnet werden.

$$\varphi_{1\,T30} = tan^{-1}\left(\frac{p_y \cdot (L_{2\,T30} \cdot C_2 + L_{1\,T30}) - p_x \cdot L_{2\,T30} \cdot S_2}{p_x \cdot (L_{2\,T30} \cdot C_2 + L_{1\,T30}) + p_y \cdot L_{2\,T30} \cdot S_2}\right) \quad = \mathbf{-13,1932°}$$

$$\varphi_{2\,T30} = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - C_2^2}}{C_2}\right) \quad = \mathbf{70,5685°}$$

$$\varphi_{3\,T30} = tan^{-1}\left(\frac{n_y \cdot C_{12} - n_x \cdot S_{12}}{n_x \cdot C_{12} + n_y \cdot S_{12}}\right) \quad = \mathbf{-27,3754°}$$

$$H_{4\,T30} = H_{S\,T30} + L_{0\,T30} - p_z \quad = \mathbf{450,1155mm}$$

Mit folgenden Winkeldifferenzen $\Delta\varphi$ und Längendifferenz ΔH_4

$\Delta\varphi_1 = \varphi_{1\,T30} - \varphi_1 = -0,0145°$ $\quad\quad$ $\Delta\varphi_3 = \varphi_{3\,T30} - \varphi_3 = 0,0252°$

$\Delta\varphi_2 = \varphi_{2\,T30} - \varphi_2 = 0,0397°$ $\quad\quad$ $\Delta H_4 = H_{4\,T30} - H_4 = 0,1155mm$

Aufgabe 2: JACOBI Matrix

Bestimmen Sie die JACOBI Matrix und berechnen Sie jeweils die 3 Achsmomente in [Nm] in den Antriebsachsen 1, 2, und 3 sowie die benötigte Verschiebekraft in [N] in der Achse 4.

Hierbei wird als Einpresskraft eine im TCP-Koordinatensystem definierte Montagekraft am TCP mit $f_{TCP} = \left({}^{TCP}f_x, {}^{TCP}f_y, {}^{TCP}f_z\right)^T = (-50N;\ 25N;\ 100N)^T$ *und ein Montage-Drehmoment* $M_{TCP} = \left({}^{TCP}M_x, {}^{TCP}M_y, {}^{TCP}M_z\right) = (0Nm, 0\ Nm, 10Nm)$ *vorgesehen.*

*HINWEIS: Umrechnung auf das 0.-Koordinatensystem durch Verwendung der Gesamtrotationsmatrix von **T**.*

Bestimmen Sie ebenfalls die Positionen, an denen Singularitäten auftreten.

Bestimmung durch geometrische Jacobi-Matrix

Für die Berechnung der Spaltenvektoren **J** muss der Gelenktyp bekannt sein.

Rotatorische Achsen:

$$\boldsymbol{J}_{i+1} = \begin{pmatrix} {}^0b_i \times ({}^0p_e - {}^0p_i) \\ {}^0b_i \end{pmatrix}$$

$mit\ i = 0,1,2, \dots$

Translatorische Achsen:

$$\boldsymbol{J}_{i+1} = \begin{pmatrix} {}^0b_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$mit\ i = 0,1,2, \dots$

Der Positionsvektor ${}^0p_e$ lässt sich durch die 4. Spalte des Gesamttransformationsvektor T auslesen.

$$T = {}^0A_4 = \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 & \boxed{\begin{matrix} L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ H_S - H_4 + L_0 \end{matrix}} \\ -S_{123} & C_{123} & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0p_e = \begin{bmatrix} L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ H_S - H_4 + L_0 \end{bmatrix}$$

Die Vektoren ${}^0b_i$ und ${}^0p_i$ ergeben sich für jede Bewegungsachse aus der Vorwärtstransformation der DH-Matrizen. Aus der Einzeltransformationsmatrix ${}^0A_i$ ergibt sich ${}^0b_i$ aus der dritten Spalte und ${}^0p_i$ aus der vierten Spalte.

Betrachtung der einzelnen Achsen:

Achse 0	Achse 1	Achse 2	Achse 3	Achse 4
keine translatorische / rotatorische Achse	rotatorische Achse	rotatorische Achse	rotatorische Achse	translatorische Achse

Für rotatorische Achsen gilt:

$$\boldsymbol{J}_{i+1} = \begin{pmatrix} {}^0b_i \times ({}^0p_e - {}^0p_i) \\ {}^0b_i \end{pmatrix}$$
$$mit\ i = 0,1,2, \dots$$

Für translatorische Achsen gilt:

$$\boldsymbol{J}_{i+1} = \begin{pmatrix} {}^0b_i \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$mit\ i = 0,1,2, \dots$$

<u>Achse 0</u>:

Diese Achse ist weder translatorisch, noch rotatorisch → Start in **Achse 1**.

<u>Achse 1:</u>

$$\boldsymbol{J}_1 = \begin{pmatrix} {}^0b_0 \times ({}^0p_e - {}^0p_0) \\ {}^0b_0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Richtungsvektors ${}^0b_0$ aus der 3. Spalte der Transformationsmatrix ${}^0T_1 = {}^0A_1$.

Bestimmung des Positionsvektors ${}^0p_0$ aus der 4. Spalte der Transformationsmatrix ${}^0T_1 = {}^0A_1$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & {}^0b_0 & {}^0p_0 \end{array} \\ {}^0T_1 = & \begin{bmatrix} -1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & -1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{H_S + L_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad {}^0b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_S + L_0 \end{bmatrix}$$

Jacobi Spaltenvektor:

$$\boldsymbol{J}_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot c_1 \\ L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ -H_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 \cdot S_1 - L_2 \cdot S_{12} \\ L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Achse 2:</u>

$$\boldsymbol{J}_2 = \begin{pmatrix} {}^0b_1 \times ({}^0p_e - {}^0p_1) \\ {}^0b_1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Richtungsvektors ${}^0b_1$ aus der 3. Spalte der Transformationsmatrix ${}^0T_2 = {}^0A_2$.
Bestimmung des Positionsvektors ${}^0p_1$ aus der 4. Spalte der Transformationsmatrix ${}^0T_2 = {}^0A_2$.

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & {}^0b_1 & {}^0p_1 \end{array} \\ {}^0T_2 = {}^0A_2 = & \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}L_1 \cdot C_1\\ L_1 \cdot S_1\\ D_1 + H_S + L_0\end{matrix}} \\ S_1 & C_1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad {}^0b_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad {}^0p_1 = \begin{bmatrix} L_1 \cdot C_1 \\ L_1 \cdot S_1 \\ D_1 + H_S + L_0 \end{bmatrix}
$$

Jacobi-Spaltenvektor:

$$
\boldsymbol{J_2} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_2 \cdot C_{12} \\ L_2 \cdot S_{12} \\ -H_4 - D_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_2 \cdot S_{12} \\ L_2 \cdot C_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Achse 3:

$$
\boldsymbol{J_3} = \begin{pmatrix} {}^0b_2 \times ({}^0p_e - {}^0p_2) \\ {}^0b_2 \end{pmatrix}
$$

Bestimmung des Richtungsvektors ${}^0b_2$ aus der 3. Spalte der Transformationsmatrix ${}^0T_3 = {}^0A_3$.
Bestimmung des Positionsvektors ${}^0p_2$ aus der 4. Spalte der Transformationsmatrix ${}^0T_2 = {}^0A_3$

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & {}^0b_2 & {}^0p_2 \end{array} \\ {}^0T_3 = {}^0A_3 = & \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1\\ L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1\\ D_1 + H_S + L_0\end{matrix}} \\ S_{12} & C_{12} & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad {}^0b_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad {}^0p_2 = \begin{bmatrix} L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ D_1 + H_S + L_0 \end{bmatrix}
$$

Jacobi-Spaltenvektor:

$$
\boldsymbol{J_3} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_4 - D_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Achse 4:

$$\boldsymbol{J_4} = \begin{pmatrix} {}^0b_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Richtungsvektors ${}^0b_3$ aus der 3. Spalte der Transformationsmatrix ${}^0T_4 = {}^0A_4$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phantom{-C_{123}} & \phantom{-S_{123}} & {}^0b_3 & \phantom{L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1} \end{array} \\ {}^0T_4 = {}^0A_4 = & \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ H_S - H_4 - L_0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 & L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 & L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & -1 & H_S - H_4 - L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jacobi-Spaltenvektor:

$$\boldsymbol{J_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

JACOBI Matrix

Zusammenfügen der einzelnen Jacobi-Spaltenvektoren für JACOBI-Matrix.

$$\boldsymbol{J} = [\boldsymbol{J_1} \quad \boldsymbol{J_2} \quad \boldsymbol{J_3} \quad \boldsymbol{J_4}] = \begin{bmatrix} -L_1 \cdot S_1 - L_2 \cdot S_{12} & -L_2 \cdot S_{12} & 0 & 0 \\ L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_{12} & L_2 \cdot C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verschiebkräfte und Achsmomente des SCARA Roboters

Für die Bestimmung der Achsmomente und Verschiebkräfte werden die transponierte JACOBI Matrix und die gegebenen Kraftvektoren benötigt.

Montagekraft: $f_{TCP} = \left({}^{TCP}f_x, {}^{TCP}f_y, {}^{TCP}f_z\right)^T = (-50N;\ 25N;\ 100N)^T$

Montagemomente: $M_{TCP} = \left({}^{TCP}M_x, {}^{TCP}M_y, {}^{TCP}M_z\right) = (0Nm, 0\ Nm, 10Nm)$

$$\tau = J^T \cdot {}^0F_4 \qquad \text{mit } {}^0F_4 = \begin{bmatrix} {}^{TCP}f_x \\ {}^{TCP}f_y \\ {}^{TCP}f_z \\ {}^{TCP}M_x \\ {}^{TCP}M_y \\ {}^{TCP}M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50N \\ 25N \\ 100N \\ 0Nm \\ 0Nm \\ 10Nm \end{bmatrix}$$

$$\tau = J^T \cdot {}^0F_4 = \begin{bmatrix} -L_1 \cdot S_1 - L_2 \cdot S_{12} & L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -L_2 \cdot S_{12} & L_2 \cdot C_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50N \\ 25N \\ 100N \\ 0Nm \\ 0Nm \\ 10Nm \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{25\ Nm} \\ \mathbf{21{,}1173\ Nm} \\ \mathbf{10\ Nm} \\ \mathbf{-100\ N} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{25\ Nm} \\ \mathbf{21{,}1173\ Nm} \\ \mathbf{10\ Nm} \\ \mathbf{-100\ N} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Moment 1. Antriebsachse} \\ \longrightarrow \text{Moment 2. Antriebsachse} \\ \longrightarrow \text{Moment 3. Antriebsachse} \\ \longrightarrow \text{Translatorische Kraft 4. Antriebsachse} \end{array}$$

<u>Positionen, an denen Singularität auftreten:</u>

Singularitäten sind Roboterstellungen, bei denen Verluste von einem oder mehreren Freiheitsgraden auftreten. Bezogen auf die Jacobi-Matrix bedeutet der Verlust von Freiheitsgraden in einer singulären Stellung, dass diese nicht invertiert werden kann. Darüber hinaus werden zwei oder mehr Spalten der Jacobi-Matrix linear abhängig, was einen Rangverlust der Matrix bedeutet.

Bestimmen der Singularitäten durch Nullsetzen der Determinante der JACOBI Matrix.

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -L_1 \cdot S_1 - L_2 \cdot S_{12} & -L_2 \cdot S_{12} & 0 & 0 \\ L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_{12} & L_2 \cdot C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det \boldsymbol{J} = 0$$

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{J} &= L_1 \cdot L_2 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1) - L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1) \\ &= L_1 \cdot L_2 \cdot [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \sin(\varphi_1)] \qquad = 0 \end{aligned}$$

Durch Auflösen des Gleichungssystems werden folgende **Singularitäten** geliefert:

$$\varphi_1 = 0°; 90°$$
$$\varphi_2 = 0°; 0°$$

Aufgabe 3.1: Bewegungsgleichung nach Lagrange

Bestimmen Sie für den oben angegebenen SCARA Roboter die Bewegungsgleichung nach Lagrange.

Die Erdbeschleunigung g weist entgegen der z_0-Richtung.

Hierzu werden Matrizen aufgestellt, die Trägheitsmatrix und die Rotationsmatrix

Aufstellung der Trägheitsmatrizen $^{i}\boldsymbol{I_i}$ in die Gliederschwerpunkte der einzelnen Achsglieder im jeweiligen Gliedkoordinatensystem $\{i\}$.
Für die Ermittlung Rotationsmatrizen **R** werden die Transformationsmatrizen $^{0}\boldsymbol{T_1}$ bis $^{0}\boldsymbol{T_4}$ benötigt. Dazu werden die Massenträgheitsmomente der Achsen in den Koordinaten des Basiskoordinatensystems $\{0\}$ auszugedrückt.

$$^{i}\boldsymbol{I_i} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

<u>Achsglied 1:</u>

Trägheitsmatrix : $$^{1}\boldsymbol{I_1} = \begin{bmatrix} 0{,}01119974323 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04734462207 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04321339132 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

Rotationsmatrix: $$^{0}\boldsymbol{T_2} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & L_1 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & D_1 + H_S + L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ wird $$^{0}\boldsymbol{R_2} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Achsglied 2:</u>

Trägheitsmatrix: $$^{2}\boldsymbol{I_2} = \begin{bmatrix} 0{,}00314156124 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00667901027 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00667901027 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

Rotationsmatrix: $${}^{0}\boldsymbol{T_3} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & 1 & D_1 + H_S + L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ wird } {}^{0}\boldsymbol{R_3} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Achsglied 3 und 4 mit Greifer $H_4 = 450mm$:</u>

Trägheitsmatrix: $${}^{3}\boldsymbol{I_3} = \begin{bmatrix} 0{,}53619227817 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}53619227817 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01064214511 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

Rotationsmatrix: $${}^{0}\boldsymbol{T_4} = \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 & L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 & L_2 \cdot S_{12} + L_1 \cdot S_1 \\ 0 & 0 & -1 & H_S - H_4 - L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{wird}$$

$${}^{0}\boldsymbol{R_4} = \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Trägheitsmomente der einzelnen Glieder lautet die Transformationsbeziehung:

$$\text{Allgemein: } {}^{0}\boldsymbol{I_i} = {}^{0}\boldsymbol{R_i} \cdot {}^{i}\boldsymbol{I_i} \cdot {}^{0}\boldsymbol{R_i}^{\boldsymbol{T}}$$

<u>Massenträgheitsmoment Achsglied 1:</u>

$${}^{0}\boldsymbol{I_1} = {}^{0}\boldsymbol{R_2} \cdot {}^{1}\boldsymbol{I_1} \cdot {}^{0}\boldsymbol{R_2}^{\boldsymbol{T}}$$

$${}^{0}\boldsymbol{I_1} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}01119974323 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04734462207 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04321339132 \end{bmatrix} kg \cdot m^2 \cdot \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Massenträgheitsmoment Achsglied 2:</u>

$${}^{0}\boldsymbol{I_2} = {}^{0}\boldsymbol{R_3} \cdot {}^{2}\boldsymbol{I_2} \cdot {}^{0}\boldsymbol{R_3}^{\boldsymbol{T}}$$

$${}^{0}\boldsymbol{I_2} = \begin{bmatrix} S_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}00314156124 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00667901027 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00667901027 \end{bmatrix} kg \cdot m^2 \cdot \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Massenträgheitsmoment Achsglied 3 und 4 mit Greifer:

$$\boldsymbol{{}^{0}I_3} = \boldsymbol{{}^{0}R_4} \cdot \boldsymbol{{}^{3}I_3} \cdot \boldsymbol{{}^{0}R_4}^{\boldsymbol{T}}$$

$$\boldsymbol{{}^{0}I_3} = \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}53619227817 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}53619227817 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01064214511 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$
$$\cdot \begin{bmatrix} -C_{123} & -S_{123} & 0 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Der nächste Schritt ist die Erstellung der translatorischen Unter-JACOBI-Matrizen. Dazu werden die einzelnen Schwerpunkte der Achsen, bezogen auf das Basiskoordinatensystem $\{0\}$ benötigt.
Der Schwerpunktvektor $\boldsymbol{{}^{0}r_{is}}$ beschreibt den Ortsvektor zum Schwerpunkt S_i von Achse i in den Koordinaten von $\{0\}$.

Anmerkung: Folgende Schwerpunkte beziehen sich auf das Basiskoordinatensystem $\{0\}$. Z_3 ist der Abstand des Schwerpunkts von KS 3.

Schwerpunkt Achsglied 1

$$\boldsymbol{{}^{0}r_{1s}} = \begin{bmatrix} 0{,}20342 \cdot C_1 \\ 0{,}20342 \cdot S_1 \\ L_0 + H_S + 0{,}02158 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}20342 \cdot C_1 \\ 0{,}20342 \cdot S_1 \\ 0{,}52158 \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt Achsglied 2:

$$\boldsymbol{{}^{0}r_{2s}} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot C_1 + \frac{L_2}{2} \cdot C_{12} \\ L_1 \cdot S_1 + \frac{L_2}{2} \cdot S_{12} \\ L_0 + H_S + D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot C_1 + \frac{L_2}{2} \cdot C_{12} \\ L_1 \cdot S_1 + \frac{L_2}{2} \cdot S_{12} \\ 0{,}65 \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt Achsglied 3 und 4 mit Greifer

$$\boldsymbol{{}^{0}r_{3s}} = \begin{bmatrix} L_1 * c_1 + L_2 * c_{12} \\ L_1 * s_1 + L_2 * s_{12} \\ L_0 + H_S + D_1 - Z_3 \end{bmatrix}$$

Der allgemeine Aufbau der translatorischen Unter-JACOBI-Matrix von Glied i lautet (Differenzieren des Schwerpunktvektors $\boldsymbol{^0r_{is}}$ nach $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, Z_3$):

$$\boldsymbol{J_{Ti}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\, {}^0r_{is,x}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,x}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,x}}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,x}}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial\, {}^0r_{is,y}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,y}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,y}}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,y}}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial\, {}^0r_{is,z}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,z}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,z}}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial\, {}^0r_{is,z}}{\partial Z_3} \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 1:

$$\boldsymbol{J_{T1}} = \begin{bmatrix} -0{,}20342 \cdot S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}20342 \cdot c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 2:

$$\boldsymbol{J_{T2}} = \begin{bmatrix} -\frac{L_2 \cdot S_{12}}{2} - L_1 \cdot S_1 & -\frac{L_2 \cdot S_{12}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{L_2 \cdot S_{12}}{2} + L_1 \cdot C_1 & \frac{L_2 \cdot C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Translatorische Unter-JACOBI-Matrix Achsglied 3:

$$\boldsymbol{J_{T3}} = \begin{bmatrix} -L_2 \cdot S_{12} - L_1 \cdot S_1 & -L_2 \cdot S_{12} & 0 & 0 \\ L_2 \cdot C_{12} + L_1 \cdot C_1 & L_2 \cdot C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Für die rotatorischen Unter-JACOBI-Matrizen werden für die einzelnen Achsen die Winkelgeschwindigkeiten benötigt. Anschließend können durch Differenzieren der Winkelgeschwindigkeitsvektoren die rotatorischen Unter-JACOBI-Matritzen $\boldsymbol{J_{Ri}}$ gebildet werden.

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \qquad \omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$

$$J_{Ri} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega_i}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \dot{\varphi}_1} & \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \dot{\varphi}_2} & \frac{\partial \omega_{i,1}}{\partial \dot{\varphi}_3} \\ \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \dot{\varphi}_1} & \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \dot{\varphi}_2} & \frac{\partial \omega_{i,2}}{\partial \dot{\varphi}_3} \\ \frac{\partial \omega_{i,3}}{\partial \dot{\varphi}_1} & \frac{\partial \omega_{i,3}}{\partial \dot{\varphi}_2} & \frac{\partial \omega_{i,3}}{\partial \dot{\varphi}_3} \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich dann folgende Matritzen:

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 1:

$$J_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 2:

$$J_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotatorische Unter-Jacobi-Matrix Achsglied 3:

$$J_{R3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Für das Aufstellen der kinetischen Energie E_{Kin} des Roboters, muss die Roboterträgheitsmatrix **M** bestimmt werden.

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \left({J_{Ti}}^T \cdot m_i \cdot J_{Ti} + {J_{Ri}}^T \cdot {}^0I_i \cdot J_{Ri} \right) \qquad mit\ n = Achsanzahl\ (hier\ 3)$$

$m_1 = 3{,}4481\ kg$

$m_2 = 1{,}53247\ kg$

$m_3 = 135137\ kg$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 1:

$$\boldsymbol{M_1} = \begin{bmatrix} 0{,}1859 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit } m_1$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 2:

$$\boldsymbol{M_2} = \begin{bmatrix} 0{,}1906 & 0{,}0373 & 0 & 0 \\ 0{,}0373 & 0{,}0220 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit } m_2$$

Roboterträgheitsmatrix Achsglied 3:

$$\boldsymbol{M_3} = \begin{bmatrix} 2{,}6844 & 0{,}8588 & 0{,}0106 & 0 \\ 0{,}8588 & 0{,}5732 & 0{,}0106 & 0 \\ 0{,}0106 & 0{,}0106 & 0{,}0106 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13{,}5137 \end{bmatrix} \text{mit } m_3$$

Gesamte Roboterträgheitsmatrix M:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i} = \boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} + \boldsymbol{M_3} = \begin{bmatrix} 2{,}3813 & 0{,}7072 & 0{,}0106 & 0 \\ 0{,}7072 & 0{,}5732 & 0{,}0106 & 0 \\ 0{,}0106 & 0{,}0106 & 0{,}0106 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13{,}5137 \end{bmatrix}$$

Nachdem die Roboterträgheitsmatrix **M** bestimmt wurde, kann die kinetische Energie E_{Kin} und potentielle Energie E_{Pot} des Roboter berechnet werden.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{\varphi}_3 \quad \dot{Z}_3) \cdot \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \dot{Z}_3 \end{pmatrix}$$

$$E_{pot} = -\sum_{i=1}^{n} m_i * (0 \quad 0 \quad -g) \cdot \begin{pmatrix} {}^0r_{is,x} \\ {}^0r_{is,y} \\ {}^0r_{is,z} \end{pmatrix}$$

Dadurch erhält man die Lagrange-Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$
$$= 132{,}5696 \cdot Z_3 + 0{,}8568 \cdot \dot{\varphi_1}^2 C_2 + 0{,}5732 \cdot \dot{\varphi_1}\dot{\varphi_2} + 0{,}0106 \cdot \dot{\varphi_1}\dot{\varphi_3} + 0{,}0106 \cdot \dot{\varphi_2}\dot{\varphi_3} \quad + 1{,}0558 \cdot \dot{\varphi_1}^2 + 0{,}2866 \cdot \dot{\varphi_2}^2 + 0{,}0053 \cdot \dot{\varphi_3}^2 + 6{,}7569 \cdot \dot{Z_3}^2 + 0{,}8568 \cdot \dot{\varphi_1}\dot{\varphi_2} C_2 - 113{,}5847$$

Die Lagrange-Gleichungen $\mathrm{Q_i}$ ergibt sich aus dem Differenzieren nach $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2,\ \dot{\varphi}_3, \dot{Z}_3$ und anschließendem Differenzieren nach der Zeit t. Zusätzlich Differenzieren nach $\varphi 1, \varphi 2, \varphi 3, Z_3$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_i}\right) = Q_i$$

<u>Bewegungsgleichung Achsglied 1:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}\right) = \tau_1$$

$$\tau_1 = 2{,}1132 \cdot \ddot{\varphi_1} + 0{,}5732 \cdot \ddot{\varphi_2} + 0{,}0106 \cdot \ddot{\varphi_3} + 1{,}7136 \cdot \ddot{\varphi_1} C_2 + 0{,}8568 * \ddot{\varphi_2} C_2 - 1{,}7136 \cdot \dot{\varphi_1}\dot{\varphi}_2 S_2 - 0{,}8568 \cdot \dot{\varphi}_2{}^2 S_2$$

<u>Bewegungsgleichung Achsglied 2:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\varphi}_2}\right) - \left(\frac{dL}{d\varphi_2}\right) = \tau_2$$

$$\tau_2 = 0{,}5732 \cdot \ddot{\varphi_1} + 0{,}5732 \cdot \ddot{\varphi_2} + 0{,}0106 \cdot \ddot{\varphi_3} + 0{,}8568 \cdot \ddot{\varphi_1} C_2 + 0{,}8568 \cdot \dot{\varphi}_1{}^2 S_2 + 0{,}8568 \cdot \dot{\varphi_1}\dot{\varphi}_2 S_2 - 0{,}8568 \cdot \dot{\varphi_1}\dot{\varphi}_2 S_2$$

<u>Bewegungsgleichung Achsglied 3:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_3}\right) = \tau_3$$

$$\tau_3 = 0{,}0106 \cdot \ddot{\varphi_1} + 0{,}0106 \cdot \ddot{\varphi_2} + 0{,}0106 \cdot \ddot{\varphi_3}$$

<u>Bewegungsgleichung Achsglied 4:</u>

$$\tau_4 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{Z}}_3}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathrm{Z}_3}\right)$$

$$\tau_4 = 13{,}5137 \cdot \ddot{\mathrm{Z}}_3 - 132{,}5696$$

Mit folgender Formel kann die Gesamtbewegungsgleichung Q unter Berücksichtigung der Einpresskraft und Montagekraft ermittelt werden ($FM_{TCP} = \text{gegebene Montagekraft} - \text{ und Moment}$):

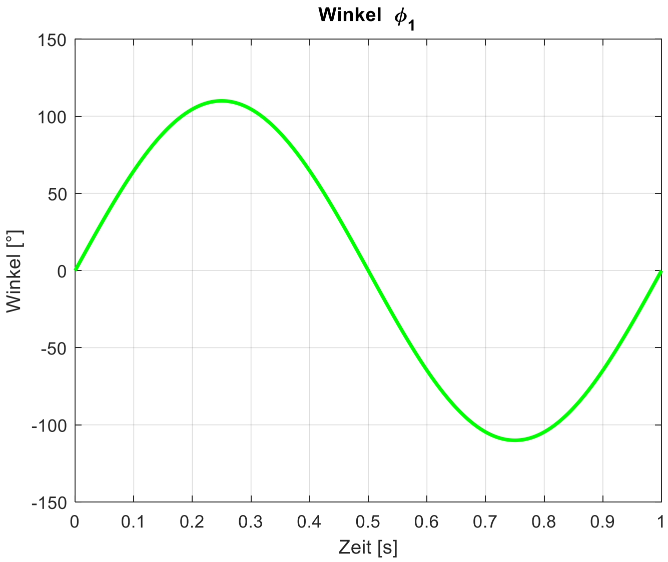
$$Q = \tau + {FM_{TCP}}^{T} \cdot J$$

Aufgabe 3.2: Bewegungsverhalten mit Hilfe von Simulink

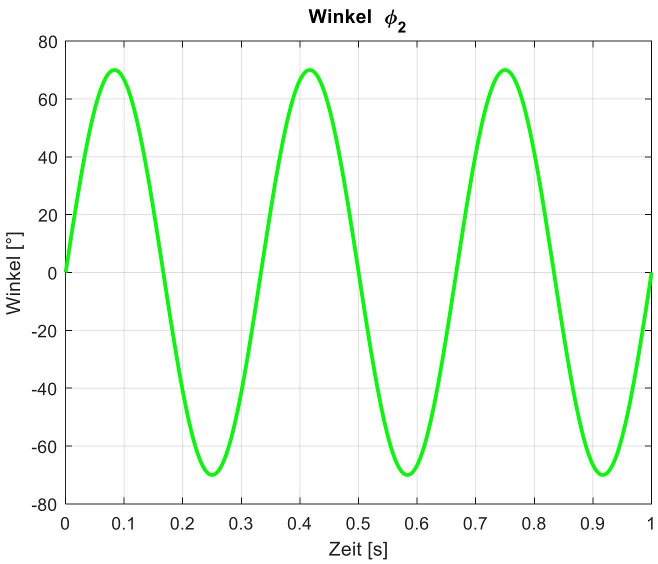
Simulieren Sie mit Hilfe von MATLAB das Bewegungsverhalten am TCP nach dem Einpress-/Fügevorgang, indem der Greifer schlagartig (sprungförmig) geöffnet wird (d.h. die äußere Kraft- und Momenteneinwirkung sprungförmig auf Null gehen).

Zeichnen Sie das Schwingverhalten des TCP in Bezug zum Grundkoordinatensystem $x_0, y_0\ und\ z_0$.

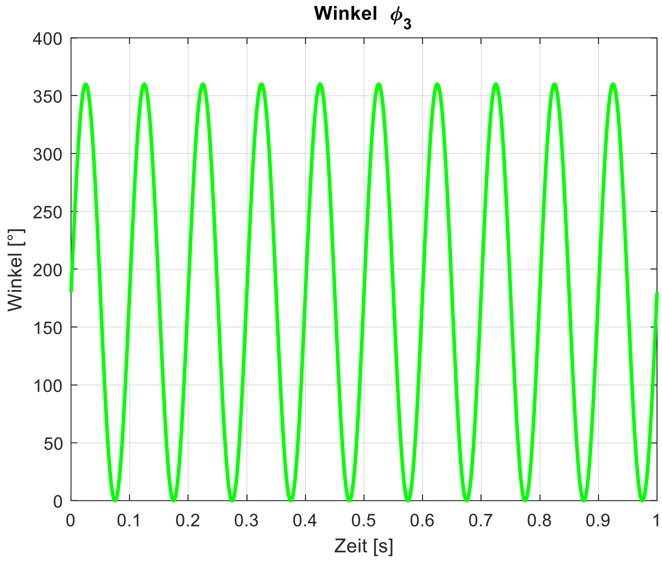
Die folgenden Diagramme zeigen das Schwingverhalten der Achswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und Weg H_4.



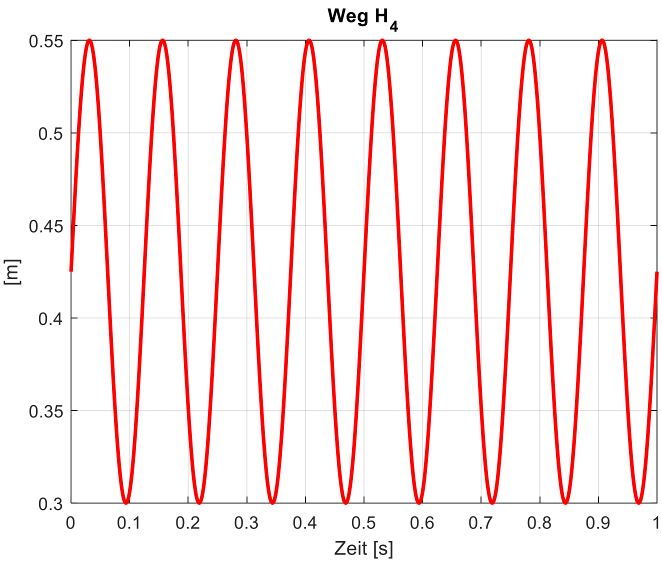
Der Winkel φ_1 an der Achse 1 fängt an zu Schwingen über einen Zeitraum von 1s. Dabei wiederholt sich die Schwingung nur 1 (1T) mal in 1s. Die Auswirkung des Einpress/Fügevorgang hat einen leichten Einfluss auf die Achse 1, da die Achse 1 nah am Fuß des Roboters ist.



Der Winkel φ_2 an der Achse 2 fängt stärker an zu Schwingen über einen Zeitraum von 1s als Achse 1. Die Wiederholung der Schwingung ist dabei 3mal zu hoch (3T), jedoch ist die Amplitude kleiner als bei Achse 1. Die Auswirkung des Einpress/Fügevorgang hat einen größeren Einfluss auf die Achse 2.

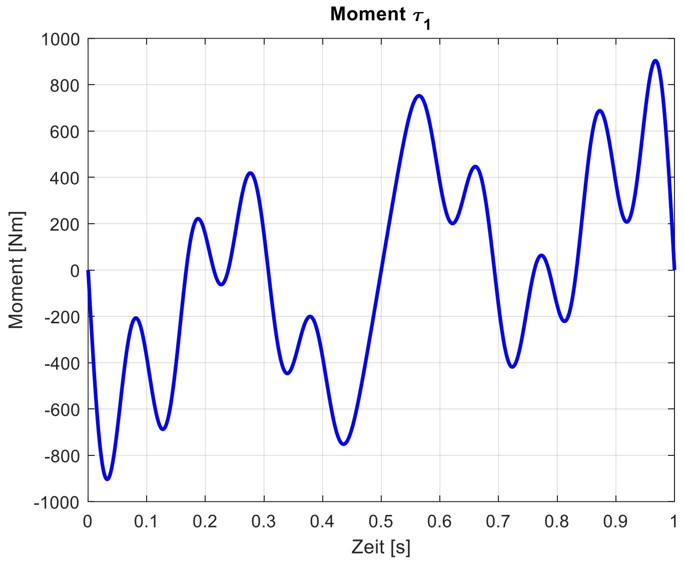


Der Winkel φ_3 an der Achse 3 fängt stark an zu Schwingen über einen Zeitraum von 1s. Die Wiederholung der Schwingung ist dabei 10T. Die Auswirkung des Einpress/Fügevorgang hat einen direkten Einfluss auf die Achse 3, da der Greifer sich auf derselben Achse befinden.

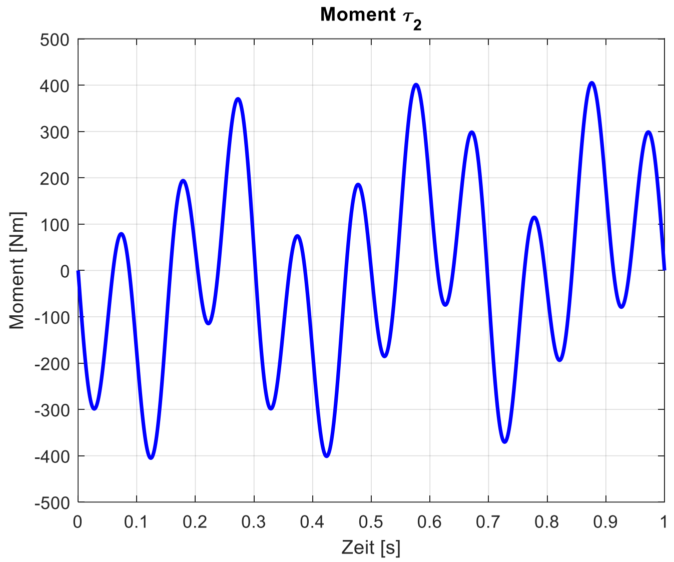


Wie auch in Achse 3 hat. der Einpress/Fügevorgang hat einen direkten Einfluss auf die Länge der Achse. Die Höhe H_4 variiert dabei zwischen 0,3 und 0,55m. Die Periode beträgt dabei 8T in 1s.

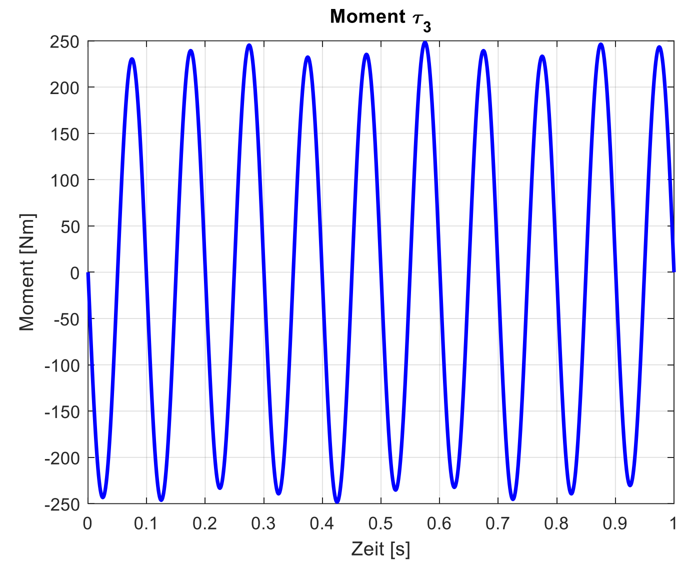
Die folgenden Diagramme zeigen das Schwingverhalten der Achsmomente τ_1, τ_2, τ_3 und Kraft F_4



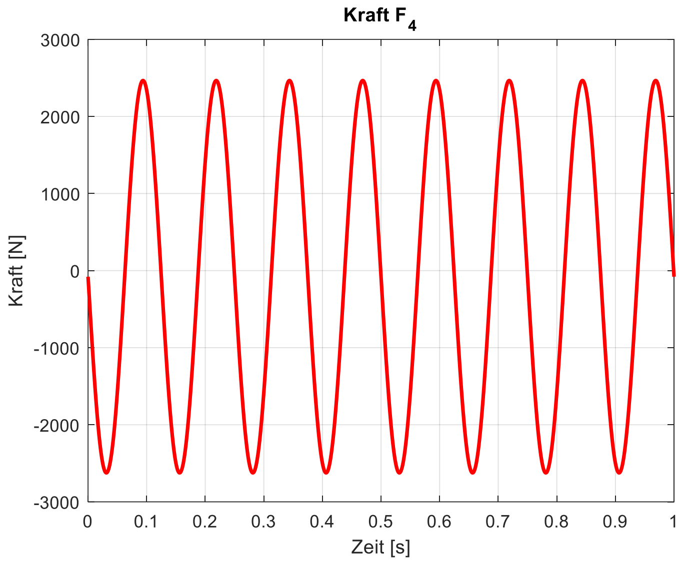
Das Moment τ_1 zeigt eine Schwingung mit ungleichmäßigen Amplituden in einer Periode. Dabei beziehen sich die Werte auf die Achse 1. Die Periode beträgt hier 3T in 1s. Zu sehen ist ein langsamer Anstieg des Moments in einer Richtung mit gleichzeitigem Abnehmens des Moments in der entgegengesetzten Richtung.



Auch das Moment τ_2 zeigt eine Schwingung mit ungleichmäßigen Amplituden in einer Periode. Dabei beziehen sich die Werte auf die Achse 2. Die Periode ist nochmal enger als bei Achse 1. Auch hier ist zu sehen, dass ist ein langsamer Anstieg des Moments in einer Richtung mit gleichzeitigem Abnehmens des Moments in der entgegengesetzten Richtung stattfindet, jedoch findet eine kleine Einpendlung schon nach der 1. Periode statt. Die Amplitude ist im Vergleich zum Moment τ_1 in der Amplitude kleiner.



Das Moment τ_3 zeigt eine Schwingung mit gleichmäßigen Amplituden. Dabei beziehen sich die Werte auf die Achse 3. Die Periode beträgt hier 10T in 1s. Zu sehen ist ein relativ gleiches Moment in beide vektoriellen Richtungen. Der Wert schwingt dabei um die Spitzenwerte $\pm 250Nm$.



Die Kraft F_4 schwingt harmonisch in einem Zeitraum von 1s. Die Spitzenwerte betragen dabei $\pm 2600N$. Die ist die Kraft an der Achse 4. Die Periode beträgt 8T in 1s.