Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (1 Punkt) Bestimmen Sie, falls dieser existiert, den Grenzwert der gegebenen Folgen oder erklären Sie warum eine Folge nicht konvergiert.

a) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4 - 54n - 10}{(n-7)^3}$$

b) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to 0} (\frac{1}{n} - \sqrt{5}) \cdot \frac{\sin(n)}{2}$$

c) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4}{e^n - 5}$$

d) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} -e^{\sqrt{n^{-3}}}$$

Hinweis: Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ für zwei differenzierbare Funktionen g und f ein unbestimmter Ausdruck ist (z.B. $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$), besagt die Regel von de L'Hospital, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$

(2) (1.5 Punkt) Prüfen Sie die Konvergenz folgender Reihen

a) (0.5 Punkte) Überprüfen Sie die Konvergenz mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{k^2}$$

Hinweis: Das Quotientenkriterium verwendet den Grenzwert:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Es gilt,

- wenn L $<$ 1, ist die Reihe absolut konvergent
- wenn L $>$ 1, ist die Reihe divergent
- wenn L = 1, gibt es keine Konvergenzaussage

b) (0.5 Punkte) Überprüfen Sie die Konvergenz mit Hilfe des *Integralkriteriums*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Hinweis: Laut dem Integralkriterium konvergiert bzw. divergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nur dann, wenn auch das Integral $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(n)\ dn$ konvergiert bzw. divergiert.

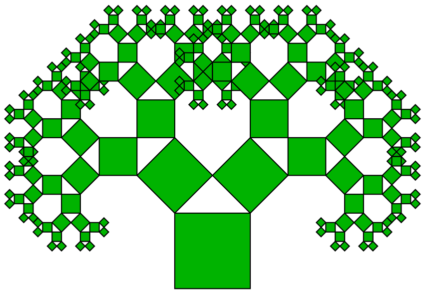
c) (0.5 Punkte) Überprüfen Sie die Konvergenz mit Hilfe des *Leibnizkriteriums*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Hinweis: Laut dem Leibnizkriteriums konvergiert eine Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

- $|a_n|$ ist monoton fallend, es gilt also $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(3) (2.5 Punkte) Betrachten Sie die folgende fraktale Struktur



Die Struktur kann schrittweise konstruiert werden, indem auf ein Quadrat zwei kleinere Quadrate im rechten Winkel angeordnet werden. Dieser Vorgang wird dann auf den Ästen des Baumes rekursiv wiederholt. Die ersten Schritte sehen dabei wie folgt aus

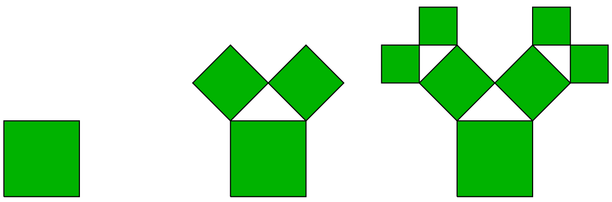


Abbildung 1: Schrittweise Konstruktion der fraktalen Struktur

a) (1 Punkt) Angenommen das anfängliche Quadrat besitzt die Seitenlänge a. Berechnen Sie die Höhe des Baumes nach dem ersten Iterationsschritt.

b) (1.5 Punkte) Angenommen das anfängliche Quadrat besitzt die Seitenlänge a. Überlegen Sie nun wie sich die Höhe des Baumes verhält, wenn dieser unendlich lange wächst. Gehen Sie dabei wie folgt vor

- Formulieren Sie zuerst eine unendliche Summe $h_1 + h_2 + h_3 + \dots$, wobei h_i jeweils die Höhe einer Ast-Grundkonstruktion aus Abbildung 2 ist.
- Formen Sie die unendliche Summe so um, dass Sie eine geometrische Reihe erhalten
- Verwenden Sie die Formel für die geometrische Reihe um die Höhe des Baumes zu berechnen, wenn dieser unendlich lange wächst

Hinweis: Betrachten Sie die Grundkonstruktion eines Astes in Abbildung 2. Die Höhe des Baumes ergibt sich aus aufeinander gestapelten Grundkonstruktionen von Ästen. Beachten Sie, dass die Höhe des höherliegenden Astes von der neuen Seitenlänge a_{n+1} abhängt.

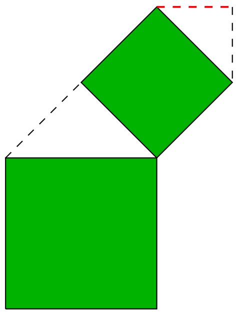


Abbildung 2: Grundkonstruktion eines Astes

(4) (2 Punkte) Durch die *Taylorreihe* einer ableitbaren Funktion $f(x)$ wird diese an einem Punkt a approximiert:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

mit $f^{(k)}(a)$ der k-ten Ableitung von f in Punkt a.

a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Summe der ersten 5 Terme der Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ um den Punkt $a = 1$ an.

b) (0.5 Punkte) Verwenden Sie Julia um die Formel (1) zu implementieren und die Taylorreihe für $n = 2$, $n = 5$ und $n = 20$ zu plotten (siehe Abbildung 3). Verwenden Sie die Vorlage `log.jl`.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (x-1)^k \tag{1}$$

c) (0.25 Punkte) Plotten Sie für jeden Wert von n den absoluten Fehler zwischen der Taylorreihen-Approximation und der realen Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Verwenden Sie die Vorlage `log.jl`.

d) (0.25 Punkte) Interpretieren Sie die gemessenen Zeiten der Approximation und der exakten Berechnung. *Hinweis*: Mehrfaches Ausführen des Skriptes in der gleichen Session kann dazu führen, dass bereits gerechnete Werte gecached wieder verwendet werden. Können Sie dies beobachten?

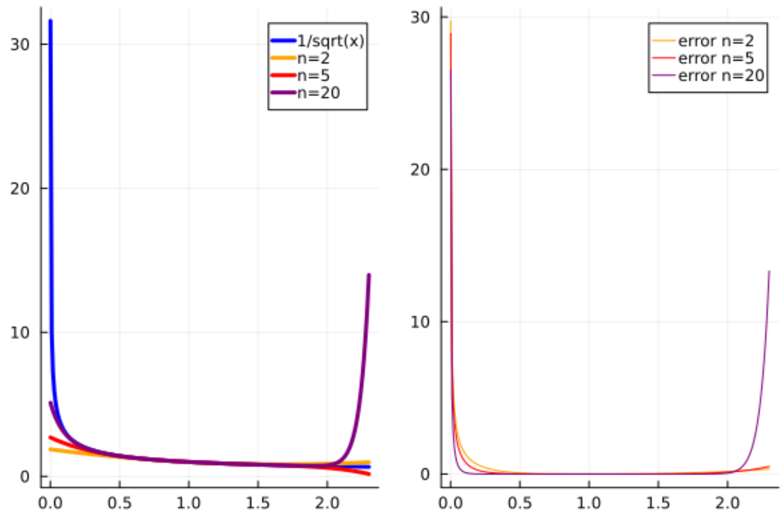


Abbildung 3: Graph der Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (blau) und ihrer Taylorreihen-Approximation für $n = 2$.