Ricordiamo che un elemento x appartiene ad un insieme $\mathcal{Z}$ sse soddisfa la proprietà che lo definisce:
$\mathcal{Z} = \{x : \mathcal{Z}(x)\} \longrightarrow x \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \mathcal{Z}(x)$
Quindi ad esempio se $\mathcal{Z} = A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$,
si ha $x \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

ESERCIZIO 1

1 $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

- $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ (def. di $A \setminus B$)
  $\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B}$ (def. di $\overline{B}$)
  $\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$ (def. di '$\cap$')

2 $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

- $A = B$ è una proposiz. : $\forall x . (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$\rightarrow$ $A = B \equiv \forall x . (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
$\equiv \forall x . [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$ def. di '$\Leftrightarrow$'
$\equiv \forall x . (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x . (x \in B \Rightarrow x \in A)$
$\equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$A \subseteq B \equiv \forall x . (x \in A \Rightarrow x \in B)$

3 $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$

- $\overline{\mathcal{U}} := \{x \in \mathcal{U} \mid x \in \overline{\mathcal{U}}\} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \in \overline{\mathcal{U}}\} = \{x \mid \underbrace{x \in \mathcal{U} \wedge \neg(x \in \mathcal{U})}\} = \emptyset$

  CONTRADDIZIONE

- Sapendo che $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$ allora $\overline{(\overline{\mathcal{U}})} = \mathcal{U} = \overline{\emptyset}$.

7 $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

$= [(A \cap B) \cup A] \cap [(A \cap B) \cup \overline{B}]$
$= A \cap [(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B})]$ (assorbimento)
$= A \cap [(A \cup \overline{B}) \cap \mathcal{U}]$ ($C \cap \mathcal{U} = C$)
$= A \cap (A \cup \overline{B})$ (assorbimento)
$= A$.

9 $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$= (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ (commutativa '$\cup$')
$=: B \triangle A$

BONUS Dimostro le regole di assorbimento

- $(A \cap B) \cup A = (A \cap B) \cup (A \cap \mathcal{U}) = A \cap (B \cup \mathcal{U}) = A \cap \mathcal{U} = A$.
- $(A \cup B) \cap A = (A \cup B) \cap (A \cup \emptyset) = A \cup (B \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A$.

ESERCIZIO 2

$A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$
$B = B_1 \cup B_2$; $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \neq \emptyset$, $B_2 \neq \emptyset$

Dimostrare che $A \times B \neq \underbrace{(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)}_{=: C}$

- Scrivo definizione di $A \times B$:

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \\ &= \{(a,b) \mid a \in A_1 \cup A_2 \wedge b \in B_1 \cup B_2\} \\ &= \{(a,b) \mid (a \in A_1 \vee a \in A_2) \wedge (b \in B_1 \vee b \in B_2)\} . \end{aligned}$$

notiamo che sono diversi !

- Inoltre

$$A_1 \times B_1 := \{(a,b) \mid a \in A_1 \wedge b \in B_1\}$$
$$A_2 \times B_2 := \{(a,b) \mid a \in A_2 \wedge b \in B_2\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C = A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 &= \{(a,b) \mid (a,b) \in A_1 \times B_1 \vee (a,b) \in A_2 \times B_2\} \\ &= \{(a,b) \mid \underline{(a \in A_1 \wedge b \in B_1) \vee (a \in A_2 \wedge b \in B_2)}\} \end{aligned}$$

- Esibisco un controesempio, ossia una coppia (a,b) che appartiene a $A \times B$ ma non a C.

Considero $(x,y) \in A \times B$ per cui $x \in A_1, y \in B_2$; verifichiamo se $(x,y) \in C$ sostituendo l'elemento al predicato che definisce C :

$$\begin{aligned} &(x \in A_1 \wedge y \in B_1) \vee (x \in A_2 \wedge y \in B_2) \equiv \\ &(1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \equiv \\ &0 \vee 0 \equiv \\ &0 . \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto FALSO, quindi $(x,y) \notin C$, quindi $A \times B \neq C$.