Allgemeine Informationen: Dieses Aufgabenblatt enthält schriftliche und/oder Programmieraufgaben. Bitte kombinieren Sie alle Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben zu einem einzelnen PDF Dokument, welches Sie nach folgendem Schema benennen:`{lastname}-written.pdf`. Sie können Ihre Lösungen auch scannen oder fotografieren. Achten Sie in diesem Fall auf die Lesbarkeit. Es werden JPEG/PNG Bilddateien akzeptiert welche wie folgt benannt werden müssen:`{exercisenumber}-{lastname}-written.{jpeg/png}`. Stellen Sie sicher, dass alle Rechenschritte nachvollziehbar sind und kombinieren Sie nicht zu viele kleine Schritte zu einem einzelnen. Die Programmieraufgaben müssen in *Julia* gelöst sein und Ihr Quellcode sollte nach folgendem Schema benannt sein: `{exercisenumber}-{lastname}.jl`.

(1) (1.25 Punkte) Lösen Sie folgende Terme von Hand. Geben Sie die Lösung in Polarform und kartesischer Form an:

a) (0.25 Punkte) $(5 + 2\mathrm{i}) + (3 - 4\mathrm{i})$

b) (0.25 Punkte) $3e^{\pi \mathrm{i}} - 2e^{\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}}$

c) (0.25 Punkte) $3e^{\pi \mathrm{i}} \cdot 2e^{2\pi \mathrm{i}}$

d) (0.5 Punkte) $\frac{4+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

(2) (1.75 Punkte)

a) (0.75 Punkte) Nach dem *Nth Root Theorem*, hat eine komplexe Zahl $z = (r, \theta)$ genau n verschiedene n-te Wurzeln, welche durch folgende Formel bestimmt werden:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{1}$$

mit

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Um z.B. die beiden *2.* Wurzeln von z zu berechnen, wenden Sie die Formel (1) 2 mal an, mit $k = 0$, bzw. $k = 1$.
Berechnen Sie die 4. Wurzeln einer komplexen Zahl in Polarform $z = \left(81, \frac{4\pi}{3}\right)$ von Hand.

b) (0.5 Punkte) Das *Reziproke* einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist definiert durch

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

mit $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ die *komplex Konjugierte* von z.

- Finden Sie zuerst einen allgemeinen Ausdruck für die kartesische Form von $\frac{1}{z}$.
- Berechnen Sie dann mit Ihrem Ergebnis die kartesische Form von $\frac{1}{a}$ wobei $a = (2, \frac{3\pi}{4})$ eine komplexe Zahl in Polarform ist.

c) (0.5 Punkte) Ändern Sie das Julia Skript `reciprocal.jl`, um die Konjugierte und den Kehrwert einer komplexen Zahl in der Funktion `conjugate(z)` bzw. `reciprocal(z)` zu implementieren. Eine komplexe Zahl, bestehend aus Real- und Imaginärteil, wird im Parameter z als Reihe mit 2 Werten übergeben. Verwenden Sie das zu Verfügung gestellte Skript, um die Konjugierte und den Kehrwert von den komplexen Zahlen $a = 0.5 + 0.7\mathrm{i}$ und $b = 1.5 + 1\mathrm{i}$ darzustellen. Ihr Ergebnis wird automatisch generiert und sollte Abbildung 1 gleichen.

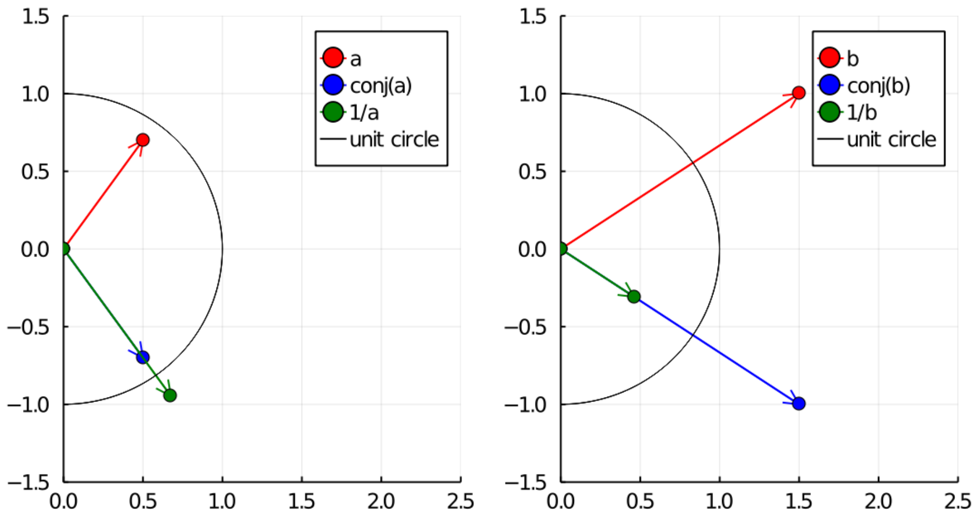

Abbildung 1: Punkte a und b dargestellt in Rot. Die Konjugierten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ sind dargestellt in Blau (gespiegelt an der x-Achse). Reziproke $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ in Grün.

(3) (2 Punkte) Benutzen Sie eine Taylor Reihe um Euler's Formel herzuleiten. Gegeben ist die Taylor Reihe für $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!},$$

welche folgendermaßen erweitert werden kann:

$$e^{\mathrm{i}x} \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!}.$$

Zeigen Sie, dass $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$.

Hinweis: Siehe Lösungen zur Approximation von $\sin(x)$ und $\cos(x)$: Folgen und Reihen Slideset, Folie 43.

(4) (2 Punkte) In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Fourier Reihen. Hierbei kann eine beliebige Funktion mittels Sinus- und Cosinus-Schwingungen verschiedener Frequenzen dargestellt werden. Dabei gilt für eine beliebige Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x, \quad k \geq 0$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x, \quad k \geq 1,$$

als Koeffizienten für die reelle Darstellung der Reihe und ähnlich haben wir jetzt

$$c_k = \begin{cases} a_0 & , k = 0 \\ \frac{(a_k - \mathrm{i}b_k)}{2} & , k > 0 \\ \frac{(a_{|k|} + \mathrm{i}b_{|k|})}{2} & , k < 0 \end{cases}$$

als Koeffizienten für die komplexe Version der Reihe. Folgende Funktion mit einer Periode von 2π ist gegeben und soll durch eine Fourier Reihe dargestellt werden:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , -\pi < x < 0 \\ -1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}. \tag{2}$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie zuserst, dass $a_k = 0$ für alle k. Berechnen Sie c_k durch einsetzen von a_k, b_k und werten Sie c_k für alle $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ aus.

b) (1 Punkt) Implementieren Sie die komplexe Version der Fourer Reihen Darstellung der Rechteckschwingung mit `fourier.jl`. Dazu übersetzen Sie c_k (`c(k)`) und die obige Definition der Fourier Reihe (`fourier(x,N)`) in `julia`. Nutzen Sie dafür die in Julia zur Verfügung gestellten komplexen Zahlen[1].

Prüfen Sie, ob das Ergebnis die Lösung aus Abbildung 2 widerspiegelt.

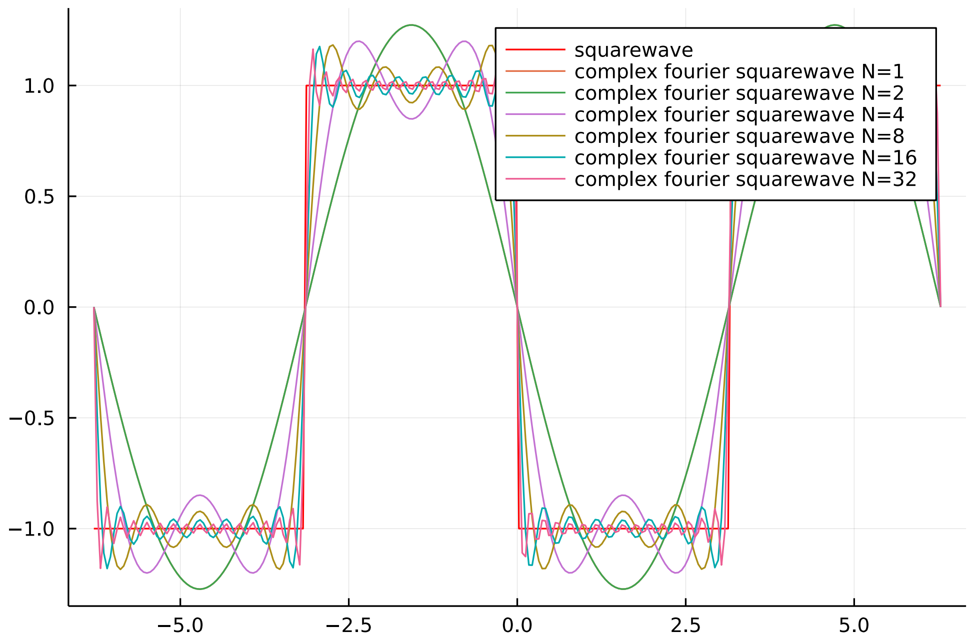

Abbildung 2: Komplexe Fourier Reihen Darstellung einer Rechteckschwingung.

[1] `https://docs.julialang.org/en/v1/manual/complex-and-rational-numbers/`