(1) (1.25 Punkte) Lösen Sie folgende Terme von Hand. Geben Sie die Lösung in Polarform und kartesischer Form an:

a) (0.25 Punkte) $(5+2i)+(3-4i)$

b) (0.25 Punkte) $3e^{\pi i} - 2e^{\frac{1}{2}\pi i}$

c) (0.25 Punkte) $3e^{\pi i} \cdot 2e^{2\pi i}$

d) (0.5 Punkte) $\frac{4+3i}{2-i}$

$z = a \cdot ib$

trig: $z = r \cdot (\cos\varphi \cdot i \sin\varphi)$

exp: $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

a) $(5+2i)+(3-4i) = 8-2i$

Polarform berechnen

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$r = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{8}\right) = -0{,}244$

$-0{,}244 + 2\pi = 6{,}0368$

$\Rightarrow z = \sqrt{68} \cdot (\cos(6{,}0368) + i \cdot \sin(6{,}0368))$

b) $3e^{\pi i} - 2e^{\frac{1}{2}\pi \cdot i} = -3-2i$

$3 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)) = -3 + 0i$

$-2(\cos(\frac{1}{2}\pi) + i \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi)) = 0 - 2i$

Polarform:

$r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{-3}\right) = 0{,}588$

$z = \sqrt{13}\,(\cos(0{,}588) + i \cdot \sin(0{,}588))$

c) $3 \cdot e^{\pi i} \cdot 2 \cdot e^{2\pi i} = 6 \cdot e^{3\pi i}$ (Polarform)

$= 6 \cdot (\cos(3\pi) + i \cdot \sin(3\pi)) = -6 + 0i = -6$ (Kartesisch)

d) $\frac{4+3i}{2-i}$

$$\frac{(4+3i)\cdot(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+6i+4i+3i^2}{4+4i-4i-i^2} = \frac{5+10i}{5}$$

$= 1+2i$

(Kartesisch)

Polarform:

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 1{,}107$

$r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$z = \sqrt{5} \cdot e^{1{,}107 \cdot i}$

(3) (2 Punkte) Benutzen Sie eine Taylor Reihe um Euler's Formel herzuleiten. Gegeben ist die Taylor Reihe für $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!},$$

welche folgendermaßen erweitert werden kann:

$$e^{\mathrm{i}x} \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!}.$$

Zeigen Sie, dass $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$.

Hinweis: Siehe Lösungen zur Approximation von $\sin(x)$ und $\cos(x)$: Folgen und Reihen Slideset, Folie 43.

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$$

ZZ: $e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

NOTE $i^2 = -1$

$$\cos(x) + \sin(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$e^{xi} = \frac{(xi)^0}{1} + \frac{(xi)^1}{1} + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \frac{(xi)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{xi}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos(x)} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin(x)}$$

$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

(2) (1.75 Punkte)

a) (0.75 Punkte) Nach dem *Nth Root Theorem*, hat eine komplexe Zahl $z = (r, \theta)$ genau n verschiedene n-te Wurzeln, welche durch folgende Formel bestimmt werden:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{1}$$

mit

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Um z.B. die beiden *2*. Wurzeln von z zu berechnen, wenden Sie die Formel (1) 2 mal an, mit $k = 0$, bzw. $k = 1$.

Berechnen Sie die 4. Wurzeln einer komplexen Zahl in Polarform $z = \left(81, \frac{4\pi}{3}\right)$ von Hand.

b) (0.5 Punkte) Das *Reziproke* einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert durch

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

mit $\bar{z} = x - iy$ die *komplex Konjugierte* von z.

- Finden Sie zuerst einen allgemeinen Ausdruck für die kartesische Form von $\frac{1}{z}$.
- Berechnen Sie dann mit Ihrem Ergebnis die kartesische Form von $\frac{1}{a}$ wobei $a = (2, \frac{3\pi}{4})$ eine komplexe Zahl in Polarform ist.

c) (0.5 Punkte) Ändern Sie das Julia Skript `reciprocal.jl`, um die Konjugierte und den Kehrwert einer komplexen Zahl in der Funktion `conjugate(z)` bzw. `reciprocal(z)` zu implementieren. Eine komplexe Zahl, bestehend aus Real- und Imaginärteil, wird im Parameter z als Reihe mit 2 Werten übergeben. Verwenden Sie das zu Verfügung gestellte Skript, um die Konjugierte und den Kehrwert von den komplexen Zahlen $a = 0.5 + 0.7i$ und $b = 1.5 + 1i$ darzustellen. Ihr Ergebnis wird automatisch generiert und sollte Abbildung 1 gleichen.

a) $\sqrt[4]{81}\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

$$\alpha_0 = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi\cdot 0}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi\cdot 1}{4} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi\cdot 2}{4} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi\cdot 3}{4} = \frac{11}{6}\pi$$

$$z_0 = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

b) Allgemeiner Ausdruck:

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$a = \left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$a = 2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$$