ACADEMIA
ADUNI

ANUAL SAN MARCOS

60 Años

www.aduni.edu.pe

ACADEMIA

ADUNI

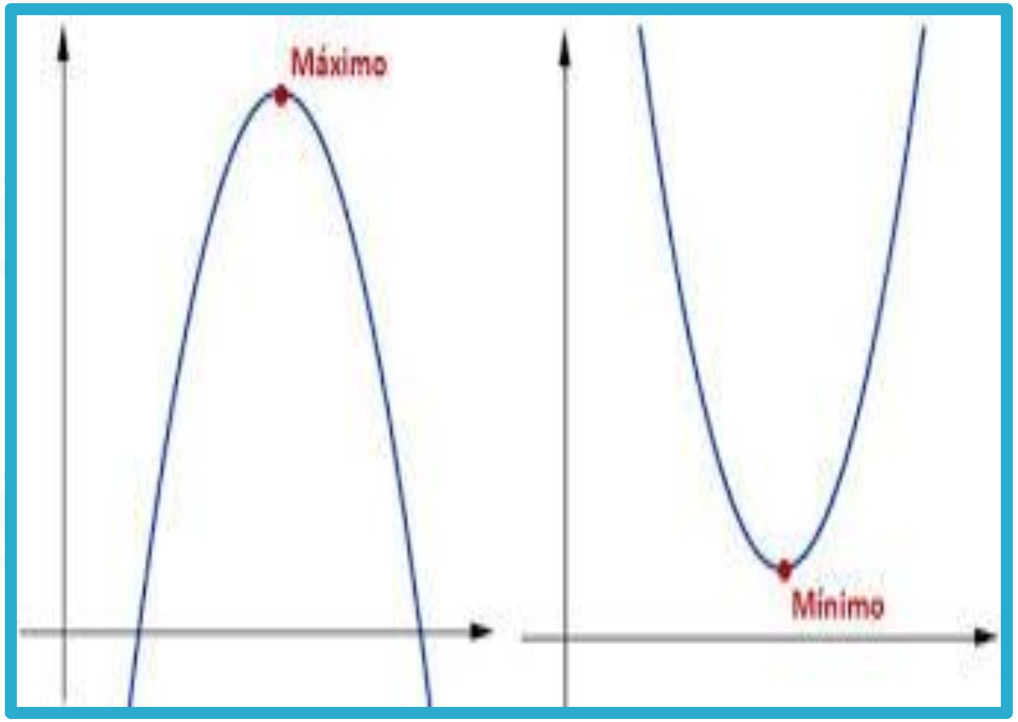
ANUAL
SAN MARCOS

Razonamiento Matemático

Máximos y mínimos I

OBJETIVO

Conocer y aplicar las diferentes formas prácticas para determinar el mínimo valor o máximo valor de ciertas expresiones matemáticas.



MÁXIMOS Y MÍNIMOS I

- Aplicaciones algebraicas
- Aplicaciones aritméticas

Aplicaciones algebraicas

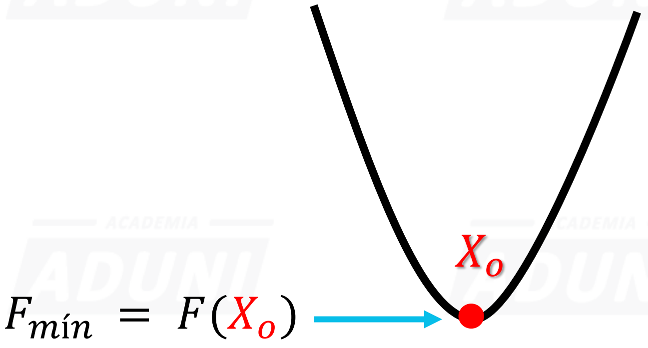
FUNCIÓN CUADRÁTICA

Forma general:

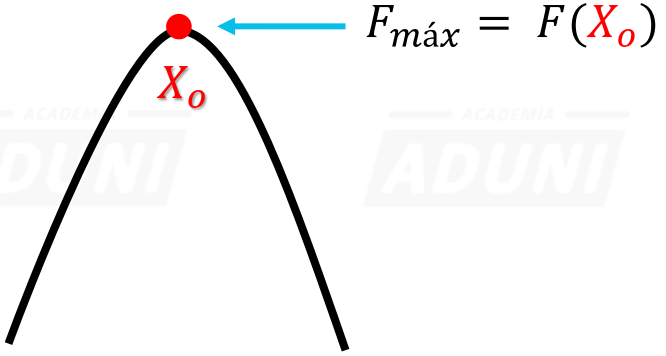
$$\boxed{F(x) = ax^2 + bx + c} \; ; \quad a \neq 0$$

Para calcular los valores Máximos o Mínimos de $F(x)$ se presentan dos casos.

Primer caso: $(a > 0)$



Segundo caso: $(a < 0)$



Para ambos casos el valor de X_o que hace que $F(x)$ sea mínimo o máximo es:

$$\boxed{X_0 = \frac{-b}{2a}}$$

es decir:

$$\boxed{F_{mín} = F\left(\frac{-b}{2a}\right) \quad y \quad F_{máx} = F\left(\frac{-b}{2a}\right)}$$

Por ejemplo :

1.- Halle el valor mínimo de $R = x^2 - 6x + 10;\ x \in \mathbb{R}$

Recordemos que: para $\boxed{X_0 = \frac{-b}{2a}}$, R es mínimo.

$$X_0 = \frac{-(-6)}{2(\ 1\ )} = 3$$

$$\therefore\quad R_{mín} = (3)^2 - 6(3) + 10 = 1$$

2.-Halle el valor máximo de $M = -2x^2 + 4x + 10; x \in \mathbb{R}$

Recordemos que: para $\boxed{X_0 = \frac{-b}{2a}}$, M es máximo.

$$X_0 = \frac{-(\ 4\ )}{2(-2)} = 1$$

$$\therefore\ M_{máx} = -2(1)^2 + 4(1) + 10 = 12$$

Otra forma de resolver es: **Completando cuadrados**

Veamos en el ejemplo 1:

Completamos cuadrados

Recordemos que: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$$R = \left[x^2 - 6x\right] + 10$$

$$R = \left[\underbrace{x^2 - 2(3)x + 3^2}_{(x-3)^2} - 3^2\right] + 10$$

$$\underbrace{R}_{mínimo} = \underbrace{(x-3)^2}_{mínimo} + 1$$

Recordemos que: $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R};\ x^2 \geq 0}$

$$(x-3)^2 \geq 0 \longrightarrow (x-3)^2{}_{mín} = 0$$

$$\therefore\ R_{mín} = \underbrace{(x-3)^2}_{\mathbf{0}} + 1 = 1$$

Aplicación 1

Un empleado trabajará hasta que su remuneración sea máxima. Si la empresa paga según $f(x) = -3x^2 + 192x + 960$, donde $f(x)$ es el número de soles y x el número de años de trabajo. ¿Cuántos años trabajará en total?

A) 35 años
B) 32 años
C) 36 años
D) 37 años

Resolución:

Nos piden determinar el número total de años que trabajará el empleado.

De los datos:

La remuneración se calcula:

$$f(x) = -3x^2 + 192x + 960$$

El número de años de trabajo

y el valor de x que hace que la remuneración sea máxima es: $\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$

$$a = -3 \quad y \quad b = 192$$

$$x = \frac{-(192)}{2(-3)} = 32$$

$\therefore$ *El empleado trabajará 32 años en total.*

Aplicaciones aritméticas

MEDIA ARITMÉTICA Y MEDIA GEOMÉTRICA

En $\mathbb{R}^+$ consideramos la siguiente relación al momento de maximizar o minimizar expresiones matemáticas:

$$\underset{(\overline{MA})}{media\ aritmética} \geq \underset{(\overline{MG})}{media\ geométrica}$$

En particular para dos valores a y b $\in \mathbb{R}^+$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \times b}}$$

Si reemplazamos para: $a = x$ y $b = \frac{1}{x}$

Tenemos: $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{(x)\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$\longrightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2} \quad ; x \in \mathbb{R}^+$$

Todo valor real positivo al sumarse con su inverso siempre es mayor o igual a 2

Por ejemplo:

Halle el valor máximo de $M = \dfrac{30}{x^2+\frac{1}{x^2}+3}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{M}_{Máximo} = \frac{30}{\underbrace{\underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{2} + 3}_{Mínimo}}$$

$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

$$M_{máx} = \frac{30}{5} = 6$$

Aplicación 2

Sean x e y números reales positivos, tales que $3x+2y=60$. calcule xy máximo.

A) 160
B) 200
C) 120
D) 150

Resolución:

Nos piden el máximo valor de xy.

Del dato:

$$3x+2y=60$$

Aplicamos la relación: $\overline{MA} \geq \overline{MG}$

$$\frac{3x+2y}{2} \geq \sqrt{(3x)(2y)}$$

$$\frac{60}{2} \geq \sqrt{6(xy)}$$

$$30 \geq \sqrt{6(xy)}$$

$$900 \geq 6xy$$

$$150 \geq xy$$

$$\longrightarrow xy_{máx} = 150$$

$$\therefore El\ máximo\ valor\ de\ xy\ es\ 150$$

Aplicación 3

Halle el mínimo valor de R si $x > -1$.

$$R = \frac{x^2 + 2x + 10}{x + 1}$$

A) 8
B) 6
C) 7
D) 10

Resolución:

Nos piden el mínimo valor de R.

Del dato:

$$x > -1 \longrightarrow (x+1) > 0$$

$$R = \frac{x^2 + 2x + 10}{x + 1} = \frac{(x^2 + 2x + 1) + 9}{x + 1} = \frac{(x+1)^2 + 9}{x + 1}$$

$$R = (x+1) + \frac{9}{(x+1)}$$

Aplicamos la relación: $\overline{MA} \geq \overline{MG}$

$$\frac{(x+1) + \frac{9}{(x+1)}}{2} \geq \sqrt{\cancel{(x+1)}\left(\frac{9}{\cancel{(x+1)}}\right)}$$

$$(x+1) + \frac{9}{(x+1)} \geq 6$$

$$R \geq 6$$

$$\longrightarrow R_{mín} = 6$$

$\therefore$ *El mínimo valor de R es 6*

PRODUCTO MÁXIMO A PARTIR DE LA SUMA

Veamos el siguiente ejemplo:

Si $a + b = 10$; $a \wedge b \in \mathbb{R}^+$

a	b	
1	9	$\longrightarrow a \times b = 9$
2	8	$\longrightarrow a \times b = 16$
3	7	$\longrightarrow a \times b = 21$
4	6	$\longrightarrow a \times b = 24$
5	5	$\longrightarrow a \times b = 25$ *Máximo*

¿Cuándo $a \times b$ será máximo?

$a \times b$ será máximo cuando $a = b$

En general:

Si $a;\ b;\ c;\ \ldots;\ m$ son números reales positivos , tal que:

$\boldsymbol{a + b + c + \cdots + m = S}$ (constante)

entonces **el máximo valor** de: $\boldsymbol{a \times b \times c \times \ldots \times m}$

se obtiene cuando: $\boldsymbol{a = b = c = \ldots = m}$

Por ejemplo:

Halle el valor máximo de xyz. Si $x + y + z = 12$, *donde* $x, y, z \in R^+$.

xyz es máximo cuando: $x = y = z = 4$

$\therefore\ (xyz)_{máx} = (4)(4)(4) = 64$

SUMA MÍNIMA APARTIR DEL PRODUCTO

En general:

Si $a;\ b;\ c;\ \ldots;\ m$ son números reales positivos , tal que:

$\boldsymbol{a \times b \times c \times \cdots \times m = P}$ (constante)

entonces **el mínimo valor** de: $\boldsymbol{a + b + c + \ldots + m}$

se obtiene cuando: $\boldsymbol{a = b = c = \ldots = m}$

Por ejemplo:

Halle el valor mínimo de $x + y$. *Si* $xy = 9$, *donde* $x, y \in R^+$

$x + y$ es mínimo cuando: $x = y = 3$

$\therefore\ (x + y)_{mín} = 3 + 3 = 6$

Aplicación 4

Si $a + b + c = 7; a > 2, b > 0, c > 0,$ calcule el máximo valor de
$M = (2a - 4)(3b + 6)(5c + 10).$

A) 750
B) 900
C) 975
D) 810

Resolución:

Nos piden el máximo valor de M.

Del dato:

$$a + b + c = 7$$

$$M = (2a - 4)(3b + 6)(5c + 10)$$

Primero factorizamos:

$$M = 2\,(a - 2)\,3(b + 2)\,5(c + 2)$$

$$a - 2 + b + 2 + c + 2$$
$$= \underbrace{a + b + c}_{7} + 2 \quad = \mathbf{9}$$

Suma = **9**

$$M_{máx} = 30\,\overbrace{\underbrace{(a - 2)}_{3}\underbrace{(b + 2)}_{3}\underbrace{(c + 2)}_{3}}$$

IGUALES

$$M_{máx} = 30 \times 3 \times 3 \times 3 = 810$$

$\therefore$ *El máximo valor de M es* 810

ACADEMIA ADUNI 60 Años

Aplicación 5

Luisa compra x artículos a $S/4x$ cada uno y los vende a S/48 cada uno. ¿Cuál es la máxima ganancia que Luisa puede obtener al vender los x artículos que compró?

A) S/100
B) S/120
C) S/144
D) S/180

Resolución:

Nos piden la máxima ganancia.

Recuerda que en una transacción comercial se cumple:

Ganancia = Precio de venta – Precio de costo

Calculemos el precio de costo.

Precio de costo = $(x)(4x)$

$N.^\circ$ *de artículos* $= x$
Costo de c/artículo $= 4x$

Calculemos el precio de venta.

Precio de venta = $(x)(48)$

$N.^\circ$ *de artículos* $= x$
Venta de c/artículo $= S/48$

Obtengamos la ecuación de la ganancia.

Ganancia = $(x)(48)-(x)(4x) = (x)(48-4x) = 4(x)(12-x)$

Suma = **12**

Ganancia *máxima* = $4\,[\underbrace{(x)}_{6}\underbrace{(12-x)}_{6}] = 4(6)(6) = 144$

IGUALES

$\therefore$ *La máxima ganancia es* $S/144$

Aplicación 6

El dueño de un circo concluye, previo estudio, que cuando el precio de la entrada al circo cuesta S/20, asisten 320 personas; y cada vez que se aumenta en S/10 el precio de la entrada, asisten 20 personas menos. ¿ A qué precio debe fijar la entrada al circo para que obtenga la máxima recaudación?

A) S/80
B) S/100
C) S/90
D) S/50

Resolución:

Nos piden el precio que debe fijar la entrada al circo.
Calculamos la recaudación de la siguiente manera:

$$\boxed{\boldsymbol{Recaudación = (precio\ de\ la\ entrada) \times (N^\circ\ de\ personas\ asistente)}}$$

Del dato:

PRECIO	N° PERSONAS
20	320
$\xrightarrow{+10}$ 30	$\xrightarrow{-20}$ 300
$\xrightarrow{+10}$ 40	$\xrightarrow{-20}$ 280
⋮	⋮
$(20+10n)$	$(320-20n)$

$$Recaudacion = (20+10n)\,(320-20n) = 10(2+n)\,20(16-n)$$

$$\underset{máxima}{Recaudación} = 200[\overbrace{\underbrace{(2+n)}_{9}\,\underbrace{(16-n)}_{9}}^{\text{Suma } = 18}]$$

IGUALES

$$\Rightarrow\ 2+n=9$$
$$n=7$$

$$\therefore\ El\ precio\ \ a\ fijar\ = 20+10\,(7) = 90$$

ACADEMIA
ADUNI

60 Años

www.aduni.edu.pe