



ANUAL SAN MARCOS



www.aduni.edu.pe



Razonamiento Matemático

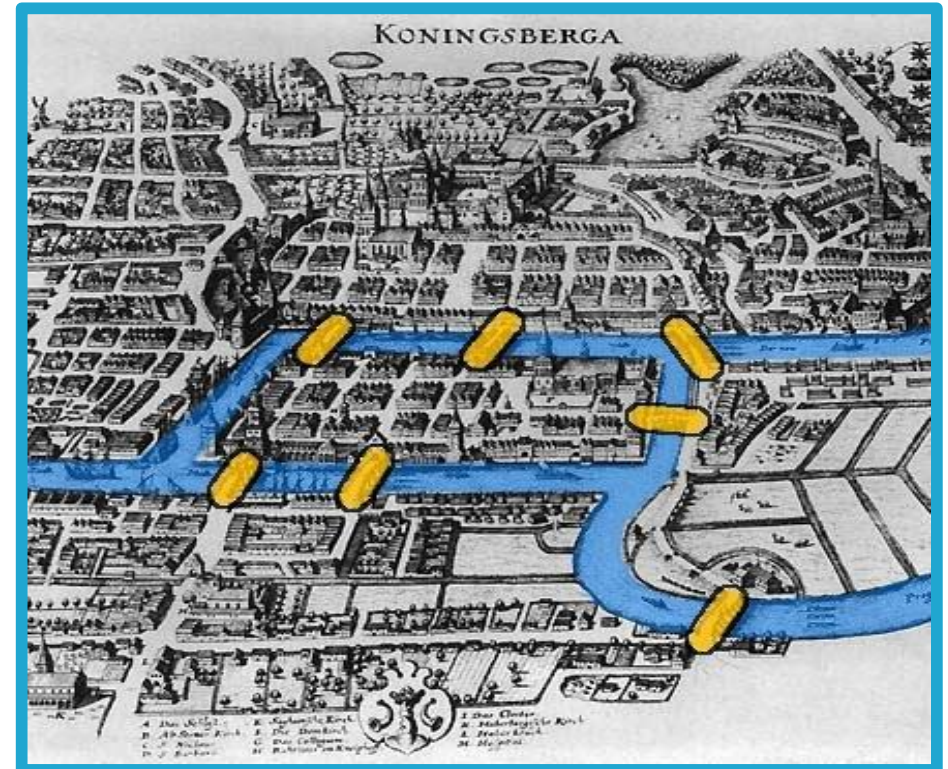
Trazos de figuras

www.aduni.edu.pe

ACADEMIA
ADUNI
ANUAL
SAN MARCOS

OBJETIVO

- Aplicar correctamente los postulados de Euler para determinar si una figura se puede o no realizar de un solo trazo continuo.
- Utilizar los diversos criterios prácticos para determinar el recorrido mínimo.



TRAZOS DE FIGURAS

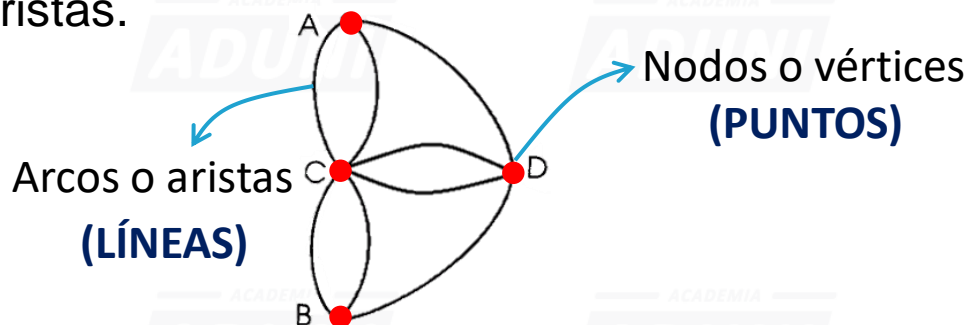
Nociones previas

Aplicación de los
postulados de Euler

Cálculo de recorridos
mínimos

Nociones Previas**GRAFO:**

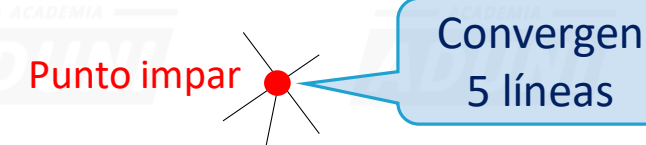
Diagrama que esta compuesto por un conjunto de nodos o vértices conectados mediante arcos o aristas.

**PUNTO PAR :**

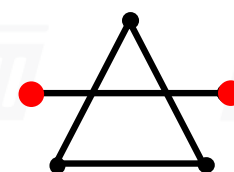
Es aquel punto en el cual inciden (converge) un número par de líneas.

**PUNTO IMPAR :**

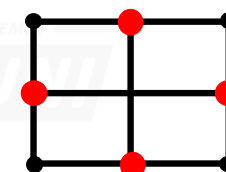
Es aquel punto en el cual inciden (converge) un número impar de líneas.

**Ejemplo:**

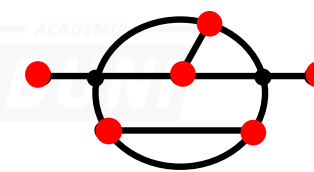
En los siguientes grafos ¿cuántos puntos impares hay?



Hay 2 puntos
impares



Hay 4 puntos
impares



Hay 6 puntos
impares

OBSERVACIÓN

La cantidad de puntos impares es siempre un número par

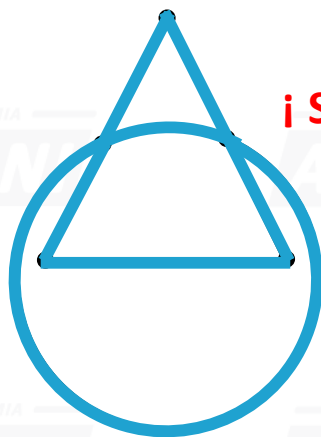
Aplicación de los postulados de Euler

RECORRIDO EULERIANO

Un recorrido euleriano o camino euleriano consiste en un trazo continuo que recorre todas las aristas (líneas) de un grafo sin pasar por una arista más de una vez.

Por ejemplo:

Dado el siguiente grafo ¿admite un camino euleriano?

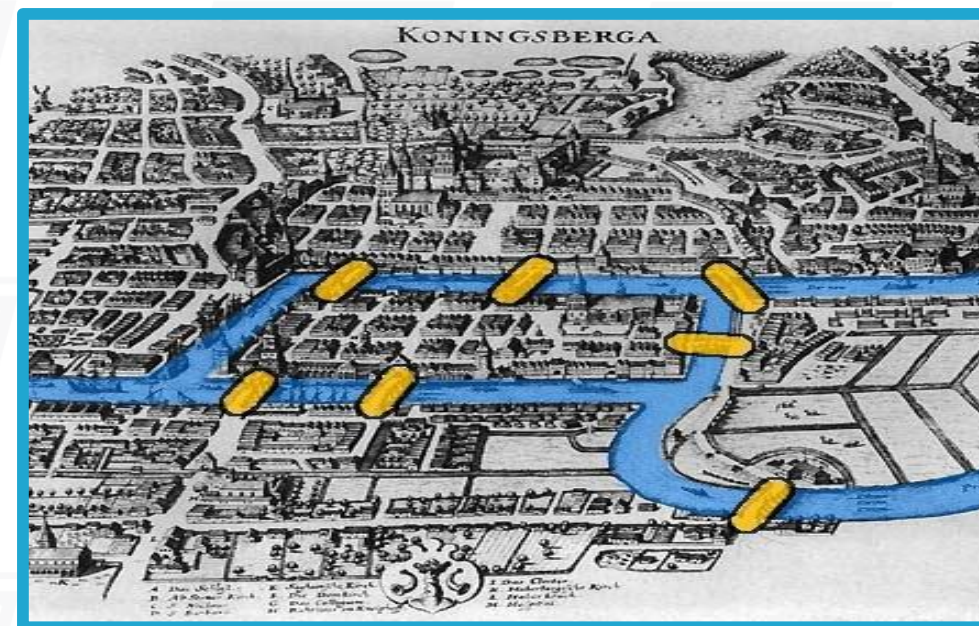


¡ SI ADMITE UN CAMINO EULERIANO!

Para averiguar si un grafo admite un camino euleriano sin hacer el trazo aplicaremos los postulados de Euler.

POSTULADOS DE EULER

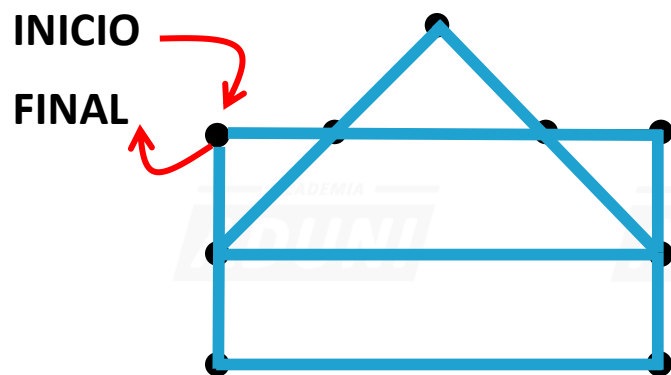
Son los resultados obtenidos por Euler al resolver “*el problema de los puentes de Königsberg*”.



PRIMER POSTULADO

Si todos los puntos son pares, entonces el grafo admite un camino euleriano.

Por ejemplo:

**OBSERVACIÓN**

El recorrido se comienza por cualquier punto y se termina en el mismo punto.

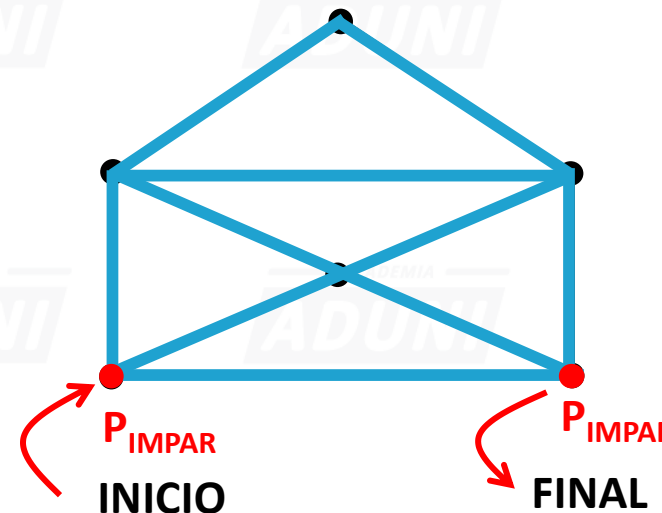
Solo tiene puntos pares

¡ADMITE UN CAMINO EULERIANO!

SEGUNDO POSTULADO

Si presenta dos puntos impares, entonces el grafo admite un camino euleriano.

Por ejemplo:

**OBSERVACIÓN**

El recorrido se comienza en uno de los puntos impares y se termina en el otro punto impar.

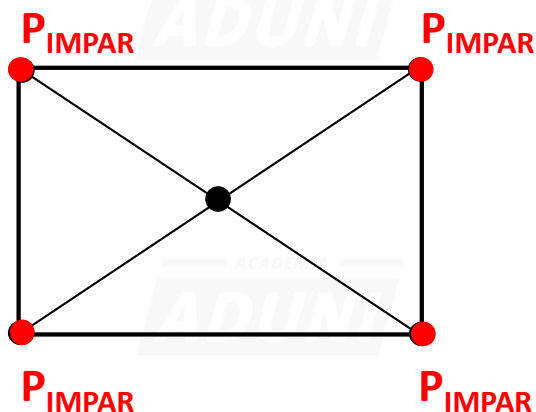
Tiene 2 puntos impares

¡ADMITE UN CAMINO EULERIANO!

TERCER POSTULADO

Si presenta más de dos puntos impares, entonces el grafo **no** admite un camino euleriano

Por ejemplo:



Tiene 4 puntos impares

¡NO ADMITE UN CAMINO EULERIANO!

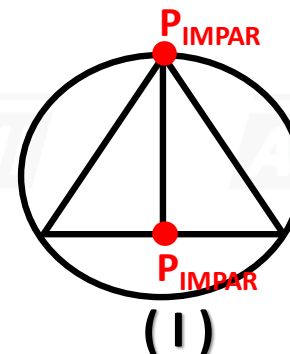
NOTA: En estos casos nos pedirán determinar la longitud mínima de dicho trazo (recorrido mínimo).

OBSERVACIÓN

Para realizar el recorrido de un solo trazo necesariamente se deberá repetir líneas.

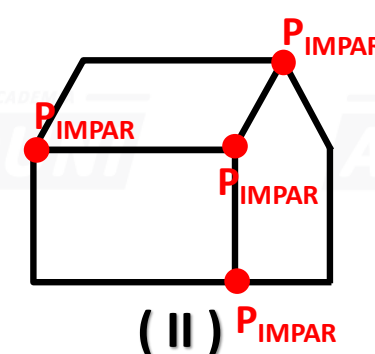
Aplicación 1

¿Cuál de las siguientes figuras admite un recorrido euleriano?



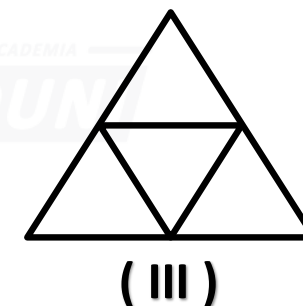
Hay 2 puntos impares

¡SI ADMITE!



Hay 4 puntos impares

¡NO ADMITE!



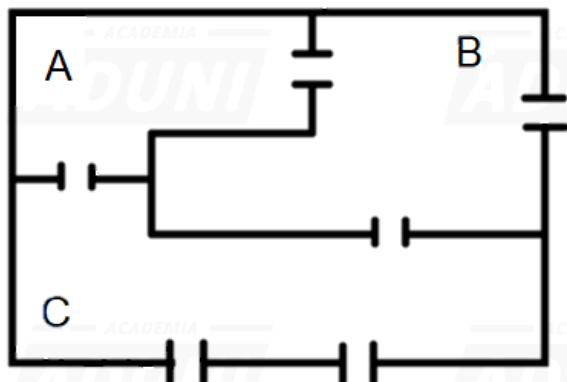
Todos los puntos son pares

¡SI ADMITE!

\therefore Admiten recorrido euleriano I y III.

Aplicación 2

La figura muestra el plano de una casa. Indique la habitación de la que debe partir el niño para pasar por todas las puertas solo una vez.

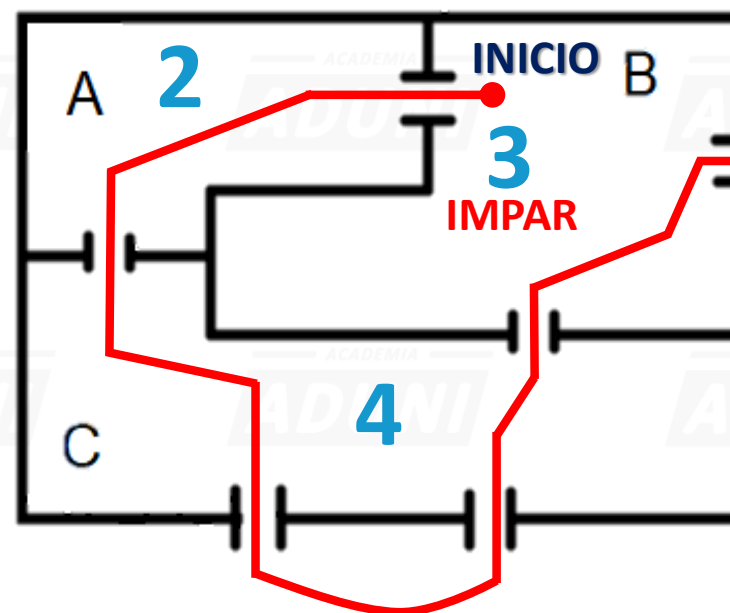


- A) A
- B) C
- ☒ C) B
- D) No se sabe

Resolución:

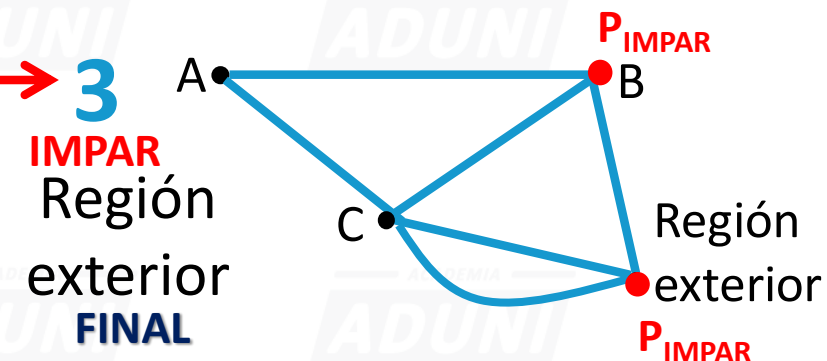
Nos piden la habitación de la que debe partir el niño para pasar por todas las puertas solo una vez.

Contamos primero la cantidad de puertas que tiene cada habitación.



\therefore Debe partir de la habitación B.

Analizamos el grafo de la casa



El recorrido se comienza en uno de los puntos impares y se termina en el otro punto impar.

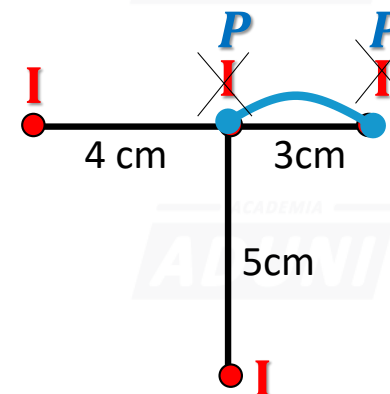
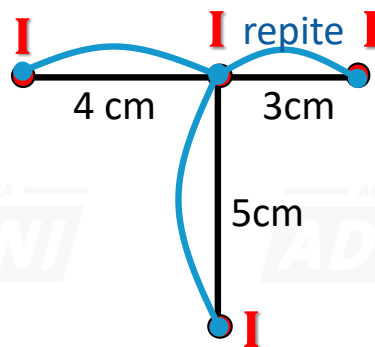
Cálculo de recorridos mínimos

Cuando una figura tiene más de dos puntos impares, para recorrer por todas sus aristas de un trazo continuo se tendrá que repetir líneas.

Las líneas repetidas cumplen las siguientes condiciones:

- Van de un punto impar a otro punto impar.
- Son de longitud mínima.
- No son consecutivas (no parten de un vértice común).

Por ejemplo:



Cuando se repite una línea que une puntos impares se convierten dichos puntos impares en puntos pares.

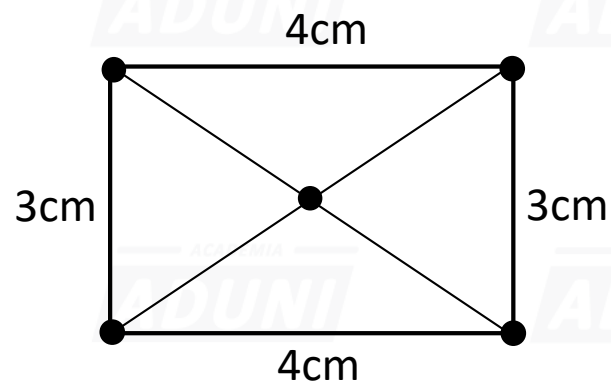
Y la longitud del recorrido mínimo queda determinado por la siguiente relación:

Longitud del recorrido mínimo	=	Longitud de las líneas de la figura	+	Mínima longitud de las líneas repetidas
-------------------------------	---	-------------------------------------	---	---

Longitud del recorrido mínimo	=	4 + 3 + 5	+	3	=	15
-------------------------------	---	-----------	---	---	---	----

Aplicación 3

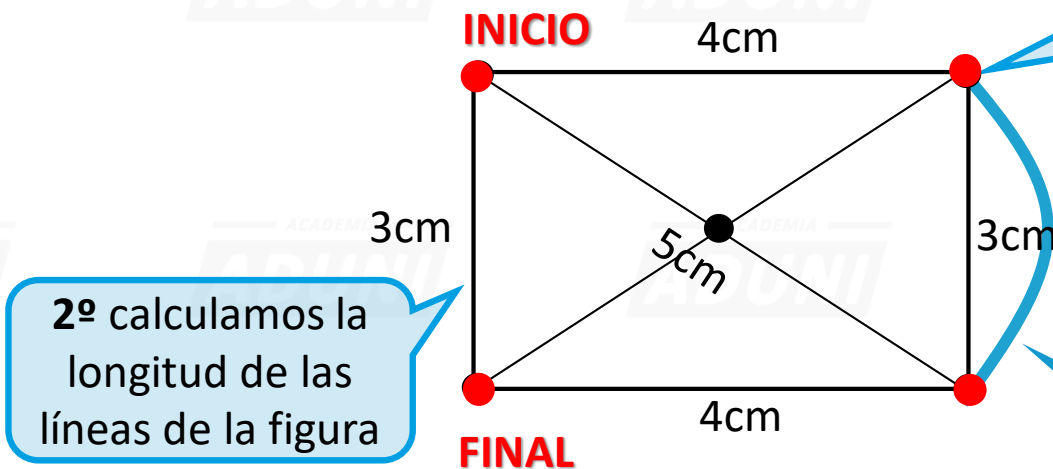
¿Cuál es la longitud del menor recorrido que puede recorrer la punta de un lápiz para realizar el siguiente gráfico de un trazo continuo?



- A) 28 cm
B) 26 cm
C) 27 cm
D) 30 cm

Resolución:

Nos piden la longitud del recorrido mínimo.



1º identificamos los puntos impares.

Tenemos 4 impares



3º identificamos las líneas a repetir

La longitud del recorrido mínimo se calcula de la siguiente manera:

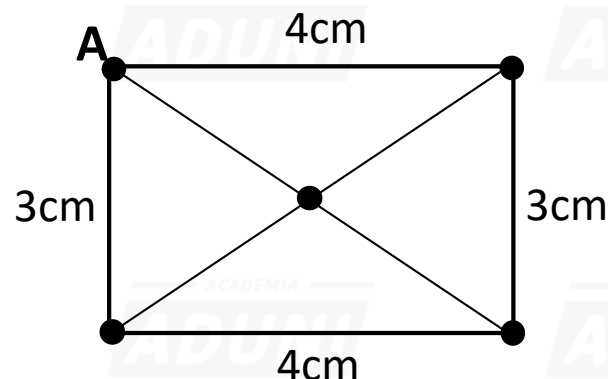
$$\text{Longitud del recorrido mínimo} = \text{Longitud de las líneas de la figura} + \text{Mínima longitud de las líneas repetidas}$$

$$\text{Longitud del recorrido mínimo} = 6 + 8 + 10 + 3 = 27$$

∴ La longitud del recorrido mínimo es 27cm.

Aplicación 4

¿Cuál es la menor longitud, en centímetros, que debe recorrer la punta de un lápiz, sin separarse del papel, para dibujar dicha figura si se debe iniciar y terminar en el punto A?



- ~~A) 30~~
B) 36
C) 27
D) 32

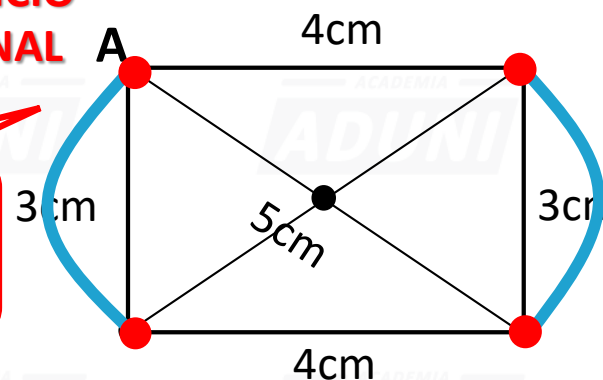
Resolución:

Nos piden la longitud del recorrido mínimo.

CONDICIÓN: Iniciar y terminar en el punto A

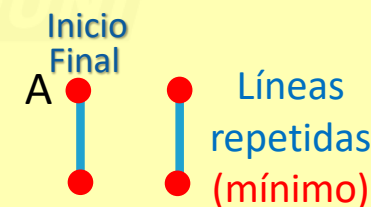
**INICIO
FINAL**

Todos los puntos deben ser pares



3º identificamos las líneas a repetir

Tenemos 4 impares



La longitud del recorrido mínimo se calcula de la siguiente manera:

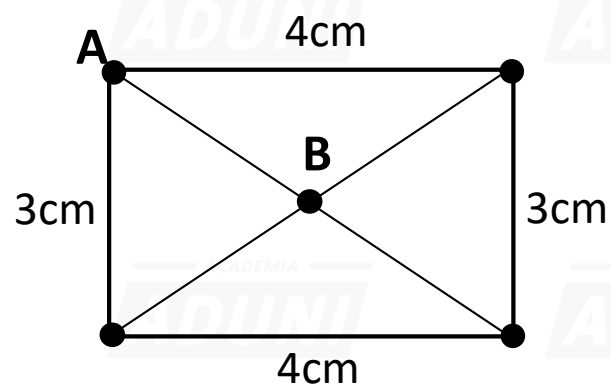
$$\text{Longitud del recorrido mínimo} = \text{Longitud de las líneas de la figura} + \text{Mínima longitud de las líneas repetidas}$$

$$\text{Longitud del recorrido mínimo} = 6 + 8 + 10 + 6 = 30$$

∴ La longitud del recorrido mínimo es 30cm.

Aplicación 5

¿Cuál es la menor longitud, en centímetros, que debe recorrer la punta de un lápiz, sin separarse del papel, para dibujar dicha figura si se debe iniciar en el punto A y terminar en el punto B?



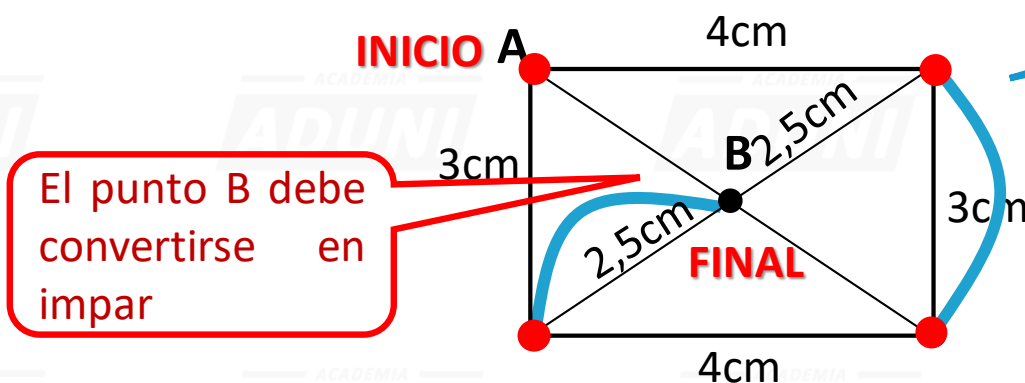
- A) 30
 B) 29,5
 C) 27,5
 D) 29

Resolución:

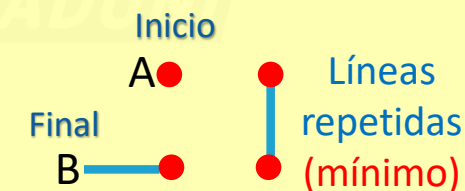
Nos piden la longitud del recorrido mínimo.

CONDICIÓN: Iniciar en el punto A y terminar en el punto B

3º identificamos las líneas a repetir



Tenemos 4 impares



La longitud del recorrido mínimo se calcula de la siguiente manera:

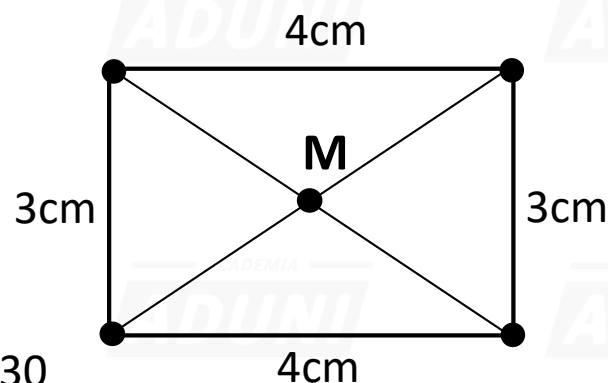
$$\text{Longitud del recorrido mínimo} = \text{Longitud de las líneas de la figura} + \text{Mínima longitud de las líneas repetidas}$$

$$\text{Longitud del recorrido mínimo} = 6 + 8 + 10 + 5,5 = 29,5$$

∴ La longitud del recorrido mínimo es 29,5cm.

Aplicación 6

¿Cuál es la menor longitud, en centímetros, que debe recorrer la punta de un lápiz, sin separarse del papel, para dibujar dicha figura si se debe iniciar en el punto M?



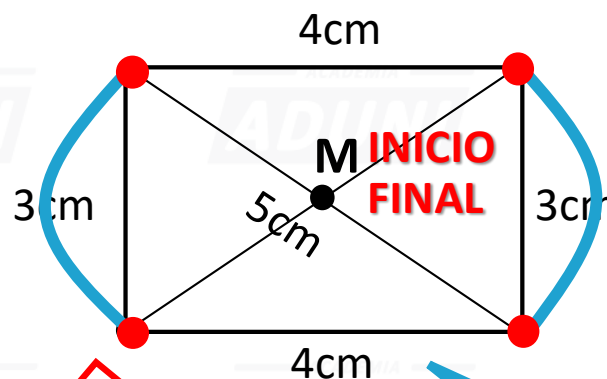
- A) 30
 B) 29,5
 C) 27,5
 D) 29

Resolución:

Nos piden la longitud del recorrido mínimo.

CONDICIÓN: Iniciar en el punto M

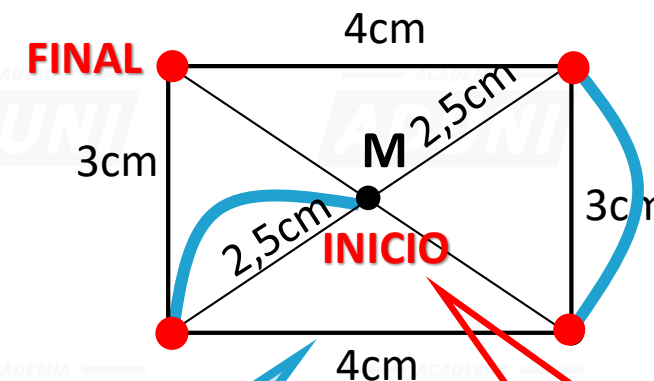
CASO 1: termina en M



Todos los puntos deben ser pares

Repite 6 cm

CASO 2: termina en otro punto (impar)

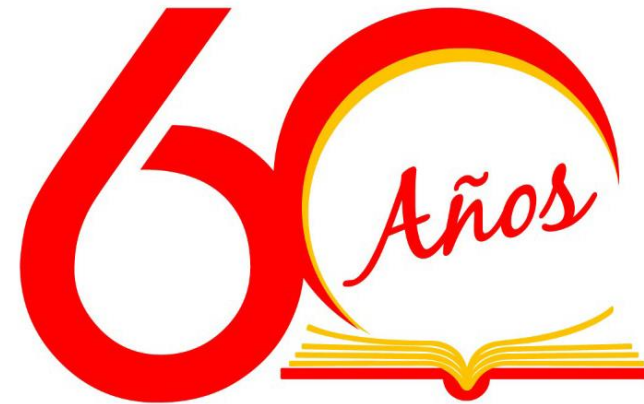
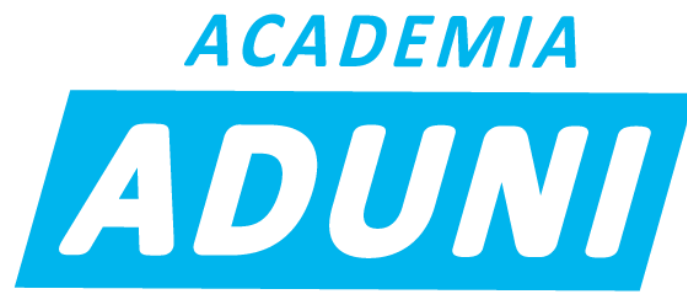


Repite 5,5 cm

El punto M debe convertirse en impar

$$\text{Longitud del recorrido mínimo} = 6 + 8 + 10 + 5,5 = 29,5$$

\therefore La longitud del recorrido mínimo es 29,5cm.



www.aduni.edu.pe

