Note sulla I consegna

Di Agostino Manuel
manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Marzo 2023

1 Analisi sulla generazione dei dati

```
1  FILE *f = fopen("data.txt", "w+");
2  for (int j = 0; j < 100; j++) {
3      for (int i = 0; i < n; i++) {
4          int v = 0;
5          v=(int)(100000*pow(2,-i/(0.0+n)*25));
6          v+=rand()%50-25;
7          fprintf(f, "%d,", v);
8      }
9      fprintf(f, "\n");
10 }
11 fclose(f);
```

Listing 1: data.txt

Siano $\alpha = 100000$ e $\varepsilon = 1000$; se consideriamo la successione

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto \alpha \cdot 2^{-\frac{25}{\varepsilon}n} \end{array} \right. \tag{1}$$

questa è monotona decrescente. Infatti

$$\begin{array}{lll} & \alpha \cdot 2^{-\frac{25}{\varepsilon}n} & \geq \alpha \cdot 2^{-\frac{25}{\varepsilon}(n+1)} \\ \Leftrightarrow & 2^{-\frac{25}{\varepsilon}n} & \geq 2^{-\frac{25}{\varepsilon}(n+1)} \\ \Leftrightarrow & -\frac{25}{\varepsilon}n & \geq -\dfrac{25}{\varepsilon}(n+1) \\ \Leftrightarrow & n & \leq n+1 \quad \text{, vero } \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

In particolare $a_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Definiamo ora

$$\{\hat{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}} := a_n + 24 \tag{2}$$

$$\{\check{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}} := a_n - 25 \tag{3}$$

$$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{la successione dei valori di } \texttt{v} \text{ a riga } \texttt{6} \tag{4}$$

Possiamo affermare che

$$\check{a}_n \leq v_n \leq \hat{a}_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

in quanto `rand()%50` restituisce valori interi in $[0, 49]$.

Dalla (5) segue immediatamente che per $n \to \infty$, il valore minimo che v_n può assumere è -25 mentre quello massimo 24.

Proprietà 1. *I primi* 206 *elementi di* v_n *sono già ordinati in senso* decrescente*, ovvero*

$$v_i > v_{i+1} \quad , 0 \leq i \leq 204$$

In particolare, essi sono gli elementi più grandi della successione:

$$v_0 > v_1 > v_2 > \ldots > v_{205} \geq v_k \quad , \forall k \geq 206$$

Dimostrazione. Per la (5) il valore i-esimo v_i appartiene all'intervallo

$$A_i := [\breve{a}_i, \hat{a}_i]$$

Poichè $\breve{a}_n$ e $\hat{a}_n$ sono entrambe monotone decrescenti, può accadere che $v_i < v_{i+1}$ se e solo se l'intersezione tra due intervalli successivi è non nulla, ovvero se e solo se

$$A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$$

Questo può verificarsi se e solo se

$$\begin{aligned}
\breve{a}_i \leq \hat{a}_{i+1} &\Leftrightarrow\ a_i - 25 \leq a_{i+1} + 24 && \text{[per (2),(3)]} \\
&\Leftrightarrow\ \alpha 2^{-\frac{25}{\varepsilon} i} - \alpha 2^{-\frac{25}{\varepsilon}(i+1)} \leq 49 \\
&\Leftrightarrow\ \alpha 2^{-\frac{25}{\varepsilon} i} \cdot \left(1 - 2^{-\frac{25}{\varepsilon}}\right) \leq 49 \\
&\Leftrightarrow\ 2^{-\frac{25}{\varepsilon} i} \leq \underbrace{\frac{49}{\alpha\left(1 - 2^{-\frac{25}{\varepsilon}}\right)}}_{>0} \\
&\Leftrightarrow\ -\frac{25}{\varepsilon} i \leq \log_2\left(\frac{49}{\alpha\left(1 - 2^{-\frac{25}{\varepsilon}}\right)}\right) \\
&\Leftrightarrow\ i \geq -40 \cdot \log_2\left(\frac{49}{10^5 \cdot (1 - 2^{\frac{1}{40}})}\right) \approx 205.27 && [\varepsilon = 1000] \\
&\Leftrightarrow\ i \geq 206 && [i \in \mathbb{N}]
\end{aligned}$$

il che è equivalente a dire che

$$A_i \cap A_{i+1} = \varnothing \Leftrightarrow 0 \leq i \leq 205$$

La seconda parte segue dal fatto che $\hat{a}_n$ e $\breve{a}_n$ sono monotone decrescenti e che v_n è limitata da entrambe per la (5). □

Proprietà 2.

$$-25 \leq v_i \leq 2840 \quad , \forall i > 205$$

Dimostrazione. Le successioni $\hat{a}_n$ e $\breve{a}_n$ sono monotone decrescenti, pertanto

$$\begin{cases} \hat{a}_i \geq \hat{a}_{i+1} \geq \ldots \geq \hat{a}_k \\ \breve{a}_i \geq \breve{a}_{i+1} \geq \ldots \geq \breve{a}_k \end{cases} \quad \forall i, k \in \mathbb{N} : k > i$$

e quindi

$$\hat{a}_{205} = 2840 \geq \hat{a}_i \geq v_i \quad \forall i \geq 206$$

dimostrando la disuguaglianza di destra.

A questo punto, basta osservare che

$$\lim_{n\to\infty} \breve{a}_n = -25 = \min\{\breve{a}_n\}$$

ed essendo $v_n \geq \breve{a}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ per la (5), la dimostrazione è conclusa. □