(1) (2.5 Punkte) Gegeben ist das folgende System linearer Gleichungen:

$$\begin{array}{rrrrl} 16x & -4y & -4z & & = 32 \\ -4x & 17y & z & -4w & = 0 \\ -4x & y & 17z & -4w & = -4 \\ & -4y & -4z & 18w & = -3 \end{array}$$

Dieses kann in Matrixform d.h. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} 16 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 17 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 17 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

a) (1 Punkt) **A** ist positiv-definit. Kann die *Cholesky-Zerlegung* für **A** angewendet werden und warum bzw. warum nicht? Falls ja, berechnen Sie diese per Hand. Falls die Zerlegung nicht angewandt werden kann berechnen Sie stattdessen die *LU-Zerlegung* von **A** per Hand. Arbeiten Sie in beiden Fällen mit Brüchen und Wurzeln nicht mit Dezimalzahlen. Erklären Sie die Methode welche nicht verwendet wird. Was ist der Unterscheid der beiden?

b) (1 Punkt) Lösen Sie das Gleichungssystem durch Vor- bzw. Rückwärtseinsetzen unter Verwendung der Ergebnisse der Cholesky- oder der LU-Zerlegung (siehe 1.a). Arbeiten Sie mit Brüchen und Wurzeln nicht mit Dezimalzahlen. Wie unterscheidet sich das Vor- und Rückwärtseinsetzen zwischen den beiden Zerlegungen?

c) (0.5 Punkte) Berechnen Sie per Hand eine Iteration des *Gauß-Seidel*-Verfahrens.
`Hinweis:` Starten Sie mit dem Nullvektor als Initialisierung.

a) Für die Cholesky-Zerlegung muss A:

positiv definit ✓

symmetrisch ✓

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{21} \cdot l_{11} & l_{11} \cdot l_{31} & l_{11} \cdot l_{41} \\ l_{21} \cdot l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} & l_{21} l_{41} + l_{22} \cdot l_{42} \\ l_{31} \cdot l_{11} & l_{31} \cdot l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} & l_{31} \cdot l_{31} + l_{32} \cdot l_{32} + l_{33} \cdot l_{33} & l_{31} l_{41} + l_{32} l_{42} + l_{33} l_{43} \\ l_{41} \cdot l_{11} & l_{41} \cdot l_{21} + l_{42} \cdot l_{22} & l_{41} l_{31} + l_{42} l_{32} + l_{43} \cdot l_{33} & l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 17 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 17 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{16} = 4$$

$$l_{21} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$l_{31} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$l_{41} = \frac{0}{4} = 0$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{17 - (-1)^2} = 4$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot l_{21}}{l_{22}} = \frac{1 - (-1) \cdot -1}{4} = 0$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{17 - 0^2 - (-1)^2} = 4$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} \cdot l_{21}}{l_{22}} = \frac{-4 - 0 \cdot -1}{4} = -1$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41} \cdot l_{31} - l_{42} \cdot l_{32}}{l_{33}} = \frac{-4 - 0 \cdot -1 - (-1) \cdot 0}{4} = -1$$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{18 - 0^2 - 1 - 1} = 4$$

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Cholesky Zerlegung kann nur angewandt werden, wenn die obrigen Bedingungen gegeben sind. Die LU-Zerlegung kann auf alle Matrizen quadratischer Gestalt angewandt werden.

Bei LU-Zerlegung wird Matrix in zwei Matrizen aufgeteilt sodass

$$L \cdot U = A$$

b)

Vorwertseinsetzen:

$$L \cdot y = b$$

$$4y_1 = 32 \Rightarrow y_1 = 8$$

$$-1y_1 + 4y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{8}{4} = 2$$

$$-1y_1 + 4y_3 = -4 \Rightarrow y_3 = \frac{4}{4} = 1$$

$$-1y_2 - 1y_3 + 4y_4 = 3 \Rightarrow y_4 = \frac{0}{4} = 0$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen

$$L^T x = y \qquad L^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

$$4x_3 - x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}$$

$$4x_2 - x_4 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$4x_1 - 1x_2 - 1x_3 = 8$$

$$4x_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{8{,}75}{4} = \frac{35}{16}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{35}{16} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bei LU Zerlegung:

$A \cdot x = b$ lösen via $Ly = b$ und danach

$Ux = y$

c) Gauss Seidel Algorithmus:

$$b = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 17 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 17 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = (D+L)^{-1} \left(b - U x^{(k)} \right)$$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 17 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 17 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 18 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 32 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

D+L invertieren:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{Z1 \\ /16}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{Z2 \\ +4Z1 \\ /17}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{272} & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 17 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{Z3 \\ +4Z_1 \\ -Z_2 \\ /17}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{272} & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{289} & -\frac{1}{289} & \frac{1}{17} & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{Z4 \\ +4Z2 \\ +4Z3 \\ /18}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{272} & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{289} & -\frac{1}{289} & \frac{1}{17} & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 18 & \frac{33}{5202} & \frac{64}{5202} & \frac{4}{306} & \frac{1}{18} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{68} & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ \frac{4}{289} & \frac{-1}{289} & \frac{1}{17} & 0 \\ \frac{11}{1734} & \frac{32}{2601} & \frac{2}{153} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8/17 \\ 60/289 \\ -83/5202 \end{pmatrix}$$