(1) (2 Punkte) Angenommen f ist proportional zu g. Für eine Konstante k gilt, dass $f = kg$. Konstante k wird Proportionalitätskonstante genannt. Die Geschwindigkeit, mit der die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten abnimmt, ist proportional zur Konzentration, doch die Proportionalitätskonstante ist unbekannt. Die Blutkonzentration wird zweimal gemessen: beim ersten Mal beträgt sie 8 mM direkt nach der Injektion, beim zweiten Mal 5,5 mM vier Stunden später. Folgende Differentialgleichung $\frac{dy}{dt} = -ky$ beschreibt die Konzentration des Medikaments im Blut. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante anhand der gegebenen Informationen. Bestimmen Sie die Konzentration 24 Stunden nach der Injektion.

$$y' = -k \cdot y$$

$$y(0) = 8$$
$$y(4) = 5{,}5$$

$$\frac{dy}{dt} = -k \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -k \, dt$$

$$\ln|y| + c_1 = -k \cdot t + C_2$$

$$\ln|8| = -k \cdot 0 + C$$

$$\Rightarrow C = \ln(8)$$

$$\ln|5{,}5| = -k \cdot 4 + \ln(8)$$

$$\Rightarrow k = \frac{-\ln(5{,}5) + \ln(8)}{4} = 0{,}09367$$

$$\ln|y| = -k \cdot t + C$$

$$|y| = e^{-kt \cdot \ln(8)}$$

$$y = 8 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$y(24) = 8 \cdot e^{-0{,}09367 \cdot 24} = 0{,}84319$$

(2) (2 Punkte)

a) (0.5 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$y(x) = e^{3x}.$$

Ist diese Funktion eine Lösung der folgenden Differentialgleichung?

$$-y'' + 2y' = 3y$$

b) (0.5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y = x\cos(\ln|x|)$$

eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist

$$x^2y'' - xy' + 2y = 0$$

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) = x^3(C + \ln|x|)$$

eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist

$$xy' - 3y = x^3.$$

Finden sie die partikuläre Lösung für folgenden Anfangswert

$$y(1) = 12$$

a)

$y = e^{3x}$

$y' = 3e^{3x}$

$y'' = 9e^{3x}$

$-9 \cdot e^{3x} + 6 \cdot e^{3x} = 3e^{3x}$

$-3e^{3x} = 3e^{3x}$

FALSCH

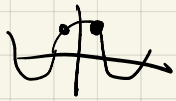
b) $y = x \cdot \cos(\ln|x|)$

$y' = 1 \cdot \cos(\ln|x|) + x \cdot -\sin(\ln|x|) \cdot \frac{1}{x}$

$= \cos(\ln|x|) - \sin(\ln|x|)$

$y'' = -\sin(\ln|x|) \cdot \frac{1}{x} - \cos(\ln|x|) \cdot \frac{1}{x}$

$$x^2 y'' - x\cdot y' + 2y = 0$$



$$x^2\left(-\frac{\sin(\ln|x|)-\cos(\ln|x|)}{x}\right) - x\cdot(\cos(\ln(|x|))-\sin(\ln|x|)) + 2x\cdot\cos(\ln|x|)$$

ü

$$-x\cdot\cancel{\sin}(\ln|x|) - x\cdot\cancel{\cos}(\ln|x|) - x\cdot\cancel{\cos}(\ln|x|) + x\cdot\cancel{\sin}(\ln|x|)$$

$$+ 2x\cdot\cancel{\cos}(\ln|x|) = 0$$

$$0 = 0$$

c) $y = x^3\cdot(c+\ln|x|)$

$$y' = 3x^2\cdot(c+\ln|x|) + x^3\cdot\left(0+\frac{1}{x}\right)$$

$$= 3x^2\cdot(c+\ln|x|) + x^2$$

$$x\cdot y' - 3y = x^3$$

$$3x^3\,\cancel{(c+\ln(|x|))} + x^3 - 3x^3\cdot\cancel{(c+\ln|x|)} = x^3$$

$$x^3 = x^3$$

$$y(1) = 12$$

$$1^3(c+\overset{=0}{\ln 1}) = c = 12$$

(3) (1 Punkt) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + e^{2x}}{y}.$$

Berechnen Sie eine allgemeine Lösung der Gleichung durch Trennung der Variablen.

$$y' = \frac{x + e^{2x}}{y}$$

$$y' \cdot y = x + e^{2x} \qquad \Big| \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = x + e^{2x} \qquad \Big| \cdot dx$$

$$dy \cdot y = (x + e^{2x}) dx \qquad \Big| \int$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + c_2$$

$$y^2 + 2c_1 = x^2 + e^{2x} + 2c_2$$

$$y = \sqrt{x^2 + e^{2x}} + C$$

(4) (2 Punkte) Die Wellengleichung in einer Dimension $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ beschreibt die Vibration einer Saite mit Abhängigkeiten für Position (x) und Zeit (t) und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{(initiale Verschiebung)}$$
$$u_t(x,0) = g(x) \quad \text{(initiale Geschwindigkeit)}$$

für $-\infty < x < \infty, t > 0$. Eine allgemeine Lösung der 1D Wellengleichung ist gegeben durch d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\mathrm{d}s.$$

Lösen Sie die Wellengleichung für

$$c = 1, \qquad u(x,0) = 5\sin(x), \qquad u_t(x,0) = \frac{1}{5}\cos(x).$$

integriert: $\frac{1}{5}\sin(x)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\cdot[5\sin(x+t) + 5\cdot\sin(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \frac{1}{5}\cos(s)\,ds$$

$$= \frac{5\sin(x+ct)}{2} + \frac{5\sin(x-t)}{2} + \frac{\sin(x+ct)}{10} - \frac{\sin(x-ct)}{10}$$

$$u(x,t) = \frac{13}{5}\sin(x+t) + \frac{12}{5}\sin(x-t)$$