

Note sulla I consegna

Di Agostino Manuel

manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Marzo 2023

1 Analisi sulla generazione dei dati

```
1 FILE *f = fopen("data.txt", "w+");
2 for (int j = 0; j < 100; j++) {
3     for (int i = 0; i < n; i++) {
4         int v = 0;
5         v=(int)(100000*pow(2,-i/(0.0+n)*25));
6         v+=rand()%50-25;
7         fprintf(f, "%d,", v);
8     }
9     fprintf(f, "\n");
10 }
11 fclose(f);
```

Listing 1: Frammento di codice per la generazione di data.txt

Siano $\alpha = 100000$ e $\varepsilon = 1000$; se consideriamo la successione

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto \alpha \cdot 2^{-\frac{25}{\varepsilon}n} \end{cases} \quad (1)$$

questa è monotona decrescente. Infatti

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 2^{-\frac{25}{\varepsilon}n} &\geq \alpha \cdot 2^{-\frac{25}{\varepsilon}(n+1)} \\ \Leftrightarrow 2^{-\frac{25}{\varepsilon}n} &\geq 2^{-\frac{25}{\varepsilon}(n+1)} \\ \Leftrightarrow -\frac{25}{\varepsilon}n &\geq -\frac{25}{\varepsilon}(n+1) \\ \Leftrightarrow n &\leq n+1, \text{ vero } \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

In particolare $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Definiamo ora

$$\{\hat{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}} := a_n + 24 \quad (2)$$

$$\{\check{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}} := a_n - 25 \quad (3)$$

$$\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ la successione dei valori di } v \text{ a riga 6} \quad (4)$$

Possiamo affermare che

$$\check{a}_n \leq v_n \leq \hat{a}_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

in quanto `rand()%50` restituisce valori interi in $[0, 49]$.

Dalla (5) segue immediatamente che per $n \rightarrow \infty$, il valore minimo che v_n può assumere è -25 mentre quello massimo 24.

Proprietà 1. I primi 206 elementi di v_n sono già ordinati in senso decrescente, ovvero

$$v_i > v_{i+1} \quad , 0 \leq i \leq 204$$

In particolare, essi sono gli elementi più grandi della successione:

$$v_0 > v_1 > v_2 > \dots > v_{205} \geq v_k \quad , \forall k \geq 206$$

Dimostrazione. Per la (5) il valore i -esimo v_i appartiene all'intervallo

$$A_i := [\tilde{a}_i, \hat{a}_i]$$

Poichè \tilde{a}_n e \hat{a}_n sono entrambe monotone decrescenti, può accadere che $v_i \leq v_{i+1}$ se e solo se l'intersezione tra due intervalli successivi è non nulla, ovvero se e solo se

$$A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$$

Questo può verificarsi se e solo se

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i \leq \hat{a}_{i+1} &\Leftrightarrow a_i - 25 \leq a_{i+1} + 24 && [\text{per (2),(3)}] \\ &\Leftrightarrow \alpha 2^{-\frac{25}{\varepsilon} i} - \alpha 2^{-\frac{25}{\varepsilon} (i+1)} \leq 49 \\ &\Leftrightarrow \alpha 2^{-\frac{25}{\varepsilon} i} \cdot \left(1 - 2^{-\frac{25}{\varepsilon}}\right) \leq 49 \\ &\Leftrightarrow 2^{-\frac{25}{\varepsilon} i} \leq \underbrace{\frac{49}{\alpha \left(1 - 2^{-\frac{25}{\varepsilon}}\right)}}_{>0} \\ &\Leftrightarrow -\frac{25}{\varepsilon} i \leq \log_2 \left(\frac{49}{\alpha \left(1 - 2^{-\frac{25}{\varepsilon}}\right)} \right) \\ &\Leftrightarrow i \geq -40 \cdot \log_2 \left(\frac{49}{10^5 \cdot \left(1 - 2^{\frac{1}{40}}\right)} \right) \approx 205.27 && [\varepsilon = 1000] \\ &\Leftrightarrow i \geq 206 && [i \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

il che è equivalente a dire che

$$A_i \cap A_{i+1} = \emptyset \Leftrightarrow 0 \leq i \leq 205$$

La seconda parte segue dal fatto che \hat{a}_n e \tilde{a}_n sono monotone decrescenti e che v_n è limitata da entrambe per la (5). \square

Proprietà 2. Per i primi 244 elementi di v_n vale

$$v_i > v_{i+2} \quad , 0 \leq i \leq 244$$

Dimostrazione. Analogamente al caso precedente è possibile imporre che gli intervalli A_i e A_{i+2} , $i \in \mathbb{N}$, debbano essere disgiunti:

$$\begin{aligned} A_i \cap A_{i+2} = \emptyset &\Leftrightarrow \tilde{a}_i > \hat{a}_{i+2} \\ &\Leftrightarrow a_i - 25 > a_{i+2} + 24 \\ &\Leftrightarrow i < -40 \cdot \log_2 \left(\frac{49}{10^5 \cdot \left(1 - 2^{\frac{2}{40}}\right)} \right) \approx 244.77 \\ &\Leftrightarrow i \leq 244 && [i \in \mathbb{N}] \end{aligned}$$

\square

Proprietà 3.

$$-25 \leq v_i \leq 1456 \quad , \forall i \geq 245$$

Dimostrazione. Le successioni \hat{a}_n e \check{a}_n sono monotone decrescenti, pertanto

$$\begin{cases} \hat{a}_i \geq \hat{a}_{i+1} \geq \dots \geq \hat{a}_k \\ \check{a}_i \geq \check{a}_{i+1} \geq \dots \geq \check{a}_k \end{cases} \quad \forall i, k \in \mathbb{N} : k > i$$

e quindi

$$\hat{a}_{245} = 1456 \geq \hat{a}_i \geq v_i \quad \forall i \geq 245$$

dimostrando la parte destra della disuguaglianza.

A questo punto, basta osservare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{a}_n = -25 = \min \{\check{a}_n\}$$

ed essendo $v_n \geq \check{a}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ per la (5), la dimostrazione è conclusa. \square