

Universidad de Alicante

FACULTAD DE CIENCIAS

BLOQUE I
FÍSICA COMPUTACIONAL

4^o Grado en Física

Manuel Mora Cartagena

Índice

Capítulos	Página
1. Ejercicio 1	3
2. Ejercicio 2	5
2.1. Método de diferencias finitas	5
2.2. Método de Jacobi	6
2.3. Condiciones de contorno de Neumann	6
3. Ejercicio 3	7
4. Ejercicio 4	9
4.1. Método explícito (FTCS)	9
4.2. Método semi-implícito (Crank-Nicholson)	10
4.3. Método semi-implícito (Crank-Nicholson) con distintos coeficientes de difusión	11
4.4. Conclusiones	12
5. Ejercicio 5	13
6. Ejercicio 6	14
6.1. Método explícito	14
6.2. Método implícito	15
6.3. Ecuación del telégrafo	16
7. Ejercicio 7	17
7.1. Diferencias centradas	17
7.2. Downwind	18
7.3. Upwind	19
7.4. Lax-Wendroff	20
8. Ejercicio 8	21
8.1. Diferencias centradas	21
8.2. Upwind	23
8.3. Downwind	25
8.4. Esquema conservativo	27
8.5. Condiciones de contorno periódicas	29

Resumen

Este documento consiste en el informe de ejercicios del bloque I de la asignatura Física computacional.

1. Ejercicio 1

El propósito de este ejercicio es comparar el tiempo de cálculo a la hora resolver un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial de la forma:

$$Ax + v = 0 \quad (1)$$

Para ello se utilizan tres algoritmos distintos para obtener la solución:

- El primero de ellos es el algoritmo de Thomas o algoritmo para matrices tridiagonales. En este caso se define una función a la que se le pasan cuatro arrays que corresponden a las tres diagonales: la principal, la superior y la inferior, y el último corresponde con los términos independientes del sistema.
- Por otro lado se resuelve el sistema utilizando las librerías *numpy.linalg.inv* y *np.linalg.solve*. Con el primero de ellos se calcula la matriz inversa y se multiplica por la matriz original para obtener la solución del sistema. Con el segundo se resuelve el sistema directamente.

Mediante la función *time.time()* se puede obtener el tiempo de cálculo para cada uno de los algoritmos. Con esto, se calculará el tiempo necesario para resolver el sistema para matrices de distintas dimensiones con cada uno de los algoritmos.

Si se gráfica el tiempo de cálculo en función de la dimensión de la matriz para los tres algoritmos se obtiene lo siguiente:

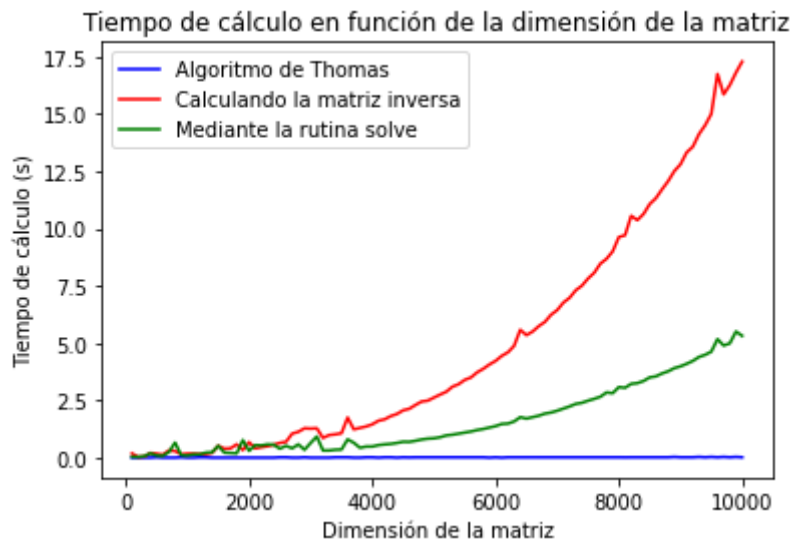


Figura 1: Tiempo de cálculo en función de la dimensión de la matriz

Como se puede ver en la figura 1 el algoritmo que menos tiempo de cálculo requiere es el algoritmo de Thomas o algoritmo para matrices tridiagonales. Seguido de este se tiene el algoritmo en el que se calcula la solución del sistema mediante la rutina *np.linalg.solve*, aparentemente tiene un crecimiento exponencial. Por último se encuentra el algoritmo en el que se utiliza *numpy.linalg.inv* con el que se calcula la matriz inversa y se multiplica por la matriz original para obtener la solución del sistema, en este caso el crecimiento también parece ser exponencial pero crece de manera mucho más rápida que en el caso anterior.

Cabe destacar que la matriz que se define para el algoritmo de Thomas es una matriz tridiagonal aleatoria, mientras que para los otros dos algoritmos se define una matriz aleatoria que puede tener cualquier forma, ya que se define de forma aleatoria. Esto puede afectar en el tiempo de cálculo, ya que la matriz que se le pasa al algoritmo de Thomas está mucho más simplificada en la mayoría de casos. Sin embargo, esto se puede despreciar ya que el tiempo de cálculo para la rutina *np.linalg.solve* es de aproximadamente 5 segundos para matrices de dimensiones de 10000x10000 y en el caso de la rutina *numpy.linalg.inv* se llegan a superar los 17 segundos para matrices de dimensiones de 10000x10000. Sin embargo para el algoritmo de Thomas no se llegan a superar los 0,03 segundos para matrices de la misma dimensión, es

decir, es mucho más rápido a la hora de calcular la solución del sistema. Para comprobar esto con mejor claridad, se puede representar el tiempo de cálculo para el algoritmo de Thomas en una gráfica distinta, ya que la escala de tiempo de mucho menor en este caso y no se puede apreciar correctamente en la figura ??.

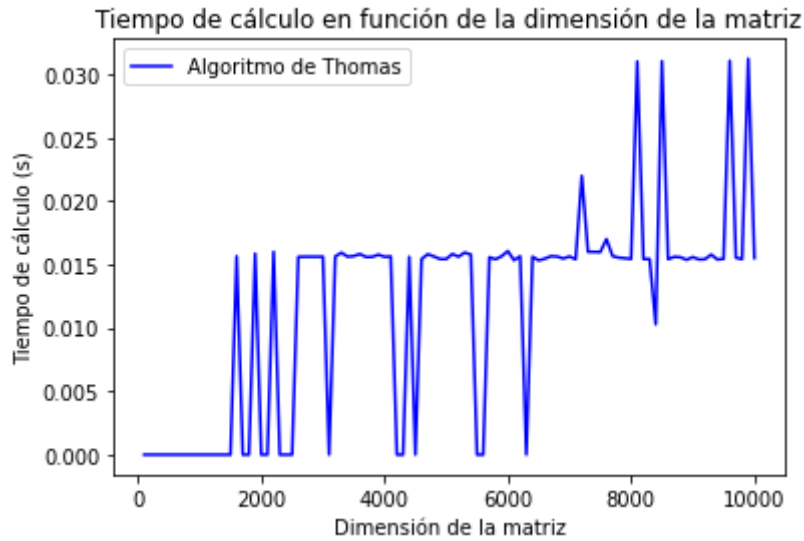


Figura 2: Tiempo de cálculo en función de la dimensión de la matriz para el algoritmo de Thomas

Como se puede ver en la figura 2 el tiempo de cálculo para el algoritmo de Thomas es menor a 0,03 segundos en cualquier caso, es decir, este algoritmo es más de 165 veces más rápido que el algoritmo que utiliza la librería *np.linalg.solve* y 580 veces más rápido que el algoritmo que utiliza la librería *numpy.linalg.inv*.

Las fluctuaciones que se observan en la figura 2 pueden deberse a varias razones: una de ellas puede ser que unos sistemas sean más sencillos de resolver que otros, ya que la matrices se generan aleatoriamente. Además los tiempos de cálculo son tan cortos por lo que la variación entre uno y otro parece ser muy grande, pero si se observan los valores de tiempo de cálculo son todos muy similares, cercanos a cero. Con todo esto, se puede concluir que el algoritmo de Thomas es mucho más eficiente que los otros dos algoritmos.

2. Ejercicio 2

El propósito de este ejercicio es resolver la ecuación de Laplace:

$$\nabla u = 0 \quad (2)$$

Para ello se utilizarán distintos métodos y distintas condiciones de contorno. Los resultados se mostrarán utilizando `plt.contour`.

2.1. Método de diferencias finitas

En primer lugar el problema a resolver es el siguiente:

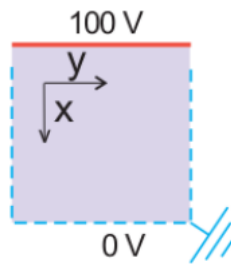


Figura 3: Problema a resolver

Para este problema las condiciones de contorno son las que se muestran en la figura 3: el potencial en la pared superior es de 100 V y en las paredes laterales e inferior es de 0 V.

Para resolver este problema, se utiliza en primer lugar el método de diferencias finitas. El resultado para este caso es el siguiente:

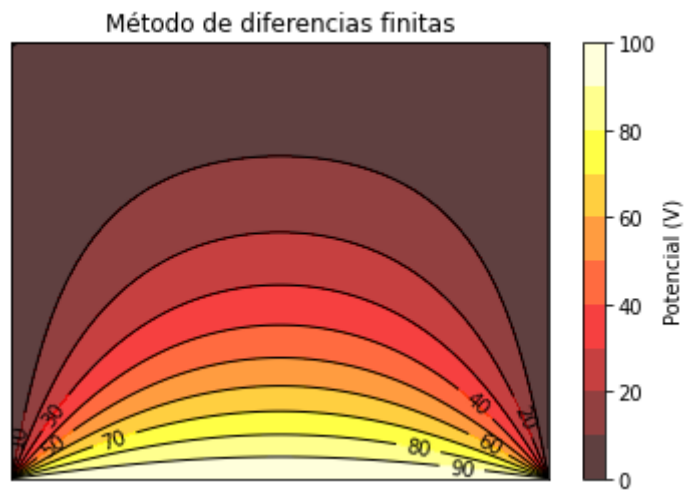


Figura 4: Solución mediante el método de diferencias finitas

2.2. Método de Jacobi

En este apartado se utilizan las mismas condiciones que en el apartado anterior, las mostradas en la figura 3. Sin embargo, ahora se resuelve mediante el método de Jacobi. El resultado en este caso es el mismo que en el anterior:

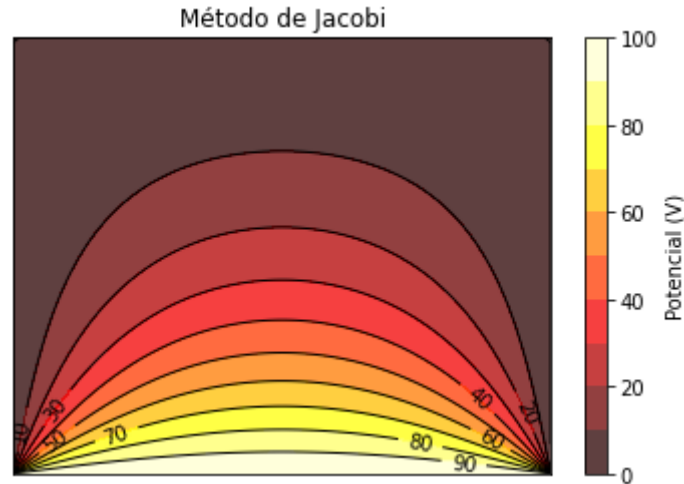


Figura 5: Solución mediante el método de Jacobi

Cabe destacar que el método de Jacobi es mucho menos eficiente que el método de diferencias finitas.

2.3. Condiciones de contorno de Neumann

Por último se resuelve el mismo ejercicio pero modificando las condiciones de contorno en las paredes laterales y aplicando las condiciones de contorno de Neumann:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Para ello debemos modificar la matriz de nuestro sistema de ecuaciones. El resultado en este caso es el siguiente:

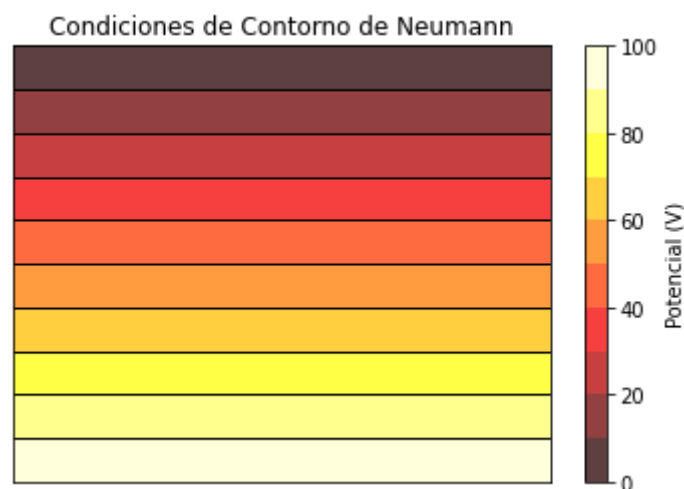


Figura 6: Solución con las condiciones de contorno de Neumann

Como puede verse aparecen líneas horizontales equipotenciales, tal y como era de esperar.

3. Ejercicio 3

El propósito de este ejercicio es resolver la ecuación diferencial para el oscilador armónico amortiguado:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - \alpha \dot{x} \quad (4)$$

Para ello se utilizarán tres métodos diferentes:

- Euler forward (método explícito)
- Euler backward (método implícito)
- Crank-Nicholson (método semi-implícito)

El resultado obtenido por cada uno de los métodos puede verse en la siguiente figura:

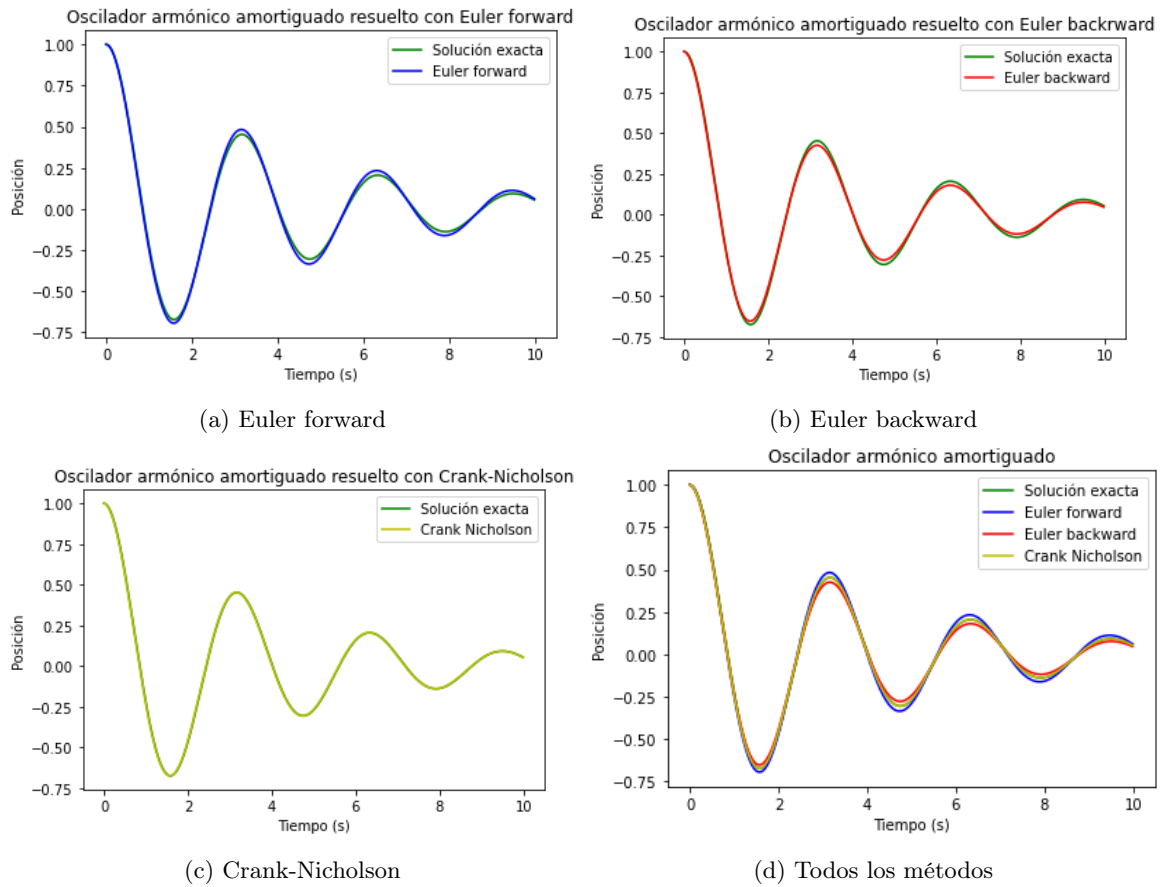


Figura 7: Oscilador armónico amortiguado resuelto por distintos métodos

Como se puede ver en la figura 7 todos los métodos aproximan correctamente a la solución exacta del oscilador armónico amortiguado.

Para comprobar cual de ellos converge mejor es conveniente estudiar el error en la resolución numérica en función del tiempo. Para ello se grafica a continuación la desviación cuadrática media en función del tiempo:

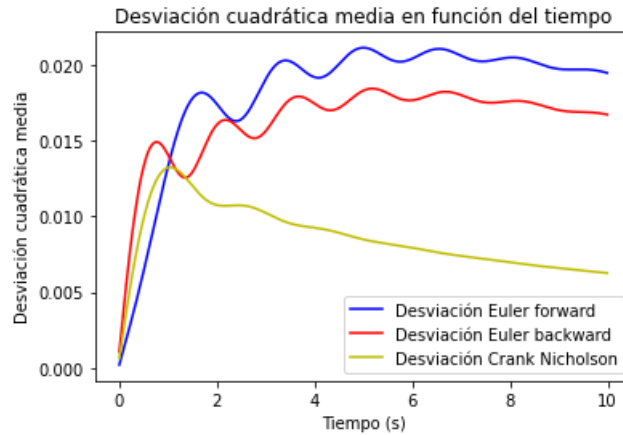


Figura 8: Desviación cuadrática media en función del tiempo

En la figura 8 se observa que los métodos Euler forward y Euler backward convergen prácticamente igual y el error se mantiene prácticamente constante durante toda la simulación a pesar de que Euler backward lo hace un poco mejor. Por otro lado, el método de Crank-Nicholson es el método que menos error tiene de los tres y decrece con el tiempo. Esto se debe a que el error es absoluto y no relativo y como se está aproximando el oscilador amónico amortiguado la función converge a cero, y por tanto su error absoluto también.

Por último, se puede comprobar la estabilidad de cada método si se grafica la desviación cuadrática media en función de la variación temporal. Para ello, se fija un tiempo de simulación, en este caso de 10 segundos, y se toma un intervalo para la variación temporal que en este caso va desde 0,001 segundos a 0,1 segundos.

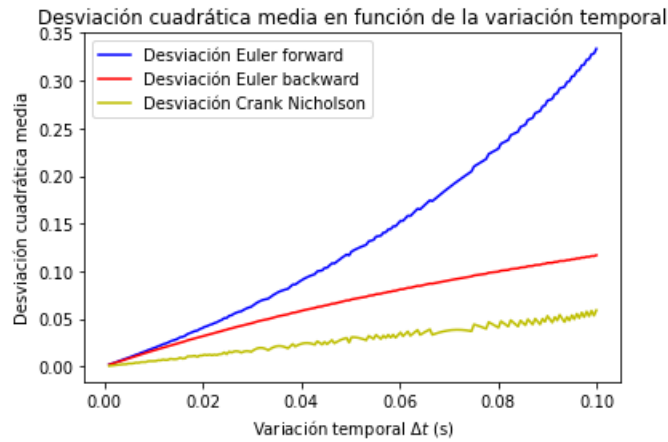


Figura 9: Desviación cuadrática media en función de la variación temporal

Como se puede ver en la figura 9 ambos métodos de Euler no son buenas aproximaciones en comparación al método de Crank-Nicholson a medida que se aumenta el paso temporal. El crecimiento de la desviación cuadrática media para el caso de Euler forward es exponencial y logarítmico para Euler backward. Por otro lado la desviación del método de Crank-Nicholson es prácticamente constante durante todo el intervalo y es el más cercano a cero. Por lo tanto, se puede concluir que el método de Crank-Nicholson es el más estable y el que mejor aproximación obtendrá.

4. Ejercicio 4

Este ejercicio consiste en resolver la ecuación de difusión mediante distintos métodos numéricos, con distintas condiciones de contorno y condiciones iniciales.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

donde T es la temperatura en la posición x y tiempo t y D es el coeficiente de difusión.

Los resultados se mostrarán con gráficas para diferentes instantes de tiempo, pero cabe destacar que en el script *ejercicio4.py* se puede ver una animación de como evoluciona el sistema a lo largo del tiempo.

4.1. Método explícito (FTCS)

En este apartado se resuelve la ecuación de difusión mediante un método explícito o FTCS (Forward Time Centered Space). Los parámetros en este caso son los siguientes:

- La condición inicial es $T(x, 0) = 100$ para todo el dominio menos en los extremos
- Las condiciones de contorno son $T(0, t) = T(L, t) = 0$
- El coeficiente de difusión es $D = 10^{-2}$

En este caso el resultado para diferentes instantes de tiempo es el siguiente:

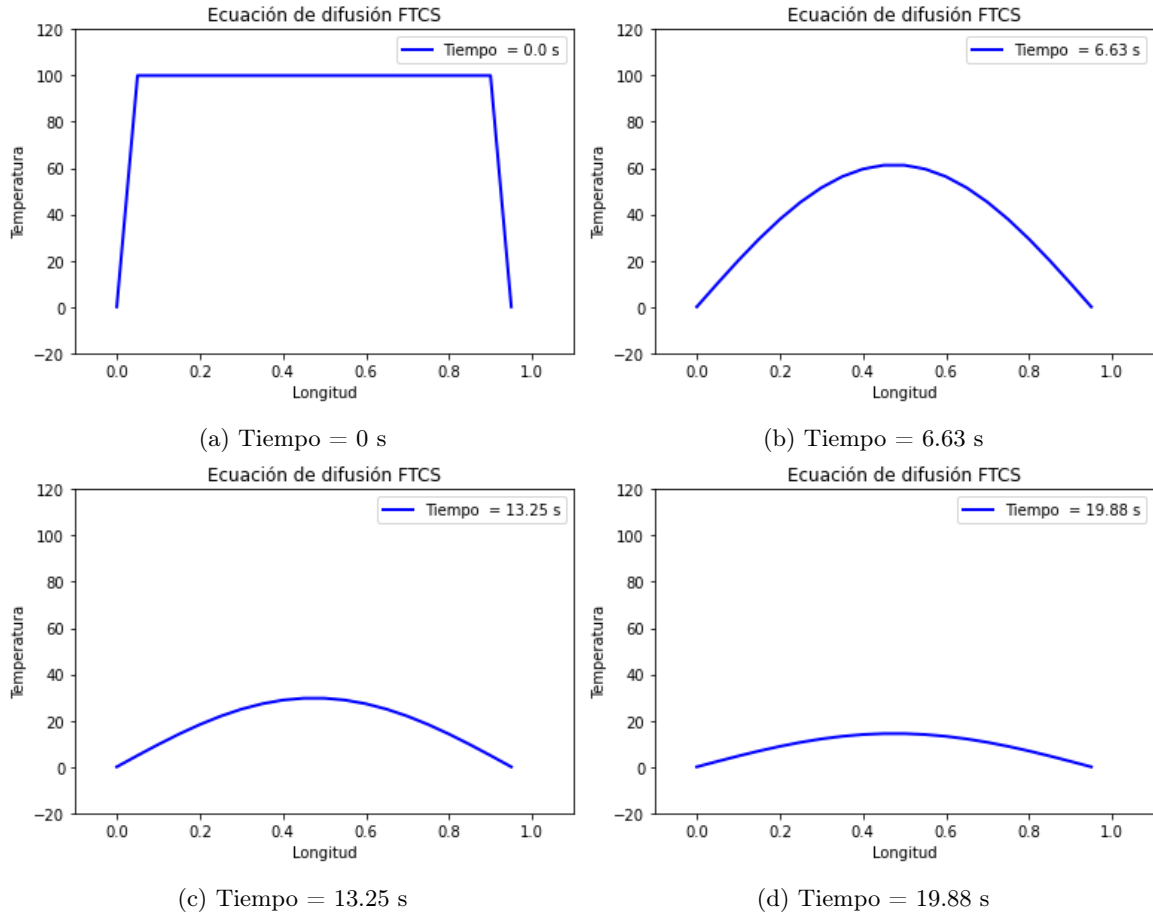


Figura 10: Resolución de la ecuación de difusión con un método explícito en distintos instantes de tiempo

4.2. Método semi-implícito (Crank-Nicholson)

En este apartado se resuelve la ecuación de difusión mediante un método semi-implícito o método de Crank-Nicholson. Los parámetros en este caso son los siguientes:

- La condición inicial es $T(x, 0) = 100$ para todo el dominio menos en los extremos se mantiene igual que en el caso anterior
- Las condiciones de contorno son $T(0, t) = 50$ y $T(L, t) = 0$
- El coeficiente de difusión es $D = 10^{-2}$ igual que en el caso anterior

En este caso el resultado para diferentes instantes de tiempo es el siguiente:

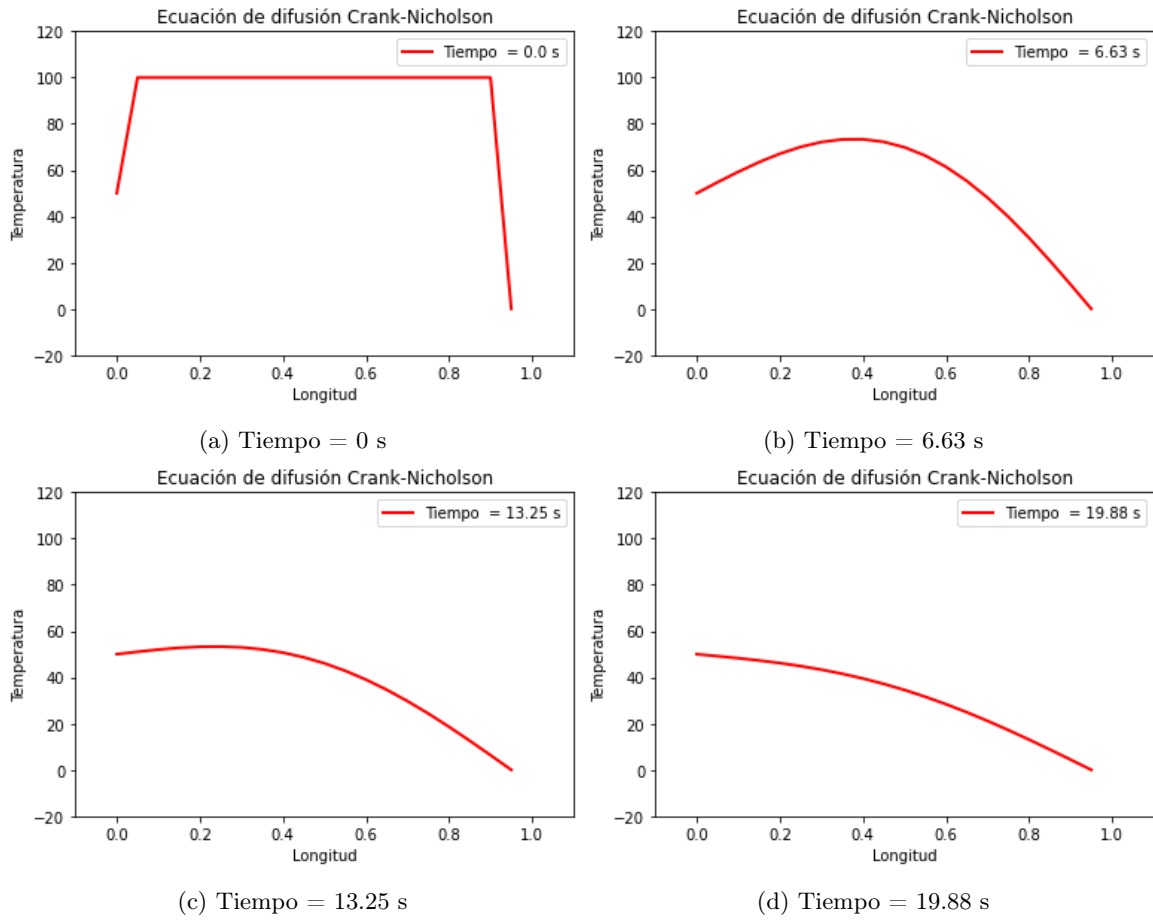


Figura 11: Resolución de la ecuación de difusión con un método semi-implícito en distintos instantes de tiempo

4.3. Método semi-implícito (Crank-Nicholson) con distintos coeficientes de difusión

En este apartado se resuelve la ecuación de difusión mediante un método semi-implícito igual que en el apartado anterior, pero con la peculiaridad de que el coeficiente de difusión no es igual en todo el dominio, si no que obtiene distintos valores en cada punto, es decir, hay una zona dentro del conductor con un material con un calor específico más alto. Los parámetros en este caso son los siguientes:

- La condición inicial es $T(x, 0) = 100$ para todo el dominio menos en los extremos se mantiene igual que en el caso anterior
- Las condiciones de contorno son $T(0, t) = 50$ y $T(L, t) = 0$ se mantienen igual que en el caso anterior
- El coeficiente de difusión es el siguiente:

$$D = \begin{cases} 10^{-2} & \text{para } 0 < x < 0,4 \\ 10^{-3} & \text{para } 0,4 < x < 0,6 \\ 10^{-2} & \text{para } 0,6 < x < 1 \end{cases} \quad (6)$$

En este caso el resultado para diferentes instantes de tiempo es el siguiente:

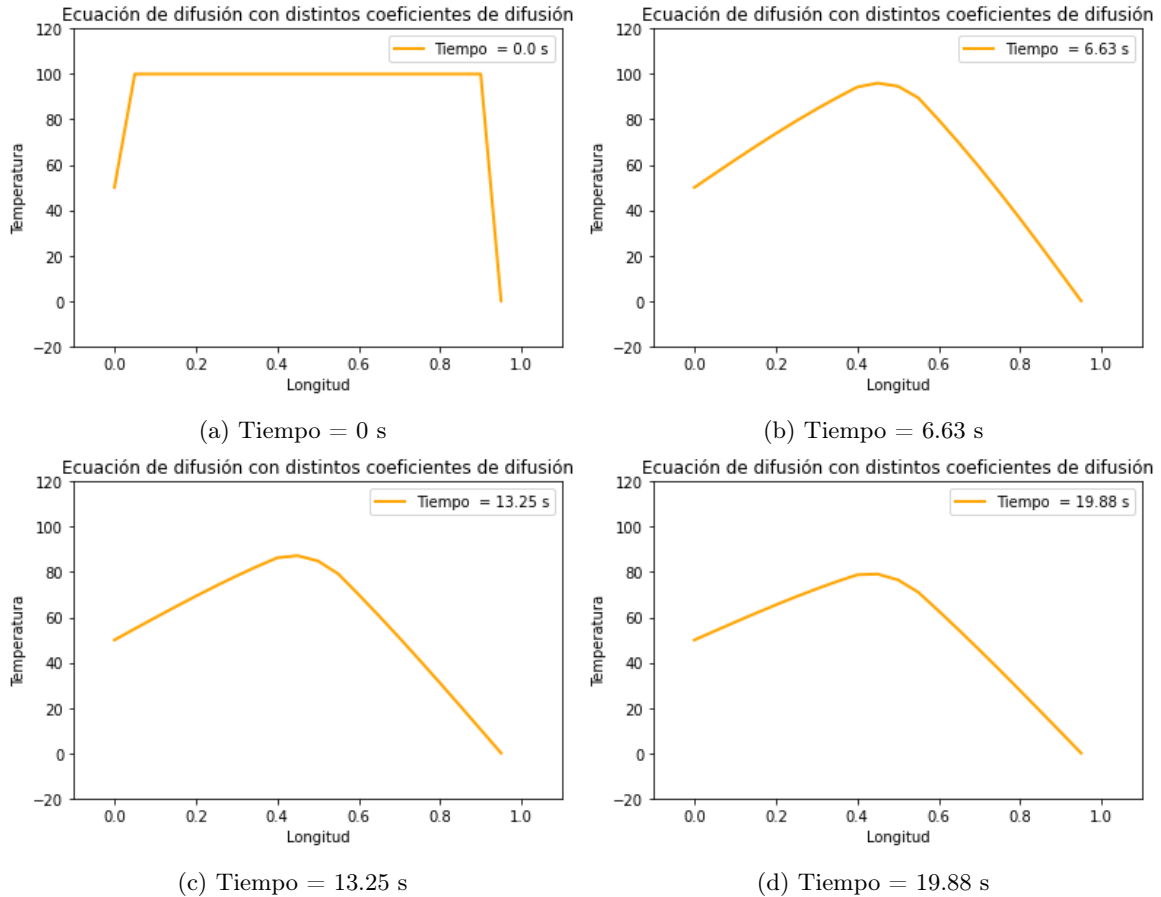


Figura 12: Resolución de la ecuación de difusión con un método semi-implícito en distintos instantes de tiempo con distintos coeficientes de difusión

4.4. Conclusiones

Como era de esperar en el primer apartado la temperatura de todo el material llega a prácticamente a 0 ya que en los extremos esta es 0, como se puede ver en la figura 10. Sin embargo, cabe destacar que esta nunca llegará a ser 0, si se grafica logarítmicamente se puede ver que esta nunca alcanza a ser 0 en un tiempo finito.

Por otro lado, en la figura 11 correspondiente al segundo apartado se puede ver que la temperatura se mantiene mucho más alta ya que una de las condiciones de contorno es que la temperatura es 50 en uno de los extremos.

Por último, tal y como puede verse en la figura 12 la temperatura en los puntos $0,4 < x < 0,6$ se mantiene mucho más alta que en el resto de puntos ya que el coeficiente de difusión es menor en este tramo y además en uno de los extremos la temperatura es de 50.

5. Ejercicio 5

Este ejercicio consiste en la resolución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en 1 dimensión para una partícula libre en un pozo infinito donde la ecuación de Schrödinger viene dada por la siguiente expresión:

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) \quad (7)$$

donde ha tomado $\hbar = 1$ y $m = 1$. Para ello se aplicará el método de Crank-Nicholson y por lo tanto el esquema correspondiente a la ecuación 7 tiene la forma siguiente:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{i}{2} \left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (8)$$

Como puede verse en la ecuación anterior el potencial no aparece puesto que el potencial correspondiente al pozo infinito es 0 en todo el dominio menos en los extremos que es infinito. Para ello se aplican condiciones de contorno en las que la solución es cero para $x = -\frac{L}{2}$ y cero en $x = \frac{L}{2}$. Además como condición inicial se introduce una perturbación gaussiana.

En el script correspondiente a este ejercicio llamado *ejercicio5.py* se puede ver una animación de la evolución de la solución para cada instante de tiempo. Sin embargo a continuación se muestran gráficas correspondientes a la solución para algunos instantes de tiempo:

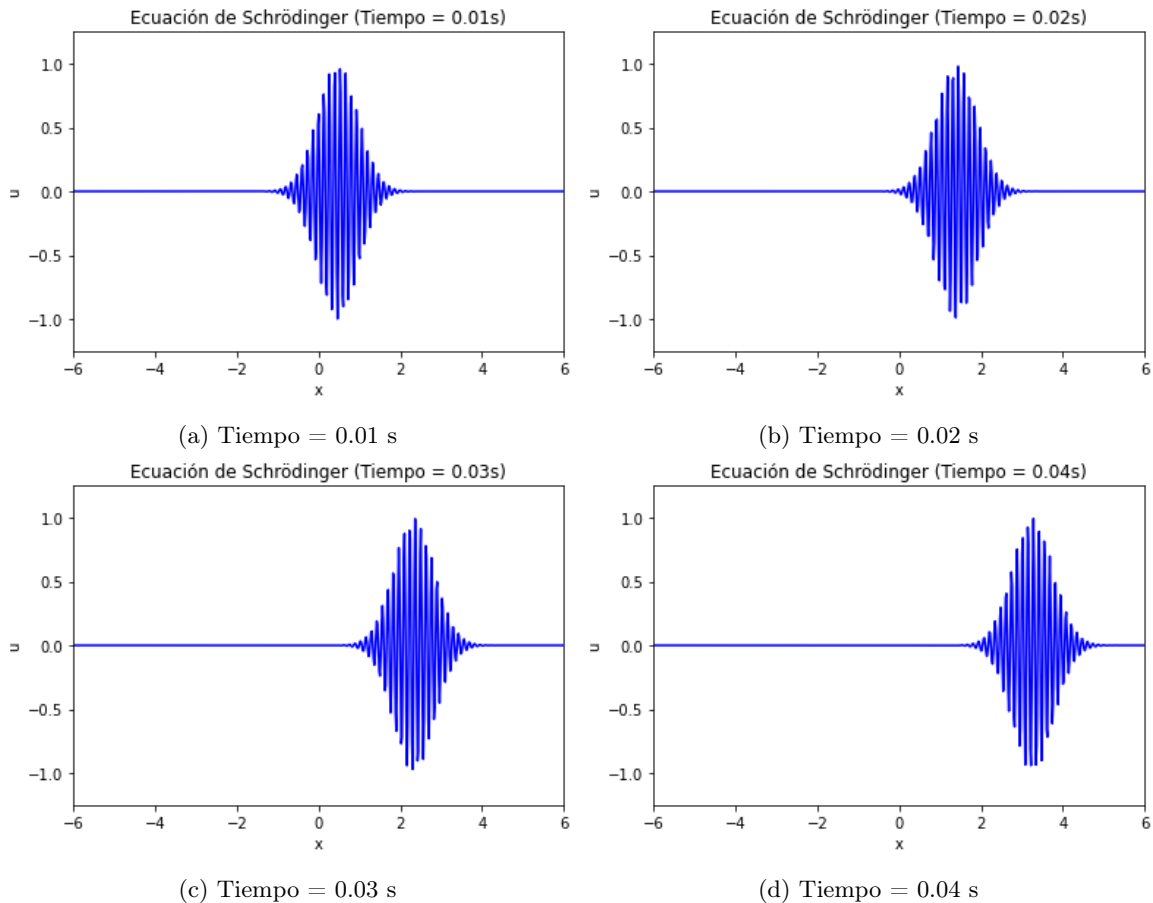


Figura 13: Resolución de la ecuación Schrödinger en distintos instantes de tiempo

Cabe destacar que una vez la onda llega a los extremos de la caja, la onda rebota hacia el otro sentido ya que la partícula está confinada en esta región. Esto era de esperar ya que el potencial es infinito en los extremos y por tanto la partícula no puede escapar.

6. Ejercicio 6

Este ejercicio consiste en resolver la ecuación de ondas amortiguada, introduciendo una fuerza de rozamiento por la viscosidad del fluido en el que una cuerda está vibrando, la ecuación de ondas por tanto es de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2k}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9)$$

Los resultados se mostrarán como gráficas para distintos instantes de tiempo y también habrá una animación en el script *ejercicio6.py*

6.1. Método explícito

En este apartado se resuelve la ecuación 9 mediante un método explícito o FDTD con los siguientes parámetros indicados en el enunciado. Además, es necesario añadir dos condiciones iniciales para calcular la primera iteración ya que depende de u en el instante anterior y el anterior del anterior. Por lo tanto, se utilizan los siguientes parámetros

- $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq t \leq 40$
- $\rho = 0,01$ y $k = 0,001$
- $u(0, t) = u(1, t) = 0$
- $u(x, 0) = 0$ y $u(x, dt) = \sin(\pi x)$

Los resultados en este caso para distintos instantes de tiempo son los siguientes:

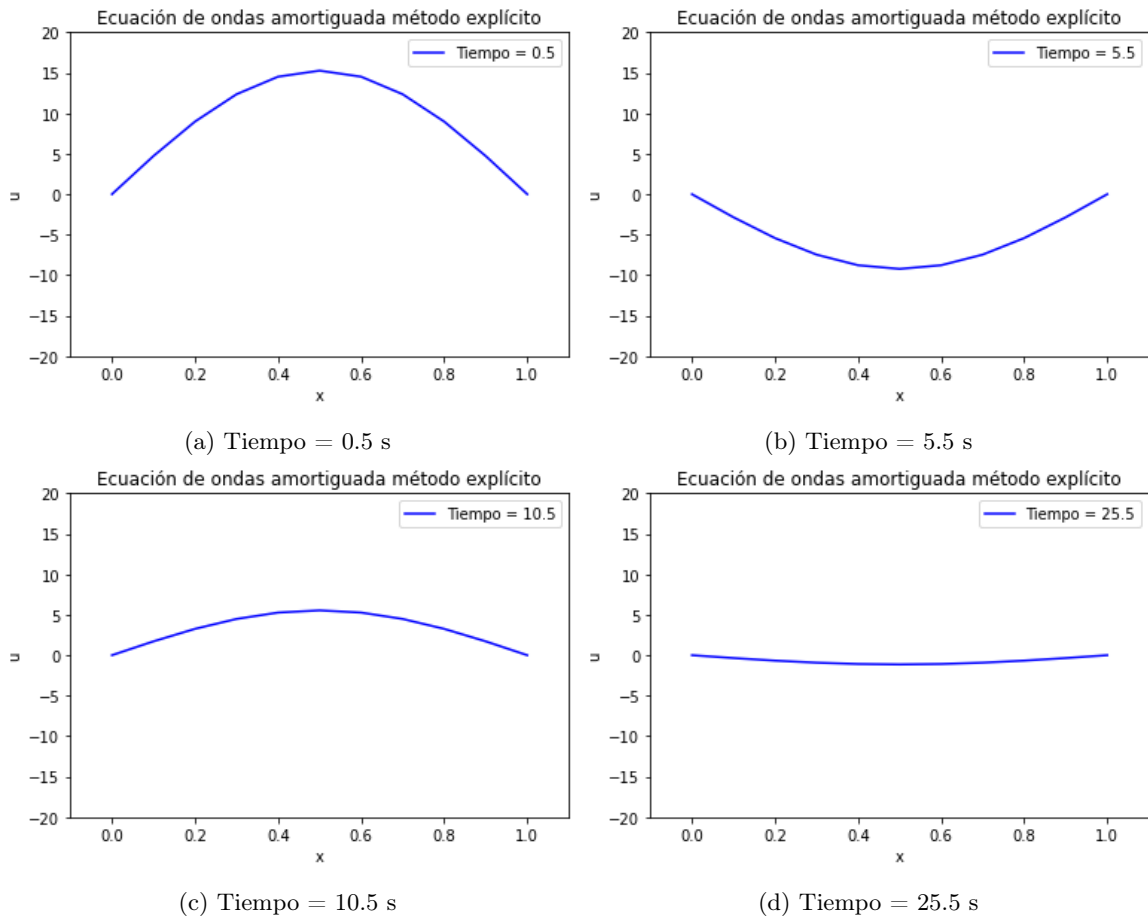


Figura 14: Resolución de la ecuación de ondas amortiguada con un método explícito en distintos instantes de tiempo

6.2. Método implícito

En este apartado se resuelve la misma ecuación y con los mismos parámetros pero mediante un método implícito, por lo tanto, es de esperar que el resultado sea el mismo. A continuación se muestran gráficas en los mismos instantes de tiempo que en el apartado anterior: Tal y como se puede ver tanto en la

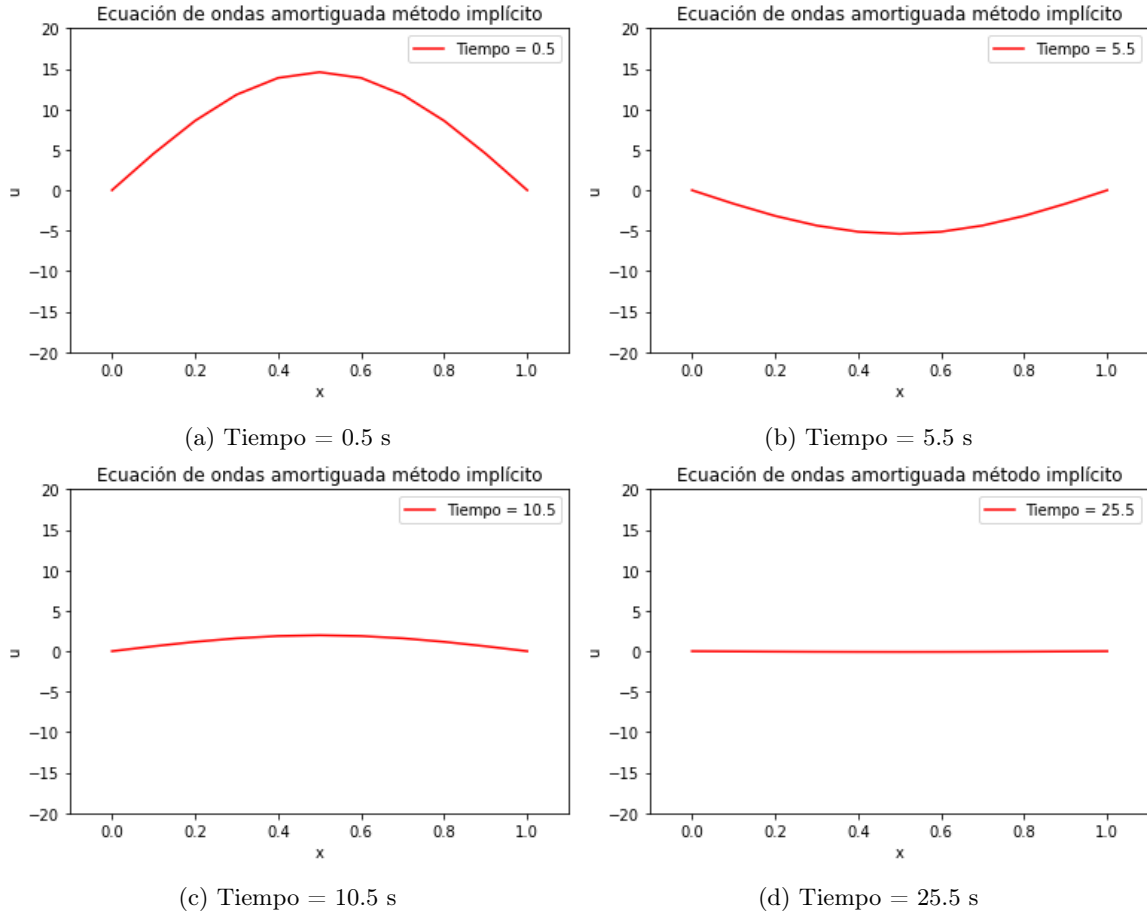


Figura 15: Resolución de la ecuación de ondas amortiguada con un método implícito en distintos instantes de tiempo

figura 14 como 15 ambas soluciones son iguales para dados instantes de tiempo, ya que ambas soluciones deben ser iguales. Para ver esto mejor se puede ver la animación del script *ejercicio6.py* como se ha dicho anteriormente.

6.3. Ecuación del telégrafo

Si se añade una fuente adicional la ecuación resultante es conocida como ecuación del telégrafo y viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u \quad (10)$$

En este caso el procedimiento es similar pero se graficará para distintas condiciones iniciales del tipo $\sin(n\pi x)$ con $n = 1, 2, \dots$ que representan distintos modos normales. Los resultados para la ecuación del telégrafo para distintos instantes de tiempo son los siguientes:

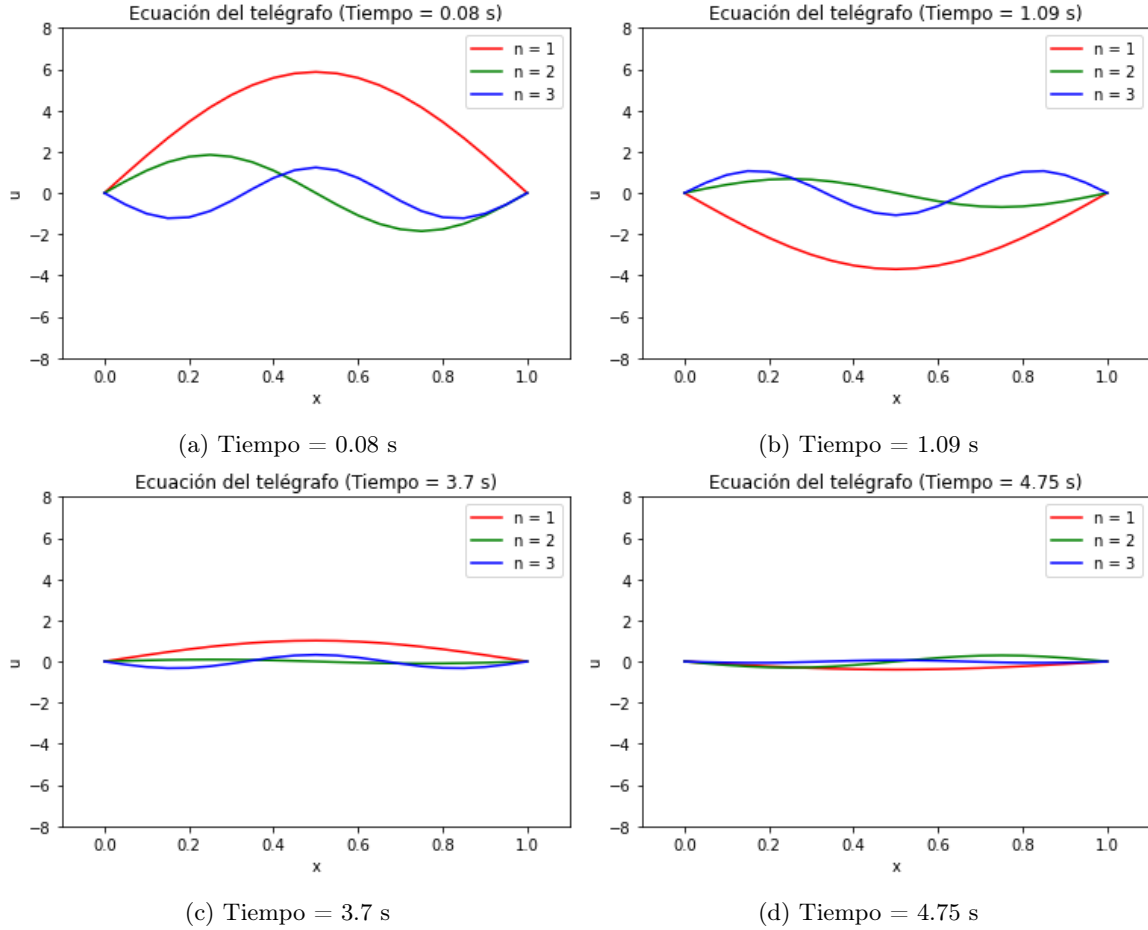


Figura 16: Resolución de la ecuación del telégrafo en distintos instantes de tiempo para distintos modos normales

Como se puede ver en la figura 16, para cada n se puede ver el número de nodos correspondientes de la función sinusoidal.

7. Ejercicio 7

Este ejercicio consiste en resolver la ecuación de advección, que tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

con los siguientes parámetros:

- $0 \leq x \leq 10$ y $t \geq 0$
- $c = 1$
- Como condición inicial $u(x, t = 0) = e^{-10(x-1)^2}$

Para ello se utilizarán diferentes métodos y se estudiará la estabilidad de cada uno de ellos.

7.1. Diferencias centradas

En primer lugar se utilizarán las diferencias centradas para resolver la ecuación de advección, el esquema para este caso viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} = 0 \quad (12)$$

El resultado con este método tiene la forma de la siguiente figura:

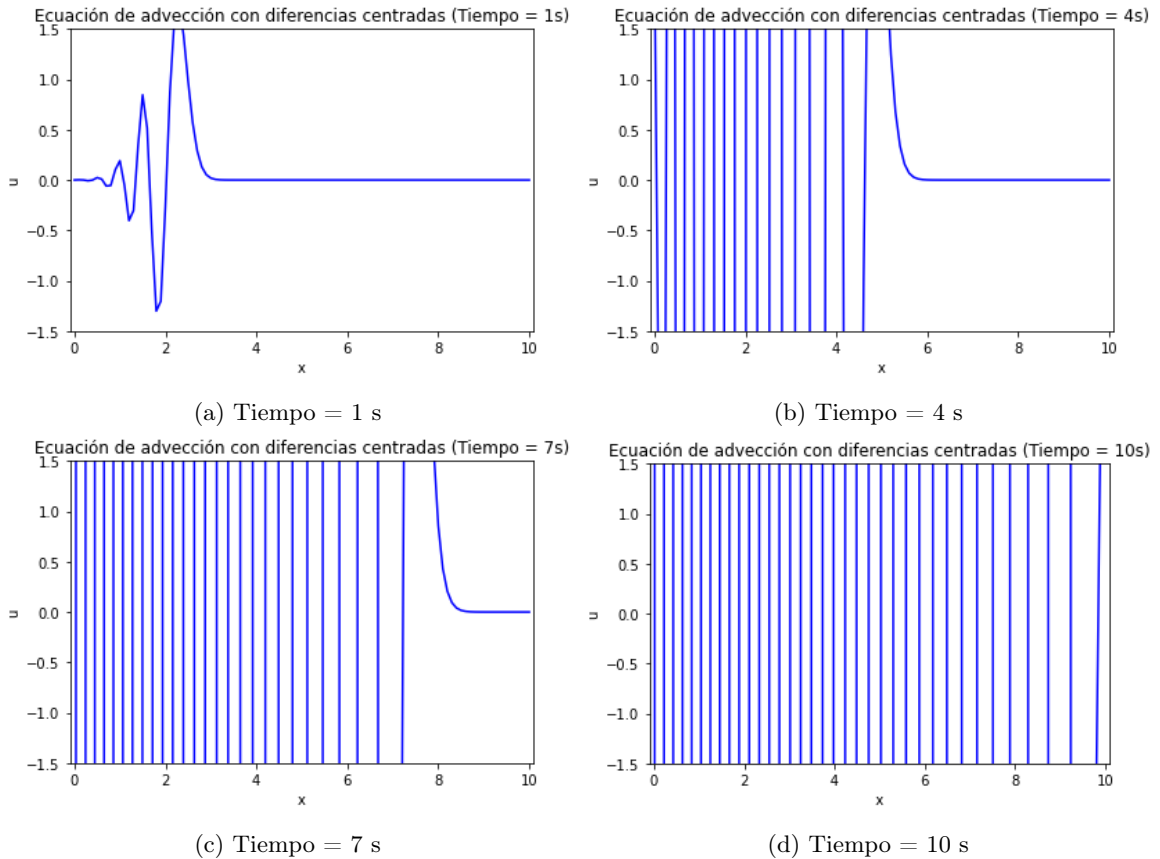


Figura 17: Resolución de la ecuación del advección con diferencias centradas para distintos instantes de tiempo

Como se puede ver en la figura 17 este algoritmo es inestable para la separación temporal y espacial elegido. Sin embargo, este algoritmo es incondicionalmente inestable, independientemente de la separación temporal y espacial que se elijan. Por lo tanto el método de diferencias centradas no es práctico para resolver problemas de advección a pesar de ser estable para el caso de la ecuación de difusión vista en un ejercicio previo.

7.2. Downwind

En este apartado se resuelve la ecuación de advección el método downwind que viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\Delta x} = 0 \quad (13)$$

El resultado con este método tiene la forma de la siguiente figura:

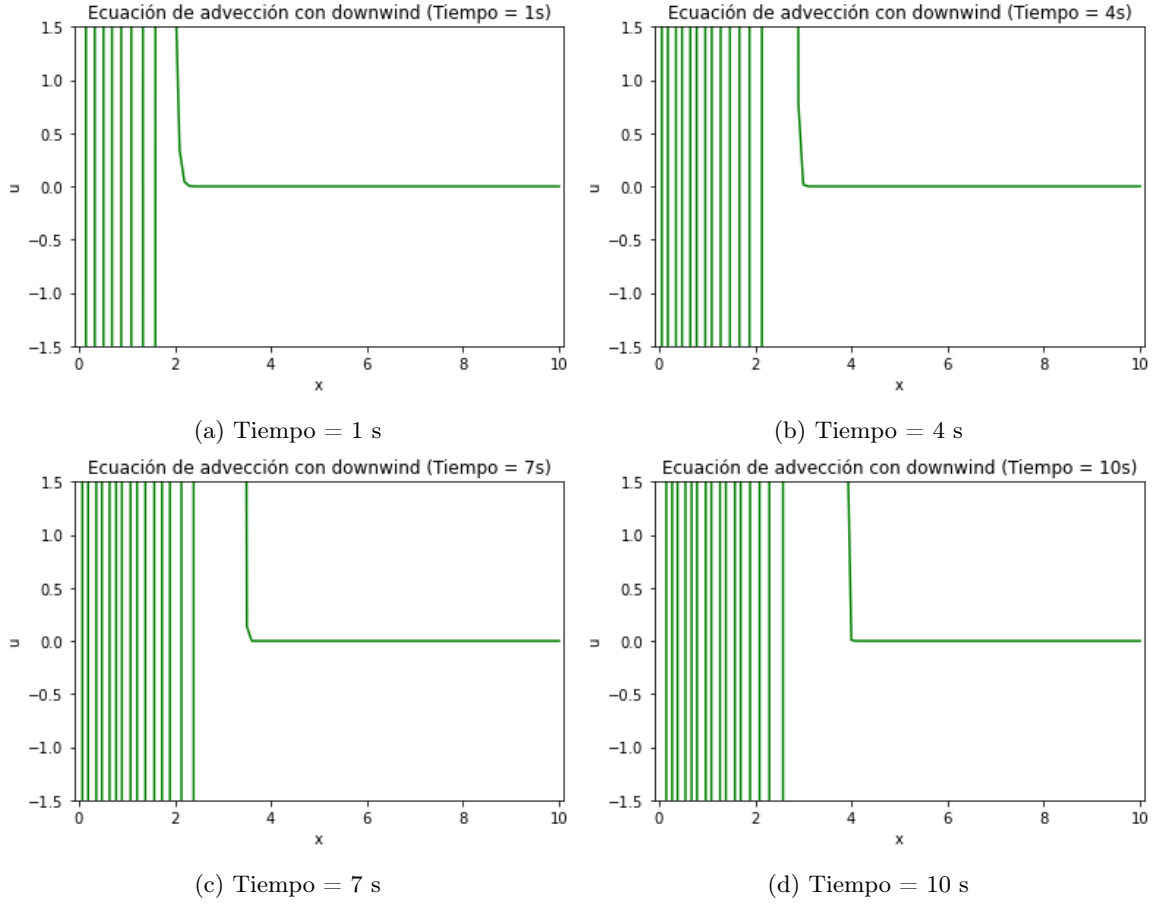


Figura 18: Resolución de la ecuación del advección con downwind para distintos instantes de tiempo

Al igual que el método de diferencias centradas el método downwind es incondicionalmente inestable para cualquier separación temporal y espacial que se tome, tal y como puede verse en la figura 18. Además, otros algoritmos como el algoritmo de Crank-Nicholson son inestables incondicionalmente.

7.3. Upwind

En este apartado se resuelve la ecuación de advección el método upwind que viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} = 0 \quad (14)$$

El resultado con este método tiene la forma de la siguiente figura:

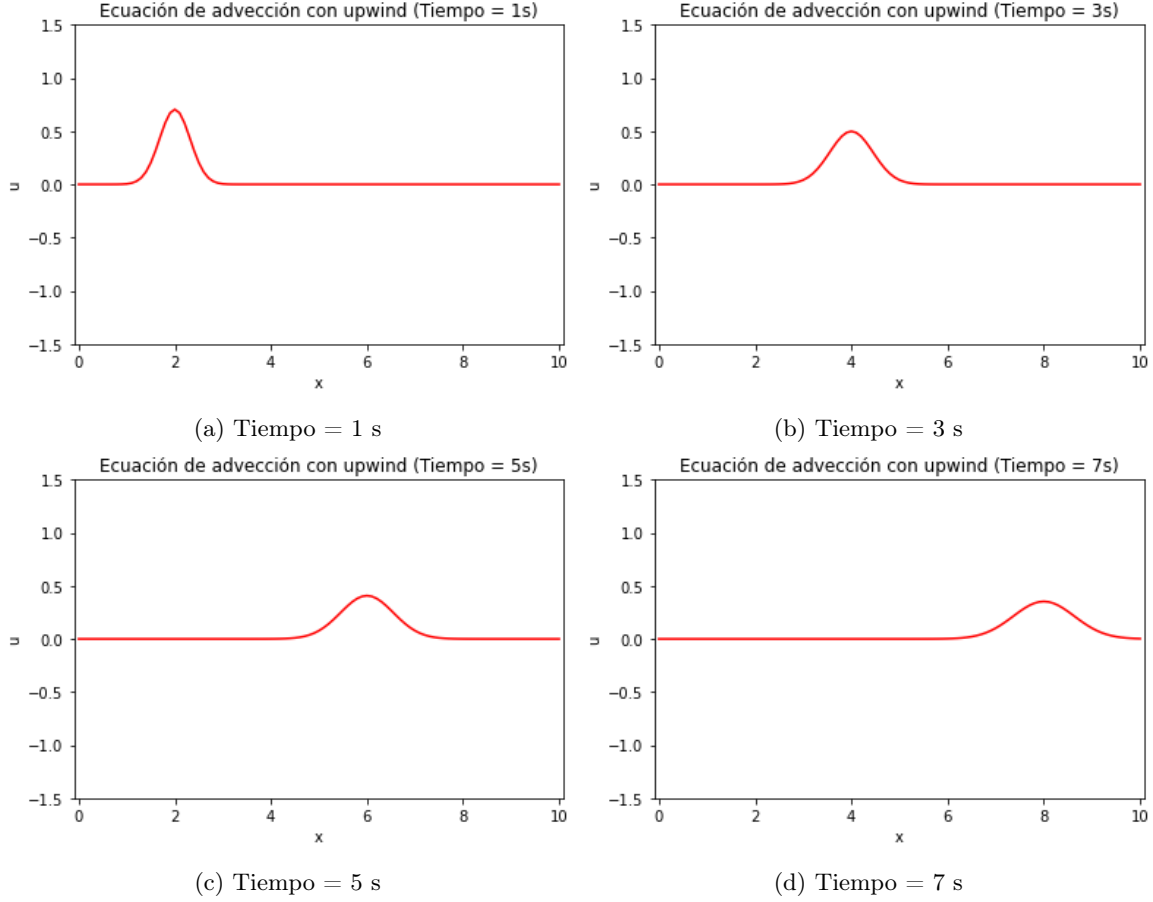


Figura 19: Resolución de la ecuación del advección con upwind para distintos instantes de tiempo

A diferencia de los apartados anteriores, este método si que es estable si la separación temporal y espacial elegidas cumple una cierta condición. La condición que deben cumplir viene dada por la siguiente expresión

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (15)$$

donde u es la velocidad de advección en la dirección x (al ser 1D). Esta condición se denomina condición de CFL - Courant-Friedrichs-Lewy y se aplica generalmente a esquemas explícitos aplicados a ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas. El significado físico de esta condición es que una partícula de un fluido no debe viajar más de una distancia Δx en un paso de tiempo Δt , es decir, no puede viajar más rápido que la velocidad de la malla o de la discretización.

7.4. Lax-Wendroff

Otro algoritmo o método para resolver la ecuación de advección es el llamado algoritmo de Lax-Wendroff. Este algoritmo está desarrollado para atenuar los problemas de difusión numérica del esquema upwind. Este método está basado en la construcción de una representación de segundo orden para la derivada temporal a partir de una expansión de Taylor y viene dado por la siguiente expresión:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^k - u_{i-1}^k) + \frac{1}{2} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k) \quad (16)$$

El resultado con este método tiene la forma de la siguiente figura:

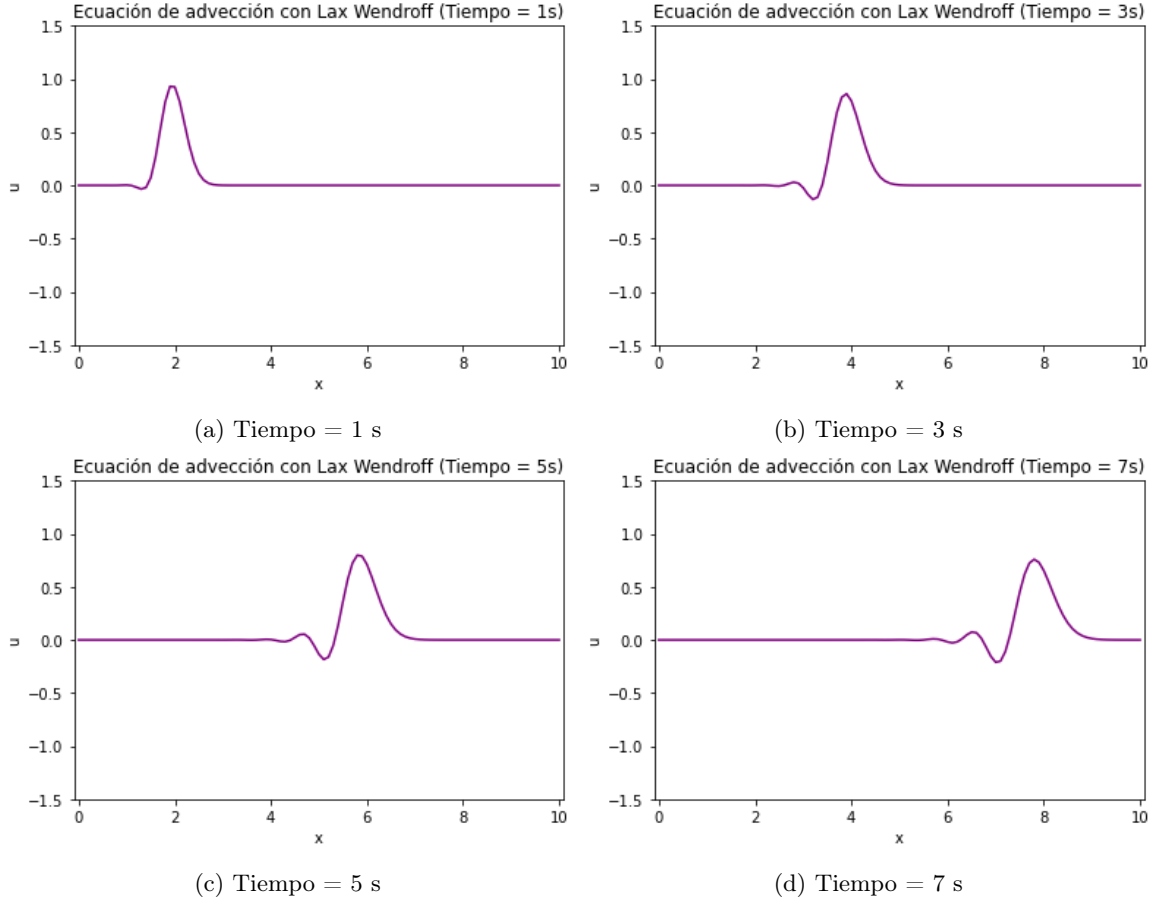


Figura 20: Resolución de la ecuación del advección con Lax-Wendroff para distintos instantes de tiempo

Como puede verse este algoritmo también es estable para la separación temporal y espacial elegido. Al igual que el algoritmo upwind, este algoritmo es estable bajo la condición de Courant-Friedrichs-Lewy dada en la ecuación 15.

8. Ejercicio 8

Este ejercicio consiste en resolver la ecuación de Burgers mediante diferentes métodos implícitos. La ecuación de Burgers viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

Para ello, se utilizará como condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ donde L es la longitud total de la ventana de cálculo. Como extra se calculará también tomando como condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, ya que para algunos métodos es estable o no dependiendo de la condición inicial.

8.1. Diferencias centradas

En primer lugar se resuelve la ecuación de Burgers con el método implícito de diferencias centradas con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$. En este caso el resultado que se obtiene es el siguiente:

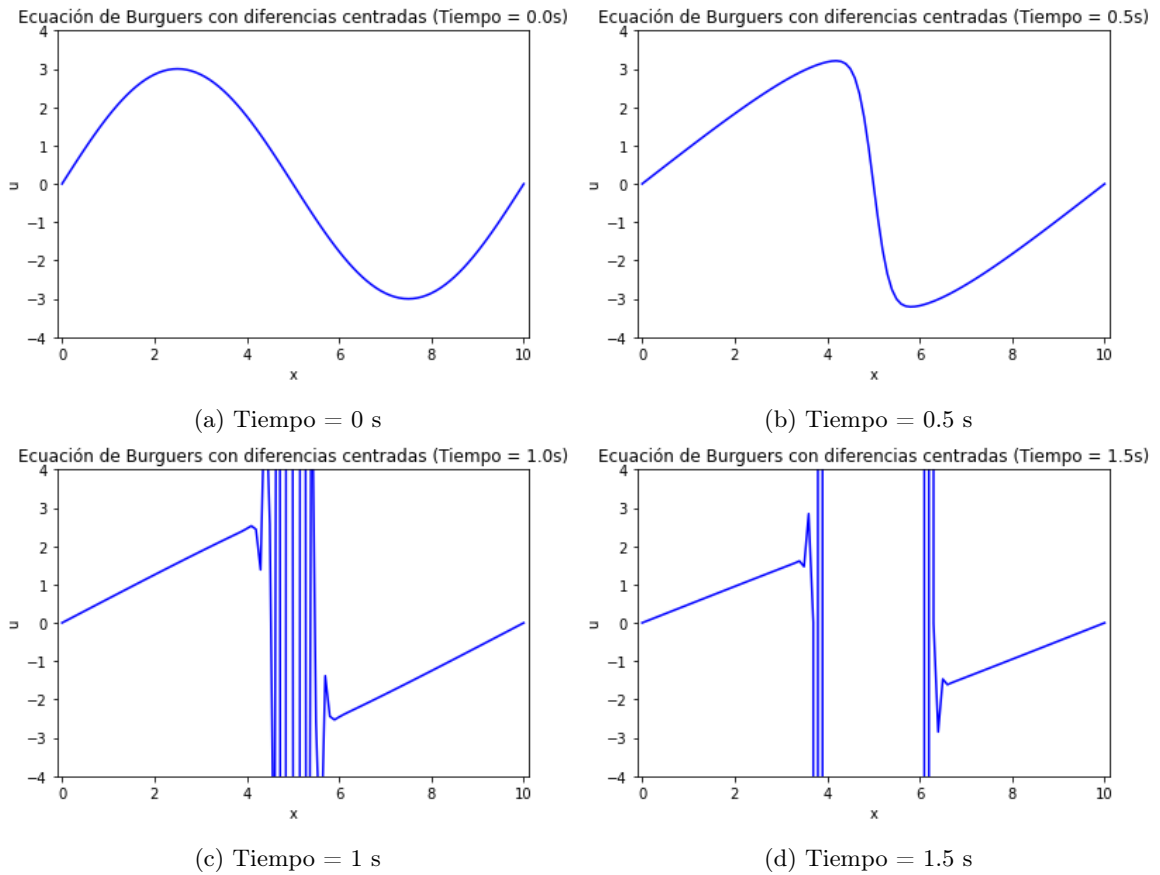


Figura 21: Resolución de la ecuación de Burgers con diferencias centradas para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

Ahora se resuelve con el mismo algoritmo pero tomando como condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$. En este caso el resultado es el siguiente:

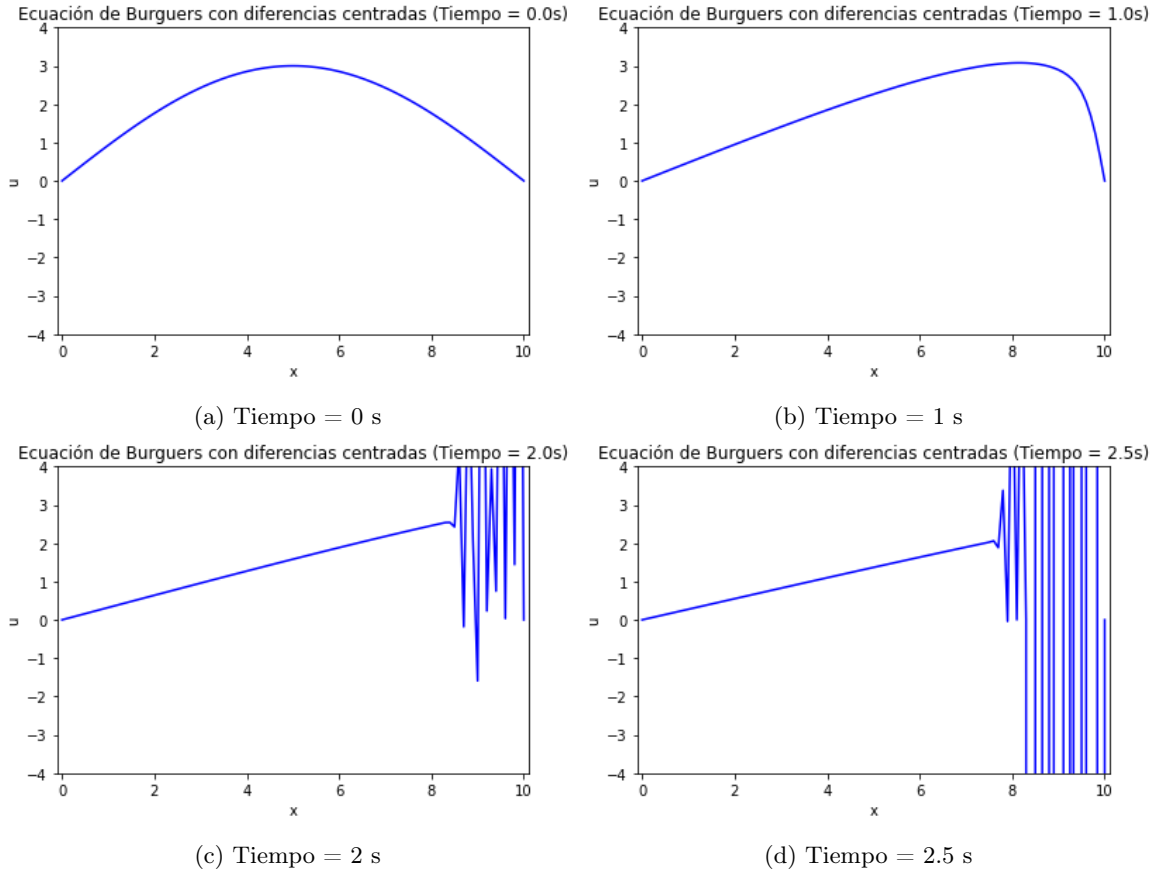


Figura 22: Resolución de la ecuación de Burguers con diferencias centradas para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Como se puede ver en la figura 21, el método es inestable para esta condición inicial. Por otro lado, con la segunda condición inicial el método también es inestable pero inicialmente parece resolver correctamente la ecuación de Burguers, tal y como se observa en la figura 22.

8.2. Upwind

En este apartado se resuelve la ecuación de Burguers con el método upwind. En este caso el resultado que se obtiene con la condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ es el siguiente:

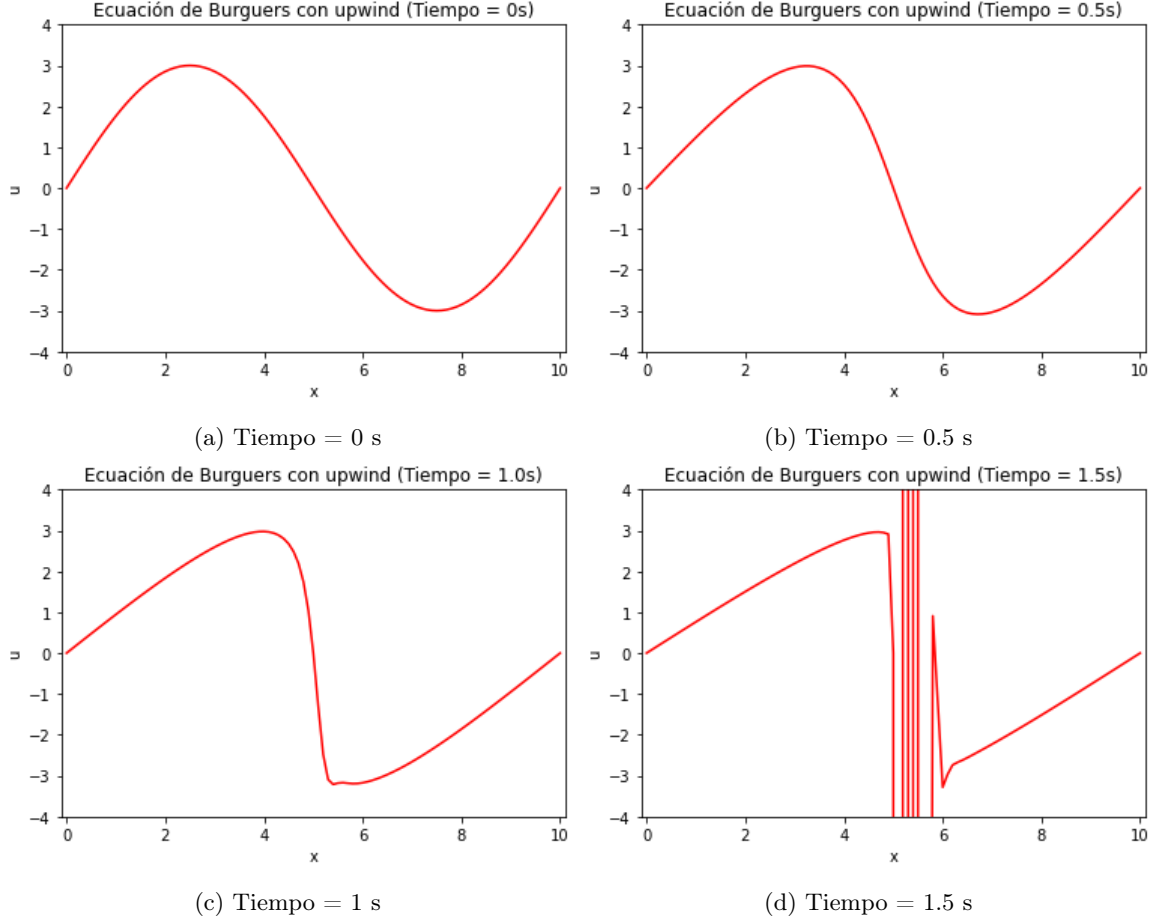


Figura 23: Resolución de la ecuación de Burguers con upwind para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

Con la condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ se obtiene lo siguiente:

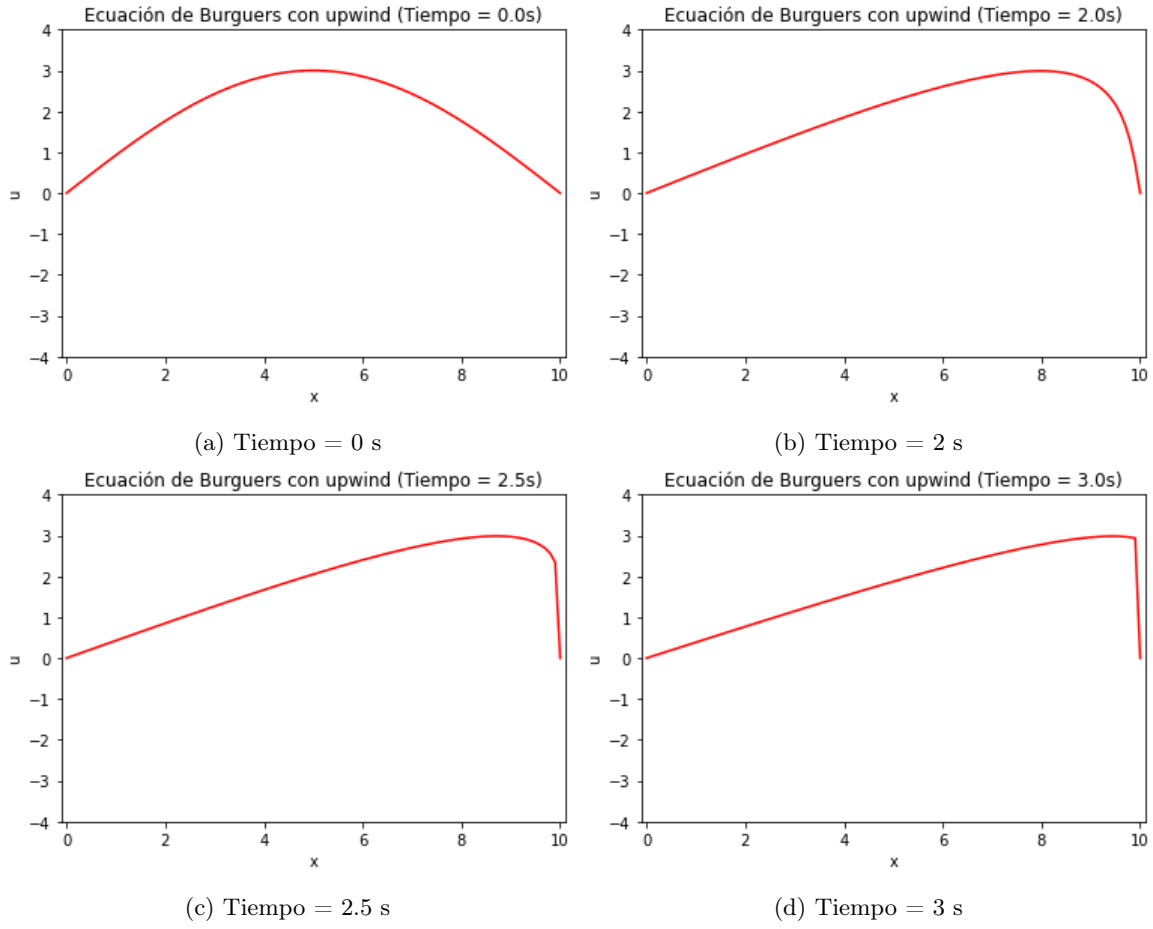


Figura 24: Resolución de la ecuación de Burgers con upwind para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Este método también es inestable considerando la condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ como puede verse en la figura 23 pero es estable para la segunda condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(2\frac{\pi x}{L}\right)$ tal y como se ve en la figura 24.

8.3. Downwind

Otro método implícito con el que se puede resolver la ecuación de Burguers es el método downwind, al igual que se hizo en el ejercicio 7. Si la condición inicial es $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ el resultado que se obtiene es el siguiente:

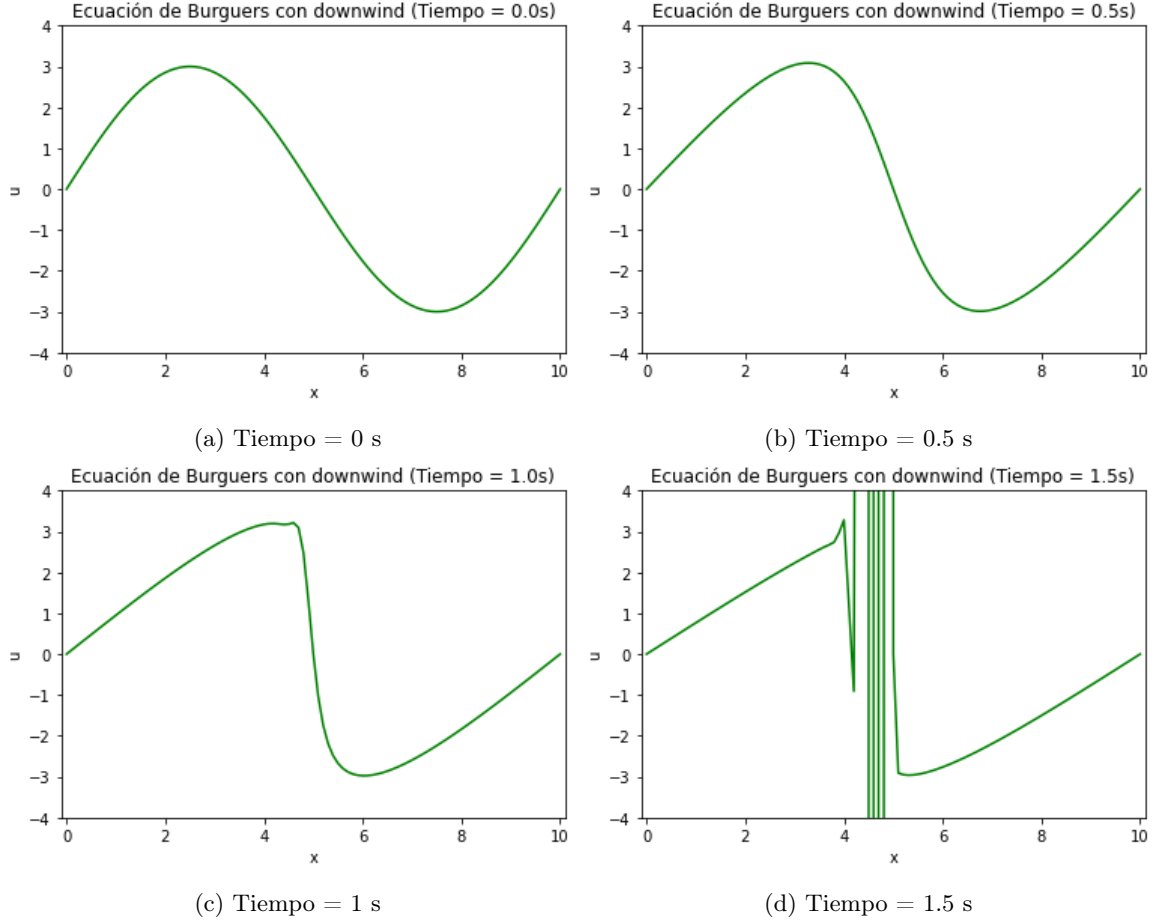


Figura 25: Resolución de la ecuación de Burguers con downwind para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

Con la condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ se obtiene lo siguiente:

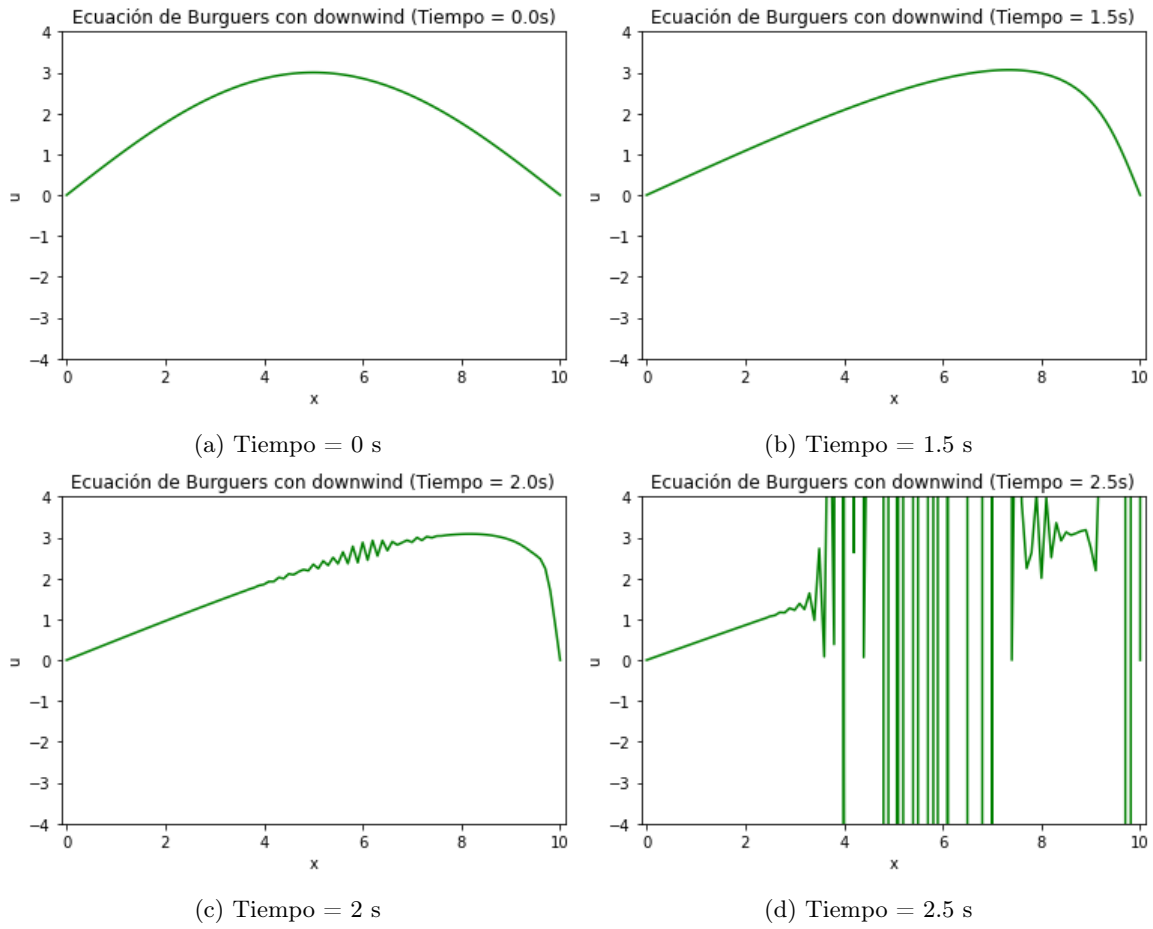


Figura 26: Resolución de la ecuación de Burguers con downwind para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Como se puede ver en las figuras 25 y 26 este método es inestable con ambas condiciones iniciales.

8.4. Esquema conservativo

Otro de los métodos implícitos es con un esquema conservativo. Esto ya se hizo en el ejercicio 7, pues el método de Lax-Wendroff es un esquema conservativo. Con la condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ el resultado que se obtiene es el siguiente:

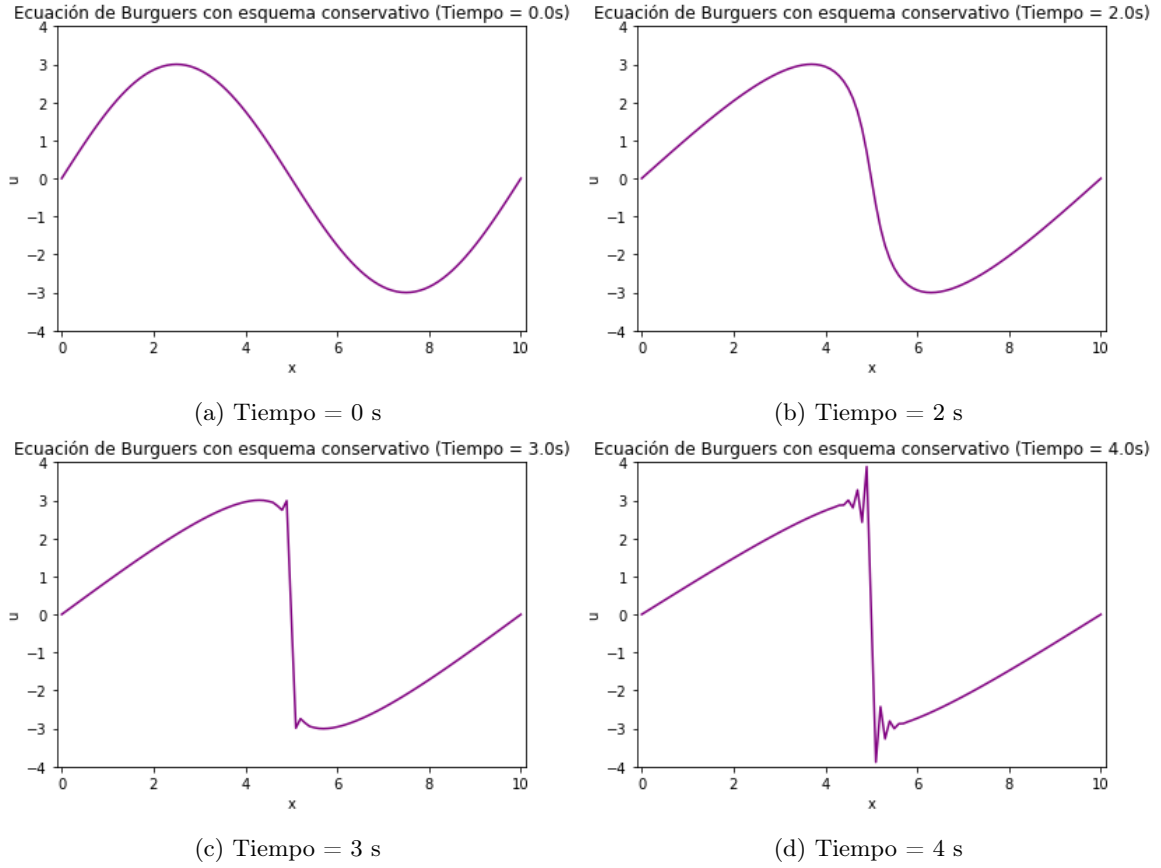


Figura 27: Resolución de la ecuación de Burgers con esquema conservativo para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

Con la condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ se obtiene lo siguiente:

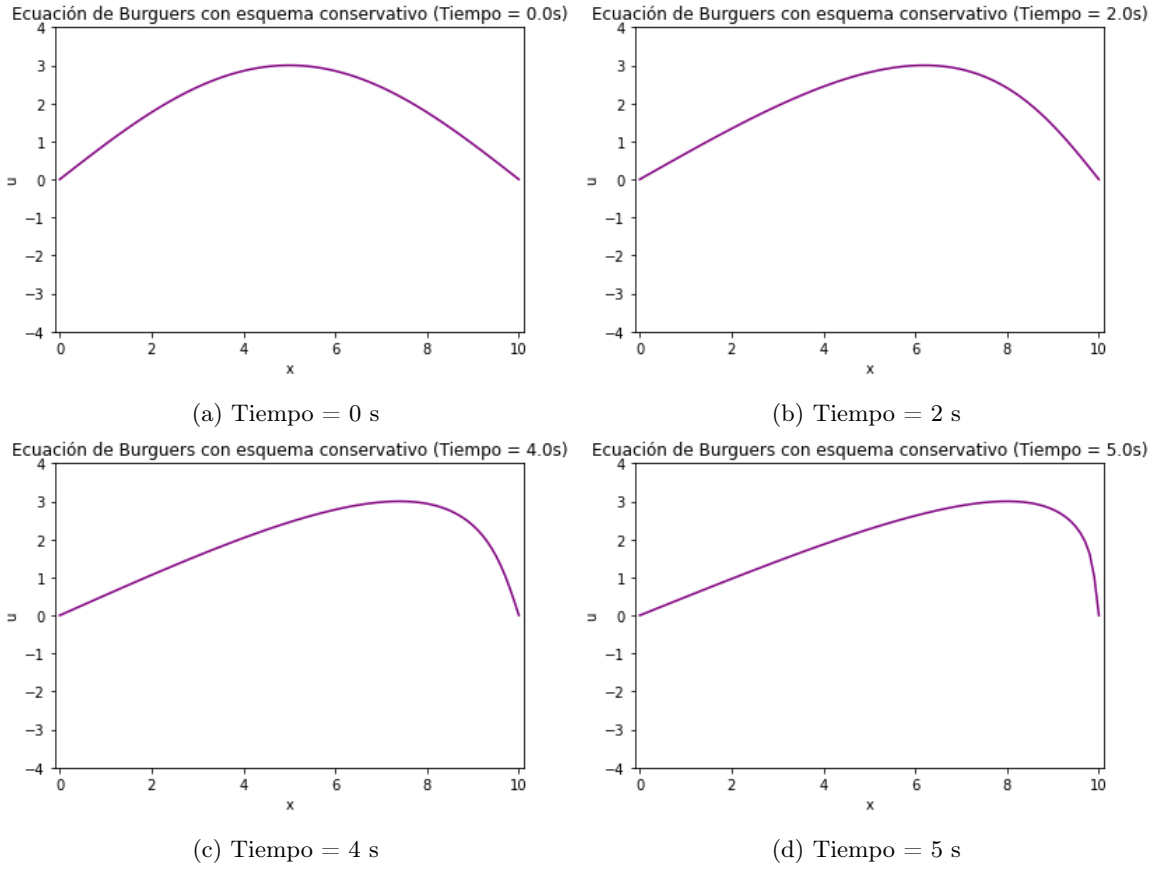


Figura 28: Resolución de la ecuación de Burgers con esquema conservativo para distintos instantes de tiempo con condición inicial

En este caso el método conservativo es estable para la segunda condición inicial, como puede verse en la figura 28 pero inestable para la primera condición inicial 27.

8.5. Condiciones de contorno periódicas

Por último, se intentó implementar condiciones de contorno periódicas al método anterior. Para ello se define el último elemento como igual al primero en la iteración correspondiente a cada instante de tiempo. En este caso el resultado que se obtiene es el siguiente:

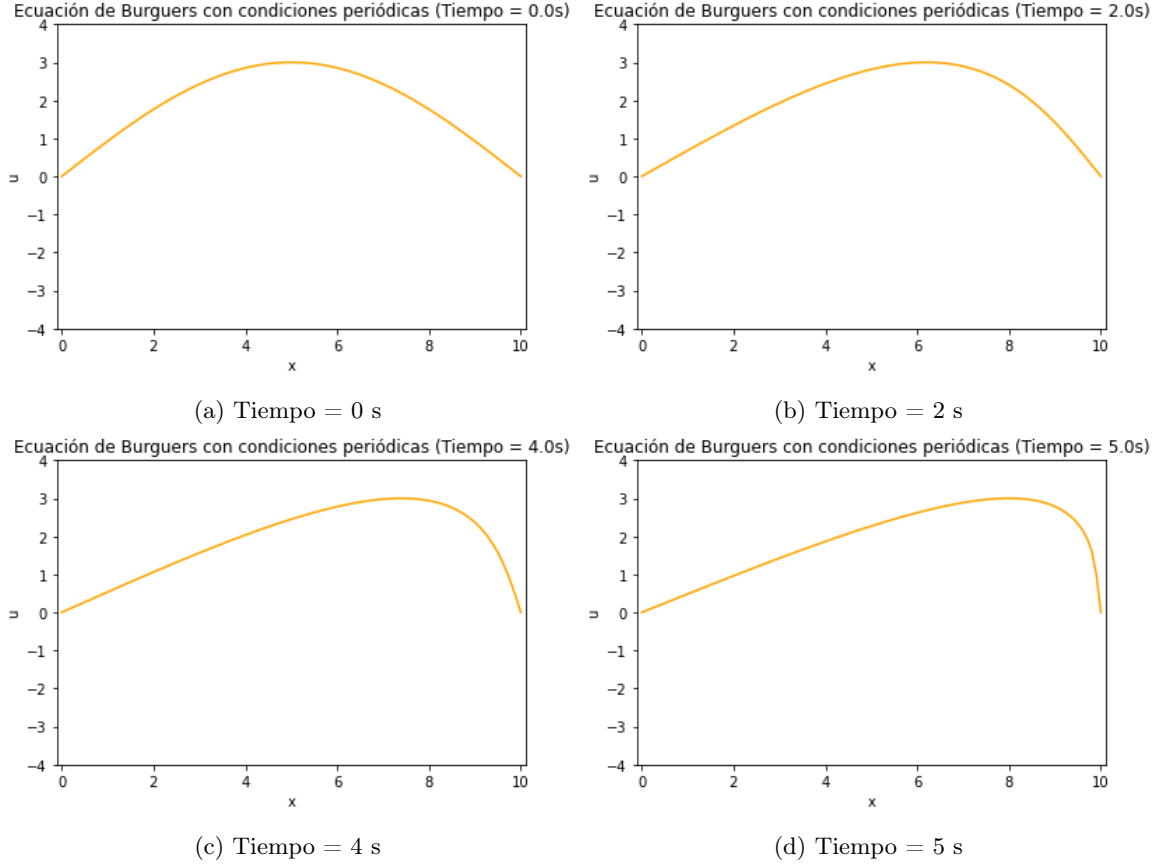


Figura 29: Resolución de la ecuación de Burgers con esquema conservativo para distintos instantes de tiempo con condición inicial $u(x, t = 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Como se puede ver en las figuras 28 y 29, no se aprecia diferencia alguna entre las dos gráficas. Por lo tanto lo más probable es que las condiciones de contorno periódicas no estén bien implementadas.