(1) (1 Punkt) Bestimmen Sie Definitions- und Bildbereich und die Eigenschaften der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2$

c) $f(x) = x^4 - 4x^2$

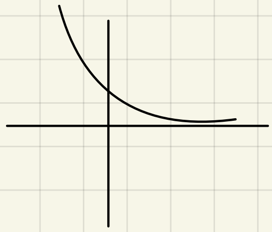
d) $f(x) = |x|\cos(x)$

e) $f(x) = x\log(|x+1|)$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} = \frac{0-(1\cdot -e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$$

a) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

e^{-x}



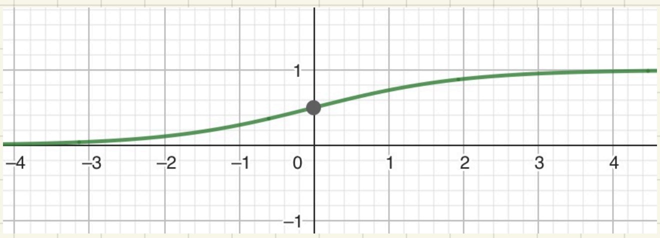
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\mathbb{W} = \{x \in \mathbb{R} \wedge 1 < x > 0\}$

Nullstellen: keine

Extremstellen: $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$ $\Rightarrow$ keine Nullstellen

Graph:



Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\underset{\downarrow\infty}{1+e^{-x}}}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+\underset{\downarrow 0}{e^{-x}}}\right) = 1$$

b) $x^3 - 4x^2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$W = \mathbb{R}$

Extremstellen:

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

$3x^2 - 8x = 0$

$x\cdot(3x-8) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = \frac{8}{3}$

$f''(x) = 6x - 8$

$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f''\left(\frac{8}{3}\right)$ $6\cdot\frac{8}{3} - 8 = 16 \Rightarrow$ Minimum

Nullstellen:

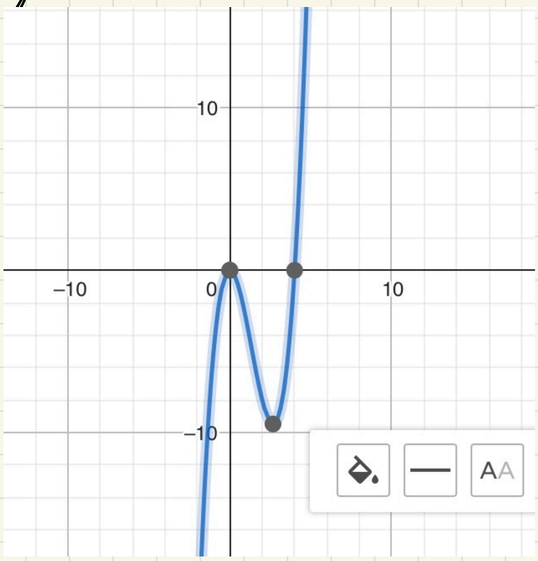
$$x^3 - 4x^2 = 0$$

$$x \cdot (x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

Graph:



Grenzwerte:

$$\lim_{x \to \infty} x^3 - 4x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 4x^2 = -\infty$$

c) $x^4 - 4x^2$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Extremstellen :

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

$$4x^3 - 8x = 0$$

$$x \cdot (4x^2 - 8) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = +\sqrt{2} \\ x_3 = -\sqrt{2} \end{array}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

$$f''(\pm\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 = 24 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f(\pm\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 - 8 = -4$$

Nullstellen:

$x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 - 4)$

$\Rightarrow x_1 = 0$

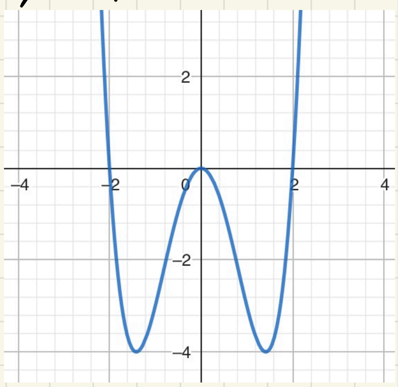
$x_2 = 2$

$x_4 = -2$

Grenzwerte

$\lim_{x \to \pm\infty} x^4 - 4x^2 = \infty$

Graph:



d) $f(x) = |x| \cdot \cos(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$\cos(x)$

Nullstellen:

$|x| = 0 \Rightarrow 0$

$\cos(x) = 0 \Rightarrow 0$

$\cos(x) = 0$

$\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad n \in \mathbb{Z}$

Extremstellen

(Ich schau nur den positiven Bereich an, weil die Funktion symetrisch ist)

$f'(x \cdot \cos x) = 1 \cdot \cos x - [x \cdot -\sin(x)] = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$

$\cos(x) - x \cdot \sin(x) = 0$

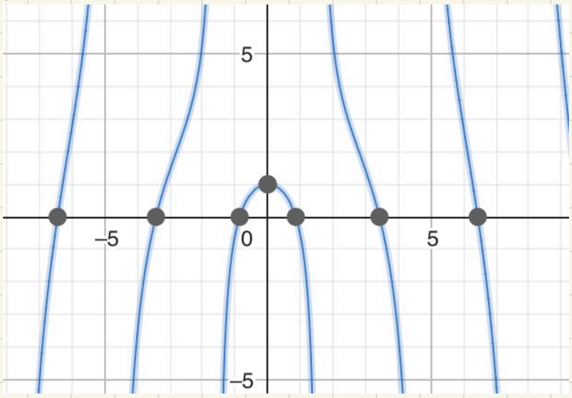
$$\cos(x) - x \cdot \sin(x) = 0 \quad \Big| : \cos(x)$$

$$1 - x \cdot \tan(x) = 0$$

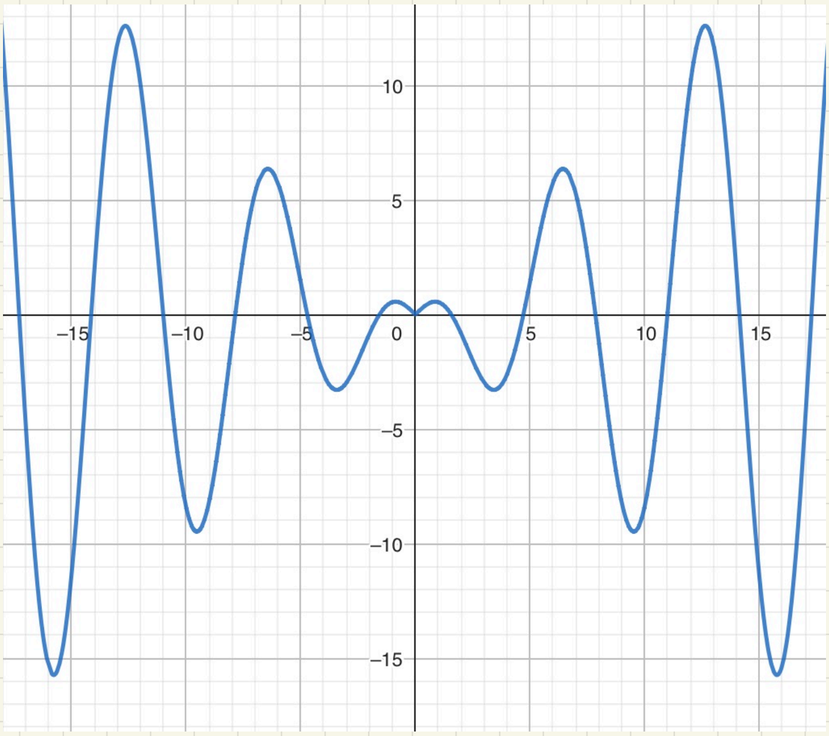
$$x \cdot \tan(x) = 1$$

kann man rechnerisch nicht finden!

Graphisch:



Graph:



(2) (1 Punkt) Lösen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{R}$:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2xe^x = e^x, \quad 5x^2 - 8 = x^2 - x, \quad \log\left(x^2+1\right) = 2\log(3-x).$$

$\sin(2x) - \sin(x) = 0 \quad \Big| \quad \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \quad \Big| \quad :2$

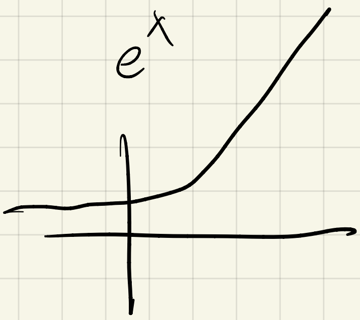
$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{2}x\right)$

$\cos\left(\frac{3}{2}x\right) = 0 \qquad x = \frac{k \cdot \pi}{3} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad x = k \cdot \pi$

b) $2x \cdot e^x = e^x$

$e^x \cdot (2x - 1) = 0$



$e^x = 0 \quad \Rightarrow \{\}$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $5x^2-8=x^2-x$

$$4x^2+x-8=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-(4\cdot4\cdot-8)}}{2\cdot4}=\frac{-1\pm\sqrt{129}}{8}$$

d) $\log(x^2+1)=2\log(3-x)$

$$\log(x^2+1)=\log\left((3-x)^2\right)$$

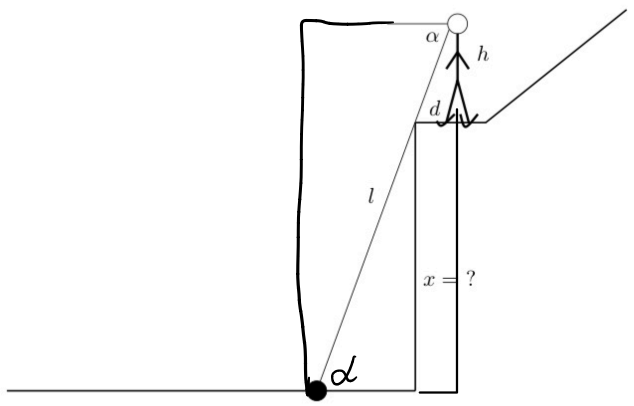
$$x^2+1=(3-x)^2$$

$$\cancel{x^2}+1=\cancel{x^2}-6x+9$$

$$6x-8=0$$

$$x=\frac{8}{6}$$

(3) (2 Punkte) Berechnen Sie die Höhe eines Drops. Stellen Sie sich vor, dass Sie Skifahrer/Snowboarder sind und eine Klippe runter springen möchten. Dabei sind Sie h Meter groß. Wenn Sie d Meter von der Klippe entfernt sind, sehen Sie einen Stein l Meter von Ihnen entfernt unter einem Winkel α. Prüfen Sie die Lösung auf $\alpha = 63.43°,\ l = 10\ m,\ h = 2\ m,\ d = 1\ m$.



$$(\alpha)=\frac{x+h}{l}\Rightarrow x+h=l\cdot\cos(\alpha)$$

$$x+h=10\cdot\cos(63{,}43)=4{,}472$$

$$\Rightarrow x=4{,}472-2=2{,}472\text{ m}$$

(5) (2 Punkte) Finden Sie die Fehler in folgenden Beweisen:

a) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^1 \\ &= (-1)^{\frac{2}{2}} \\ &= ((-1)^{\frac{2}{1}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (1)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (passt)

← ab hier stimmt es nicht mehr da bei $(-1)^2$ ein Vorzeichenwechsel stattfindet und damit Lösungen wegfallen/hinzukommen.

b) (0.5 Punkte)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx}(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{x mal}}) \\ &= (0+0+\cdots+0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\frac{d}{dx} x \cdot 1 = 1$

FALSCH

c) (0.5 Punkte)

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a+b)(a-b) &= b(a-b) \\ a+b &= b \\ 2b &= b \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

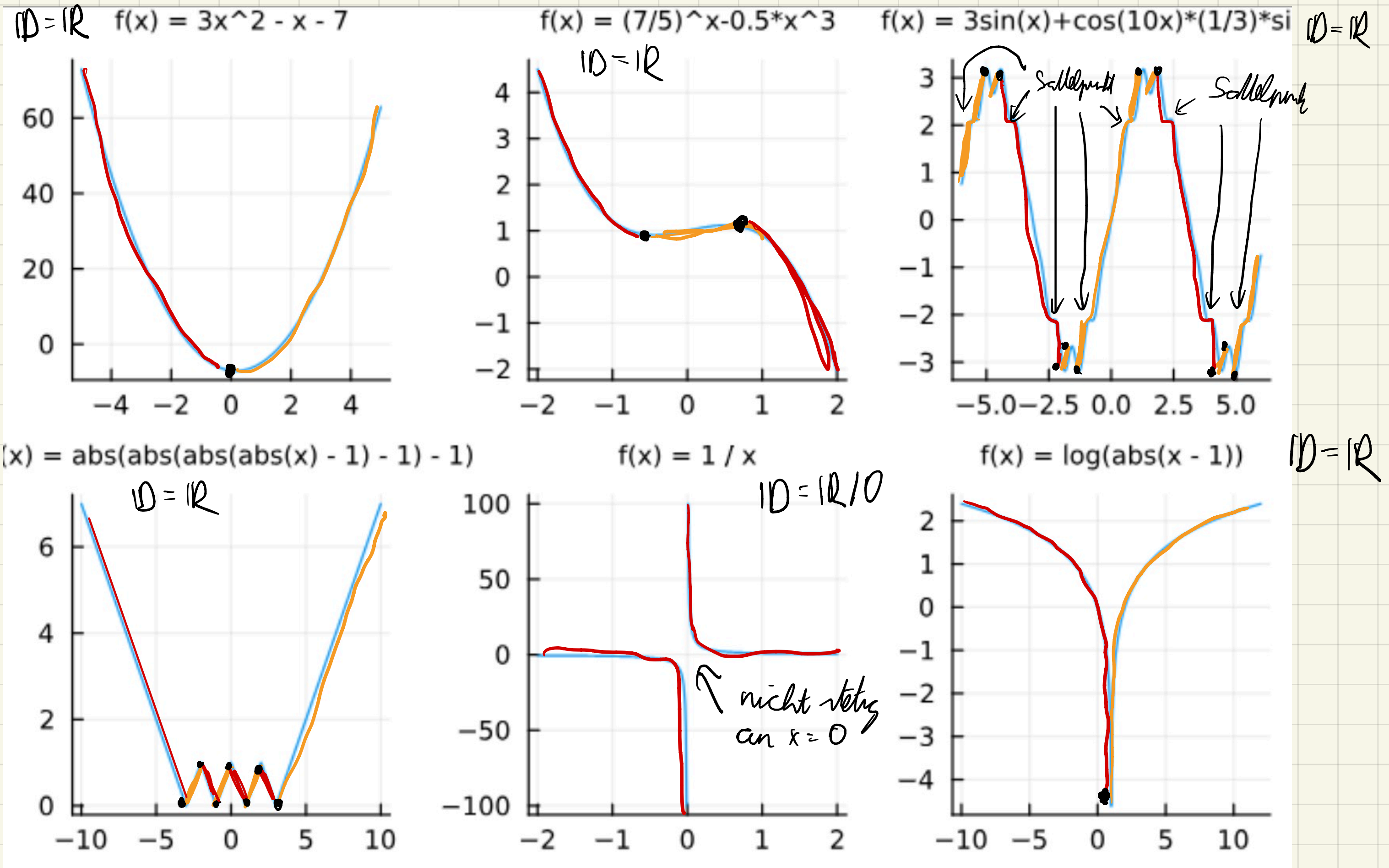
$| : 0 \Rightarrow a - b = 0$

man darf diese Umformung nicht machen, da man nicht durch 0 dividieren darf

(4) (1 Punkt) Die folgenden Funktionen sind gegeben:

$$f(x) = 3x^2 - x - 7 \tag{1}$$
$$f(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^x - \frac{1}{2}x^3 \tag{2}$$
$$f(x) = 3\sin(x) + \cos(10x)\frac{1}{3}\sin(x) \tag{3}$$
$$f(x) = \left|\left||x| - 1\right| - 1\right| - 1\Big| \tag{4}$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{5}$$
$$f(x) = \log|x - 1| \tag{6}$$

Implementieren Sie die Methode `plot_function(fct, x_min, x_max, step_size)` so, dass sie zur Visualisierung der Funktionen verwendet werden kann. Wählen Sie den x-Bereich gut aus. Bestimmen Sie die Eigenschaften (Definitionsmenge, Monotonie, Steigen, Sinken der Funktion, Unstetigkeiten,...) der gegebenen Funktionen.



- streng monoton fallend
- streng monoton steigend
- konstant

(im intervall des markierten bereichs)