NUMERISCHE MATHEMATIK FÜR NATURWISSENSCHAFTLER, INGENIEURE UND INFORMATIKER

Sommersemester 2024

— ÜBUNGSBLATT 3 —

Hausaufgabe 7 (Matrixnormen)
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -0.5 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ und $\|A\|_\infty$ und bestimmen Sie Vektoren $v^p \in \mathbb{R}^3$, so dass $\|Av^p\|_p = \|A\|_p \|v^p\|_p$ für jeweils eine dieser p-Normen gilt.

Lösung:
Wir berechnen die Zeilen- und Spaltensummen und erhalten

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & -0.5 & -2 & 6.5 \\ 4 & 1 & 1 & 6 \\ \hline 10 & 2.5 & 5 & \end{array}$$

und somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= 10 \qquad \text{(größte Spaltensumme)}, \\ \|A\|_\infty &= 6.5 \qquad \text{(größte Zeilensumme)}. \end{aligned}$$

Für die 2-Norm berechnen wir zunächst die Matrix

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 4+16+16 & -2-2+4 & 4-8+4 \\ -2-2+4 & 1+0.25+1 & -2+1+1 \\ 4-8+4 & -2+1+1 & 4+4+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Eigenwerte der Matrix erhalten wir

$$\lambda_1 = 36, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = \frac{9}{4}.$$

geordnet nach absteigendem Betrag. Die Norm ergibt sich aus der Wurzel des gößten Eigenwerts zu $\|A\|_2 = \sqrt{36} = 6$.
Als kritische Vektoren wähle die jeweils normierten Vektoren
$v^1 := (1, 0, 0)^T$ (erste Spalte betragssummenmaximal),
$v^\infty := (1, -1, -1)^T$ (zweite Zeile betragssummenmaximal), und
$v^2 := (1, 0, 0)^T$ (quadrierter betragsmaximaler Eigenvektor).

Die Hausaufgabe kann nächste Woche zu Übungszwecken vorgerechnet werden.

Präsenzaufgabe 8 (Gauss-Seidel Approximation)
Gegeben seien nun die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0.1 & 4 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 6 \end{pmatrix}$$

sowie die rechte Seite

$$b := \begin{pmatrix} 110 \\ 50.4 \\ 252.6 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ approximativ indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0 := 0$ drei Schritte des Gauss-Seidel Verfahrens durchführen und dabei jede Iterationslösung auf fünf gültige Ziffern runden.

Lösung: Das Gauss-Seidel Verfahren $Mx^{(i+1)} = Nx^{(i)} + b$ ist definiert durch

$$M := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 4 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$N := \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schritt 1: Aus

$$Nx^{(0)} + b = \begin{pmatrix} 110 \\ 50.4 \\ 252.6 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12.05 \\ 41.533 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Aus

$$Nx^{(1)} + b = \begin{pmatrix} -9.216 \\ 8.867 \\ 252.6 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.8432 \\ 2.2628 \\ 42.093 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Aus

$$Nx^{(2)} + b = \begin{pmatrix} 19.0256 \\ 8.307 \\ 252.6 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.8051 \\ 1.9816 \\ 42.004 \end{pmatrix}$$

Der relative Residualfehler $\frac{\|b - Ax^{(3)}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ entspricht dabei ungefähr 0.4%.

Präsenzaufgabe 9 (Optimierungsverfahren)
Wir betrachten das Minimierungsproblem $\min \frac{1}{2} x^T Ax - b^T x$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie das Minimum x^* mittels des Verfahrens der konjugierten Gradienten zum Startvektor $x^{(0)} := (0,1)^T$.

(ii) Ermitteln Sie für das Jacobi-Verfahren mit Startvektor $x^{(0)}$ eine Anzahl von Iterationen n, sodass die systematische Abweichung vom Optimum $\|x^{(n)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-3}$ sicher erfüllt, ohne dabei die Iteration durchzuführen.

Lösung:

(i) Im ersten Schritt erhält man

$$\begin{aligned}
d_0 = r_0 = b - Ax_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \\
\alpha_0 &= \frac{r_0^T d_0}{d_0^T A d_0} = \frac{36}{144} = 0.25 \\
x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt müssen wir die Richtung zusätzlich noch orthogonalisieren. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
r_1 = b - Ax_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\beta_1 &= -\frac{r_1^T A d_0}{d_0^T A d_0} = -\frac{-36}{144} = 0.25 \\
d_1 = r_1 + \beta_1 d_0 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1.5 \end{pmatrix} \\
\alpha_1 &= \frac{r_1^T d_1}{d_1^T A d_1} = \frac{9}{27} = 0.3333 \\
x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) Die Zerlegung des Jacobi-Verfahrens ist definiert durch

$$M := \operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mit

$$N := M - A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Kontraktionsmatrix

$$R := M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

die ∞-Norm

$$\rho := \|R\|_\infty = \frac{1}{2}$$

besitzt, womit sich

$$\begin{aligned}
&\|x^{(n)} - x^*\|_\infty \\
\leq &\frac{\rho^n}{1-\rho} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \\
= &\frac{\rho^n}{1-\rho} \|M^{-1}(b - Ax^{(0)})\|_\infty \\
= &(\frac{1}{2})^n \cdot 3 \overset{!}{\leq} 10^{-3}
\end{aligned}$$

ergibt, da nach Iterationsvorschrift $x^{(1)} = M^{-1}(Nx^{(0)} + b) = M^{-1}((M - A)x^{(0)} + b) = x^{(0)} + M^{-1}(b - Ax^{(0)})$, woraus

$$n \geq \log_2(3000) \approx 11.551$$

folgt. Somit wird bei exakter Rechnung nach 12 Iterationen des Jacobi-Verfahrens eine absolute Maximalabweichung von 10^{-3} eingehalten.