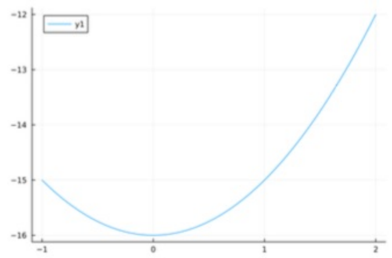
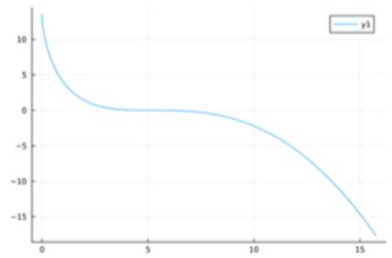
(1) (1.5 Punkte) Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen.
Hinweis: Sollten Sie Schwierigkeiten haben eine passende Stammfunktion zu finden, können Sie auch das `julia`-Package *QuadGK* verwenden um ein numerisches Ergebnis zu erhalten.

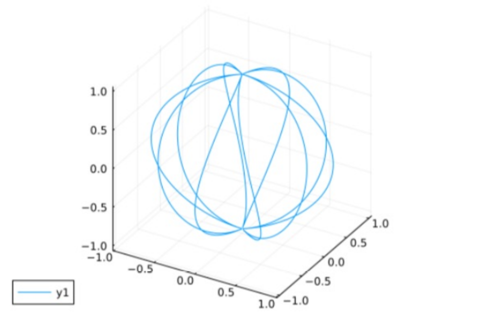
a) (0.25 Punkte) $f(x) = x^2 - 16$ für $-1 \leq x \leq 2$



b) (0.5 Punkte) $x(t) = (1+t)^{\frac{3}{2}}$, $y(t) = (3-t)^{\frac{3}{2}}$ für $0 \leq t \leq 8$



c) (0.75 Punkte) $\gamma(\theta) = (\cos(\theta)\sqrt{1-\cos(\theta)^2}, \sin(\theta)\sqrt{1-\cos(\theta)^2}, \cos(\theta))$ für $0 \leq \theta \leq 2\pi$



a) $f(x) = x^2 - 16$

$f'(x) = 2x$

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Ergebnis siehe Julia

b) $x(t) = (1+t)^{\frac{3}{2}}$ $\qquad x'(t) = \frac{3\cdot\sqrt{t+1}}{2}$

$y(t) = (3-t)^{\frac{3}{2}}$ $\qquad y'(t) = \left(-\frac{3\sqrt{3-t}}{2}\right)$

$$L = \int_0^8 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^8 \cancel{\frac{9}{4}}t + \frac{9}{4} - \cancel{\frac{9}{4}}t + \frac{27}{4} = \int_0^8 \frac{36}{4}$$

$$= [9x]_0^8 = 8\cdot 9 - 0 = 72$$

c) c) (0.75 Punkte) $\gamma(\theta) = (\cos(\theta)\underbrace{\sqrt{1-\cos(\theta)^2}}_{\sin(\theta)}, \sin(\theta)\underbrace{\sqrt{1-\cos(\theta)^2}}_{\sin(\theta)}, \cos(\theta))$ für $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$(\cos(x)\cdot \sin(x))' = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2)$$

$$((\sin(x))^2)' = 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos(x)^2 - \sin(x)^2)^2 + (2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x))^2 + (-\sin(x))^2}$$

Ergebnis siehe Julia

(2) (1 Punkt) Definitheit von Matrizen: Beschreiben Sie die Definitheit der folgenden Matrizen in den gegebenen Bereichen:

a) (0.5 Punkte) Rotationsmatrix für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \pi$

$$rot(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

b) (0.25 Punkte) Scherungsmatrix, $x \in \mathbb{R}$

$$shear(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) (0.25 Punkte) Skalierungsmatrix, $x \in \mathbb{R}$

$$scale(x) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\cos(\pi) = -1$

$\sin(\pi) = 0$

$\det(\lambda I - A) = 0$

$$rot(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda^2 - (-1)\cdot(1) = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$ $\quad$ indefinit

$$rot(\pi) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$(\lambda+1)\cdot(\lambda-1) - 0 = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ $\quad$ indefinit

b) $\text{shear}(x) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & x \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$(1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 0\cdot x = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ alle Eigenwerte positiv $\Rightarrow$ Positiv definit

c) $\begin{bmatrix} \lambda - 0{,}5 & 0 \\ 0 & \lambda - x \end{bmatrix}$

$$(\lambda - 0{,}5)(\lambda - x) = 0$$

$$\lambda^2 - 0{,}5\lambda - x\cdot\lambda + 0{,}5x = 0$$

$$\lambda^2 - (0{,}5 + x)\cdot\lambda + 0{,}5x = 0$$

$\Downarrow$

$$\lambda_{1/2} \quad \frac{0{,}5+x \pm \sqrt{(0{,}5+x)^2 - 4\cdot 0{,}5x}}{2}$$

$$0{,}5+x-\sqrt{(0{,}5+x)^2-2x}<0$$

$$0{,}5+x-\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}$$

$$0{,}5+x<\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}} \qquad ()^2$$

$$\cancel{\frac{1}{4}}+x+\cancel{x^2}<\cancel{x^2}-x+\cancel{\frac{1}{4}}$$

$$2x<0 \Rightarrow x<0$$

$$0{,}5+x+\sqrt{(0{,}5+x)^2-2x}<0$$

$$0{,}5+x+\sqrt{(0{,}5+x)^2-2x}<0$$

$$0{,}5+x<-\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}} \qquad ()^2$$

$$\frac{1}{4}+x+x^2<-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}+\cancel{x}+x^2<-x^2+\cancel{x}-\frac{1}{4}$$

$2x^2+\frac{2}{4}<0 \Rightarrow$ wird nie ≤ 0

Für $x<0$ indefinit

Für $x>0$ positiv definit

Bei $x=0$ indefinit

(3) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie für jede der unten durch eine Gleichung beschriebene Oberfläche ob sie in impliziter, expliziter oder parametrischer Form vorliegt. Berechnen Sie anschließend jeweils die beiden anderen Darstellungsformen.

a) (0.5 Punkte)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6\sqrt{2}}\right)(x, y, z)^\intercal + 9 = 0$$ implizit

b) (0.5 Punkte)

$$0 = \pm\sqrt{81 - (x-2)^2 - (y+3)^2} - z$$ implizit

c) (0.5 Punkte)

$$z = 2x + 10y - 5$$ explizit

$$\frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{6\sqrt{2}}z + 9 = 0 \quad \text{implizit}$$

$$z = -3x + \frac{3\sqrt{2}}{2}y - 54\cdot\sqrt{2} \quad \text{explizit}$$

$(0,0,1)$

$$P_1: \frac{1}{6\sqrt{2}}z + 9 = 0 \Rightarrow z = -54\cdot\sqrt{2} \quad P_1\begin{pmatrix}0\\0\\-54\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$(1,0,0)$

$$P_2: \frac{1}{\sqrt{8}}x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{\sqrt{8}} \quad P_2\begin{pmatrix}-\frac{9}{\sqrt{8}}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$(0,1,0)$

$$P_3: -\frac{1}{4}y + 9 = 0 \Rightarrow y = 36 \quad P_3\begin{pmatrix}0\\36\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = P_1 - P_2 = \begin{pmatrix}\frac{9}{\sqrt{8}}\\0\\54\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\bar{u} = P_3 - P_2 = \begin{pmatrix}\frac{9}{\sqrt{8}}\\36\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-54\sqrt{2}\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}\frac{9}{\sqrt{8}}\\0\\54\sqrt{2}\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}\frac{9}{\sqrt{8}}\\36\\0\end{pmatrix}$$

b) $0 = \pm\sqrt{81 - (x-2)^2 - (y+3)^2} - z$ implizit

$z = \pm\sqrt{81 - (x-2)^2 - (y+3)^2}$ explizit

$z^2 = 81 - (x-2)^2 - (y+3)^2$ explizit

$0 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 - 81$

beschreibt Kugelgleichung

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r = 9$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot \cos\theta \\ \sin\theta \cdot \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

c)

$z = 2x + 10y - 5$ explizit

$0 = 2x + 10y - z - 5$ implizit

$(0,0,1)$

$P_1 : -z - 5 = 0 \Rightarrow z = -5$ $\qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$(0,1,0)$

$P_2 : 10y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ $\qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$(1,0,0)$

$P_3 : 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ $\qquad P_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overline{V_1} = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$

$V_2 = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(4) (2 Punkte) Gegeben seien die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in mehreren Veränderlichen

i. $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2)$,

ii. $h(x_1, x_2) = (x_1^4, \ln(x_2))^\intercal$,

iii. $h(x_1, x_2) = \left(x_1^3 x_2^3 - 2x_2 + x_1 + 4, \frac{1}{2}x_1^3 + x_1 x_2^3 - 5\right)^\intercal$,

a) (0.75 Punkte) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von Hand.

b) (0.75 Punkte) Machen Sie sich mit dem backslash Operator `\` in *Julia* vertraut. Implementieren Sie die multivariate Newton Methode sowie die drei Jacobi-Matrizen im zur Verfügung gestellten Template `multivariate_newton.jl`. Invertieren Sie dabei die Jacobi-Matrizen nicht explizit, vgl. Vorlesung. Überprüfen Sie ihre Implementierung auf Korrektheit indem Sie `runtests.jl` ausführen.

```
# Snippet zum backslash Operator.
A = [-4 -1; 2 2]   # 2x2 Matrix
b = [-3; 0]  # rechte Seite
x = A\b  # Loesung des linearen GLS
A*x == b
```

c) (0.5 Punkte) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein um Newton's Methode anzuwenden? Könnten andere Optimierungsmethoden, die in der Vorlesung besprochen wurden, verwendet werden? Wenn ja, beschreiben Sie die Unterschiede zwischen den Verfahren.

a)

i) $\begin{bmatrix} 2x_1 - 1, & 2x_2 - 1 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 4x_1^3, & 0 \\ 0, & \frac{1}{x_2} \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 3x_1^2 \cdot x_2^3 + 1, & 3x_2^2 \cdot x_1^3 - 2 \\ \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^3, & 3x_1 x_2^2 \end{bmatrix}$

c) Bedingungen:

- Funktionen müssen stetig sein
- Startpunkt sollte nahe genug an der Nullstelle gewählt werden

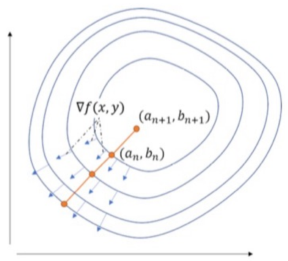
- Ableitungen der Funktion müssen stetig sein
- Ableitung der Funktion darf an der Nullstelle nicht 0 sein (Division durch 0)

Wenn wir das Newtonverfahren verwenden um Extrempunkte zu berechnen (in deren Fall haben wir nur 0-Punkte berechnet) könnten wir alternativ auch das Gradientenverfahren verwenden. Hier müssen wir beachten dass das Newtonverfahren dazu geeignet ist nullstellen zu finden, während das Gradientenverfahren für Extrempunkte in Aufgabenblatt 3 verwendet wurde. Jedoch können beide eingesetzt werden um Extremstellen zu finden.

- Beim Newton Verfahren brauchen wir die Hesse-Matrix um zu überprüfen um welche Art von Extrempunkt es sich handelt

(4) (1.5 Punkte) Das *Gradientenverfahren* bzw. *Verfahren des steilsten Abstiegs* ist ein iterativer Algorithmus zum Finden eines lokalen Minimums einer differenzierbaren Funktion. Ausgehend von einem Punkt (a_n, b_n) wird schrittweise, entgegen des Vektorfeldes ∇f, eine Folge von neuen Punkten generiert welche zu einem Minimum von f konvergiert. Formal wird ein neuer Punkt (a_{n+1}, b_{n+1}) in jedem Schritt berechnet, indem der Gradient an dem Punkt (a_n, b_n) (multipliziert mit einer Schrittweite γ) subtrahiert wird:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}]^T = [a_n, b_n]^T - \gamma \nabla f(a_n, b_n) \quad (1)$$



(5) (1 Punkt) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und die Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

a) (0.75 Punkte) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art im Intervall $[0, 2\pi]$.

b) (0.25 Punkte) Was können Sie über das Vektorfeld aussagen?

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$I = \int_0^{2\pi} (x(t) \quad y(t)) \cdot (-\sin(t) \quad \cos(t)) \, dt \qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} (1+\cos(t) \quad \sin(t)) \cdot (-\sin(t) \quad \cos(t)) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin(t) - \cancel{\sin(t)\cos(t)} + \cancel{\sin(t)\cos(t)} \, dt$$

$$= \Big[\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(0) = 0$$

b) Wir integrieren über ein Vektorfeld $\Rightarrow$ Kurvenintegral 2. Art
Da das Vektorfeld $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist, wird die Parametrisierung eingesetzt ohne etwas zu ändern. Das Vektorfeld bildet von einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ ab.

Weil eine Funktion F existiert sodass f der Gradient von F ist, ist f ein Gradientenfeld (konservativ) deshalb gilt $\int_\gamma f \, ds = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$
das bedeutet dass das Kurvenintegral über Gradientenfelder nur vom Start und Endpunkt abhängen. Der genaue Verlauf der Kurve

ist irrelevant