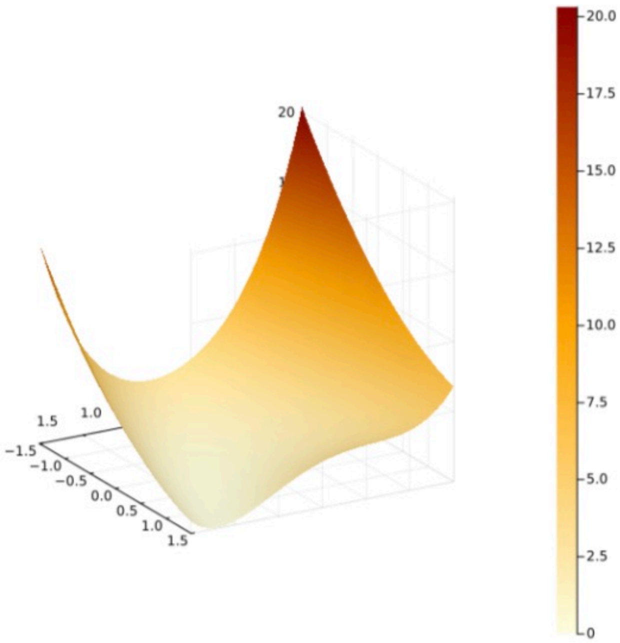
(1) (2 Punkte) Gegeben ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + (y - x^2)^2$$




a) (0,5 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ d.h. $\frac{\partial}{\partial x} f$ und $\frac{\partial}{\partial y} f$.

b) (0,75 Punkte) Berechnen Sie die höheren partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f$. Erhalten Sie bei der höheren partiellen Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ das selbe Ergebnis wie bei $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$ ?

c) (0,75 Punkte) Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an einem Punkt $(x, y)$ ist ein 2D-Vektor welcher in die Richtung des größten Anstiegs zeigt. Er wird mit den partiellen Ableitungen berechnet:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix}$$

Berechnen sie die folgenden Gradienten und deren Länge:

$$\nabla f(-1, -1), \ \nabla f(1, 1)$$

a) $f(x,y) = (1-x)^2 + (y-x^2)^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2 - 2x^2y + y^4$

$$\frac{\partial}{\partial x} f = -2 + 2x - 4xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = 2y - 2x^2 + 4y^3$$

b) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} -2+2x-4xy = -4x$

$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} 2y-2x^2+4y^3 = -4x$

Das Ergebnis ist das Selbe (Satz von Schwarz)

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = \frac{\partial}{\partial y} 2y-2x^2+4y^3 = 2+12y^2$

c) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2+2x-4xy \\ 2y-2x^2+4y^3 \end{pmatrix}$

$\nabla f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2-2+4 \\ -2-2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -2+2-4 \\ 2-2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

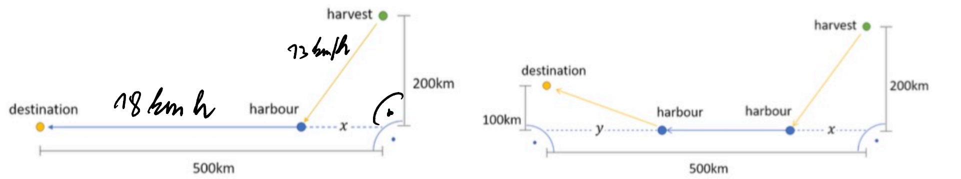
$|\nabla f(-1,-1)| = \sqrt{0^2+8^2} = 8$

$|\nabla f(1,1)| = \sqrt{(-4)^2+4^2} = \sqrt{32}$

(2) (2 Punkte) Ein Holzunternehmen will den Transport zu ihrem Sägewerk beschleunigen indem ein Teil des Weges mit einem Boot zurückgelegt werden soll. Um dies zu bewerkstelligen, muss eine optimale Position (Distanz stromabwärts $x$) für einen Hafen am Fluss gefunden werden, sodass die Zeit für den Transport minimiert ist – siehe linke Abbildung. Circa 200 Kilometer vom Holzlager entfernt, ist ein Fluss der direkt zum 500 Kilometer entfernten Sägewerk fließt. Wegen des schwierigen Geländes an Land kann der Transport im Durchschnitt nur mit 13 km/h (orange Linie) erfolgen. Mit dem Boot hingegen sind es 18 km/h (blaue Linie).

a) (1 Punkt)

- Definieren Sie die Funktion $f(x)$ welche die Zeit für den Transport berechnet. Dabei repräsentiert $x$ die Distanz stromabwärts für den Hafen.
- Verwenden Sie den zur Verfügung gestellten Julia Code `log_transport.jl` um die Funktion zu plotten.
- Finden Sie die Distanz $x$ welche den schnellsten Transport ermöglicht.




$$V = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{V}$$

$$t_{gesamt}(x) = \frac{500-x}{18} + \frac{\sqrt{x^2+200^2}}{13}$$

gesucht: Minimum abhängig von $x$

$$t(x)' = -\frac{1}{18} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+200^2}} \cdot 2x$$

$$t(x)' = -\frac{1}{18} + \frac{1}{13} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+200^2}} = 0$$

$$\frac{1}{18}\sqrt{x^2+200^2} = \frac{1}{13}x \quad \Big| \;()^2$$

$$\frac{1}{324}(x^2+40000) = \frac{1}{169}x^2$$

$$169x^2 + 6760000 = 324x^2$$

$$155x^2 = 6760000$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{6760000}{155}} \approx 208{,}83 \text{ km}$$

Anhand des Graphen sehen wir dass es ein Minimum ist, deshalb berechne ich die zweite Ableitung nicht

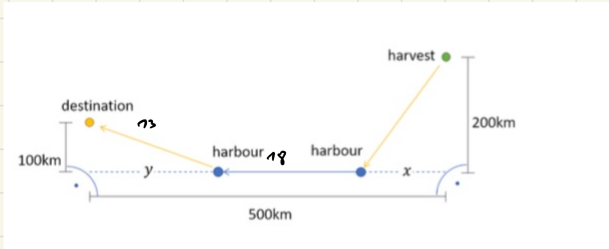
b) (1 Punkt) Das Unternehmen beschließt das Sägewerk 100 Kilometer landeinwärts zu verlegen – dargestellt in der rechten Abbildung.

- Wie zuvor definieren Sie die Funktion $f(x, y)$, wobei $y$ die Distanz flussaufwärts eines zweiten Hafens beschreibt.

- Verwenden Sie den zur Verfügung gestellten Julia Code `log_transport.jl` um die Funktion zu plotten.

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, und finden Sie deren Nullstellen. Können Sie aufgrund dieser Nullstellen die Werte für $x$ und $y$ bestimmen, welche die optimale Transportzeit ermöglichen?

$$t = \frac{s}{v}$$




$$t(x,y) = \frac{500 - x - y}{18} + \frac{\sqrt{y^2 + 100^2}}{13} + \frac{\sqrt{x^2 + 200^2}}{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} t(x,y) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{13} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 200^2}} = 0 \Rightarrow x \approx 208{,}83 \text{ km}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} t(x,y) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{13} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + 100^2}}$$

$$0 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{13} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + 100^2}}$$

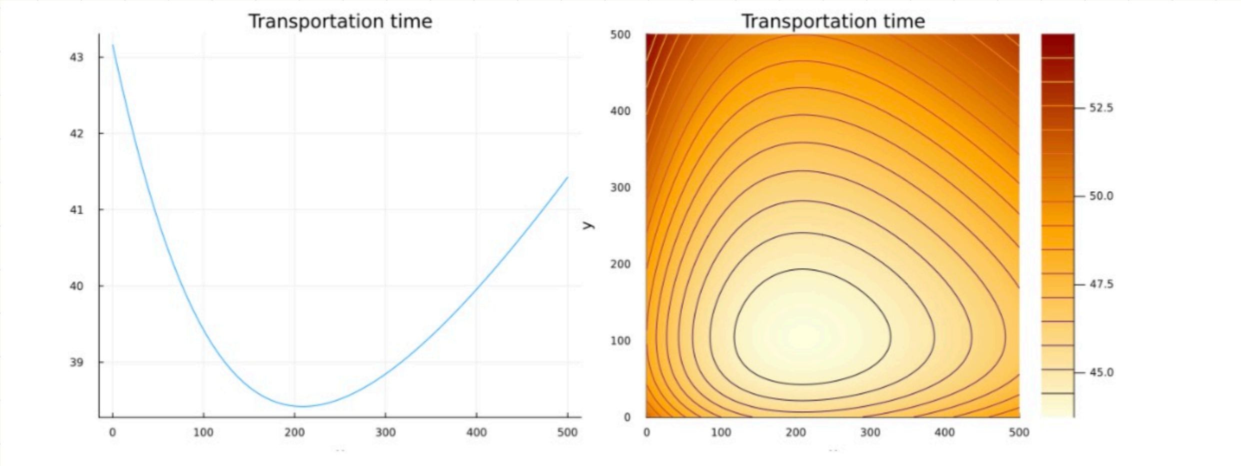
$$\frac{1}{18} \sqrt{y^2 + 100^2} = \frac{1}{13} y \quad \Big| \ ()^2$$

$$\frac{1}{324}\left(y^2 + 10\,000\right) = \frac{1}{169} y^2$$

$$169 y^2 + 1690\,000 = 324 y^2$$

$$155 y^2 = 1690\,000$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1690\,000}{155}} \approx 104{,}41$$




(3) (1.5 Punkte) Die Newton-Methode ist ein Iterationsverfahren zur Berechnung reeller Nullstellen einer Funktion. Ausgehend von einem Näherungswert $x$ wird durch wiederholtes Anwenden der folgenden Schritte eine Reihe von Näherungswerten $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ konstruiert, die unter bestimmten Voraussetzungen gegen die exakte Lösung (Nullstelle) konvergiert.

a) Tangente bei $f(x)$ berechnen.

b) Schnittpunkt zwischen der Tangente und der x-Achse berechnen.

c) Schnittpunkt als neuen Wert von $x$ verwenden und von Schritt a) wiederholen.

Die allgemeine Iterationsvorschrift, die den nächsten Näherungswert $x_{k+1}$ berechnet lautet

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad f'(x_k) \neq 0,$$

wobei $x_{k+1}$ der neue Wert von $x$ und $x_k$ der Wert von $x$ bei der vorherigen Iteration ist.

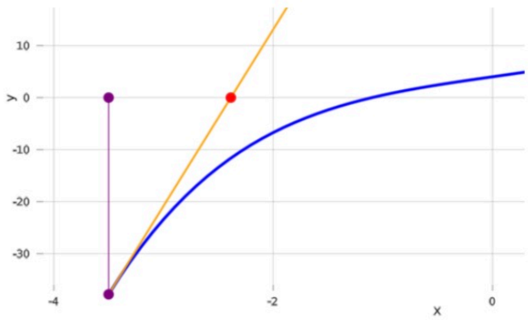



Abbildung 1: Eine Iteration der Newtonschen Methode. Die Werte von $x_k$ und $f(x_k)$ sind durch violette Punkte und $x_{k+1}$ durch einen roten Punkt dargestellt. Die Tangente an $f(x_k)$ ist orangefarben.

a) (1 Punkt) Implementieren Sie die Newton-Methode um die Nullstellen der folgenden Funktionen näherungsweise zu finden:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 6$$
$$g(x) = \frac{0.7e^x - 0.5}{e^x + 1}$$
$$h(x) = (3x^2 - \sin(x))e^{1-x^2} + 0.1$$

$f'(x) = x^2 - 1$

$\frac{0{,}7e^x \cdot (e^x+1) - (0{,}7e^x - 0{,}5)(e^x)}{(e^x+1)^2}$

Verwenden Sie dafür die beigelegte Code-Vorlage in `newton.jl`. Implementieren Sie die Funktionen `f`, `g`, `h` und `f_prime`, `g_prime`, `h_prime`, als auch die obrige Iterationsvorschrift in `newton_method`.

b) (0,25 Punkte) Was passiert wenn Sie als Startwert $x = 1$ für die Nullstellen Suche von $f(x)$ verwenden?

c) (0,25 Punkte) Können Sie die Methode verwenden um ein lokales Minimum oder Maximum einer Funktion zu finden?

$$\left(3x^2 - \sin(x)\right) e^{1-x^2} + 0{,}1 \,'$$

$$= 3x^2 \cdot e^{1-x^2} - \sin(x) \cdot e^{1-x^2} + 0{,}1 \,'$$

$$= 6x \cdot e^{1-x^2} + 3x^2 \cdot \left(-2x \cdot e^{1-x^2}\right) - \left(\cos(x) \cdot e^{1-x^2} + \sin(x) \cdot (-2)x \cdot e^{1-x^2}\right)$$

$$6x \cdot e^{1-x^2} - 6x^3 \cdot e^{1-x^2} - \cos(x) \cdot e^{1-x^2} - 2x \cdot \sin(x) \cdot e^{1-x^2}$$

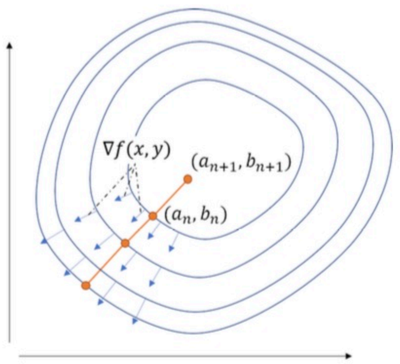
$$e^{1-x^2} \cdot \left(6x - 6x^3 - \cos(x) - 2x \cdot \sin(x)\right)$$

b) Die Nullstelle wird nicht gefunden weil bei $x = 1$ $f'(1) = 0$

c) Wenn man das Newtonverfahren auf die Ableitung einer Funktion anwendet, kann man dadurch lokale Extremstellen oder Sattelpunkte finden

(4) (1.5 Punkte) Das *Gradientenverfahren* bzw. *Verfahren des steilsten Abstiegs* ist ein iterativer Algorithmus zum Finden eines lokalen Minimums einer differenzierbaren Funktion. Ausgehend von einem Punkt $(a_n, b_n)$ wird schrittweise, entgegen des Vektorfeldes $\nabla f$, eine Folge von neuen Punkten generiert welche zu einem Minimum von $f$ konvergiert. Formal wird ein neuer Punkt $(a_{n+1}, b_{n+1})$ in jedem Schritt berechnet, indem der Gradient an dem Punkt $(a_n, b_n)$ (multipliziert mit einer Schrittweite $\gamma$) subtrahiert wird:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}]^T = [a_n, b_n]^T - \gamma \nabla f(a_n, b_n) \tag{1}$$




Implementieren Sie in Julia das *Gradientenverfahren* für die folgenden Funktionen, indem Sie den Code in `gradient_descent.jl` vervollständigen:

$u' \cdot v + u \cdot v'$

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = \sin^2(x) + \frac{7}{5}\cos(y) + \frac{y}{3} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\cos(x) \cdot \sin(x) \\ -\frac{7}{5}\sin(x) + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$f'(g) \cdot g'$

$$h(x, y) = 4x^2 e^{-x^2-y^2} + 4y^2 e^{-x^2-y^2}$$

a) (0,75 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der gegebenen Funktionen. Implementieren Sie die Funktionen `f`, `g`, `h` und `f_gradient`, `g_gradient`, `h_gradient` in Julia.

b) (0,5 Punkte) Implementieren Sie die fehlende Iterationsvorschrift (Gleichung 1).

c) (0,25 Punkte) Findet die Methode garantiert immer ein lokales bzw. globales Minimum?

$$8x \cdot e^{-x^2-y^2} + 4x^2 \cdot (-2x e^{-x^2-y^2}) + 4y^2(-2x e^{-x^2-y^2})$$

$$4x^2(-2y e^{-x^2-y^2}) + 8y e^{-x^2-y^2} + 4y^2(-2y e^{-x^2-y^2})$$

c) Sie kann ein Minimum finden, aber nicht garantiert ein globales Minimum. Wenn ein Minimum gefunden wurde, kann es nicht mehr verlassen werden. Zudem gibt es auch ein Problem mit Sattelpunkten.