

Quantum Hadamard Edge Detection

Manuel Di Agostino

12 febbraio 2025

Università di Parma

Background

- Edge detection

- Quantum computing

- Circuiti quantistici

- Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

Background

- Edge detection

- Quantum computing

- Circuiti quantistici

- Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

Background

- Edge detection

- Quantum computing

- Circuiti quantistici

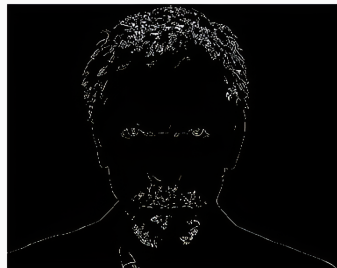
- Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

- **Goal:** identificare oggetti in un'immagine, tramite *contorni*
- Ma anche:
 - estrazione di texture, pattern
 - motion recognition
 - image restoration



- Lavorano sull'immagine in scala di grigi
- Approssimano il gradiente dell'intensità
- Utilizzano operatori convolutivi (*kernel*)

- Fu introdotto negli anni '60 [1]
- Applica due kernel di convoluzione

$$\mathbf{G}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +2 & 0 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{direzione orizzontale}}, \quad \mathbf{G}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{direzione verticale}}$$

- Fu introdotto negli anni '60 [1]
- Applica due kernel di convoluzione

$$\mathbf{G}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +2 & 0 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{direzione orizzontale}}, \quad \mathbf{G}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{direzione verticale}}$$

- Il nuovo valore di intensità del pixel $p_{j,k}$ è

$$\tilde{p}_{j,k} = \sqrt{G_x(p_{j,k})^2 + G_y(p_{j,k})^2}$$

Filtri di Sobel

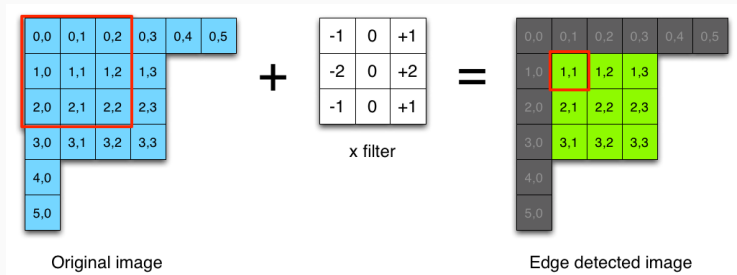


Figura 1: Applicazione orizzontale del kernel di Sobel.

- Complessità *lineare* rispetto al numero di pixel!

Background

Edge detection

Quantum computing

Circuiti quantistici

Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

Sistemi quantistici

- Unità di informazione: **qubit**
- Notazione *di Dirac*

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- Verificano

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Sistemi quantistici

- Unità di informazione: **qubit**
- Notazione *di Dirac*

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- Verificano

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Sistemi di più qubit descritti utilizzando il *prodotto tensore*

$$|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{bmatrix}.$$

Background

Edge detection

Quantum computing

Circuiti quantistici

Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

Quantum gate

- L'azione di un **quantum gate** è modellata matematicamente tramite l'applicazione di una matrice *complessa unitaria* ad uno stato quantistico

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

Quantum gate

- L'azione di un **quantum gate** è modellata matematicamente tramite l'applicazione di una matrice *complessa unitaria* ad uno stato quantistico

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

- Porte rilevanti:
 - Gate di Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Gate di Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Background

Edge detection

Quantum computing

Circuiti quantistici

Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

Due obiettivi principali:

- Codifica dell'immagine nei circuiti
 - Flexible Representation of Quantum Images (FRQI) [2]
 - Novel Enhanced Quantum Representation (NEQR) [3]
 - **Quantum Probability Image Encoding (QPIE) [4]**

Due obiettivi principali:

- Codifica dell'immagine nei circuiti
 - Flexible Representation of Quantum Images (FRQI) [2]
 - Novel Enhanced Quantum Representation (NEQR) [3]
 - **Quantum Probability Image Encoding (QPIE)** [4]
- Algoritmi di processamento
 - QSobel [5]
 - **Quantum Hadamard Edge Detection (QHED)** [4]

Quantum Probability Image Encoding

- Valori di intensità dei pixel codificati nelle ampiezze di probabilità dello stato quantistico
- Immagine di N pixel. Qubit necessari:

$$n = \lceil \log_2 N \rceil$$

Quantum Probability Image Encoding

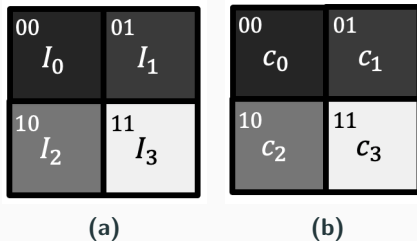


Figura 2: (2a) rappresentazione classica, (2b) rappresentazione quantistica.

- Pixel numerati utilizzando stringhe binarie
- Intensità normalizzate secondo

$$c_i = \frac{I_i}{\sqrt{\sum_k I_k^2}}$$

Quantum Probability Image Encoding

- Nell'esempio (2b) si ottiene

$$|\text{img}\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Quantum Probability Image Encoding

- Nell'esempio (2b) si ottiene

$$|\text{img}\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

- Generalizzando per n qubit

$$|\text{img}\rangle = \sum_{i=1}^{2^n} c_i |i\rangle = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

Quantum Hadamard Edge Detection i

- Fa uso della QPIE
- **Idea di base:** utilizzare il *gate di Hadamard* sul qubit q_0

$$I_{2^{n-1}} \otimes H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Quantum Hadamard Edge Detection ii

- Applicando questa trasformazione a $|\text{img}\rangle$ si ottiene lo stato

$$(I_{2^{n-1}} \otimes H_0) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} c_0 + c_1 \\ c_0 - c_1 \\ c_2 + c_3 \\ c_2 - c_3 \\ \vdots \\ c_{N-2} + c_{N-1} \\ c_{N-2} - c_{N-1} \end{bmatrix}$$

che esplicita il gradiente di coppie (*pari*) di pixel adiacenti

- Questo è riconducibile a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{sum}\rangle \otimes |0\rangle + |\text{dif}\rangle \otimes |1\rangle)$$

- **Punto chiave:** misurare il circuito a condizione che q_0 sia nello stato $|1\rangle$

Background

Edge detection

Quantum computing

Circuiti quantistici

Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

Background

- Edge detection

- Quantum computing

- Circuiti quantistici

- Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

Background

Edge detection

Quantum computing

Circuiti quantistici

Quantum Image Processing

Implementazione

Risultati

Conclusione

- [1] Irwin Sobel e Gary Feldman. «An Isotropic 3x3 Image Gradient Operator». In: (1968). Presented at the Stanford Artificial Intelligence Laboratory (SAIL). URL: https://www.researchgate.net/publication/281104656_An_Isotropic_3x3_Image_Gradient_Operator.
- [2] Phuc Q. Le, Fangyan Dong e Kaoru Hirota. «A flexible representation of quantum images for polynomial preparation, image compression, and processing operations». In: *Quantum Information Processing* 10.1 (2011), pp. 63–84. DOI: 10.1007/s11128-010-0177-y. URL: <https://doi.org/10.1007/s11128-010-0177-y>.

- [3] Yi Zhang et al. «NEQR: a novel enhanced quantum representation of digital images». In: *Quantum Information Processing* 12.8 (2013), pp. 2833–2860. DOI: 10.1007/s11128-013-0567-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s11128-013-0567-z>.
- [4] Xi-Wei Yao et al. «Quantum Image Processing and Its Application to Edge Detection: Theory and Experiment». In: *Physical Review X* 7.3 (2017), p. 031041. DOI: 10.1103/PhysRevX.7.031041. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.031041>.
- [5] Yi Zhang et al. «QSobel: A novel quantum image edge extraction algorithm». In: *Science China Information Sciences* 57.11 (2014), pp. 1–9. DOI: 10.1007/s11432-014-5158-9. URL: <https://doi.org/10.1007/s11432-014-5158-9>.