

# Rilevamento quantistico dei bordi

Manuel Di Agostino *Università degli studi di Parma*

Parma, Italia

manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Leonardo Ongari *Università degli studi di Parma*

Cremona, Italia

leonardo.ongari@studenti.unipr.it

**Sommario**—Il rilevamento dei bordi è un processo fondamentale nell'estrazione delle caratteristiche di un'immagine ed è ampiamente utilizzato per analizzare la struttura degli oggetti rappresentati. Tuttavia, con l'aumento della risoluzione delle immagini, i metodi classici affrontano significative sfide computazionali a causa delle operazioni pixel-per-pixel necessarie. Il *Quantum Image Processing* (QIP), offre il potenziale per accelerazioni esponenziali in determinati scenari, sfruttando algoritmi e rappresentazioni in forma quantistica. Questo articolo esplora l'applicazione dell'algoritmo *Quantum Hadamard Edge Detection* (QHED), implementato utilizzando la rappresentazione *Quantum Probability Image Encoding* (QPIE). Utilizzando i principi quantistici e il framework Qiskit, si analizzano i vantaggi e le prospettive di questo nuovo approccio per il rilevamento dei bordi.

**Keywords**—Rilevamento dei bordi, Quantum computing, Sobel.

## I. INTRODUZIONE

L'identificazione dei bordi è una tecnica fondamentale nell'elaborazione delle immagini, utilizzata per individuare i contorni degli oggetti e le variazioni di intensità in una scena. Questa metodologia rappresenta una componente cruciale in numerosi ambiti, dalla computer vision alla robotica, fino all'analisi medica delle immagini. Nonostante i progressi significativi nell'elaborazione classica delle immagini, l'aumento della risoluzione e della complessità dei dati visivi ha portato a sfide computazionali sempre maggiori, rendendo spesso i metodi tradizionali onerosi in termini di tempo e risorse.

Nei primi anni '60, i filtri di Sobel [1] e Prewitt furono introdotti come i primi metodi strutturati per il rilevamento dei bordi. Entrambi basati su operatori convolutivi, questi algoritmi utilizzano maschere<sup>1</sup> discrete per approssimare il gradiente di intensità in un'immagine, rilevando così variazioni significative nei livelli di grigio. Sebbene semplici ed efficienti, essi risultano sensibili al rumore e con conseguente difficoltà nel gestire bordi sfumati. Negli anni '80, l'algoritmo di Canny [2] rappresentò una svolta significativa grazie all'introduzione di un approccio più sofisticato al rilevamento dei bordi; ancora oggi, rimane uno tra i metodi più utilizzati. Con l'avanzare della tecnologia e l'aumento della potenza computazionale, il rilevamento dei bordi ha beneficiato dell'utilizzo di tecniche basate sull'intelligenza artificiale, come le *reti neurali convoluzionali* (CNN). Soltanto recentemente l'elaborazione

quantistica delle immagini ha iniziato a emergere come un campo innovativo e promettente, aprendo la strada a potenziali accelerazioni esponenziali.

In questo progetto sarà presentata un'applicazione del *Quantum Hadamard Edge Detection* (QHED) [3]. La Sez. II offre una panoramica sulle attuali tecniche di rappresentazione quantistica delle immagini e una disamina delle tecniche utilizzate nell'esperimento. La Sez. III è invece dedicata all'implementazione della soluzione proposta, utilizzando la libreria Qiskit [4]. In ultimo, sono analizzati i risultati (Sez. IV).

## II. BACKGROUND

### A. Soluzioni classiche

Le tecniche classiche per la rilevazione dei contorni prevedono l'utilizzo di kernel specifici, che permettono di calcolare nuovi valori di intensità per i pixel dell'immagine. Tra i metodi più famosi vi è sicuramente l'operatore di Sobel, che si può descrivere tramite l'applicazione di 2 kernel all'immagine originale:

$$\mathbf{G}_x = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +2 & 0 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Un'altra opzione, forse tra le più utilizzate al giorno d'oggi, è l'operatore di Canny. Questo metodo ha un funzionamento del tutto analogo al precedente, ma aggiunge meccanismi per la riduzione del rumore nell'immagine [5]. La complessità di queste tecniche è lineare rispetto al numero di pixel totali dell'immagine, dato che è necessaria una visita completa.

Per un'immagine  $M \times L = N$ , si utilizzano  $n$  bit per enumerare i pixel dell'immagine in formato binario, dove  $N = 2^n$ , ottenendo una complessità rispetto ai bit esponenziale  $O(2^n)$ . In questo progetto verrà mostrato come, dopo una prima fase di preparazione, è possibile risolvere il problema in tempo costante  $O(1)$ .

### B. Sistemi quantistici

Analogamente a quanto accade nei computer classici, i computer quantistici utilizzano i **quantum bit**, chiamati *qubit*. I qubit rappresentano la più piccola unità di informazione e sono implementati attraverso sistemi quantistici bidimensionali. Le quantità fisiche comunemente usate per questo scopo

<sup>1</sup>Con il termine *maschera* o *kernel* di convoluzione si fa riferimento ad una piccola griglia sovrapposta in maniera iterativa a tutti i pixel dell'immagine, aggiornando i valori in base ai primi vicini.

includono lo spin di una particella o gli stati eccitati degli atomi.

Assemblando più qubit, è possibile costruire sistemi quantistici la cui dinamica è descritta da spazi vettoriali complessi. Un sistema composto da un singolo qubit è completamente descritto da

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Mentre un bit classico può assumere soltanto uno tra due possibili valori (generalmente 0 e 1), un bit quantistico è denotato da una combinazione lineare dei suoi stati base, pesata dai coefficienti complessi  $\alpha$  e  $\beta$ . Tali coefficienti sono detti *ampiezze di probabilità* e rispettano la seguente:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2)$$

Per descrivere lo stato di un sistema quantistico composto da più qubit, è necessario effettuare un'operazione chiamata *prodotto tensoriale* tra i singoli stati coinvolti. Ad esempio, considerati i vettori di stati

$$|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

il loro prodotto tensore è definito come:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Equivalentemente, può essere scritto come  $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$  o  $|\psi_1\psi_2\rangle$ .

### C. Circuiti quantistici

Analogamente a quanto accade nei circuiti digitali classici, i circuiti quantistici eseguono calcoli manipolando le informazioni immagazzinate nei qubit. Questo viene realizzato attraverso dispositivi chiamati **quantum gate** (*porte quantistiche*), che sono l'equivalente quantistico delle porte logiche classiche ma operano secondo i principi della meccanica quantistica. L'applicazione di una matrice *complessa unitaria* ad uno stato quantistico modella matematicamente l'azione di un gate su di esso. Formalmente, data  $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  l'unitaria associata ad una porta logica e dato lo stato  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$ , lo stato risultante dall'applicazione è definito come:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (4)$$

*Gate rilevanti:* Di seguito sono descritti alcuni gate quantistici di rilevante importanza. Tra questi, figurano i *gate di Pauli*.

- **X** (NOT quantistico): trasforma lo stato  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$  e viceversa;

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Y**: combina una rotazione coniugata complessa con un'inversione, utile per applicazioni che coinvolgono trasformazioni nel piano complesso;

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

- **Z**: applica una fase negativa allo stato  $|1\rangle$  senza influenzare  $|0\rangle$ .

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Altro gate fondamentale è quello di *Hadamard*, essenziale per creare stati di sovrapposizione. L'unitaria che lo rappresenta è:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In particolare, si noti che:

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} =: |+\rangle \quad (5)$$

$$H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} =: |-\rangle \quad (6)$$

Il *Controlled-NOT* (CNOT) è un'operazione che coinvolge due qubit, dove uno funge da controllo sull'altro. Il gate inverte lo stato del qubit target se il qubit di controllo è  $|1\rangle$ . La sua matrice è:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### D. Quantum Image Processing

La **Quantum Image Processing** (*processamento quantistico dell'immagine*) si concentra sullo sviluppo di algoritmi in grado di codificare immagini all'interno di circuiti quantistici e di processarle utilizzando operazioni quantistiche.

*Rappresentazione delle immagini:* Tra le varie tecniche proposte negli ultimi anni, la **Quantum Probability Image Encoding (QPIE)** [6] utilizza le ampiezze di probabilità di uno stato quantistico per memorizzare i valori dei pixel di un'immagine classica. Dati  $n$  qubit, essa consente di rappresentare un'immagine in toni di grigio di  $2^n$  pixel tramite una superposizione di stati. In generale, il numero di qubit necessari è calcolato tramite:

$$n = \lceil \log_2 N \rceil \quad (7)$$

Come mostrato in Fig. 1, ogni pixel può essere numerato utilizzando stringhe binarie (00, 01, 10, 11); l'intera immagine è quindi rappresentabile come una matrice  $2 \times 2$  delle intensità di colore. In questa notazione, il singolo termine  $I_i$  corrisponde all'intensità del pixel in posizione  $(x, y)$  (rispetto all'angolo in alto a sinistra), tale per cui  $i = xy_{10}$ .

Per rappresentare l'immagine come una superposizione di stati base, è necessario che venga rispettata l'Eq. 2; bisogna infatti normalizzare le singole intensità come segue:

$$c_i = \frac{I_i}{\sqrt{\sum_k I_k^2}} \quad (8)$$

In Fig. 2 viene mostrato il risultato della normalizzazione.

L'immagine può quindi essere scritta come:

$$|\text{Img}\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle$$

che generalizzata a  $n$  qubit diventa:

$$|\text{Img}\rangle = \sum_{i=1}^{2^n} c_i |i\rangle \quad (9)$$

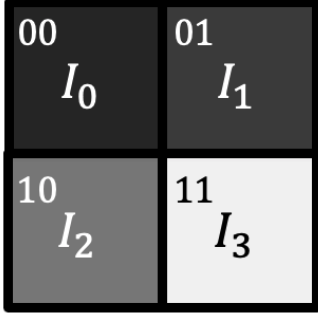


Figura 1. Rappresentazione di un'immagine B&W 2x2 pixel.

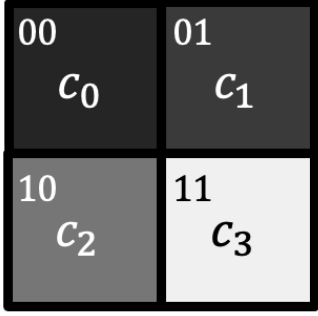


Figura 2. Rappresentazione della Fig. 1 tramite QPIE.

### E. Quantum Hadamard Edge Detection

L'algoritmo di **Quantum Hadamard Edge Detection (QHED)** [6] rappresenta il fulcro di questo progetto. L'idea alla base è quella di utilizzare il gate di Hadamard. Come mostrato nella Sottosez. II-D, esso trasforma  $|0\rangle$  in  $|+\rangle$  e, in particolare,  $|1\rangle$  in  $|-\rangle$ . Inoltre, in base alla Eq. 9, ogni pixel può essere identificato da una stringa binaria del tipo

$$|b_{n-1}b_{n-2} \dots b_1b_0\rangle, \quad b_i \in \{0, 1\}$$

Per pixel orizzontalmente adiacenti presi a due a due, le stringhe sono:

$$|b_{n-1}b_{n-2} \dots b_10\rangle, |b_{n-1}b_{n-2} \dots b_11\rangle$$

ossia si differenziano soltanto per l'ultimo qubit più a destra, denotato con  $q_0$ .

Applicando il gate  $H$  a  $q_0$ , si ottiene una trasformazione la cui unitaria è rappresentata da:

$$I_{2^{n-1}} \otimes H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se a questo punto tale trasformazione è applicata allo stato che codifica l'immagine nella notazione QPIE (Eq. 9), si ottiene:

$$(I_{2^{n-1}} \otimes H_0) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 - c_1 \\ c_2 + c_3 \\ c_2 - c_3 \\ \vdots \\ c_{N-2} + c_{N-1} \\ c_{N-2} - c_{N-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si noti che ciò permette di esplicitare il gradiente di coppie di pixel adiacenti, in corrispondenza dei coefficienti in posizione *pai* nel vettore di stato risultante  $((0, 1), (2, 3), \dots)$ . Lo stato dell'Eq. 10 può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 - c_1 \\ c_2 + c_3 \\ c_2 - c_3 \\ \vdots \\ c_{N-2} + c_{N-1} \\ c_{N-2} - c_{N-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{bmatrix} c_0 + c_1 \\ 0 \\ c_2 + c_3 \\ 0 \\ \vdots \\ c_{N-2} + c_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 - c_1 \\ 0 \\ c_2 - c_3 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{N-2} - c_{N-1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{sum}\rangle \otimes |0\rangle + |\text{dif}\rangle \otimes |1\rangle) \end{aligned}$$

da cui si evince che, misurando il circuito condizionato sul fatto che  $q_0$  sia nello stato  $|1\rangle$ , è possibile ottenere i gradienti attraverso un'analisi statistica. Per ottenere i gradienti orizzontali tra coppie di pixel *dispari*  $((1, 2), (3, 4), \dots)$ , è possibile effettuare una permutazione preliminare del vettore dei qubit:

$$(c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T \mapsto (c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, c_0)^T \quad (11)$$

e procedere poi con l'applicazione del circuito.

**Variazione del QHED:** Per evitare la permutazione (11), in questo progetto è impiegata una versione estesa del QHED. Essa prevede l'utilizzo di un qubit aggiuntivo  $q_a$ , utilizzato per creare ridondanza di informazione. Inizialmente, il qubit aggiuntivo è inizializzato in  $|0\rangle$ ; segue un'applicazione del gate  $H$ , permettendo di ottenere lo stato:

$$|\text{Img}\rangle \otimes \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Successivamente, si applica la matrice di permutazione:

$$D_{2^{n+1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

per ottenere il nuovo stato:

$$D_{2^{n+1}} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_{N-1} \\ c_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

A questo punto, viene applicato il gate  $H$  a  $q_a$ ; questo permette di ottenere, in un'unico passo, sia i gradienti relativi alle coppie *pari* sia quelli relativi alle coppie *dispari*:

$$(I_{2^n} \otimes H_a) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_{N-1} \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 - c_1 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \\ c_2 + c_3 \\ c_2 - c_3 \\ \vdots \\ c_{N-1} + c_0 \\ c_{N-1} - c_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

In ultimo è possibile ottenere, tramite analisi statistica, il valore di tutti i gradienti orizzontali per le misurazioni in cui  $q_a$  è nello stato  $|1\rangle$ .

#### F. Modellazione del rumore

### III. IMPLEMENTAZIONE

### IV. RISULTATI

### V. CONCLUSIONE

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] I. Sobel and G. Feldman, "An isotropic 3x3 image gradient operator," 1968, presented at the Stanford Artificial Intelligence Laboratory (SAIL). [Online]. Available: [https://www.researchgate.net/publication/281104656\\_An\\_Isotropic\\_3x3\\_Image\\_Gradient\\_Operator](https://www.researchgate.net/publication/281104656_An_Isotropic_3x3_Image_Gradient_Operator)
- [2] J. Canny, "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-8, no. 6, pp. 679–698, 1986.
- [3] X.-W. Yao, H. Wang, Z. Liao, M.-C. Chen, J. Pan, J. Li, K. Zhang, X. Lin, Z. Wang, Z. Luo, W. Zheng, J. Li, M. Zhao, X. Peng, and D. Suter, "Quantum image processing and its application to edge detection: Theory and experiment," *Physical Review X*, vol. 7, no. 3, Sep. 2017. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.7.031041>
- [4] Qiskit Development Team, "Qiskit: An open-source framework for quantum computing," <https://qiskit.org/>, 2021, accessed: 2025-01-17. [Online]. Available: <https://qiskit.org/>
- [5] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing (3rd Edition)*. USA: Prentice-Hall, Inc., 2006.
- [6] X.-W. Yao, H. Wang, Z. Liao, M.-C. Chen, J. Pan, J. Li, K. Zhang, X. Lin, Z. Wang, Z. Luo, W. Zheng, J. Li, M. Zhao, X. Peng, and D. Suter, "Quantum image processing and its application to edge detection: Theory and experiment," *Phys. Rev. X*, vol. 7, p. 031041, Sep 2017. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.031041>