# Matemáticas Discretas: Problemario #1

14 de septiembre de 2020

**Manuel A. Rojas**

# Problema 1

Traducir los siguientes enunciados a lógica de predicados. El dominio sobre el que se trabajara es $X$, el conjunto de personas. A si mismo, se pueden usar las funciones $S(x)$, que significa "$x$ ha sido un estudiante del curso". $A(x)$, que significa "$x$ ha obtenido una A en el curso". $T(x)$, que significa "$x$ es un TA del curso". $E(x, y)$, que significa "$x$ y $y$ son la misma persona".

1. Existen personas que han tomado el curso y han obtenido una A en el curso.
2. Todas las personas que son TA del curso y han tomado el curso y han obtenido una A.
3. No existen personas que sean TA del curso y no hayan obtenido una A en el curso.
4. Hay al menos tres personas que son TA del curso y no han tomado el curso.

**Solución**

1. $\exists x \in X : \; S(x) \land A(x)$
2. $\forall x \in X : \; (T(x) \land S(x)) \implies A(x)$
3. $\neg \exists x \in X : \; T(x) \land \neg A(x)$
4. $\exists x, y, z \in X : \; (T(x) \land T(y) \land T(z) \land \neg S(x) \land \neg S(y) \land \neg S(z) \land \neg E(x, y) \land \neg E(x, z) \land \neg E(y, z))$

# Problema 2

Use tablas de verdad para comprobar el siguiente razonamiento.

1. $\neg(P \lor (Q \land R)) = (\neg P) \land (\neg Q \lor \neg R)$

**Solución**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \land R$ | $P \lor (Q \land R)$ | $\neg(P \lor (Q \land R))$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg R$ | $\neg Q \lor \neg R$ | $(\neg P) \land \; (\neg Q \lor \neg R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | **F** | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | **F** |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | **F** | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | **F** |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | **F** | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | **F** |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | **F** | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | **F** |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | **F** | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | **F** |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | **T** | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | **T** |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | **T** | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | **T** |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | **T** | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | **T** |

$$\therefore \quad \neg(P \lor (Q \land R)) = (\neg P) \land (\neg Q \lor \neg R)$$

# Problema 3

**(a)** Para cada una de las siguientes expresiones, encontrar una expresión equivalente usando solamente $\barwedge$(nand) y $\neg$(neg), agrupe con paréntesis para especificar el orden en el que las operaciones se aplicaran. Puede utilizar A, B y los operadores tantas veces como desee.

1. $A \wedge B$
2. $A \vee B$
3. $A \implies B$

**Solución**
Haciendo uso de tablas de verdad podemos obtener las expresiones equivalentes

**Parte uno**

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \barwedge B$ | $\neg(A \barwedge B)$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | **T** | $F$ | **T** |
| $T$ | $F$ | **F** | $T$ | **F** |
| $F$ | $T$ | **F** | $T$ | **F** |
| $F$ | $F$ | **F** | $T$ | **F** |

$$\therefore A \wedge B = \neg(A \barwedge B)$$

**Parte dos**

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(A \vee B)$ | $\neg A \barwedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | **T** | **T** |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | **T** | **T** |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | **T** | **T** |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | **F** | **F** |

$$\therefore A \vee B = \neg A \barwedge \neg B$$

**Parte tres**

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \implies B$ | $A \barwedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | **T** | **T** |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | **F** | **F** |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | **T** | **T** |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | **T** | **T** |

$$\therefore A \implies B = A \barwedge \neg B$$

Problema 3 continua en la siguiente pagina. . . 

**(b)** Es posible expresar cada expresión usando solo (nand), sin necesidad de usar la negación, Encuentre una expresión equivalente a la expresión $\neg A$ usando solo (nand) y agrupando con paréntesis.

**Solución**

$\neg A = A \barwedge ((A \barwedge B) \barwedge B)$

# Problema 4

Demuestra el siguiente enunciado demostrando su contraposición: si $r$ es irracional, entonces $r^{\frac{1}{5}}$ es irracional (Asegurese de indicar el contrapositivo explicitamente).

**Solución**
Para probar que si $r$ es irracional, entonces $r^{\frac{1}{5}}$ es irracional $A \implies B$, usamos el enunciado logicamente equivalente, el cual es su contrapositivo, Si $r^{\frac{1}{5}}$ es racional, entonces $r$ es racional ($\neg B \implies \neg A$).

Ahora, sea $x = r^{\frac{1}{5}}$, entonces $r = x^5$. Ahora solo necesitamos probar que si $x$ es racional, entonces $x^5$ es también racional.

Sean $m$ y $n$ números enteros tal que $x = m/n (n \neq 0)$. Entonces $x^5$ puede expresarse en términos de $m$ y $n$. $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = \frac{5 \cdot m}{5 \cdot n}$. Siendo una fracción con un entero en el numerador y el denominador. Por lo tanto $x^5$ es racional por definición. Lo cual queda demostrado.

# Problema 5

Suponga que $w^2 + x^2 + y^2 = z^2$ donde $w, x, y$ y $z$ denotan siempre enteros positivos (Puede resultar útil representar los enteros pares como $2i$ y los impares como $2j + 1$ donde $i$ y $j$ son números enteros).
Pruebe la siguiente proposición: $z$ es par si y solo si $w, x$ y $y$ son pares. Haga esto considerando todos los casos en los que $w, x$ y $y$ son pares o impares.

**Solución**
El cuadrado de un numero impar es un múltiplo de 4 mas 1:

$$(2j + 1)^2 = 4j^2 + 4j + 1 = 4(j^2 + j) + 1$$

Y el cuadrado de un numero par es exactamente un múltiplo de 4:

$$(2i)^2 = 4i^2$$

A si mismo, sea $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ (impar) $\implies n$ es de la forma $4k + 1$ o $4k + 3$

**Caso 1:** $w, x, y$ son pares.

$$z^2 = w^2 + x^2 + y^3 = 4a + 4b + 4c = 4(a + b + c)$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. $z^2$ es un multiplo de 4, por lo tanto es par.

**Caso 2:** $w, x, y$ son impares.

$$z^2 = w^2 + x^2 + y^3 = (4a + 1) + (4b + 1) + (4c + 1) = 4(a + b + c) + 3$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. $z^2$ es impar

**Caso 3:** $w$ es par y $x, y$ son impares.

$$z^2 = w^2 + x^2 + y^3 = 4a + (4b + 1) + (4c + 1) = 4(a + b + c) + 2$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Sin embargo el cuadrado de cualquier número no puede ser de la forma $4k + 2$

**Caso 4:** $w, x$ son pares y $y$ es impar.

$$z^2 = w^2 + x^2 + y^3 = 4a + 4b + (4c + 1) = 4(a + b + c) + 1$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. $z^2$ es impar