Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino

manueldiagostino.github.io

Qualche info utile

- Dove trovo le slide?
  Elly2024
  Unipr-org (https://github.com/unipr-org/tutorati)

- Per qualsiasi domanda:
  manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Logica proposizionale

Connettivi logici di base: **NOT**

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Connettivi logici di base: **AND**

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Connettivi logici di base: **OR**

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Alcuni capisaldi

- Principio del *terzo escluso*

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

- Principio di *non contraddizione*

p	$\neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
0	1	1
1	0	1

Tautologie

Proprietà

- commutativa

$$a \wedge b \equiv b \wedge a$$

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

- associativa

$$a \wedge b \wedge c \equiv (a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \vee b \vee c \equiv (a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$$

- distributiva

$$(a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

$$(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Proprietà

- leggi di De Morgan

$$\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$$
$$\neg(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$$

Tutte queste proprietà si possono dimostrare utilizzando le *tavole di verità* (esercizio).

Proposizione *contronominale*

Possiamo applicare le proprietà viste finora all'*implicazione logica*:

$$\begin{aligned}
p \Rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\
&\equiv \neg p \vee \neg\neg q && [\text{idempotenza di } \neg\neg] \\
&\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p && [\text{commutatività di } \vee] \\
&\equiv \neg q \Rightarrow \neg p\,.
\end{aligned}$$

Esercizi, tavole di verità

1. $a \wedge (b \Rightarrow a)$
2. $(a \Rightarrow b) \wedge ((c \Leftrightarrow \neg a) \vee b)$
3. $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$
4. $(a \Leftrightarrow a) \Rightarrow (b \Leftrightarrow \neg b)$

Proviamo!

Esercizio: proposizione dalla tabella di verità

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Esercizio: proposizione dalla tabella di verità

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$\underbrace{(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)}_{\text{DNF}} \equiv$$

$$\underbrace{(\neg p \lor q)}_{\text{CNF}}$$

Esercizio: equivalenza tra le due forme

$$
\begin{aligned}
\underline{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} &\equiv (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (q \vee \neg q)) \\
&\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p) \\
&\equiv (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p) \\
&\equiv (q \vee \neg p) \\
&\equiv \underline{(\neg p \vee q)}\,.
\end{aligned}
$$

Quantificatori: negazione

$$\neg(\forall x.\, p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x.\, \neg p(x)$$

La prima equivale a esibire un *controesempio* per confutare un enunciato:

- *"Il quadrato di un intero è sempre pari."* → falso, **esiste** il numero 5 il cui quadrato è 25 (dispari).

Confutare le seguenti proposizioni:

1. $\forall n.$"$3n + 6 \geq 5n$", dominio naturali
2. $\forall n.$"$10n^2 > n^3$", dominio naturali
3. $\forall n.$"$-\frac{3}{56}n + 2 > e^{\frac{n^2}{577}}$", dominio naturali

* In questi casi meglio farsi aiutare dal PC :)

Insiemistica

Definizione tramite *proprietà*

$$S := \{x : p(x)\} \equiv \forall x.\,(x \in S \Rightarrow p(x))$$

Si hanno inoltre le seguenti definizioni (sono proposizioni!):

$$\forall x \in S.\, p(x) \equiv \forall x.\,(x \in S \Rightarrow p(x))$$
$$\exists x \in S : p(x) \equiv \exists x : (x \in S \land p(x))$$

Grazie ad esse possiamo dimostrare che:

$$\neg(\forall x \in S.\, p(x)) \equiv \exists x \in S : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x \in S : p(x)) \equiv \forall x \in S.\, \neg p(x)$$