Tutorato di Logica

Manuel Di Agostino



Qualche info utile

• Dove trovo le slide?





- Per qualsiasi domanda:
 - manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Logica proposizionale

Connettivi logici di base: NOT

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \lor q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Connettivi logici di base: AND

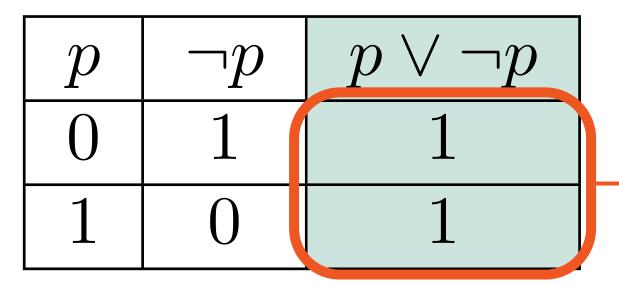
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \lor q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Connettivi logici di base: OR

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \lor q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Alcuni capisaldi

• Principio del terzo escluso



• Principio di non contraddizione

p	$\neg p$	$\neg(p \land \neg p)$
0	1	1
1	0	1

Tautologie

Proprietà

commutativa

$$a \wedge b \equiv b \wedge a$$
 $a \vee b \equiv b \vee a$

associativa

$$egin{aligned} a \wedge b \wedge c &\equiv (a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c) \ a ee b ee c &\equiv (a ee b) ee c \equiv a ee (b ee c) \end{aligned}$$

distributiva

$$egin{aligned} (a \wedge b) ee c &\equiv (a ee c) \wedge (b ee c) \ (a ee b) \wedge c &\equiv (a \wedge c) ee (b \wedge c) \end{aligned}$$

Proprietà

• leggi di De Morgan

$$abla (a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$$
 $abla (a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$

Tutte queste proprietà si possono dimostrare utilizzando le tavole di verità (esercizio).

Proposizione contronominale

Possiamo applicare le proprietà viste finora all'implicazione logica:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \lor q$$

$$\equiv \neg p \lor \neg \neg q$$
 [idempotenza di \neg]
$$\equiv \neg (\neg q) \lor \neg p$$
 [commutatività di \lor]
$$\equiv \neg q \Rightarrow \neg p.$$

Esercizi, tavole di verità

1.
$$a \land (b \Rightarrow a)$$

2.
$$(a \Rightarrow b) \land ((c \Leftrightarrow \neg a) \lor b)$$

3.
$$(a \land (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$$

4.
$$(a \Leftrightarrow a) \Rightarrow (b \Leftrightarrow \neg b)$$

Proviamo!

Esercizio: proposizione dalla tabella di verità

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Esercizio: proposizione dalla tabella di verità

p	q	$p \implies q$
1	1	1
$\boxed{1}$	0	0
0	1	(1)
0	0	1

$$(p \wedge q) ee (\neg p \wedge q) ee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p ee q)$$

Esercizio: equivalenza tra le due forme

$$(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q) \equiv (p \land q) \lor ((\neg p) \land (q \lor \neg q))$$

$$\equiv (p \land q) \lor (\neg p)$$

$$\equiv (p \lor \neg p) \land (q \lor \neg p)$$

$$\equiv (q \lor \neg p)$$

$$\equiv (\neg p \lor q) .$$

Quantificatori: negazione

$$eg (orall x . p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x) \
eg (\exists x : p(x)) \equiv orall x .
eg p(x)$$

La prima equivale a esibire un controesempio per confutare un enunciato:

 "Il quadrato di un intero è sempre pari." → falso, esiste il numero 5 il cui quadrato è 25 (dispari).

Confutare le seguenti proposizioni:

- 1. $\forall n.$ " $3n + 6 \ge 5n$ ", dominio intero
- 2. $\forall n$. " $10n^2 > n^3$ ", dominio intero
- 3. $\forall n.$ " $-\frac{3}{56}n^2+2>e^{\frac{n^2}{577}}$ ", dominio intero * In questi casi meglio farsi aiutare dal PC :)

Insiemistica

Definizione tramite proprietà

$$S := \{x : p(x)\} \equiv \forall x. (x \in S \Rightarrow p(x))$$

Si hanno inoltre le seguenti definizioni (sono proposizioni!):

$$orall x \in S. \ p(x) \equiv orall x. \ (x \in S \Rightarrow p(x))$$
 $\exists x \in S: p(x) \equiv \exists x: (x \in S \land p(x))$

Grazie ad esse possiamo dimostrare che:

$$eg (orall x \in S. \, p(x)) \equiv \exists x \in S: (\neg p(x)) \
eg (\exists x \in S: p(x)) \equiv \forall x \in S. \, (\neg p(x))$$