(1) (1 Punkt) Bestimmen Sie, falls dieser existiert, den Grenzwert der gegebenen Folgen oder erklären Sie warum eine Folge nicht konvergiert.

a) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4 - 54n - 10}{(n-7)^3}$$

b) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to 0} \left(\frac{1}{n} - \sqrt{5}\right) \cdot \frac{\sin(n)}{2}$$

c) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4}{e^n - 5}$$

d) (0.25 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} -e^{\sqrt{n-3}}$$

Hinweis: Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ für zwei differenzierbare Funktionen g und f ein unbestimmter Ausdruck ist (z.B. $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$), besagt die Regel von de L'Hospital, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4-54n-10}{(n-7)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^4-54n-10}{n^3-21n^2+3\cdot 7^2 n-(7)^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^4-54n-10}{n^3-21n^2+147n-343} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\cdot(\underset{\to\infty}{6n}-54-\underset{\to 0}{\frac{10}{n}})}{\cancel{n^3}\cdot(1-\underset{\downarrow 0}{\frac{21}{n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{147}{n^2}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{343}{n^3}})}$$

$$=\infty$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}}-\sqrt{5}\right)\cdot\frac{\sin(n)}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sin(n)$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4}{e^n-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{12n^3}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{36n^2}{e^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{72n}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{72}{\underset{\downarrow\infty}{e^n}} = 0$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} -e^{\overset{\nearrow\infty}{\sqrt{n-3}}} = -\infty$$

(2) (1.5 Punkt) Prüfen Sie die Konvergenz folgender Reihen

a) (0.5 Punkte) Überprüfen Sie die Konvergenz mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^2}$$

Hinweis: Das Quotientenkriterium verwendet den Grenzwert:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Es gilt,

- wenn L $<$ 1, ist die Reihe absolut konvergent
- wenn L $>$ 1, ist die Reihe divergent
- wenn L $=$ 1, gibt es keine Konvergenzaussage

b) (0.5 Punkte) Überprüfen Sie die Konvergenz mit Hilfe des *Integralkriteriums*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Hinweis: Laut dem Integralkriterium konvergiert bzw. divergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nur dann, wenn auch das Integral $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(n)\, dn$ konvergiert bzw. divergiert.

a)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k+1+\sqrt{k+1}}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k+1}{k^2}}_{\to 0} + \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{k+1}}{k^2}}_{\to 0} = 0$$

$\Downarrow$

konvergiert

b) Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+2k+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{2}{k}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \text{keine Konvergenzaussage}$$

Integralkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^\infty k^{-2}\, dk = \lim_{k\to\infty} \left[-k^{-1}\right]_1^\infty = \lim_{k\to\infty} -\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{\to 0} + \frac{1}{1} = 1$$

$\Downarrow$

konvergiert

c) (0.5 Punkte) Überprüfen Sie die Konvergenz mit Hilfe des *Leibnizkriteriums*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Hinweis: Laut dem Leibnizkriteriums konvergiert eine Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

- $|a_n|$ ist monoton fallend, es gilt also $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$|a_{n+1}| \leq |a_n|$$

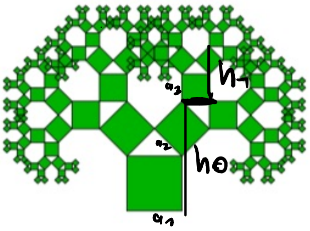
$$\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\right| < \left|\frac{-1^k}{k!}\right| = \frac{1}{(k+1)!} < \frac{1}{k!} = k! < (k+1)!$$

stimmt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k)!} = 0$$ stimmt

$\Downarrow$ konvergiert

(3) (2.5 Punkte) Betrachten Sie die folgende fraktale Struktur



$h_1 = 2 \cdot a_3$

$h_0 = 2 \cdot a_1$

Die Struktur kann schrittweise konstruiert werden, indem auf ein Quadrat zwei kleinere Quadrate im rechten Winkel angeordnet werden. Dieser Vorgang wird dann auf den Ästen des Baumes rekursiv wiederholt. Die ersten Schritte sehen dabei wie folgt aus

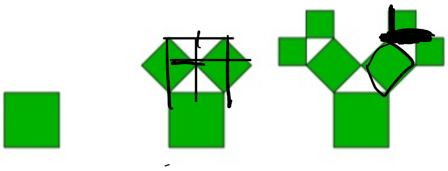


Abbildung 1: Schrittweise Konstruktion der fraktalen Struktur

a) (1 Punkt) Angenommen das anfängliche Quadrat besitzt die Seitenlänge a. Berechnen Sie die Höhe des Baumes nach dem ersten Iterationsschritt.

b) (1.5 Punkte) Angenommen das anfängliche Quadrat besitzt die Seitenlänge a. Überlegen Sie nun wie sich die Höhe des Baumes verhält, wenn dieser unendlich lange wächst. Gehen Sie dabei wie folgt vor

- Formulieren Sie zuerst eine unendliche Summe $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots$, wobei h_i jeweils die Höhe einer Ast-Grundkonstruktion aus Abbildung 2 ist.
- Formen Sie die unendliche Summe so um, dass Sie eine geometrische Reihe erhalten
- Verwenden Sie die Formel für die geometrische Reihe um die Höhe des Baumes zu berechnen, wenn dieser unendlich lange wächst

Hinweis: Betrachten Sie die Grundkonstruktion eines Astes in Abbildung 2. Die Höhe des Baumes ergibt sich aus aufeinander gestapelten Grundkonstruktionen von Ästen. Beachten Sie, dass die Höhe des höherliegenden Astes von der neuen Seitenlänge a_{n+1} abhängt.

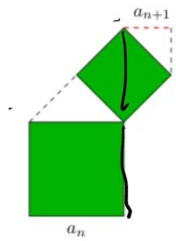


Abbildung 2: Grundkonstruktion eines Astes

a) $a_1 = a$

$$a_1^2 = a_2^2 + a_2^2 = 2a_2^2$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot a_1^2}$$

$$h_2 = \sqrt{a_2^2 + a_2^2}$$

$$= \sqrt{1 \cdot a_1^2} = a_1$$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$

$$a_2^2 = 2 \cdot a_3^2 \Rightarrow a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} a_2^2}$$

$$h_1 = 2a_i \qquad h_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} a_2^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a_1^2} = a_1$$

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2a}{2^i}$$

(4) (2 Punkte) Durch die *Taylorreihe* einer ableitbaren Funktion $f(x)$ wird diese an einem Punkt a approximiert:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

mit $f^{(k)}(a)$ der k-ten Ableitung von f in Punkt a.

a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Summe der ersten 5 Terme der Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ um den Punkt $a = 1$ an.

b) (0.5 Punkte) Verwenden Sie Julia um die Formel (1) zu implementieren und die Taylorreihe für $n = 2$, $n = 5$ und $n = 20$ zu plotten (siehe Abbildung 3). Verwenden Sie die Vorlage `log.jl`.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (x-1)^k \tag{1}$$

c) (0.25 Punkte) Plotten Sie für jeden Wert von n den absoluten Fehler zwischen der Taylorreihen-Approximation und der realen Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Verwenden Sie die Vorlage `log.jl`.

d) (0.25 Punkte) Interpretieren Sie die gemessenen Zeiten der Approximation und der exakten Berechnung. *Hinweis*: Mehrfaches Ausführen des Skriptes in der gleichen Session kann dazu führen, dass bereits gerechnete Werte gecached wieder verwendet werden. Können Sie dies beobachten?

a)

$$f(1) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1!} + \left(\frac{-1 \cdot x^{-\frac{3}{2}}}{2 \cdot 2!}\right) \cdot (x-1) + \left(\frac{+3 \cdot x^{-\frac{5}{2}}}{4 \cdot 3!}\right)(x-1)^2$$
$$+ \left(\frac{-15 \cdot x^{-\frac{7}{2}}}{8 \cdot 3!}\right)(x-1)^3 + \left(\frac{105 \cdot x^{-\frac{9}{2}}}{16 \cdot 4!}\right)(x-1)^4$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{-15}{8} \cdot x^{-\frac{7}{2}}$$

$$f''''(x) = \frac{105}{16} \cdot x^{-\frac{9}{4}}$$

d) (0.25 Punkte) Interpretieren Sie die gemessenen Zeiten der Approximation und der exakten Berechnung. *Hinweis*: Mehrfaches Ausführen des Skriptes in der gleichen Session kann dazu führen, dass bereits gerechnete Werte gecached wieder verwendet werden. Können Sie dies beobachten?

```
Zeit genaue Variante  : 0.03663992881774902 s
Zeit Taylorreihe n=2  : 0.02512788772583078 s
Zeit Taylorreihe n=5  : 0.00931406021118164 s
Zeit Taylorreihe n=20 : 0.011216163635253906 s
```

Beim ersten Ausführen ist die Taylorreihe bis 5 am schnellsten. Das könnte daran liegen, dass die Werte bis n = 2 bereits gecached sind und somit nicht neu berechnet werden müssen. Aus dem selben Grund könnte n = 20 auch schneller als n = 2 sein, weil für n = 20 alle gecachten Werte bis n = 5 verwendet werden können, falls sich diese noch im Cache befinden. Rein logisch gesehen, würde ich sonst sagen, je tiefer n ist, desto schneller ist die Ausführung. Ich vermute dass es wirklich am Caching oder an sonstigen Compileroptimierungen liegt.
Ich vermute auch dass binomial(-0,5, k) immer gecached wird, was die Laufzeit für die Taylorreihen erheblich verkürzt, im Vergleich zur genauen Variante.
Sonst wäre es für mich auch logisch, dass die genaue Variante schneller sein sollte

Beim erneuten Ausführen können wir viel kürzere Laufzeiten beobachten

```
Zeit genaue Variante  : 0.010008096694946289 s
Zeit Taylorreihe n=2  : 0.008731842041015625 s
Zeit Taylorreihe n=5  : 0.02173590660095215 s
Zeit Taylorreihe n=20 : 0.012970924377441406 s

Zeit genaue Variante  : 0.009527921676635742 s
Zeit Taylorreihe n=2  : 0.008608102798461914 s
Zeit Taylorreihe n=5  : 0.009028911590576172 s
Zeit Taylorreihe n=20 : 0.010324954986572266 s
```