Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (1 Punkt) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) (0,25 Punkte)

$$\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(5x))dx$$

b) (0,25 Punkte)

$$\int \frac{x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

c) (0,25 Punkte)

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x$$

d) (0,25 Punkte)

$$\int \cos(x)\cdot x^2\,\mathrm{d}x$$

a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(5x)\right)dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \cos(5x)\,dx$

$= \arcsin(x) + \frac{\sin(5x)}{5} + C$

b) $\int \frac{x-1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx$ $\quad\Big|$ sub: $x+1=u$, $dx = 1du$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln(u)\,du$ $\quad\Big|$ resub: $u = x+1$

$= \ln(|x+1|) + C$

c) $\int \ln(x)$ $\quad \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$

$f' = 1 \quad g = \ln(x)$

$= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln(x) - x + C$

d) $\int \cos(x) \cdot x^2\, dx$ $\quad \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$

$f = \sin(x) \Rightarrow f' = \cos(x)$

$g = x^2$

$= \sin(x) \cdot x^2 - \int \sin(x) \cdot 2x\, dx$

$= \sin(x) \cdot x^2 - 2 \int x \cdot \sin(x)\, dx$ $\quad \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$

$f = -\cos(x)$

$g = x$

$= \sin(x) \cdot x^2 - 2\left(-x \cdot \cos(x) - \int -\cos(x)\, dx\right)$

$= \sin(x) \cdot x^2 - 2\left(-x \cdot \cos(x) + \sin(x)\right)$

$= \sin(x) \cdot x^2 + 2x \cdot \cos(x) - 2\sin(x) + C$

(2) (0,75 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^8 \sqrt{1+x^2}\, dx\,. \qquad (\star)$$

Substituieren Sie dazu $x = \sinh(u)$ gemäß $dx = \cosh(u)\, du$. Transformieren Sie die Grenzen des bestimmten Integrals und berechnen Sie das über u formulierte Integral. Es können die Identitätsgleichung und das Addionstheorem der Hyperbelfunktionen verwendet werden.

Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe des *Julia* Packages **QuadGK** (numerische Integration).

Snippet:

```
# Bestimmtes Integral von x^2 - 2*x fuer 0 < x < 8
using QuadGK
quadgk(x -> x^2 - 2*x, 0.0, 8.0)
```

Mit `QuadGK.quadgk()` wird ein bestimmtes Integral mittels numerischer Quadratur berechnet. Sowohl der numerische Wert als auch ein geschätzer Fehler werden zurückgegeben.

$\sinh(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

$\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

$= \int \sqrt{1 + (\sinh(u))^2} \cdot \cosh(u)\, du$

$= \int \cosh(u) \cdot \cosh(u)\, du$

sub: $\sinh(u) = x$

$\frac{dx}{du} = \cosh(x) \Rightarrow dx = \cosh(x) \cdot du$

$\cosh^2(t) - \sinh^2(u) = 1$

$\cosh^2(u) = \frac{1}{2}\left(1 + \cosh(2u)\right)$

$= \frac{1}{2} \int (1 + \cosh(2u))\, du$

$= \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{2} \sinh(2u)\right) \quad \Big| \sinh(2u) = 2 \sinh(u) \cdot \cosh(u)$

$= \frac{1}{2} \left(u + \sinh(u) \cdot \cosh(u)\right) \quad \Big| \cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u)$

RESUB

$= \frac{1}{2} \left(\sinh^{-1}(x) + x \cdot \sqrt{1+x^2}\right) \quad \Big| \sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$= \frac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2}\,) + C$

Bestimmung des über u formulierte integral:

$$\int_0^8 \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{\sinh^{-1}(0)}^{\sinh^{-1}(8)} (1 + \cosh(2u))\, du$$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sinh^{-1}(8) + 8 \cdot \cosh(\sinh^{-1}(8))\right) -$

$\frac{1}{2} \cdot (\underset{\overset{!}{0}}{\sinh^{-1}(8)} + 0)$

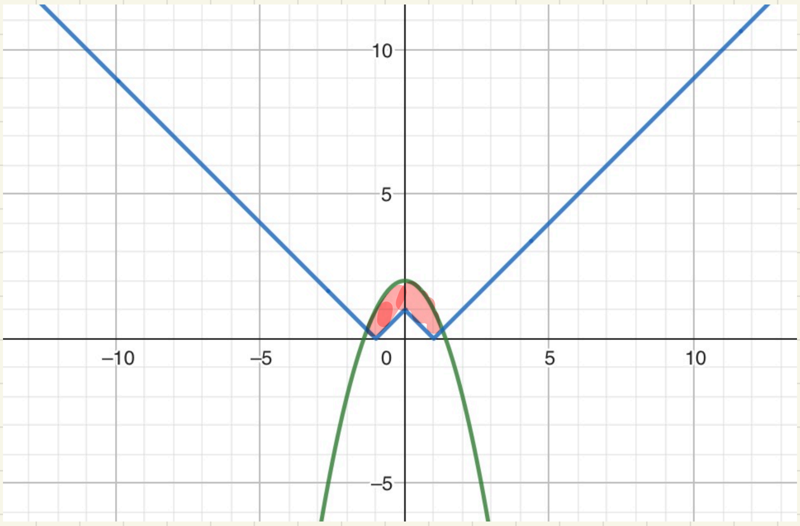
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sinh^{-1}(8) + 8 \cdot \cosh(\sinh^{-1}(8))\right) \approx 33{,}63$

(3) (1 Punkt) Berechnen Sie die von den Funktionen $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = ||x| - 1|$ eingeschlossene Fläche. Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze an und integrieren Sie von Hand nach x zwischen den Stellen $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ und $\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}$. $\approx 1{,}30$

$\approx -1{,}30$

$f(x) = -x^2 + 2$

$g(x) = ||x| - 1|$



$$\int -x^2 + 2 = \frac{-x^3}{3} + 2x + c$$

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}^{\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}} -x^2 + 2 \approx 3{,}75$$

A_2 berechnen:

			integral:
$f(x) = 1 - x$	für	$0 \leq x \leq 1$	$x - \frac{x^2}{2}$
$f(x) = 1 + x$	für	$-1 \leq x \leq 0$	$x + \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x - 1$	für	$x \geq 1$	$\frac{x^2}{2} - x$
$f(x) = -x - 1$	für	$x \leq -1$	$-\frac{x^2}{2} - x$

$$A_2 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}^{-1} -x - 1 + \int_{-1}^{0} 1 + x + \int_{0}^{1} 1 - x + \int_{1}^{\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}} x - 1$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{1{,}30^2}{2} - 1{,}30\right) + 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) +$$

$$1 - \frac{1}{2} - 0 + \frac{1{,}30^2}{2} - 1{,}30 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{1{,}30^2}{2} - 1{,}30 + 1 = 0{,}545$$

$$A_{ges} = 3{,}75 - 0{,}545 = 3{,}202$$

(4) (3,25 Punkte) Die Messung einer Beschleunigung $a(t)$ ergibt die Funktion

$$a(t) = \begin{cases} 1.2 & 0 \leq t \leq 50\,, \\ 0 & 50 < t \leq 200\,, \\ -\frac{t}{100} + 2 & 200 < t \leq 300\,, \end{cases}$$

welche zusätzlich grafisch in Abbildung 1 dargestellt ist.

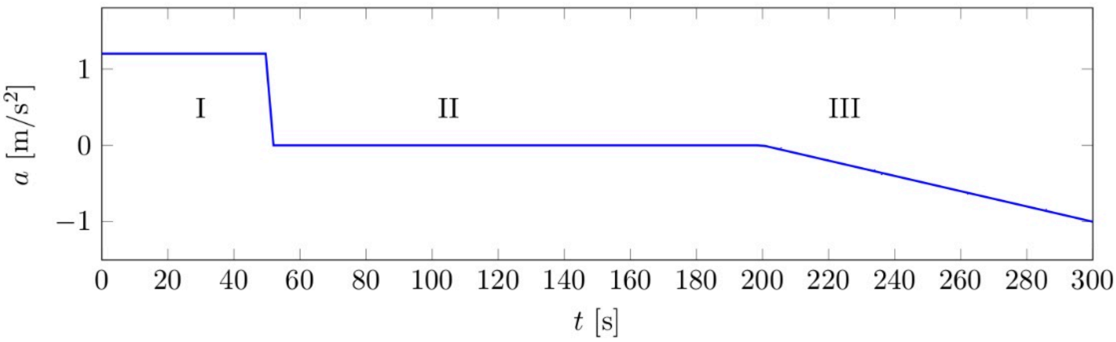


Abbildung 1: Gemessene Beschleunigung $a(t)$.

a) (1.5 Punkte) Geschwindigkeit $v(t)$ und Position $x(t)$ können mittels (mehrmaliger) Integration der Beschleunigung $a(t)$ berechnet werden. Lösen Sie dazu das Anfangswertproblem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \dot{v}(t) = a(t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \dot{x}(t) = v(t)\,,$$
$$v(0) = v_0 = x(0) = x_0 = 0\,.$$

Skizzieren Sie die beiden Verläufe $v(t)$ und $x(t)$ analog zu Abbildung 1. Bestimmen Sie weiters den Wert von $x(300)$.

Hinweis: Achten Sie insbesondere auf die unterschiedlichen Integrationsgrenzen. Die Geschwindigkeit $v(t)$ für $200 < t \leq 300$ ist z. B. abhängig von der Geschwindigkeit im Intervall $0 \leq t \leq 200$.

I: $v(t) = \int 1{,}2 \, dt = 1{,}2t$ $\quad v(50) = 60$

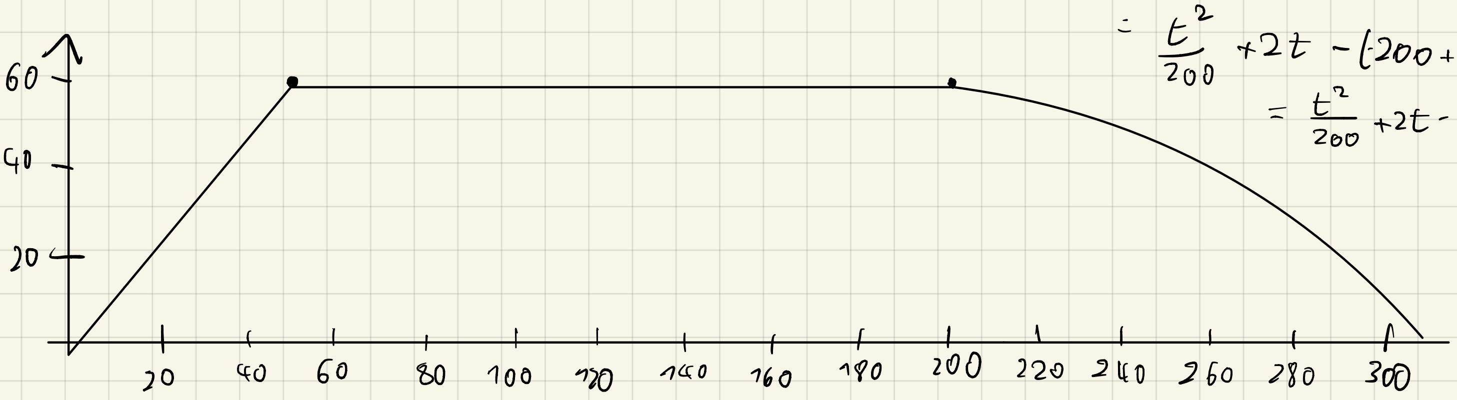
II: $v(t) = \int 0 \, dt + 60 = 60$ $\quad v(200) = 60$

III: $v(t) = \int -\frac{t}{100} + 2 \, dt + 60 = -\frac{t^2}{200} + 2t + 60$

$\left[-\frac{t^2}{200} + 2t\right]_{200}^{t} + 60$

$= \frac{t^2}{200} + 2t - (-200 + 400) + 60$

$= \frac{t^2}{200} + 2t - 140$



$$v(t)=\begin{cases} 1{,}2\,t & 0 \le t \le 50 \\ 60 & 50 < t \le 200 \\ -\frac{t^2}{200}+2t-140 & 200 < t \le 300 \end{cases}$$

$x(t)$ berechnen

$x(50) = 1500$

I $x(t) = 0{,}6t^2$

II $x(t) = \int 60\,dt + 1500 = 60t + 1500$ $\quad \Big[60t\Big]_{50}^{t} + 1500$

$= 60t - 60\cdot 50 + 1500$

$= 60t - 1500$

$x(200) = 60\cdot(200) - 1500 = 10500$

III. $x(t) = \int -\frac{t^2}{200} + 2t - 140\,dt + 10500$

$= -\frac{t^3}{600} + t^2 - 140t + 10500$

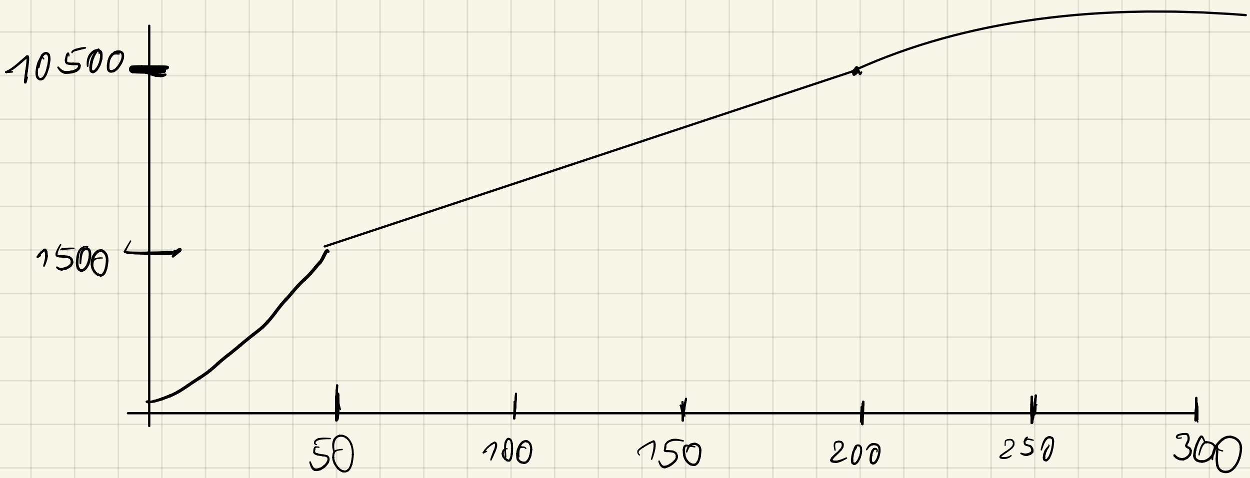
$\Big[-\frac{t^3}{600} + t^2 - 140t\Big]_{200}^{t} + 10500 =$

$-\frac{t^3}{600} + t^2 - 140t + 1333 + 10500$

$= -\frac{t^3}{600} + t^2 - 140t + 11833$

$$x(t)=\begin{cases} 0{,}6\,t^2 & 0 \le t \le 50 \\ 60t - 1500 & 50 < t \le 200 \\ -\frac{t^3}{600}+t^2-140t+11833 & 200 < t \le 300 \end{cases}$$

$x(300) = 14833$



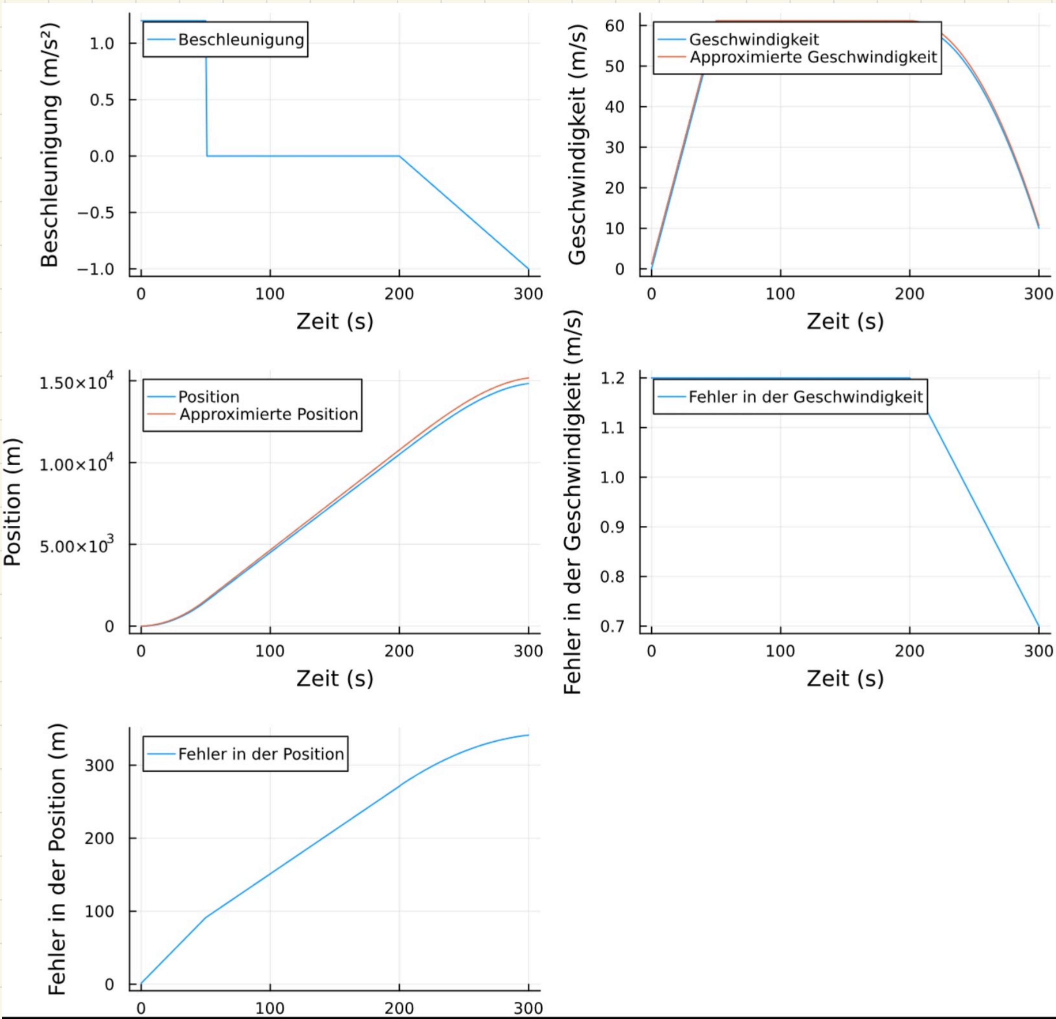
b) (1.5 Punkte) Gegeben sei die Zerlegung des Intervalls $[0, 300]$ von

$$t_j = j \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \ldots, 300\,.$$

Bestimmen Sie die Approximationen $\hat{v} \approx v$ und $\hat{x} \approx x$ mittels Aufsummieren der diskreten Werte $a_j = a(t_j)$ und $v_j = v(t_j)$. Plotten Sie anschließend die absoluten Fehler

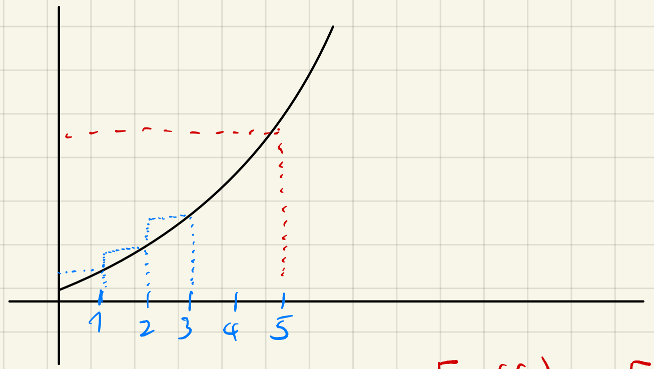
$$|\hat{v}(t_j) - v(t_j)| \quad \text{sowie} \quad |\hat{x}(t_j) - x(t_j)|$$

pro Zeitschritt t_j mit *Julia*.



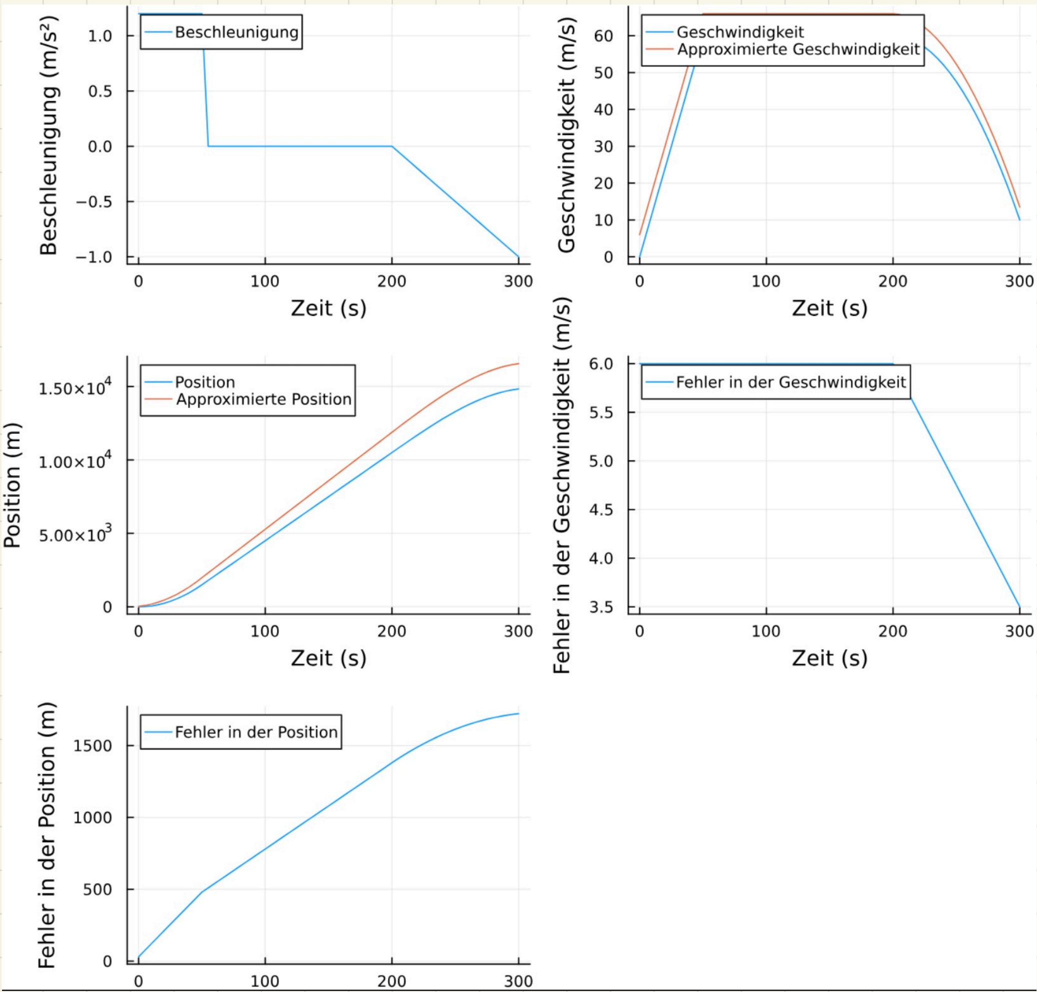
c) (0.25 Punkte) Was ist bei der Summenbildung zu beachten wenn man die Zeitschritte auf $t_j = 5j$ für $j = 0, 1, \ldots, 60$ vergrößert? Erstellen Sie dazu eine erklärende Skizze.

Wenn man die Zeitschritte vergrößert, wird die Schätzung offensichtlicherweise schlechter, da die Fläche des zu approximierenden Quadrates mehr vom Tatsächlichen Fläche abweicht



$1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) \ldots$

$5 \cdot f(5) + 5 \cdot f(10)$



(5) (1 Punkt) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x) + \frac{7}{5}\cos(y) + \frac{y}{3}$$

sowie der Bereich $A = [-2,2] \times [-2,2]$ in der xy-Ebene, siehe Abbildung 2.

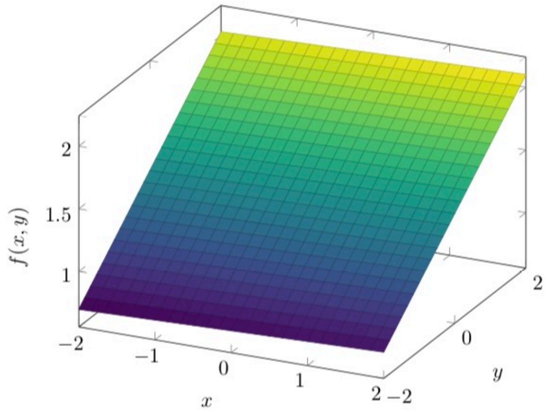


Abbildung 2: Die Funktion $f(x,y)$ in zwei Veränderlichen.

a) (0.5 Punkte) Berechnen Sie das Volumen zwischen der xy-Ebene $z = 0$ und der Funktion $f(x,y)$ im Bereich A

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

b) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Funktion im Bereich A. Berechnen Sie dazu das Integral über den Betrag des Kreuzproduktes der Richtungsvektoren der Tangentialebene (Flächen der infinitesimalen Tangentialebenen)

$$S = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left|(1,0,\partial_x f)^T \times (0,1,\partial_y f)^T\right|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Wenn Sie in (5b) das Kreuzprodukt gelöst haben, verwenden Sie ein Rechenprogramm zur Berechnung des Doppelintegrals.

a)

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \sin(x) + \frac{7}{5}\cos(y) + \frac{y}{3}\; dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[y \cdot \sin(x) + \frac{7}{5}\sin(y) + \frac{y^2}{6} \right]_{-2}^{2} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\sin(x) + \frac{7}{5}\sin(2) + \frac{4}{6} - \left(-2\sin(x) + \frac{7}{5}\cdot\sin(-2) + \frac{4}{6}\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 4\sin(x) + \frac{7}{5}\cdot\sin(2) - \frac{7}{5}\cdot\sin(-2)\; dx$$

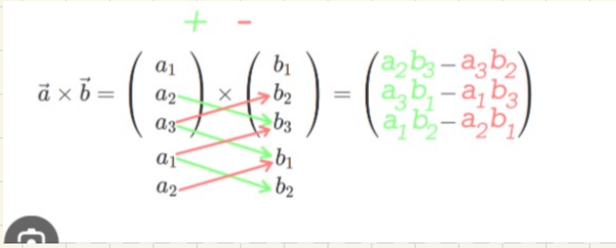
$$= \left[-4\cdot\cos(x) + \frac{7}{5}\sin(2)\,y - \frac{7}{5}\sin(-2)\,y\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{14}{5}\sin(2) - \frac{14}{5}\cdot\sin(-2) - \left(-\frac{14}{5}\sin(2) + \frac{14}{5}\sin(-2)\right)$$

$$\frac{28}{5}\sin(2) - \frac{28}{5}\sin(-2) = 10{,}18 \quad (\text{in RAD})$$

b) $$S=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left|(1,0,\partial_x f)^T \times (0,1,\partial_y f)^T\right| \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

$$f(x,y) = \sin(x) + \frac{7}{5}\cos(y) + \frac{y}{3}$$



$$\partial_x f = \cos(x) + 0 + 0 = \cos(x)$$
$$\partial_y f = -\frac{7}{5}(\sin(y)) + \frac{1}{3}$$

Kreuzprodukt berechnen:

$$(1, 0, \cos(x)) \times \left(0, 1, -\frac{7}{5}(\sin(x)) + \frac{1}{3}\right) =$$

$$v = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \cos(x)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -\frac{7}{5}(\sin(y)) + \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x)\\ \frac{7}{5}\sin(y) - \frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$|v| = \sqrt{(-\cos(x))^2 + \left(\frac{7}{5}\sin(x) - \frac{1}{3}\right)^2 + 1^2}$$

$$\int_0^2\int_0^2 \sqrt{(-\cos(x))^2 + \left(\frac{7}{5}\sin(x) - \frac{1}{3}\right)^2 + 1^2}\; dy\, dx$$

$$\Downarrow$$

mit Integralrechner lösen