Diseño e Implementación de Sistemas de Control para Mitigar Vibraciones Resonantes en Edificaciones Durante Eventos Sísmicos

Leonardo Cumplido[1], Juan M. Hernández[1] and Miguel A. Perez[1]

[1] *Tecnologico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Avenida General Ramón Corona 2514, 45201, Jalisco, México*

Reception date of the manuscript:
Acceptance date of the manuscript:
Publication date:

Abstract— Este estudio se centra en la ingeniería estructural y el control de sistemas dinámicos, con el objetivo de diseñar e implementar un sistema de control para mitigar los efectos destructivos de los terremotos en edificaciones. La investigación abarca aspectos teóricos clave como las vibraciones resonantes, el modelado de sistemas mecánicos bajo cargas sísmicas, y los principios de control de vibraciones. Se presenta un modelo de edificio de múltiples pisos como un sistema masa-resorte-amortiguador y se desarrollan las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento dinámico. Además, se exploran diversas estrategias de control, incluidos los controladores PID y de estado, para reducir las amplitudes de vibración y mejorar la estabilidad estructural. A través del análisis de un edificio de tres pisos, se demuestra la efectividad de los controladores en mantener las respuestas estructurales dentro de límites seguros durante eventos sísmicos. La dinámica del sistema se modela y se analiza tanto en condiciones de lazo abierto como con control aplicado, mostrando que la implementación de controladores puede mitigar significativamente los efectos adversos de las vibraciones resonantes en las estructuras.

Keywords—Control de vibraciones, Ingeniería estructural, Modelado de estructuras, Estabilidad estructural

I. Introducción

La ingeniería estructural y el control de sistemas dinámicos son campos esenciales para garantizar la seguridad y la integridad de las edificaciones, especialmente en regiones propensas a terremotos. Los eventos sísmicos representan una amenaza significativa para las estructuras, pudiendo causar daños graves e incluso colapsos. La resonancia, un fenómeno en el cual las frecuencias de vibración naturales de una estructura coinciden con las frecuencias de las fuerzas externas, puede amplificar estas vibraciones, aumentando el riesgo de daños estructurales. Ejemplos históricos, como el colapso del puente Broughton en 1831 y los edificios colapsados en la Ciudad de México en 1985, ilustran las devastadoras consecuencias de no mitigar adecuadamente las vibraciones resonantes.

Este estudio se enfoca en el diseño e implementación de un sistema de control para reducir los efectos destructivos de los terremotos en edificaciones. Para ello, se aborda el modelado preciso de la dinámica estructural de un edificio de múltiples pisos, tratándolo como un sistema masa-resorte-amortiguador. Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del edificio bajo cargas sísmicas son fundamentales para desarrollar estrategias de control efectivas.

Los controladores, dispositivos o algoritmos diseñados para influir en el comportamiento de un sistema dinámico, juegan un papel crucial en este contexto. Se exploran diversos tipos de controladores, incluidos los PID y los de estado, para determinar su efectividad en la mitigación de las vibraciones resonantes. El objetivo principal es mantener las respuestas estructurales dentro de límites seguros, minimizando los efectos adversos de las vibraciones y mejorando la estabilidad de las edificaciones durante eventos sísmicos.

En este estudio, se analiza un edificio de tres pisos, evaluando su comportamiento dinámico tanto en condiciones de lazo abierto como con control aplicado. Se demuestra que la implementación de controladores puede mitigar significativamente las vibraciones resonantes, reduciendo así el riesgo de daños estructurales y mejorando la seguridad de las edificaciones en eventos sísmicos.

II. Investigación

El presente estudio se enmarca en el ámbito de la ingeniería estructural y el control de sistemas dinámicos, centrándose específicamente en el diseño y la implementación de un sistema de control para mitigar los efectos destructivos de los terremotos en edificaciones. Para comprender adecuadamente el problema y fundamentar la propuesta de solución, es necesario abordar varios aspectos teóricos relacionados con las vibraciones resonantes, el modelado de sistemas mecánicos bajo cargas sísmicas y los principios de control de vibraciones. Este marco teórico se estructurará en torno a los siguientes puntos clave:

a. Vibraciones resonantes y su impacto en estructuras

Las vibraciones resonantes son fenómenos físicos que pueden tener consecuencias devastadoras en estructuras, especialmente durante eventos sísmicos [1]. Cuando la frecuencia de excitación de una carga externa se aproxima o coincide con una de las frecuencias naturales de vibración de la estructura, se produce resonancia, lo que puede llevar a un aumento significativo de las amplitudes de vibración y, en casos extremos, al colapso estructural.

La resonancia ha sido identificada como un factor contribuyente en varios desastres históricos, como el colapso del puente Broughton cerca de Manchester en 1831 y el desplome de edificios en la ciudad de México durante el terremoto de 1985. Este fenómeno subraya la importancia de implementar estrategias de control efectivas para mitigar los efectos de las vibraciones resonantes en las estructuras durante eventos sísmicos.

b. Modelado de sistemas mecánicos bajo cargas sísmicas

El modelado preciso de la dinámica estructural es fundamental para el diseño de sistemas de control eficaces. Se considera un edificio de múltiples pisos como un sistema mecánico sujeto a fuerzas sísmicas, donde cada piso se comporta como un sistema masa-resorte-amortiguador. [1] Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de este sistema son cruciales para comprender su respuesta ante cargas sísmicas y diseñar estrategias de control adecuadas.

c. Modelo del sistema de edificio de "N" pisos

Se considera un modelo simplificado de un edificio de "N" pisos, donde cada piso está sujeto a un grado de libertad correspondiente a su desplazamiento vertical. Las ecuaciones diferenciales de movimiento para este sistema se derivan a partir de los principios de la mecánica estructural y se expresan en forma matricial [2].

"Las ecuaciones de movimiento para el sistema de edificio de "N" pisos se definen como:

$$\mathbf{M}\mathbf{X}'' + \mathbf{C}\mathbf{X}' + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\text{excitación}}$$

Donde:

$\mathbf{M}$ es la matriz de masa del sistema.

$\mathbf{C}$ es la matriz de amortiguación.

$\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez.

$\mathbf{X}$ es el vector de desplazamiento.

$\mathbf{X}''$ es la aceleración del sistema.

$\mathbf{X}'$ es la velocidad del sistema.

$\mathbf{F}_{\text{excitación}}$ es la fuerza de excitación externa, en este caso, la carga sísmica."

d. Principios de control de vibraciones

El control de vibraciones es una técnica utilizada para reducir las amplitudes de vibración y mejorar la estabilidad de las estructuras frente a cargas dinámicas, como los terremotos. El objetivo principal del control de vibraciones es mantener las respuestas estructurales dentro de límites seguros, minimizando los efectos adversos de las vibraciones resonantes [1].

e. Controladores y su Funcionamiento en Sistemas de Masa-Resorte-Amortiguación

En el contexto del presente estudio, un controlador se define como un dispositivo o algoritmo diseñado para influir en el comportamiento de un sistema dinámico, como un sistema de masa-resorte-amortiguación, con el propósito de alcanzar ciertos objetivos de desempeño. [2] La aplicación de un controlador en un sistema de este tipo busca mitigar los efectos adversos de las cargas dinámicas, como las vibraciones sísmicas, y mantener las respuestas estructurales dentro de rangos seguros.

f. Tipos de Controladores

Existen diversos tipos de controladores que se emplean en ingeniería estructural, entre ellos los controladores proporcionales (P), integrales (I), derivativos (D) y combinaciones de estos, conocidos como controladores PID. Otra opción es el controlador de estado o controlador de espacio de estados. Este tipo de controlador se basa en el modelo matemático del sistema en forma de espacio de estados, que describe la evolución del sistema a lo largo del tiempo en términos de un conjunto de variables de estado y las entradas aplicadas al sistema.

El controlador de estado utiliza mediciones de las variables de estado del sistema y un modelo del sistema para calcular las señales de control necesarias para lograr un comportamiento deseado. A diferencia de los controladores PID, que operan únicamente en función del error presente en el sistema, los controladores de estado tienen en cuenta tanto el estado actual del sistema como el estado futuro esperado, lo que les permite tomar decisiones más informadas y adaptativas.

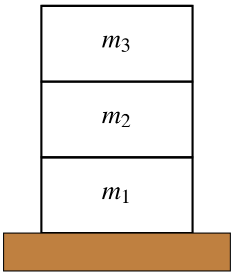
g. Funcionamiento en Sistemas de Masa-Resorte-Amortiguación

En el contexto específico de un sistema de masa-resorte-amortiguación, como el modelo de edificio propuesto en este estudio, un controlador opera ajustando las fuerzas aplicadas al sistema para contrarrestar las perturbaciones externas, como las generadas por un terremoto. Esto se logra mediante la manipulación de los amortiguadores y/o resortes presentes en el sistema, con el objetivo de mantener las vibraciones de la estructura dentro de niveles aceptables y prevenir daños estructurales. [1]

El funcionamiento de un controlador en este tipo de sistemas implica la medición de las variables de estado, como los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los pisos del edificio, y la generación de señales de control adecuadas para influir en el comportamiento dinámico del sistema. La estrategia de control puede variar dependiendo de la arquitectura del sistema y los objetivos específicos de desempeño, pero en general busca minimizar las amplitudes de vibración y mantener la estabilidad estructural durante eventos sísmicos.

III. Sistema dinámico natural de un edificio de 3 pisos

Queremos conocer la dinámica natural de un edificio de 3 pisos. La dinámica natural se refiere a cuando ninguna fuerza externa es ejercida sobre el edificio, además que este no está siendo controlado.



a. Respuesta del sistema en el tiempo (lazo abierto)

El sistema dinámico del edificio de 3 pisos en lazo abierto, sin considerar ninguna fuerza externa actuando sobre el sistema, es el siguiente:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 & = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 & = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) \\ m_3 \frac{d^2}{dt^2} x_3 & = -k_3(x_3 - x_2) \end{cases} \tag{1}$$

El sistema (1) es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 & = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 & = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Para encontrar la solución analítica de la dinámica natural del sistema vamos a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. Suponemos condiciones iniciales no homogéneas:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{01} \\ x_2(0) &= x_{02} \\ x_3(0) &= x_{03} \\ \dot{x}_1(0) &= v_{01} \\ \dot{x}_2(0) &= v_{02} \\ \dot{x}_3(0) &= v_{03} \end{aligned}$$

Aplicando la Transformada de Laplace al sistema (2):

$$\begin{cases} (m_1 s^2 + k_1 + k_2)\Gamma_{X_1} - k_2\Gamma_{X_2} & = m_1(sx_{01} + v_{01}) \\ -k_2\Gamma_{X_1} + (m_2 s^2 + k_2 + k_3)\Gamma_{X_2} - k_3\Gamma_{X_3} & = m_2(sx_{02} + v_{02}) \\ -k_3\Gamma_{X_2} + (m_3 s^2 + k_3)\Gamma_{X_3} & = m_3(sx_{03} + v_{03}) \end{cases} \tag{3}$$

El sistema (3) se puede representar matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & m_3 s^2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{X_1} \\ \Gamma_{X_2} \\ \Gamma_{X_3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m_1 s x_{01} + m_1 v_{01} \\ m_2 s x_{02} + m_2 v_{02} \\ m_3 s x_{03} + m_3 v_{03} \end{bmatrix}$$

Esto tiene la forma $(s^2\mathbf{I} - \mathbf{A})\Gamma_{\mathbf{X}} = \mathbf{C}$, de donde podemos sacar

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{X_1} \\ \Gamma_{X_2} \\ \Gamma_{X_3} \end{bmatrix} = (s^2\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$$

Entonces, la solución analítica del comportamiento natural del edificio es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}((s^2\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C})$$

IV. Sistema dinámico con control

El sistema dinámico de segundo orden con control aplicado es el siguiente:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 & = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 & = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) \\ m_3 \frac{d^2}{dt^2} x_3 & = -k_3(x_3 - x_2) + bu \end{cases} \tag{4}$$

El sistema (4) es equivalente al siguiente dividiendo ambos lados de las ecuaciones por sus respectivas masas:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 & = \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 \\ \ddot{x}_2 & = \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} x_2 + \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{k_3}{m_2} x_3 \\ \ddot{x}_3 & = \frac{k_3}{m_3} x_2 - \frac{k_3}{m_3} x_3 + \frac{b}{m_3} u \end{cases} \tag{5}$$

Ahora, podemos hacer una reducción de orden del sistema a partir de la representación de espacios de estado para obtener un sistema dinámico de primer orden. Las variables de estado son las siguientes:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= \dot{x}_1 \\ z_3 &= x_2 \\ z_4 &= \dot{x}_2 \\ z_5 &= x_3 \\ z_6 &= \dot{x}_3 \end{aligned}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} z_1 + \frac{k_2}{m_1} z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= \frac{k_2}{m_2} z_1 + \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} z_3 + \frac{k_3}{m_2} z_5 \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= \frac{k_3}{m_3} z_3 - \frac{k_3}{m_3} z_5 + \frac{b}{m_3} u \end{cases} \tag{6}$$

Así, la representación matricial del sistema es la siguiente:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{7}$$

donde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} & 0 & \frac{k_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & 0 & \frac{-k_3}{m_3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b}{m_3} \end{bmatrix}$$

Además, $u = -\mathbf{k}\mathbf{z}$, donde $\mathbf{k}$ es un vector de ganancias de dimensión $1 \times n$. Entonces, un sistema matricial equivalente a (7) es:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{k}\mathbf{z} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k})\mathbf{z}$$

Entonces, la dinámica del sistema matricial ya no está dictada por la matriz $\mathbf{A}$, sino por la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}$

V. Sistema dinámico considerando la fuerza aplicada de un sismo

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + m_1 E\omega^2 \cos \omega t \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) + m_2 E\omega^2 \cos \omega t \\ m_3\ddot{x}_3 &= -k_3(x_3 - x_2) + m_3 E\omega^2 \cos \omega t \end{cases} \tag{8}$$

El sistema (8) se puede representar matricialmente como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

el cual es equivalente a

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \tag{9}$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{F_0} \cos \omega t$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} m_1 E\omega^2 \cos(\omega t) \\ m_2 E\omega^2 \cos(\omega t) \\ m_3 E\omega^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

De (9) se observa que la solución analítica está dada por $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t)$, donde $\mathbf{x}_c(t)$ es la solución del sistema homogéneo correspondiente, y $\mathbf{x}_p(t)$ es la solución particular periódica, la cual se puede expresar como $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{C}\cos \omega t$. La segunda derivada de $x_p(t)$ es:

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 \mathbf{C} \cos(\omega t) \tag{10}$$

Recordando (9), donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_3} & \frac{k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} m_1 E\omega^2 \cos(\omega t) \\ m_2 E\omega^2 \cos(\omega t) \\ m_3 E\omega^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

De (10) y (11), se obtiene $(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{I})C = -F_0$, que es igual a:

$$\begin{bmatrix} w^2 - \frac{(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & w^2 - \frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & w^2 - \frac{k_3}{m_3} \end{bmatrix} \mathbf{C} = - \begin{bmatrix} E\omega^2 \\ E\omega^2 \\ E\omega^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Resolviendo (12) para $\mathbf{C}$ se encuentra la solución particular periódica del sistema. La solución de la parte homogénea correspondiente se encuentra con el procedimiento descrito para el sistema dinámico natural del edificio, sin control ni sismo.

VI. Sistema dinámico considerando la fuerza de un sismo y control añadido

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + m_1 E\omega^2 \cos wt \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) + \\ & \quad m_2 E\omega^2 \cos wt \\ m_3 \frac{d^2}{dt^2} x_3 &= -k_3(x_3 - x_2) + m_3 E\omega^2 \cos wt + bu \end{cases} \tag{13}$$

El sistema (13) es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= \frac{-(k_1+k_2)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 + E\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{x}_2 &= \frac{-(k_2+k_3)}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{k_3}{m_2}x_3 + E\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{x}_3 &= \frac{k_3}{m_3}x_2 - \frac{k_3}{m_3}x_3 + E\omega^2\cos\omega t + \frac{b}{m_3}u \end{cases} \tag{14}$$

Haciendo una reducción de orden a partir de la representación de espacios de estado, como se hizo en (6), obtenemos la siguiente representación matricial:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{f} + \mathbf{Bu} = (\mathbf{A} - \mathbf{Bk})\mathbf{z} + \mathbf{f} \tag{15}$$

Donde

A es la matriz estructural del sistema.

B es el vector de control.

$\mathbf{f} = \mathbf{F_0}\cos\omega t$ es el vector de la fuerza aplicada por la oscilación horizontal del sismo, con $\mathbf{F_0} = [E\omega^2 \quad E\omega^2 \quad E\omega^2]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} & 0 & \frac{k_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & 0 & \frac{-k_3}{m_3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ E\omega^2 \\ 0 \\ E\omega^2 \\ 0 \\ E\omega^2 \end{bmatrix} \cos\omega t$$

Con esta información se puede determinar la controlabilidad del sistema. Si $|\mathbb{C}| \neq 0$, donde $\mathbb{C}$ es la matriz de controlabilidad del sistema, tal que

$$\mathbb{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A^2B} \quad \mathbf{A^3B} \quad \mathbf{A^4B} \quad \mathbf{A^5B}]$$

entonces el sistema es controlable.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^2B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_3}{m_2 m_3} \\ 0 \\ -\frac{k_3}{m_2 m_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^3B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_3}{m_2 m_3} \\ 0 \\ -\frac{k_3}{m_2 m_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^4B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2 k_3}{m_1 m_2 m_3} \\ 0 \\ -\frac{(k_2+k_3)k_3}{m_1 m_2 m_3} - \frac{k_3^2}{m_2^2 m_3} \\ 0 \\ 2\frac{k_3^2}{m_2 m_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^5B} = \begin{bmatrix} \frac{k_2 k_3}{m_1 m_2 m_3} \\ 0 \\ -\frac{k_3(k_2+k_3)}{m_1 m_2 m_3} - \frac{k_3^2}{m_1^2 m_3} \\ 0 \\ 2\frac{k_3^2}{m_2 m_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo los cálculos pertinentes,

$$|\mathbb{C}| = -\frac{k_2^2 k_3^5}{m_1^2 m_2^5 m_3^6} \neq 0$$

Por lo tanto, el sistema propuesto es controlable.

VII. RESULTADOS

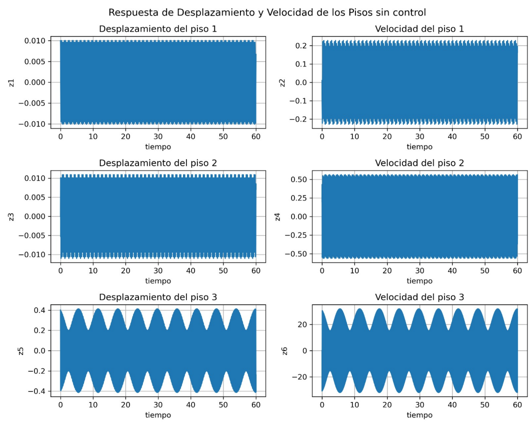


Fig. 1: Este es el desplazamiento y la velocidad de los pisos del edificio sin control.

En este escenario, el edificio muestra un movimiento perpetuo y creciente debido a la falta de amortiguadores. Esto es un caso idealista, ya que en la práctica, las estructuras tienen algún nivel de amortiguamiento natural que disipa energía con el tiempo. La ausencia de amortiguamiento en el modelo resalta la importancia crítica de los sistemas de control y amortiguamiento en la ingeniería estructural para evitar el crecimiento infinito de las vibraciones y asegurar la estabilidad y seguridad de las edificaciones.

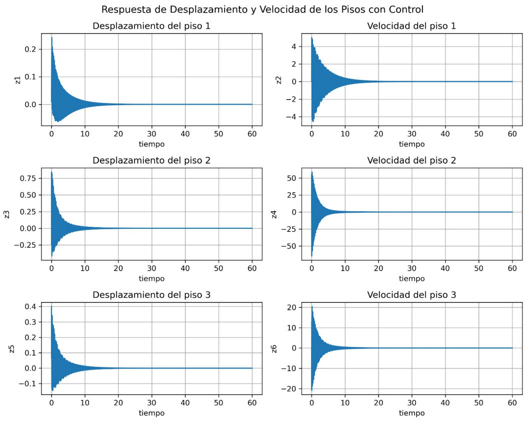


Fig. 2: Este es el desplazamiento y la velocidad de los pisos del edificio con control.

En este escenario, la adición de un sistema de control demuestra ser altamente efectiva para estabilizar tanto el desplazamiento como la velocidad de los pisos del edificio. Esto asegura que las vibraciones no se amplifiquen ni propaguen de manera descontrolada.

El control aplicado garantiza que el edificio mantenga su estabilidad estructural en ausencia de fuerzas externas. Este comportamiento es crucial para prevenir daños estructurales y asegurar la longevidad del edificio.

A diferencia del escenario sin control, donde las vibraciones crecían indefinidamente, aquí se observa que el control proporciona un mecanismo de disipación de energía que mantiene las vibraciones dentro de límites seguros.

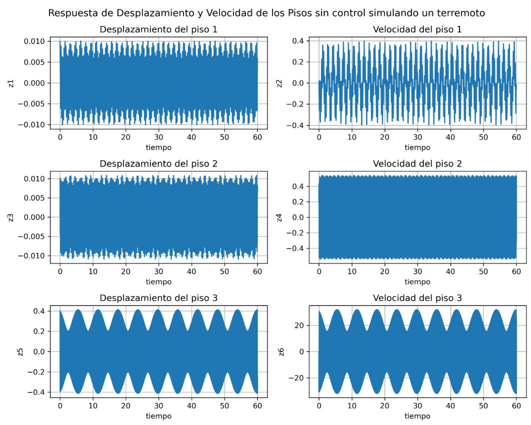


Fig. 3: Este es el desplazamiento y la velocidad de los pisos del edificio sin control simulando un terremoto.

En este escenario, la falta de un sistema de control en presencia de una fuerza externa, como un sismo, resulta en la destrucción completa del edificio. Las vibraciones inducidas por el terremoto se amplifican sin control, llevando al colapso estructural.

La ausencia de mecanismos de amortiguamiento permite que las vibraciones se amplifiquen a medida que se transmiten por la estructura, resultando en desplazamientos y velocidades que exceden la capacidad de la estructura para mantenerse intacta.

Las gráficas demuestran cómo la falta de control ante una fuerza externa puede llevar a desplazamientos y velocidades insostenibles, subrayando la necesidad de estrategias de control y amortiguamiento para preservar la integridad estructural durante eventos sísmicos.

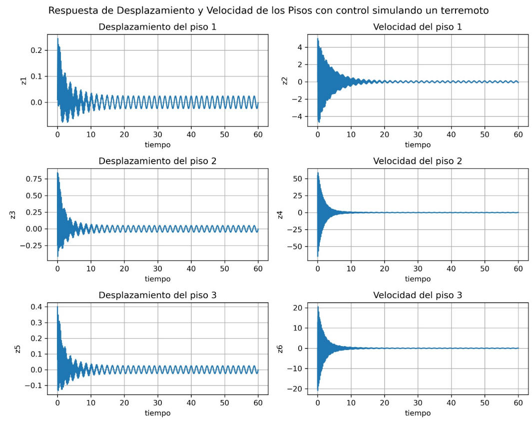


Fig. 4: Este es el desplazamiento y la velocidad de los pisos del edificio con control simulando un terremoto.

En este escenario, el sistema de control demuestra su capacidad para luchar contra la fuerza del terremoto y estabilizar tanto el desplazamiento como la velocidad de los pisos del edificio. El control es efectivo en mitigar las vibraciones inducidas por el sismo, manteniendo la estructura dentro de límites seguros.

A diferencia del escenario sin control y con sismo, donde el edificio se destruye, aquí el control permite que la estructura soporte las fuerzas sísmicas y mantenga su integridad. Este resultado subraya la importancia de implementar sistemas de control para la seguridad sísmica.

VIII. Conclusiones

Los sistemas de control son esenciales para mitigar las vibraciones inducidas por terremotos en edificaciones, limitando significativamente los desplazamientos y velocidades de los pisos, y evitando el colapso estructural. Las simulaciones demostraron que, en presencia de un sismo, los edificios sin sistemas de control sufren daños severos o colapsan debido a la amplificación descontrolada de las vibraciones. En contraste, los edificios con sistemas de control pueden manejar y reducir las vibraciones, manteniendo la estabilidad estructural y protegiendo la integridad de la edificación. La resonancia es un factor crítico que puede llevar al colapso de edificaciones durante sismos, y los sistemas de control desempeñan un papel crucial en amortiguar estas vibraciones resonantes, disipando la energía y evitando niveles destructivos. La implementación de sistemas de control avanzados, como controladores PID y de estado, debe ser una práctica estándar en la ingeniería estructural, especialmente en regiones propensas a terremotos, ya que aseguran que las respuestas estructurales se mantengan dentro de límites seguros, contribuyendo significativamente a la resiliencia y seguridad de las edificaciones.

IX. Anexos

Para más detalles y acceso al código fuente utilizado en este estudio, puedes visitar el repositorio de GitHub en el siguiente enlace:

Repositorio en GitHub: https://github.com/manuelsolano/ModelacionEdificio

REFERENCES

[1] M. A. González Padilla, "Modelado y control pid-difuso de una estructura de edificio sometida a las vibraciones de un temblor," *Tesis (M.C.)–Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Departamento de Control Automático*, p. 95, 2012. [Online]. Available: https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/2298

[2] D. E. EDWARDS, C. HENRY Y PENNEY, "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. cuarta edición," *PEARSON EDUCACIÓN*, p. 824, 2009.