



ANUAL SAN MARCOS



www.aduni.edu.pe



Razonamiento Matemático

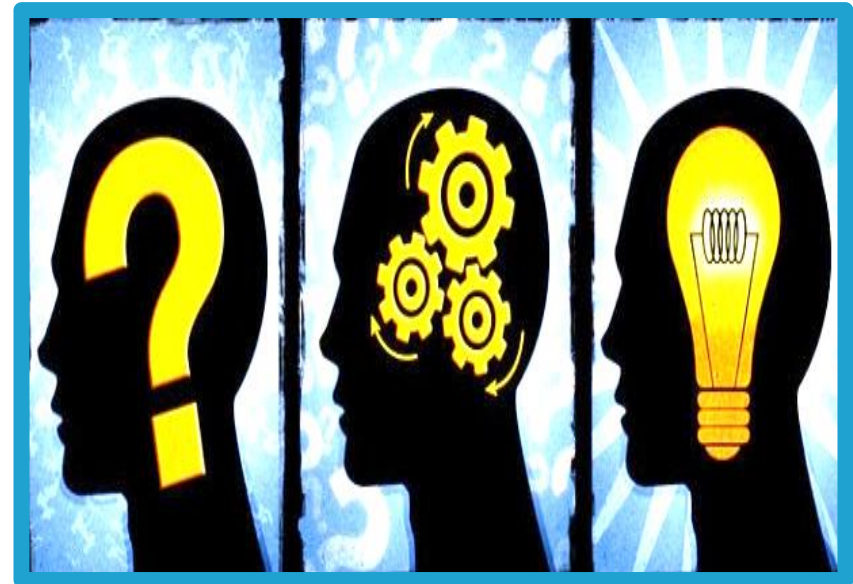
Lógica proposicional

www.aduni.edu.pe

ACADEMIA
ADUNI
ANUAL
SAN MARCOS

OBJETIVO

Comprender y aplicar correctamente los conectores lógicos, su tabla de verdad así como también las leyes del álgebra proposicional.



LÓGICA PROPOSICIONAL

Nociones
previas

Conectores
lógicos

Tablas de
verdad

Leyes del
álgebra
proposicional

Nociones previas

Lógica Proposicional

Estudia a las proposiciones y la relación existente entre ellas así como la función que tiene las variables proposicionales y los conectivos lógicos.

Enunciado

Es toda frase, oración o expresión que nos expresa una o más ideas.

Por ejemplo:

- *Voy a postula a la UNMSM*
- *¿Cómo te llamas?*
- *Atiende*
- $5 + 3 = 20$
- *Las clases inician a las 8:00 am*
- $x + 4 > 10$
- *El 2 es un número impar*

Proposición lógica

Es todo enunciado que se caracteriza por tener un único valor de verdad, es decir que puede ser verdadero (V) o falso (F) , pero no ambos a la vez.

Generalmente a las proposiciones se denota con letras minúsculas: p, q, r, s, \dots llamadas variables proposicionales.

Por ejemplo:

De los enunciados anteriores las proposiciones lógicas son:

p : *Voy a postula a la UNMSM* (V)

q : $5 + 3 = 20$ (F)

r : *Las clases inician a la 8:00 am* (V)

s : *El 2 es un número impar* (F)

OBSERVACIÓN

No son proposiciones lógicas las oraciones interrogativas, exclamativas, las ordenes ,los nombres propios, refranes.

Clases de proposiciones lógicas

Las proposiciones lógicas se clasifican en simples o Atómicas y Compuestas o Moleculares

1.- Proposiciones simples o atómicas

Son proposición que expresan una sola idea, no poseen conectores lógicos.

Por ejemplo:

p: Hoy es lunes

q: Susi es más alta que Camila

r: $2 + 3 = 6$

s: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

2.- Proposiciones compuestas o moleculares

Son proposiciones que expresa más de una idea, poseen al menos un conector lógico.

Por ejemplo:

- *Camila es ingeniera y Juana es matemática*

p

q

- *Si estudias, entonces ingresas*

r

s

- *No vas al cine*

t

Nota: las proposiciones compuestas están formadas de dos o más proposiciones simples o al negar una proposición simple.

Aplicación 1

¿Cuál o cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones lógicas?

- I. ¿A qué carrera postulas?
- II. $10 - 2 + 2020^0 \geq 6^2 - 30$
- III. El agua bulle a 120 °C.
- IV. Usa mascarilla
- V. ¡Ojalá todas las mañanas salga el sol!

- A) Solo II
- B) Solo III
- C) Solo II y III
- D) Solo III y IV

Resolución:

Nos piden los enunciados que son proposiciones Lógicas.

Analizaremos a cada uno de los enunciados:

- I. ¿A qué carrera postulas? (**no** es una proposición lógica)
- II. $10 - 2 + 2020^0 \geq 6^2 - 30$ (**si** es una proposición lógica)
- III. El agua bulle a 120 °C. (**si** es una proposición lógica)
- IV. Usa mascarilla (**no** es una proposición lógica)
- V. ¡Ojalá todas las mañanas salga el sol! (**no** es una proposición lógica)

∴ Las proposiciones lógicas son II y III.

Conectores lógicos

Son palabras que se representan por símbolos, se utilizan para negar una proposición simple o enlazan proposiciones simples.

CONECTORES LÓGICOS	EXPRESIÓN EN EL LENGUAJE NATURAL	SÍMBOLO	REPRESENTACIÓN
NEGACIÓN	No es cierto que	\sim	$\sim p$
CONJUNCIÓN	...y...	\wedge	$p \wedge q$
DISYUNCIÓN INCLUSIVA	...o...	\vee	$p \vee q$
CONDICIONAL	Si...entonces...	\rightarrow	$p \rightarrow q$
BICONDICIONAL	...Si sólo si...	\leftrightarrow	$p \leftrightarrow q$
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA	O...O...	Δ	$p \Delta q$

Ejemplos:

- No es cierto que jugaré fútbol
- Luisa trabaja y estudia
- Miguel va a leer o escribir
- Si me rio entonces estoy feliz
- Ingresaré si y sólo si estudio
- O estudio o duermo

Palabras que más se emplean para cada conector lógico:

I. NEGACIÓN

No voy a dormir

\sim p

- No es cierto que
- Nunca
- Es falso que

II. CONJUNCIÓN

Ricardo enseña y aprende

p \wedge q

- Además
- Pero
- Sin embargo
- Aunque
- También

III. DISYUNCIÓN DÉBIL O INCLUSIVA

Kiara cocina o lee

p \vee q

p o q o ambos

- Salvo que
- O sino
- Excepto que

IV. CONDICIONAL

Si estudias entonces triunfaras

p \rightarrow q

Antecedente Consecuente

- Si p, q
- p sólo si q
- p por lo tanto q
- q, si p
- q porque p
- q dado que p

V. BICONDICIONAL

Ingresaras si y sólo si estudias

p \leftrightarrow q

- Cuando y solo cuando
- Es necesario y suficiente para
- Es lo mismo que

VI. DISYUNCIÓN FUERTE O EXCLUSIVA

O Andrés camina o duerme

p Δ q

p o q no ambos

- salvo que solo
- O bien...o bien
- a menos que solamente

SIMBOLIZACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

Es la representación de las proposiciones simples mediante las variables (p, q, r, s, \dots) y de los conectivos lógicos por sus respectivos símbolos y de esta manera generar una **fórmula lógica** (esquema molecular).

Por ejemplo:

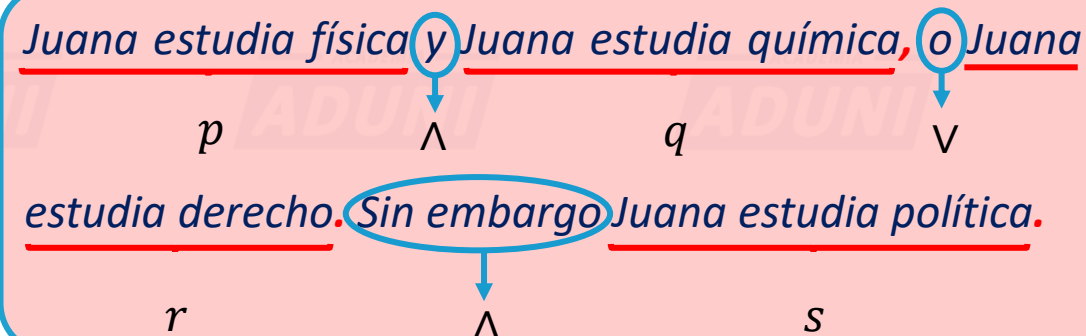
Simbolice la siguiente proposición: “Juana estudia física y química, o estudia derecho. Sin embargo estudia política.”

Para ello seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: hacer explícita la forma lógica.

Juana estudia física y Juana estudia química, o Juana estudia derecho. Sin embargo Juana estudia política.

Paso 2: Reemplazar a las proposiciones simples mediante las variables y a los conectivos lógicos por sus respectivos símbolos.



Luego se tiene: $p \wedge q, \vee r. \wedge s.$

Paso 3: Jerarquizar los conectores lógicos.

- Donde se encuentre un signo de puntuación (coma(,), punto y coma(;) y punto(.)) ahí se abre o cierra un signo de colección (paréntesis () corchetes[] y llaves { }).

- Donde este ubicado el signo de puntuación de mayor jerarquía en el texto, ahí se encuentra el conectivo principal.

Menor jerarquía ← → Mayor jerarquía
 , ; .

$p \wedge q, \vee r. \wedge s.$

$(p \wedge q) \vee r. \wedge s.$

$[(p \wedge q) \vee r] \wedge s$

∴ la representación simbólica de “Juana estudia física y química, o estudia derecho. Sin embargo estudia política” es $[(p \wedge q) \vee r] \wedge s$

OBSERVACIÓN

En cualquier **fórmula lógica** o esquema molecular el operador que tiene mayor jerarquía es:

- El operador que esta en la parte externa de los signos de colección, **por ejemplo**

$(p \wedge q) \vee r$

Mayor jerarquía

- El operador que divide a la formula en dos, **por ejemplo**

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow q)$

Mayor jerarquía

- La negación libre, **por ejemplo**

$\sim \{p \rightarrow [(q \vee p) \wedge \sim (q \Delta r)]\}$

Mayor jerarquía

Aplicación 2

Un profesor escribe las siguientes proposiciones

p : Edgar es profesor,

q : Matías es ingeniero,

r : David es médico.

Le pidió a su alumno Miguel hallar la expresión simbólica del enunciado:

“Si Matías no es ingeniero y no es cierto que Edgar sea profesor, entonces David es médico.”.

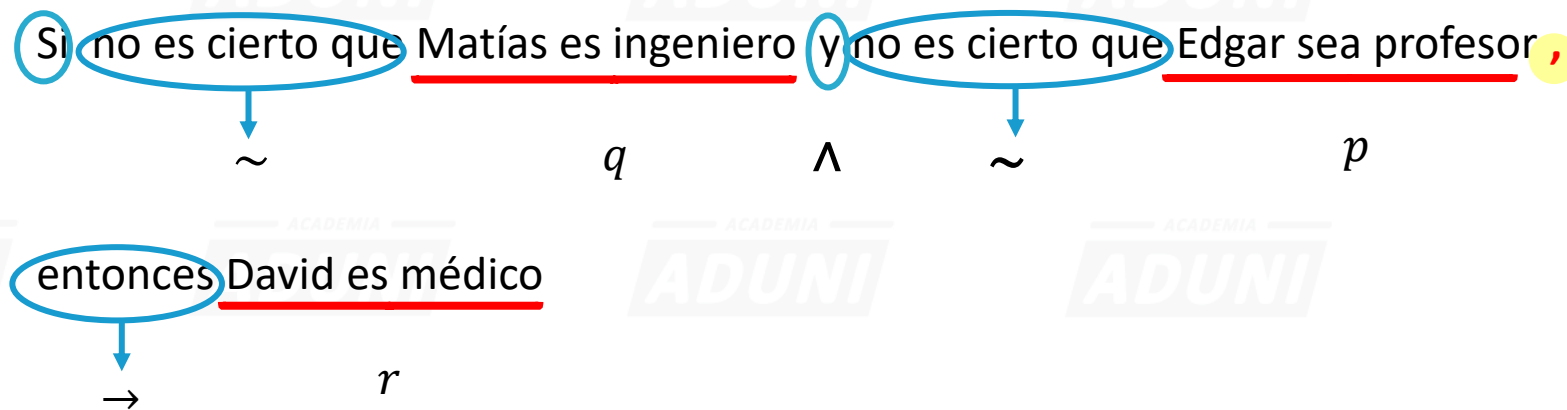
- A) $(q \wedge p) \rightarrow (p \vee r)$
- B) $(\sim q \wedge \sim p) \rightarrow (p \vee r)$
- ☒ C) $(\sim q \wedge \sim p) \rightarrow r$
- D) $(q \vee p) \rightarrow r$

Resolución:

Nos piden simbolizar el enunciado.

Paso 1:

“Si no es cierto que Matías es ingeniero y no es cierto que Edgar sea profesor, entonces David es médico.”.

Paso 2:**Paso 3:**

$$(\sim q \wedge \sim p) \rightarrow r$$

\therefore La simbolización es $(\sim q \wedge \sim p) \rightarrow r$.

Tabla de verdad

Es una estrategia que muestra ordenadamente todas las combinaciones posible de los valores de las variables de una proposición compuesta, con el fin de establecer su valor de verdad según la definición que le corresponda.

Variables proposicionales		Esquema molecular
p	q	$(p \wedge q) \rightarrow p$
Combinaciones de V y/o F de las variables		Valores de los conectivos (Matrices)

Número de combinaciones de V y/o F de las variables $= 2^n$

Donde: n = número de variables que tiene el esquema molecular

Veamos obtener las combinaciones de V y/o F de las variables.

1 variable

$$N^{\circ} \text{ de combinaciones} = 2^1 = 2$$

p	$p \wedge p$
V	
F	

Para " p " la mitad verdaderos (1) y la mitad falsos (1).

2 variables

$$N^{\circ} \text{ de combinaciones} = 2^2 = 4$$

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Para " p " la mitad verdaderos (2) y la mitad falsos (2).

Para " q " se alterna 1V, 1F, 1V, 1F

Tabla de verdad de los principales conectores lógicos

I. NEGACIÓN (\sim)

p	$\sim p$
V	F
F	V

Por ejemplo:

Halle el valor de verdad de la proposición
 “no estudie” si es verdad que estudie.

No estudie \equiv **F**
 v

II. CONJUNCIÓN (\wedge)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Solo es verdadera si sus dos componentes son verdaderas, en otro caso será falsa.

Por ejemplo:

Halle el valor de verdad de la proposición $p \wedge q$ si p es falsa.

p \wedge q \equiv **F**
 F

III. DISYUNCIÓN DÉBIL O INCLUSIVA (\vee)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Solo es falsa si sus dos componentes son falsas, en otro caso será verdadera.

Por ejemplo:

Halle el valor de verdad de la proposición $p \vee q$ si p es verdadera.

p \vee q \equiv **V**
 V

IV. CONDICIONAL (\rightarrow)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Antecedente

Consecuente

Solo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, en otro caso será verdadera.

Por ejemplo:

Halle el valor de verdad de la proposición $p \rightarrow q$ si q es verdadera.

$$p \vee \underbrace{q}_{V} \equiv V$$

V. BICONDICIONAL (\leftrightarrow)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Solo es verdadera si sus dos componentes son iguales, en otro caso será falsa.

VI. DISYUNCIÓN FUERTE O EXCLUSIVA (Δ)

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Solo es verdadera si sus dos componentes son diferentes, en otro caso será falsa.

Resumen de la tabla de verdad de los principales conectores lógicos

		Conjunción	Disyunción Inclusiva	Condicional	Bicondicional	Disyunción Exclusiva
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \Delta q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Aplicación 3

Determine el número de valores verdaderos de la matriz principal de

$$(\sim p \rightarrow q) \Delta ((\sim q \vee p) \leftrightarrow \sim p)$$

A) 4 B) 1 C) 0 D) 3

Recordar:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \Delta q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Resolución:

Nos piden el número de valores verdaderos de la matriz principal

Mayor jerarquía

p	q	(^{1º} $\sim p$ ^{2º} $\rightarrow q$)	Δ	(^{3º} ($\sim q$ ^{4º} $\vee p$) ^{6º} \leftrightarrow ^{5º} $\sim p$)
V	V	F	V	F
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

La matriz principal

\therefore El número de valores verdaderos es 4

Observación.

TAUTOLOGIA : Ocurre cuando todos los valores de la matriz principal son verdaderos.

CONTRADICCIÓN : ocurre cuando todos los valores de la matriz principal son falsos.

CONTINGENCIA: ocurre cuando los valores de la matriz principal hay por lo menos uno falso y por lo menos uno verdadero.

Aplicación 4

Los valores de verdad de las proposiciones p, q, r y s son respectivamente V, F, V y F. Obtenga los valores de verdad de

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \wedge s$$

- A) F
- B) F y V
- ☒ C) V
- D) No se puede determinar

Resolución:

Nos piden el valor de verdad de la proposición compuesta

De dato se tiene los valores de las proposiciones:

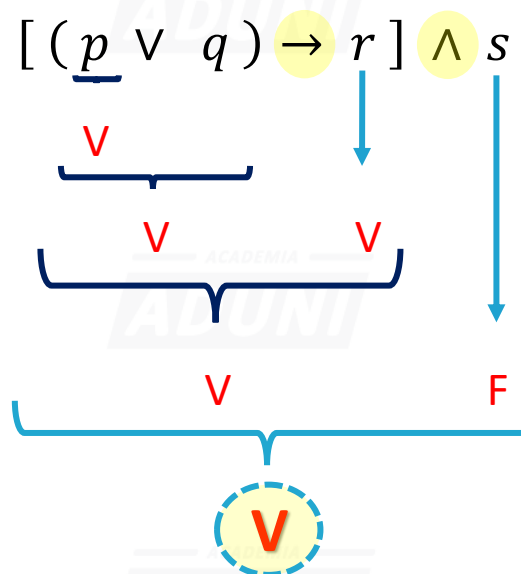
$$p \equiv V$$

$$q \equiv F$$

$$r \equiv V$$

$$s \equiv F$$

Primero resolveremos dentro de los signos de colección



Recordar:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \Delta q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

\therefore El valor de verdad de la proposición es V

Aplicación 5

Si la proposición $(p \wedge q) \rightarrow (q \Delta \sim r)$ es falso, halle el valor de verdad de p, q y r .

- A) VVF
 B) VFV
 C) VVV
 D) VFF

Resolución:

Nos piden los valores de verdad de las proposiciones p, q y r .
De dato se tiene:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 2^{\circ} & 1^{\circ} & 3^{\circ} \\
 (p \wedge q) \rightarrow (q \Delta \sim r) \equiv F \\
 \begin{array}{ccc}
 \underline{p} & \wedge & \underline{q} \\
 V & & V
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$\underbrace{(p \wedge q)}_V \rightarrow \underbrace{(q \Delta \sim r)}_F \equiv F$

$p \equiv V \quad q \equiv V \quad r \equiv F$

Recordar:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \Delta q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

\therefore El valor de verdad de p, q y r es VVF

Leyes del álgebra proposicional

Son equivalencias lógicas que nos permiten reducir esquemas moleculares complejos y expresarlos en forma más sencilla. Las demostraciones de dichas leyes se hacen construyendo la tabla de verdad en cada caso.

1. Idempotencia

$$\begin{aligned} p \wedge p &\equiv p \\ p \vee p &\equiv p \end{aligned}$$

2. Conmutativa

$$\begin{aligned} p \wedge q &\equiv q \wedge p \\ p \vee q &\equiv q \vee p \\ p \leftrightarrow q &\equiv q \leftrightarrow p \end{aligned}$$

3. Asociativa

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

4. Distributiva

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

5. Involutiva o doble negación

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

6. Del complemento

$$\begin{aligned} p \wedge \sim p &\equiv F \\ p \vee \sim p &\equiv V \end{aligned}$$

7. Identidad

$$\begin{aligned} p \wedge V &\equiv p \\ p \wedge F &\equiv F \\ p \vee V &\equiv V \\ p \vee F &\equiv p \end{aligned}$$

8. De D'Morgan

$$\begin{aligned} \sim(p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim(p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q \end{aligned}$$

9. De absorción

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\equiv p \\ p \vee (p \wedge q) &\equiv p \\ p \wedge (\sim p \vee q) &\equiv p \wedge q \\ p \vee (\sim p \wedge q) &\equiv p \vee q \end{aligned}$$

10. De la condicional


$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\equiv \sim p \vee q \\ p \rightarrow q &\equiv \sim q \rightarrow \sim p \end{aligned}$$

11. De la bicondicional

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \end{aligned}$$

Aplicación 6

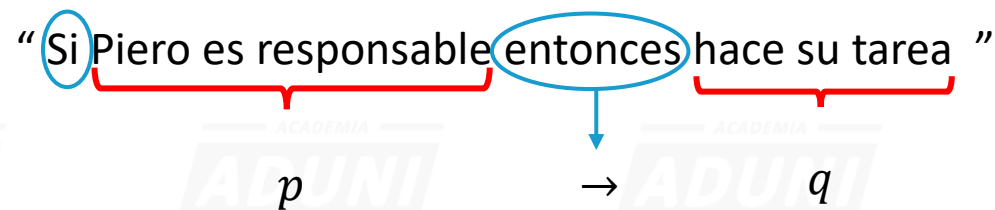
Halle la proposición equivalente a la siguiente proposición “Si Piero es responsable entonces hace su tarea”

- A) Piero hace su tarea y es responsable.
- B) Piero no hace su tarea y es responsable.
- C) Piero es responsable o hace su tarea.
-  D) Piero hace su tarea o no es responsable

Resolución:

Nos piden la proposición equivalente.

Simbolizamos para que el análisis sea más sencillo:



Entonces encontremos el equivalente a: $p \rightarrow q$

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Ley de la condicional

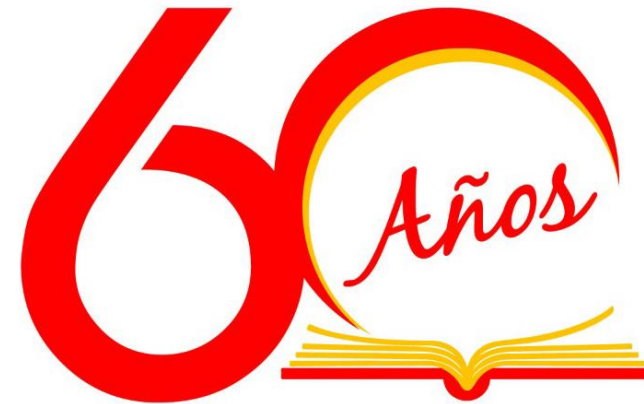
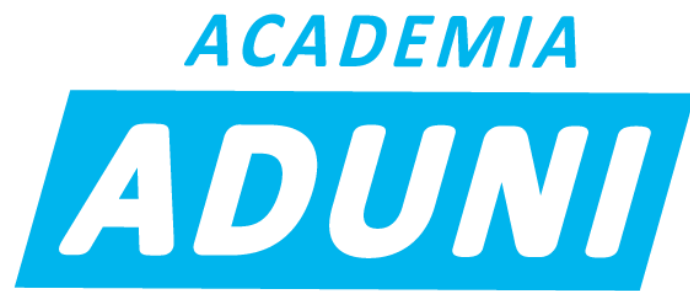
$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\equiv q \vee \sim p$$

Ley de la conmutatividad

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

\therefore La proposición equivalente es Piero hace su tarea o no es responsable



www.aduni.edu.pe

