Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (1 Punkt) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) (0,25 Punkte)

$$\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(5x))dx$$

b) (0,25 Punkte)

$$\int \frac{x-1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

c) (0,25 Punkte)

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x$$

d) (0,25 Punkte)

$$\int \cos(x)\cdot x^2\,\mathrm{d}x$$

Hinweise:
(1a) (1b) Verwenden Sie hier eine Substitution

(2) (0,75 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^8 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (\star)$$

Substituieren Sie dazu $x = \sinh(u)$ gemäß $\mathrm{d}x = \cosh(u)\,\mathrm{d}u$. Transformieren Sie die Grenzen des bestimmten Integrals und berechnen Sie das über u formulierte Integral. Es können die Identitätsgleichung und das Addionstheorem der Hyperbelfunktionen verwendet werden.

Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe des *Julia* Packages **QuadGK** (numerische Integration).

Snippet:

```julia
# Bestimmtes Integral von x^2 - 2*x fuer 0 < x < 8
using QuadGK
quadgk(x -> x^2 - 2*x, 0.0, 8.0)
```

Mit `QuadGK.quadgk()` wird ein bestimmtes Integral mittels numerischer Quadratur berechnet. Sowohl der numerische Wert als auch ein geschätzer Fehler werden zurückgegeben.

(3) (1 Punkt) Berechnen Sie die von den Funktionen $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = ||x| - 1|$ eingeschlossene Fläche. Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze an und integrieren Sie von Hand nach x zwischen den Stellen $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ und $\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}$.

(4) (3,25 Punkte) Die Messung einer Beschleunigung $a(t)$ ergibt die Funktion

$$a(t) = \begin{cases} 1.2 & 0 \leq t \leq 50\,, \\ 0 & 50 < t \leq 200\,, \\ -\frac{t}{100} + 2 & 200 < t \leq 300\,, \end{cases}$$

welche zusätzlich grafisch in Abbildung 1 dargestellt ist.

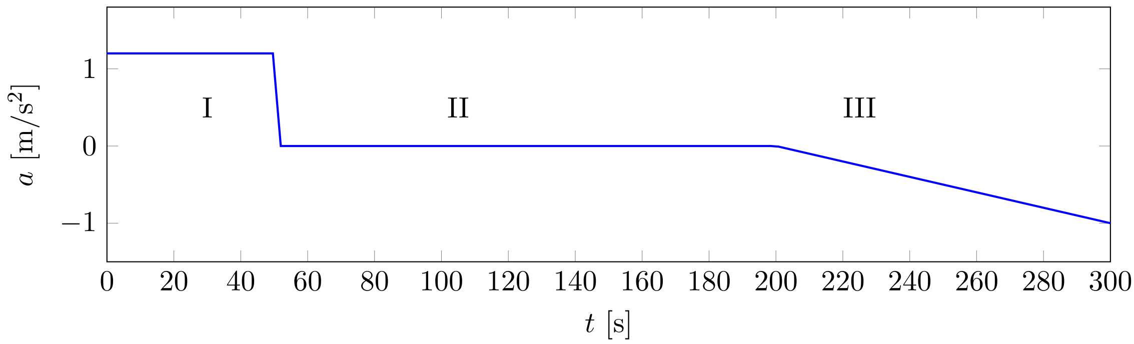

Abbildung 1: Gemessene Beschleunigung $a(t)$.

a) (1.5 Punkte) Geschwindigkeit $v(t)$ und Position $x(t)$ können mittels (mehrmaliger) Integration der Beschleunigung $a(t)$ berechnet werden. Lösen Sie dazu das Anfangswertproblem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \dot{v}(t) = a(t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \dot{x}(t) = v(t)\,,$$
$$v(0) = v_0 = x(0) = x_0 = 0\,.$$

Skizzieren Sie die beiden Verläufe $v(t)$ und $x(t)$ analog zu Abbildung 1. Bestimmen Sie weiters den Wert von $x(300)$.

Hinweis: Achten Sie insbesondere auf die unterschiedlichen Integrationsgrenzen. Die Geschwindigkeit $v(t)$ für $200 < t \leq 300$ ist z. B. abhängig von der Geschwindigkeit im Intervall $0 \leq t \leq 200$.

b) (1.5 Punkte) Gegeben sei die Zerlegung des Intervalls $[0, 300]$ von

$$t_j = j \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \ldots, 300\,.$$

Bestimmen Sie die Approximationen $\hat{v} \approx v$ und $\hat{x} \approx x$ mittels Aufsummieren der diskreten Werte $a_j = a(t_j)$ und $v_j = v(t_j)$. Plotten Sie anschließend die absoluten Fehler

$$|\hat{v}(t_j) - v(t_j)| \quad \text{sowie} \quad |\hat{x}(t_j) - x(t_j)|$$

pro Zeitschritt t_j mit *Julia*.

c) (0.25 Punkte) Was ist bei der Summenbildung zu beachten wenn man die Zeitschritte auf $t_j = 5j$ für $j = 0, 1, \ldots, 60$ vergrößert? Erstellen Sie dazu eine erklärende Skizze.

(5) (1 Punkt) Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \sin(x) + \frac{7}{5}\cos(y) + \frac{y}{3}$$

sowie der Bereich $A = [-2, 2] \times [-2, 2]$ in der xy-Ebene, siehe Abbildung 2.

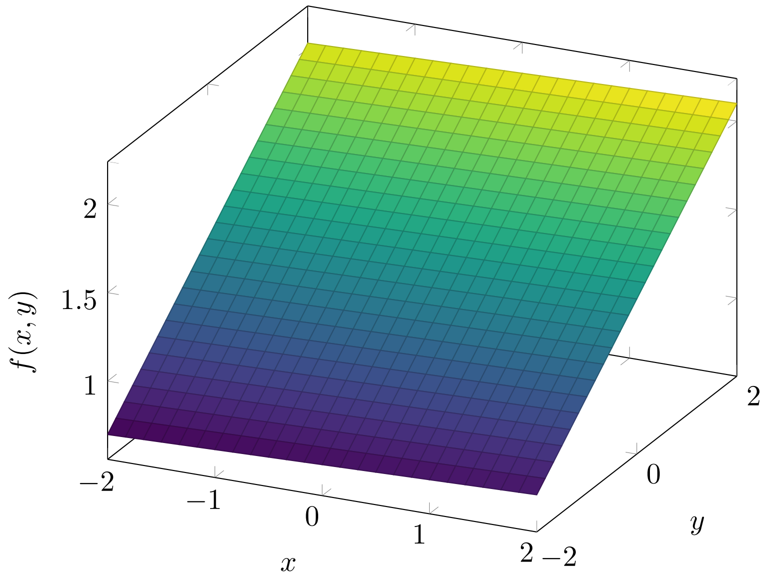

Abbildung 2: Die Funktion $f(x, y)$ in zwei Veränderlichen.

a) (0.5 Punkte) Berechnen Sie das Volumen zwischen der xy-Ebene $z=0$ und der Funktion $f(x, y)$ im Bereich A

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} f(x, y) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \,.$$

b) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Funktion im Bereich A. Berechnen Sie dazu das Integral über den Betrag des Kreuzproduktes der Richtungsvektoren der Tangentialebene (Flächen der infinitesimalen Tangentialebenen)

$$S = \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \left| (1, 0, \partial_x f)^T \times (0, 1, \partial_y f)^T \right| \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \,.$$

Hinweis: Wenn Sie in (5b) das Kreuzprodukt gelöst haben, verwenden Sie ein Rechenprogramm zur Berechnung des Doppelintegrals.