Práctica 1 (14, 15 e 17 de outubro de 2024)

1 Introdución

Nesta práctica, por unha banda, imos utilizar os métodos de dicotomía e Newton-Raphson para resolver ecuacións non lineais e por outra banda construír o polinomio de Lagrange para aproximar funcións ou datos.

Comezamos cargando os módulos Python que comentamos na Práctica 0.

[2]:
```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib as mp
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

2 Método de dicotomía

Consideramos unha función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (condicións do teorema de Bolzano). Para aproximar unha raíz de f en $[a, b]$ usando método de dicotomía (ou bisección) debemos seguir os seguintes pasos: * Dividir o intervalo dado á metade. * Tomar o punto medio do intervalo como aproximación da raíz. * Repitir o proceso coa metade do intervalo na que f presenta un cambio de signo (verifica Bolzano).

2.1 Algoritmo

- Inicializar $[a_1, b_1] = [a, b]$.
- Para $k = 1, 2, \ldots, N_{\text{max}}$:
  - Calcular $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  - Se $f(a_k)\,f(x_k) < 0$, actualizar $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$.
  - Se non, $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$.
  - Test de parada. Se se cumple, detemos o algoritmo.
- Continuamos iterando.

2.2 Programación do método

Definimos unha función chamada `dicotomia` con entradas:

- a: extremo esquedo do intervalo.
- b: extremo dereito do intervalo.
- f: función.
- n: número máximo de iteracións, fixado por defecto en 100.

- tol: tolerancia, fixada por defecto en 10^{-6}.

As saídas da función son o número de iteracións efectuado e a aproximación da raíz.

[2]:
```python
def dicotomia(a,b,f,n=100,tol=1e-6):
    x_aprox = np.zeros(n)
    for k in range(0,n):
        x_aprox[k] = (a+b)/2
        if f(x_aprox[k]) == 0:
            break
        if f(a) * f(x_aprox[k]) < 0:
            b = x_aprox[k]
        else:
            a = x_aprox[k]
        if ( (k > 0) and (np.abs(x_aprox[k]-x_aprox[k-1]) / np.abs(x_aprox[k]) <␣
 ↪tol) ):
            break
    return k+1, x_aprox[k]

# Exemplo
x = sp.symbols('x', real=True) # Definimos a variable simbólica x
f_expr = sp.cos(x)
f = sp.Lambda(x,f_expr)         # Definimos a función

N_max = 100
tol = 1.e-6
a = 0.
b = 2.

display(dicotomia(a,b,f,N_max))

iteracions, raiz_aprox = dicotomia(a,b,f,N_max) # Obtemos as iteracións e a raíz␣
 ↪aproximada

print('Número de iteracións: ', iteracions)
print('Aproximación da raíz: ', raiz_aprox)
```

```
(21, 1.570796012878418)
```

```
Número de iteracións:  21
Aproximación da raíz:  1.570796012878418
```

2.2.1 Exercicio:

- Comenta o que realiza cada liña do código da función `dicotomia`.
- Escribe unha nova función, `dicotomia_new`, tal que se use como test de parada a cota do erro $\frac{b-a}{2^k}$, en vez de $\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}$.
- Obtén a raíz da función usando `sp.solve`.

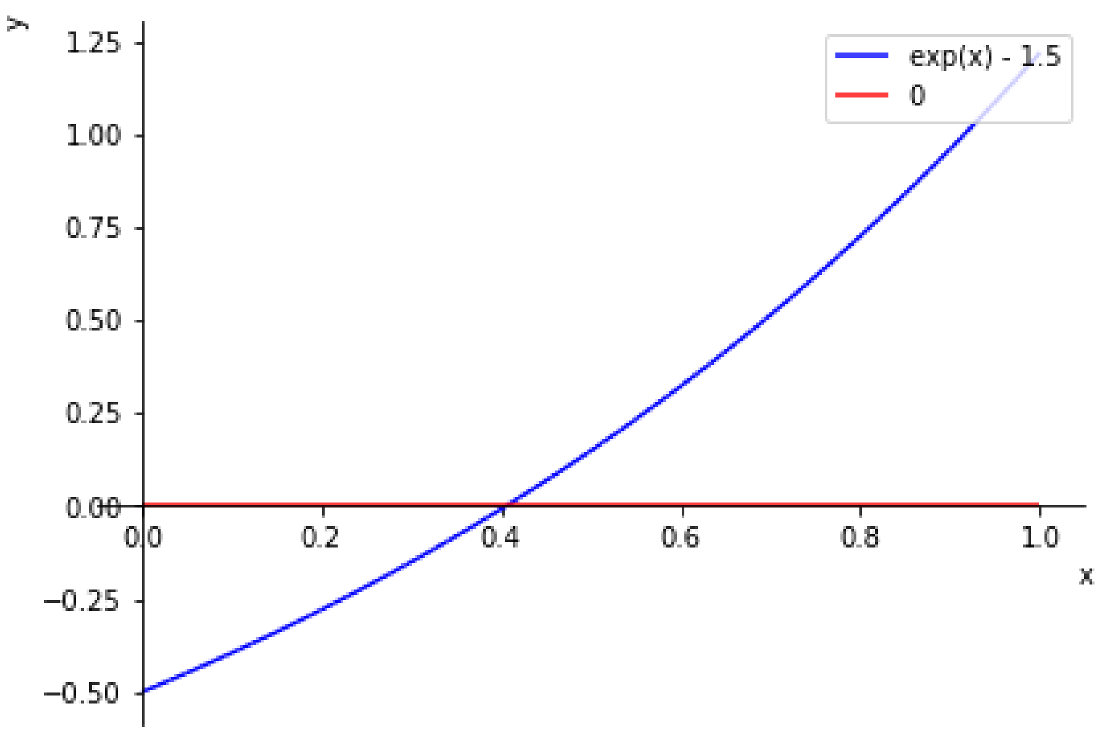
- Comproba o erro que se cometeu.

[ ]:
```

```

2.3 Exemplo completo

Neste apartado imos comprobar que $f(x) = e^x - \frac{3}{2}$ ten unha única solución no intervalo $[0, 1]$ e aproximarémola usando o método de dicotomía.

[4]:
```python
# Definimos a función
x = sp.symbols('x', real=True)
f_expr = sp.exp(x) -3/2
f = sp.Lambda(x,f_expr)

# Podemos debuxar a súa gráfica para ver gráficamente se f ten unha raíz
p = sp.plot(f_expr, 0, (x, 0, 1), show=False)
p[0].line_color='b'
p[1].line_color='r'
p.xlabel='x'
p.ylabel='y'
p.legend=True
p.show()
```



Sabemos que f é continua en todo $\mathbb{R}$ temos que ver se $f(0)f(1) < 0$ para estar nas condicións do teorema de Bolzano e ter garantida a existencia de polo menos unha raíz en $(0, 1)$.

[4]:
```
print('f(0)=',f(0))
print('f(1)=',f(1))
display(f(0)*f(1)<0) # Comprobamos condición
```

```
f(0)= -0.500000000000000
f(1)= -1.5 + E
```

True

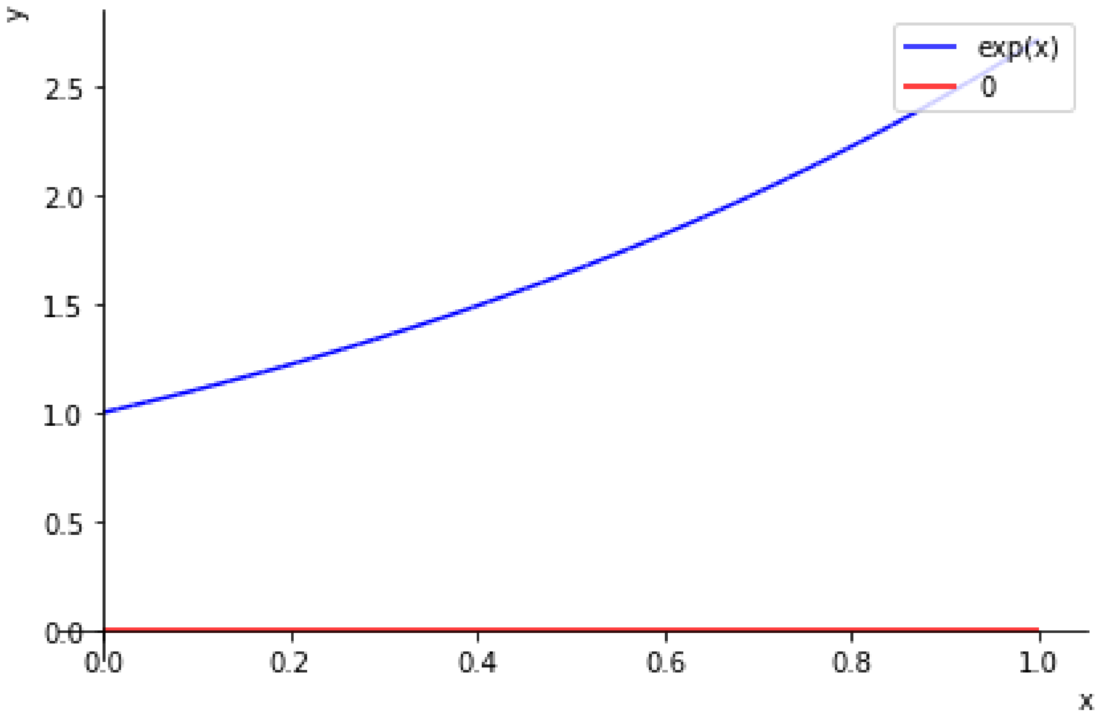
Demostramos a unicidade usando o teorema de Rolle, para o que debemos comprobar se $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in (0, 1)$.

Imos usar as funcións se Sympy:

- `sp.diff` para calcular derivadas.
- `sp.Interval` para definir un intervalo.
- `sp.solveset` obter as raíces dunha función nun intervalo dado.

[5]:
```
f_der_expr = sp.diff(f_expr,x) # Derivamos f

# Comprobamos se f_der ten algunha raíz no intervalo dado.
solucion = sp.solveset(f_der_expr,x,domain=sp.Interval(0,1))

display(solucion)

# Tamén podemos debuxar a súa gráfica d f' para ver se ten algunha raíz
p = sp.plot(f_der_expr, 0, (x, 0, 1), show=False)
p[0].line_color='b'
p[1].line_color='r'
p.xlabel='x'
p.ylabel='y'
p.legend=True
p.show()
```

$\emptyset$



Como f' non ten raíces en $(0,1)$, acabamos de probar que f ten unha única solución en $(0,1)$. Usamos agora o método de dicotomía para aproximar a raíz de f.

[6]:
```
iteracions, raiz_aprox = dicotomia(0,1,f) # Obtemos as iteracións e a raíz␣
 ↪aproximada

print('Número de iteracións: ', iteracions)
print('Aproximación da raíz: ', raiz_aprox)
```

```
Número de iteracións:  22
Aproximación da raíz:  0.40546488761901855
```

[7]:
```
# Tamén podemos calcular o erro cometido
raiz=sp.solveset(f_expr,x,domain=sp.Interval(0,1)) # Obtemos o valor da raíz de␣
 ↪f en (0,1)
display(raiz, type(raiz))
display(raiz.args[0], type(raiz.args[0])) # Obtemos o valor (float) da raíz para␣
 ↪poder operar con el
erro = sp.Abs(raiz.args[0]-raiz_aprox)
print('Erro da aproximación: ', erro)
```

$\{0.405465108108164\}$

```
sympy.sets.sets.FiniteSet
```

0.405465108108164

```
sympy.core.numbers.Float
```

```
Erro da aproximación:  2.20489145830172e-7
```

[8]:
```
# Podemos mellorar o erro se diminuímos a tolerancia (e no seu caso, aumentamos␣
↪o número de iteracións)
iteracions, raiz_aprox = dicotomia(0,1,f,tol=1e-10) # Obtemos as iteracións e a␣
↪raíz aproximada

erro = sp.Abs(raiz.args[0]-raiz_aprox)
print('Número de iteracións: ', iteracions)
print('Aproximación da raíz: ', raiz_aprox)
print('Erro da aproximación: ', erro)
```

```
Número de iteracións:  35
Aproximación da raíz:  0.40546510808053426
Erro da aproximación:  2.76301204138463e-11
```

2.3.1 Exercicio

Representa graficamente a función $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ e comproba ten unha única raiz en $(0,1)$. Usa o método de dicotomía para aproximala cun erro menor a 10^{-12}.

[ ]:
```

```

3 Método de Newton-Raphson

- Iniciar x_0, aproximación da raíz α tal que $f(\alpha) = 0$.
- Construímos x_1 calculando a intersección da recta tanxente á gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ co eixo de abscisas.
- Repetimos o proceso ata que x_k aproxima satisfactoriamente unha raíz α da función f. Con $x_{x+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ se $f'(x_k) \neq 0$.
- Podemos usar como test de parada o erro relativo entre dúas aproximacións sucesivas: $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$.

3.1 Programación do método

Definimos unha función chamada `NewtonRaphson` con entradas:

- x0: aproximación inicial.
- f: función.
- df: derivada da función.
- n: número máximo de iteracións, fixado por defecto en 100.
- tol: tolerancia, fixada por defecto en 10^{-6}.

As saídas da función é o número de iteracións efectuado e a aproximación da raíz.

[13]:
```python
def NewtonRaphson(x0,f,df,n=100,tol=1e-6):
    x_aprox = np.zeros(n)
    x_aprox[0] = x0
    for k in range(1,n):
        if df(x_aprox[k-1]) == 0:
            break
        x_aprox[k] = x_aprox[k-1] - f(x_aprox[k-1])/df(x_aprox[k-1])
        if ( (k > 0) and (np.abs(x_aprox[k]-x_aprox[k-1]) / np.abs(x_aprox[k]) <␣
 ↪tol) ):
            break
    return  k, x_aprox[k]


# Usamos un exemplo para probar o funcionamento do método programado␣
 ↪anteriormente.
x = sp.symbols('x', real=True) # define la variable simbólica x
f_expr = x**3+2*x-2
f_der_expr = sp.diff(f_expr,x)

f = sp.Lambda(x,f_expr)
f_der = sp.Lambda(x,f_der_expr)

x0 = 2
N_max = 10
tol = 1.e-9

iteracionsNR, raiz_aproxNR = NewtonRaphson(x0,f,f_der,N_max,tol) # Obtemos as␣
 ↪iteracións e a raíz aproximada

print('Número de iteracións: ', iteracionsNR)
print('Aproximación da raíz: ', raiz_aproxNR)
```

```
Número de iteracións:  7
Aproximación da raíz:  0.7709169970592481
```

3.2 Condicións converxencia

Sexa $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función de clase dous que verifica:

- $f(a)f(b) < 0$.
- $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [a, b]$.
- $f''(x) \leq 0$ ou $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$.

Entón $f(x) = 0$ ten solución única $\alpha \in (a, b)$. Ademais se $x_0 \in [a, b]$ verifica que $f(x_0)f''(x_0) > 0$ entón o método de Newton-Raphson converxe a α.

3.3 Exemplo completo

Imos resolver o mesmo exemplo que con dicotomía para comparar os métodos. Atopar un punto co que incializar o método de Newton-Raphson para aproximar a única raíz de $f(x) = e^x - \frac{3}{2}$ no intervalo $[0, 1]$ e aproximarémola usando o método de Newton-Raphson.

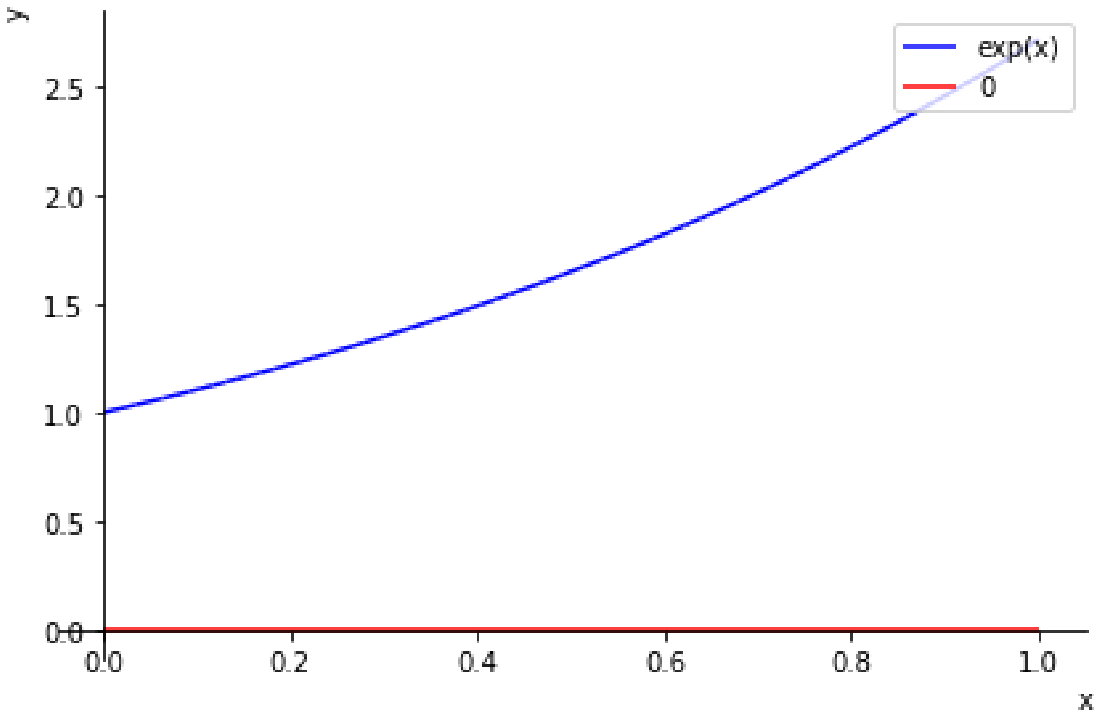
Xa vimos en apartados anteriores que: - $f(0)f(1) < 0$ - $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [0, 1]$

Vexamos a terceira condición do teorema de converxencia, $f''(x) \leq 0$ ou $f''(x) \geq 0, \ \forall x \in [0, 1]$.

[9]:
```
x = sp.symbols('x', real=True)
# Obtemos f
f_expr = sp.exp(x) -3/2
f = sp.Lambda(x,f_expr)
# Obtemos f'
f_der_expr = sp.diff(f_expr,x)
f_der = sp.Lambda(x,f_der_expr)
# Obtemos f''
f_der2_expr = sp.diff(f_der_expr,x) # Obtemos f''

# Comprobamos se f'' ten algunha raíz no intervalo dado.
solucion = sp.solveset(f_der2_expr,x,domain=sp.Interval(0,1))

print('Puntos do intervalo onde ddf(x)=0:')
display(solucion)

# Tamén podemos debuxar a súa gráfica d f' para ver se ten algunha raíz
p = sp.plot(f_der2_expr, 0, (x, 0, 1), show=False)
p[0].line_color='b'
p[1].line_color='r'
p.xlabel='x'
p.ylabel='y'
p.legend=True
p.show()

print('ddf(1)= ', f_der2_expr.subs(x,1))

print('f(1)ddf(1)= ',float(f(1)*f_der2_expr.subs(x,1)))
```

```
Puntos do intervalo onde ddf(x)=0:
```

$\emptyset$




```
ddf(1)=  E
f(1)ddf(1)=  3.3116333562420825
```

Acabamos de comprobar que $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$ e ademais $f(1)f''(1) > 0$ polo que podemos coller $x_0 = 1$ e temos a converxencia garantida.

[15]:
```
x0 = 1
N_max = 100
tol = 1.e-6
iteracionsNR, raiz_aproxNR = NewtonRaphson(x0,f,f_der,N_max,tol) # Obtemos as␣
 ↪iteracións e a raíz aproximada

print('Número de iteracións: ', iteracionsNR)
print('Aproximación da raíz: ', raiz_aproxNR)
```

```
Número de iteracións:  4
Aproximación da raíz:  0.7709169970592638
```

3.3.1 Exercicio

Usa o método de Newton-Raphson para aproximar a solución de $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ (a mesma función que a do exercicio de dicotomía). Escolle unha aproximación inicial da raíz que verifique as condicións do teorema dado para ter garantida a converxencia do método. Comproba que método é máis rápido (acada a mesma precisión con menos iteracións) para obter unha solución cun erro menor que 10^{-9}.

[ ]:

```

```

4 Polinomio de interpolación de Lagrange

Nesta práctica non imos ver como se programan os distintos métodos (polinomios fundamentais de Lagrange e diferencias divididas) vistos durante o curso para obter o polinomio de Lagrange. Imos usar directamente a función xa implementada en Python `lagrange` do módulo **scipy.interpolate**.

De tódolos xeitos se estades interesados en ver a súa programación podedes visitar https://gei-cal.github.io/JB-Calculo1-UDC/capitulos/02/07.Lagrange.html

[12]:

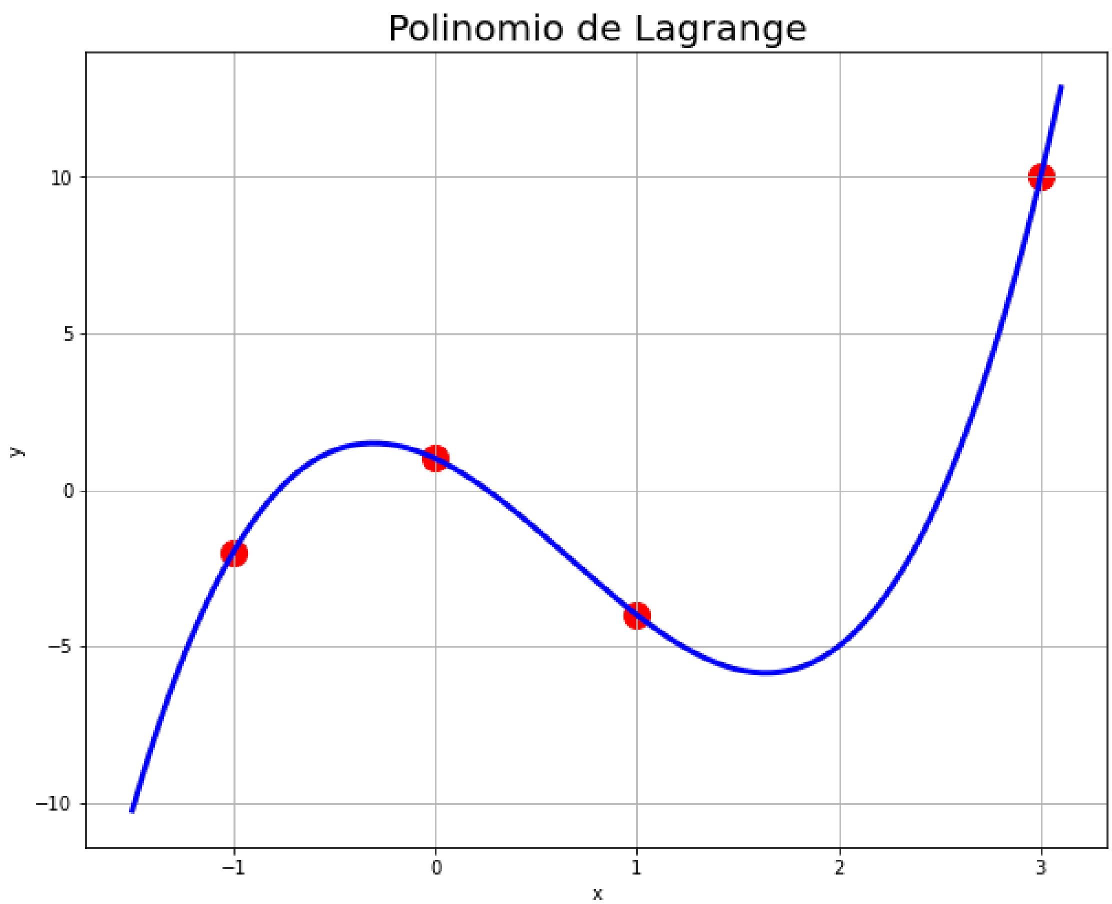
```python
from scipy.interpolate import lagrange
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial

x_coef = [-1, 0, 1, 3]
y_coef = [-2, 1, -4, 10]
x= np.linspace(-1.5, 3.1, 200)

P_L = lagrange(x_coef, y_coef) # Obtemos o polinomio de lagrange
print('Coeficientes do polinomio de Lagrange ordenados de maior a menor grao:')
display(P_L) # Coeficientes do polinomio de Lagrange ordenados de maior a menor␣
 ↪grao
print('Polinomio de Lagrange:')
display(Polynomial(P_L.coef[::-1])) # Polinomio de Lagrange

fig = plt.figure(figsize = (10,8))
plt.scatter(x_coef, y_coef, s=200, c='r')
plt.plot(x, P_L(x), 'b', lw='3')
plt.title('Polinomio de Lagrange', fontsize=20)
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

```
Coeficientes do polinomio de Lagrange ordenados de maior a menor grao:
```

```
poly1d([ 2., -4., -3.,  1.])
```

```
Polinomio de Lagrange:
```

$x \mapsto 1.0 - 3.0\,x - 4.0\,x^2 + 2.0\,x^3$



4.1 Exemplo

Imos construír o polinomio de Lagrange e representalo para os valores dados na seguinte táboa:

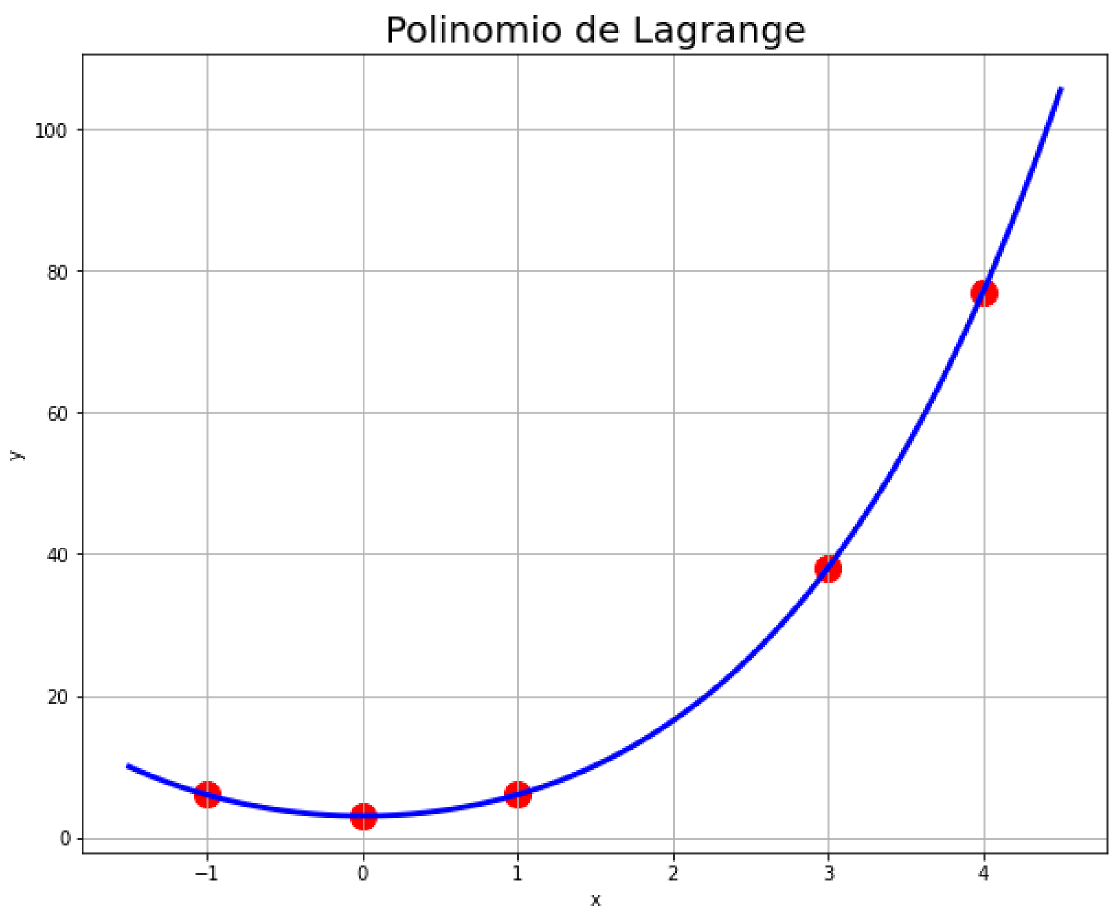
x_i	-1	0	1	3	4
$f(x_i)$	6	3	6	38	77

[13]:
```
x_coef = [-1,0,1,3,4]
y_coef = [6,3,6,38,77]
x= np.linspace(-1.5, 4.5, 200)

P_L = lagrange(x_coef, y_coef) # Obtemos o polinomio de lagrange
print('Polinomio de Lagrange:')
display(Polynomial(P_L.coef[::-1])) # Polinomio de Lagrange

fig = plt.figure(figsize = (10,8))
plt.scatter(x_coef, y_coef, s=200, c='r')
```

```
plt.plot(x, P_L(x), 'b', lw='3')
plt.title('Polinomio de Lagrange', fontsize=20)
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

Polinomio de Lagrange:

$x \mapsto 3.0 - 0.0333333333333333215\,x + 2.9000000000000004\,x^2 + 0.0333333333333333215\,x^3 + 0.10000000000000009\,x^4$



4.2 Exemplo 2

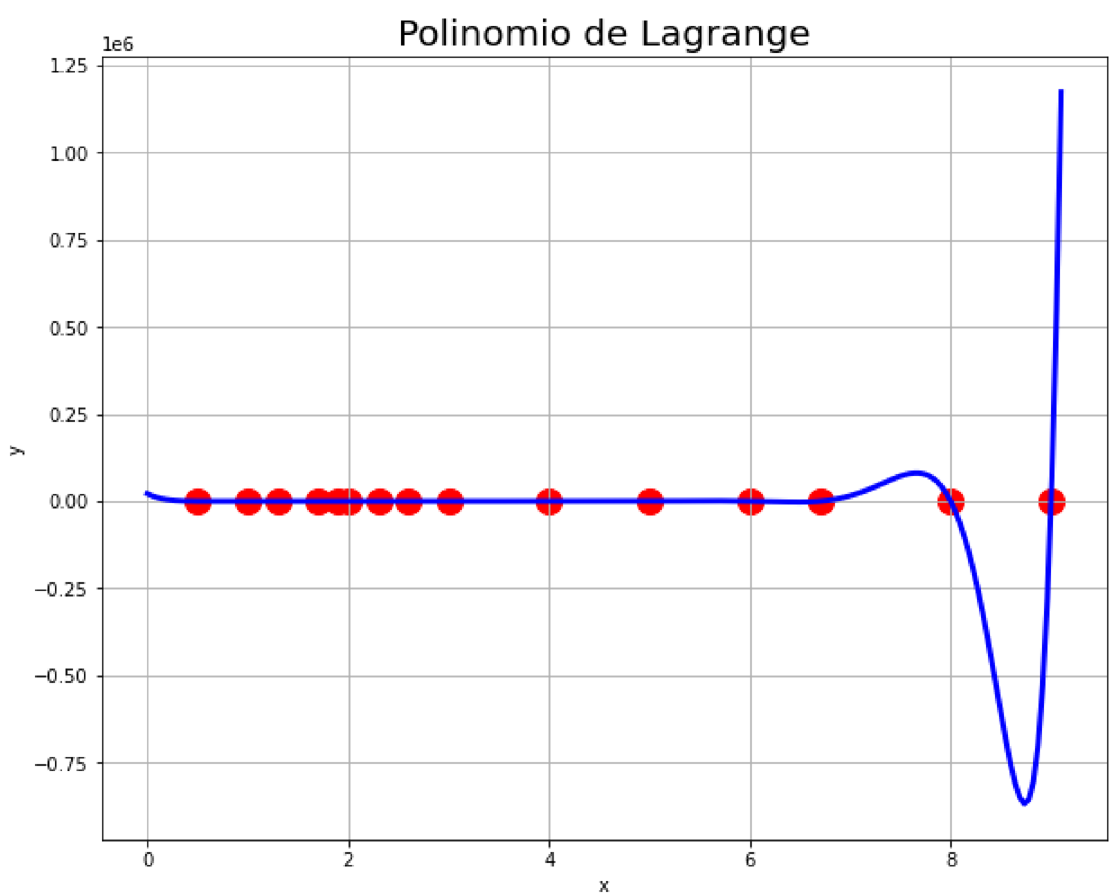
Vexamos un exemplo onde temos unha gran cantidade de puntos.

[14]:
```
x_coef = [0.5, 1, 1.3, 1.7, 1.9,   2, 2.3, 2.6,   3, 4,   5, 6, 6.7,   8, 9]
y_coef = [3.5,   4, 4.1, 4.8, 5.2, 4.9, 4.5, 4.4, 3.7, 4, 4.1, 4, 3.9, 4, 4.9]
x= np.linspace(0, 9.1, 200)
```

```python
P_L = lagrange(x_coef, y_coef) # Obtemos o polinomio de lagrange
print('Polinomio de Lagrange:')
display(Polynomial(P_L.coef[::-1])) # Polinomio de Lagrange

fig = plt.figure(figsize = (10,8))
plt.scatter(x_coef, y_coef, s=200, c='r')
plt.plot(x, P_L(x), 'b', lw='3')
plt.title('Polinomio de Lagrange', fontsize=20)
plt.grid()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

```
Polinomio de Lagrange:
```

$x \mapsto 21594.115197166793 - 151144.47735718312\,x + 455493.86893219955\,x^2 - 791620.451307409\,x^3 + 892388.1341765843\,x^4 - 693430.0881088076\,x^5 + 384272.9229704785\,x^6 - 154651.67201199196\,x^7 + 45507.81754547956\,x^8 - 9759.10424538809\,x^9 + 1503.5369815316737\,x^{10} - 161.60039236112812\,x^{11} + 11.470558219785344\,x^{12} - 0.48199817324899485\,x^{13} + 0.009059653234726964\,x^{14}$



4.2.1 Exercicio

Cal é o principal problema que lle atopas ao polinomio de Lagrange construído? Modifica os límites do eixo y para apreciar mellor o que sucede na escala dos valores dados.

[ ]:

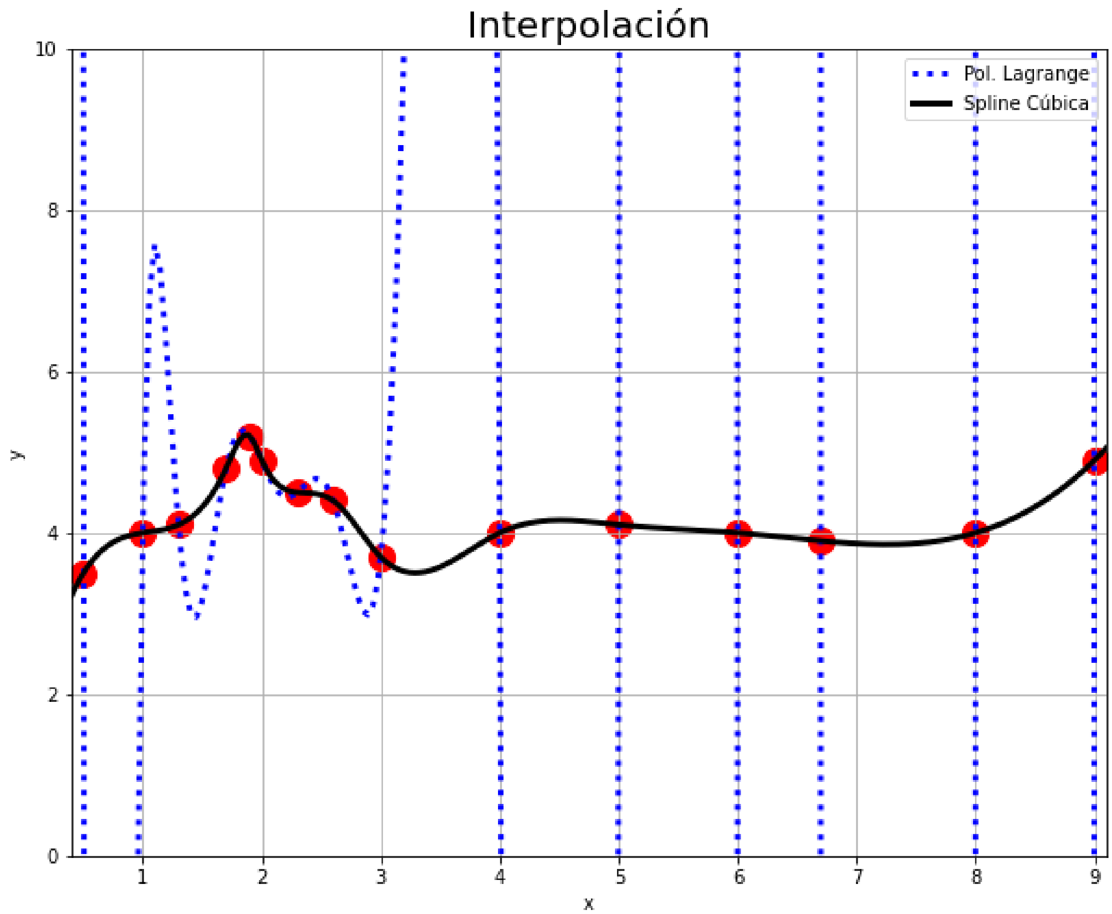
```

```

4.3 Interpolación spline cúbica

Unha interpolación máis precisa que a do polinomio de Lagrange e a spline cúbica. Para iso usaremos a función `CubicSpline` do módulo **scipy.interpolate**. Con este método evitaremos as oscilacións do último exemplo.

[15]:

```
from scipy.interpolate import CubicSpline

x_coef = [0.5, 1, 1.3, 1.7, 1.9,   2, 2.3, 2.6,   3, 4,   5, 6, 6.7,   8, 9]
y_coef = [3.5,   4, 4.1, 4.8, 5.2, 4.9, 4.5, 4.4, 3.7, 4, 4.1, 4, 3.9, 4, 4.9]
x= np.linspace(0.4, 9.1, 200)

P_CS = CubicSpline(x_coef, y_coef) # Obtemos a interpolación con spline cúbica

fig = plt.figure(figsize = (10,8))
plt.scatter(x_coef, y_coef, s=200, c='r')
plt.plot(x, P_L(x), 'b:', lw='3',label='Pol. Lagrange')
plt.plot(x, P_CS(x), 'k', lw='3',label='Spline Cúbica')
plt.title('Interpolación', fontsize=20)
plt.grid()
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.ylim([0,10])
plt.xlim([0.4,9.1])
plt.show()
```



4.3.1 Exercicio

Construe o polinomio de Lagrange e spline cúbico para os datos que se dan na táboa. Os x_i representan os días do mes de setembro de 2023 e $f(x_i)$ representan as temperaturas máximas dese día en Ourense, obtidas en `https://es.weatherspark.com/d/32926/9/7/Tiempo-promedio-el-7-de-septiembre-en-Orense-Espa%C3%B1a#Figures-Temperature`. Ademais:

- Representa as dúas interpolacións xunto cos datos dados e comenta cal é mellor.
- Usa o polinomio de Lagrange para obter a temperatura para o 20 de setembro. Que sucede co valor obtido?

x_i	3	5	8	9	10	12	14	16	17
$f(x_i)$	25	23	26	21	24	24	29	22	18

```
[ ]:
```