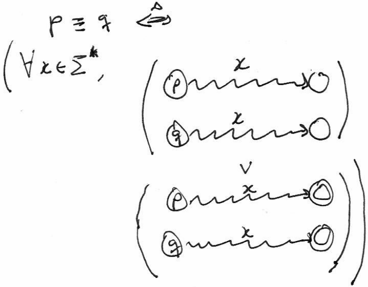
Indistiguibilidad

Definition (Estados indistinguibles)

Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD, los estados $p, q \in Q$ son indistinguibles sii: para toda cadena x, partiendo de q se llega a un estado final sii partiendo de r también se llega a un estado final.

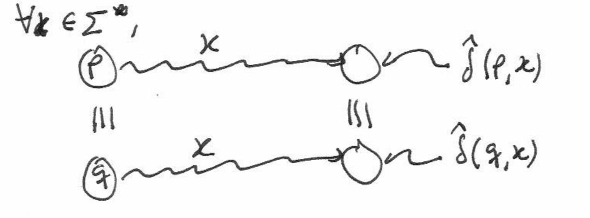
$$p \equiv q \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(p, x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, x) \in F)$$



Theorem

Pares de estados indistinguibles, al consumirse cualquier cadena x, llevan a otro par de estados indistinguibles

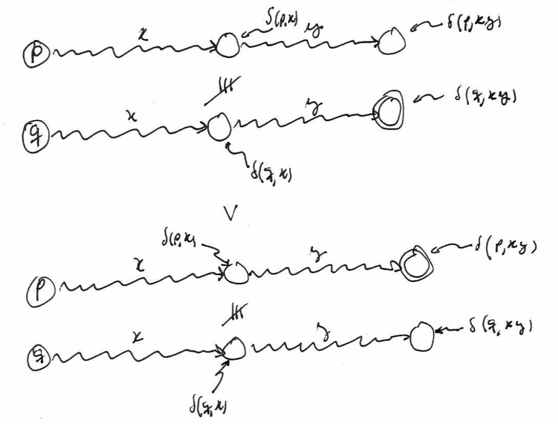
$$p \equiv q \;\Rightarrow\; \forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(p, x) \equiv \widehat{\delta}(q, x))$$



Demostración.

Supongamos que

$$\exists x \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(p,x) \not\equiv \widehat{\delta}(q,x)),$$



Demostración (Cont.)

entonces existe una cadena y que distingue $\widehat{\delta}(p,x)$ de $\widehat{\delta}(q,x)$, o sea

$$\exists y \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(p,x),y) \in F \wedge \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q,x),y) \notin F)$$

o viceversa, lo que equivale a decir que

$$\widehat{\delta}(p,xy) \in F \wedge \widehat{\delta}(q,xy) \notin F$$

o viceversa. Pero entonces $p \not\equiv q$. $\square$

Theorem

La indistinguibilidad $\equiv$ es una relación de equivalencia

- *reflexividad:*

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q,\alpha) \in F) \Rightarrow q \equiv q$$

- *simetría:*

$$q \equiv r \ \Rightarrow \forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(r,\alpha) \in F) \Leftrightarrow$$
$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(r,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q,\alpha) \in F) \Rightarrow r \equiv q$$

Theorem (cont.)

- *transitividad:*

$$q \equiv r \;\Rightarrow \forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(r, \alpha) \in F)$$
$$r \equiv s \;\Rightarrow \forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(r, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(s, \alpha) \in F)$$

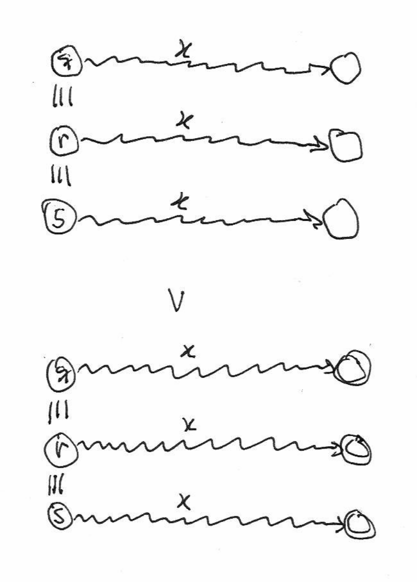
de las anteriores surge que

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(s, \alpha) \in F)$$

de donde

$$q \equiv s.$$

Theorem (cont.)



Definition

Autómata Finito Determinístico mínimo: Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ está dado por

$$\begin{aligned} Q' &= (Q\ /\ \equiv) \text{ (las clases de equiv. de } Q) \\ \delta'([q], a) &= [\delta(q, a)] \\ q_0' &= [q_0] \\ F' &= \{[q] \in Q' : q \in F\} \end{aligned}$$

Definition

Autómata Finito Determinístico mínimo: Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ está dado por

$$Q' = (Q \,/ \equiv) \text{ (las clases de equiv. de } Q\text{)}$$

$$\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$$

$$q_0' = [q_0]$$

$$F' = \{[q] \in Q' : q \in F\}$$

Definition

Autómata Finito Determinístico mínimo: Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ está dado por

$$Q' = (Q \,/ \equiv) \text{ (las clases de equiv. de } Q\text{)}$$

$$\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$$

$$q_0' = [q_0]$$

$$F' = \{[q] \in Q' : q \in F\}$$

Definition

Autómata Finito Determinístico mínimo: Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ está dado por

$$Q' = (Q \,/\, \equiv) \text{ (las clases de equiv. de } Q\text{)}$$
$$\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$$
$$q_0' = [q_0]$$
$$F' = \{[q] \in Q' : q \in F\}$$

Definition

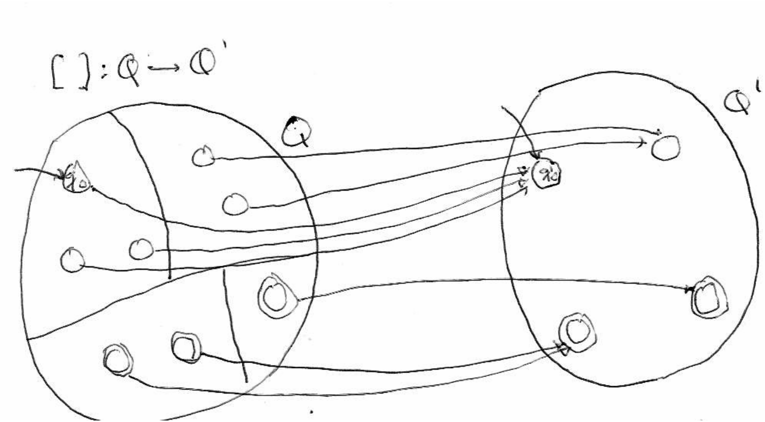
Autómata Finito Determinístico mínimo: Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ está dado por

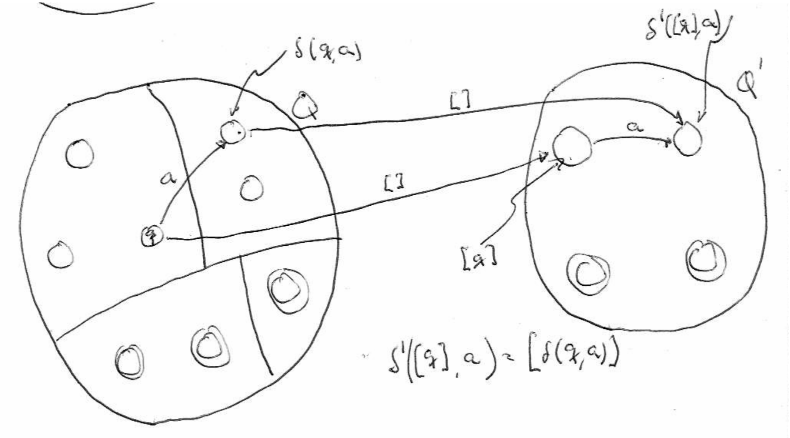
$$
\begin{aligned}
Q' &= (Q \,/\, \equiv) \text{ (las clases de equiv. de } Q\text{)} \\
\delta' ([q], a) &= [\delta (q, a)] \\
q_0' &= [q_0] \\
F' &= \{[q] \in Q' : q \in F\}
\end{aligned}
$$

Definition

Autómata Finito Determinístico mínimo: Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ está dado por

$$
\begin{aligned}
Q' &= (Q \,/ \equiv) \text{ (las clases de equiv. de } Q\text{)} \\
\delta'([q], a) &= [\delta(q, a)] \\
q_0' &= [q_0] \\
F' &= \{[q] \in Q' : q \in F\}
\end{aligned}
$$


$[\ ] : Q \to Q'$
Q
Q'
q_0
q_0'



$\delta(q,a)$
$\delta'([q],a)$
Q'
$[\,]$
$[\,]$
a
a
q
$[q]$
$\delta'([q],a) = [\delta(q,a)]$

Theorem

$$\widehat{\delta}(q,x) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q],x) = [r]$$

Demostración.

Demostración por inducción en $|\alpha|$
caso base: $|\alpha| = 0$

$$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q \text{ (por def. } \widehat{\delta})$$

$$\widehat{\delta'}([q],\lambda) = [q] \text{ (por def. } \widehat{\delta'})$$

de estas dos se deduce que

$$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q \Rightarrow \widehat{\delta'}([q],\lambda) = [q]$$

Theorem

$$\widehat{\delta}(q, x) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [r]$$

Demostración.

Demostración por inducción en $|\alpha|$
caso base: $|\alpha| = 0$

$$\widehat{\delta}(q, \lambda) = q \text{ (por def. } \widehat{\delta})$$

$$\widehat{\delta'}([q], \lambda) = [q] \text{ (por def. } \widehat{\delta'})$$

de estas dos se deduce que

$$\widehat{\delta}(q, \lambda) = q \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], \lambda) = [q]$$

Theorem

$$\widehat{\delta}(q, x) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [r]$$

Demostración.

Demostración por inducción en $|\alpha|$
caso base: $|\alpha| = 0$

$$\widehat{\delta}(q, \lambda) = q \text{ (por def. } \widehat{\delta})$$

$$\widehat{\delta'}([q], \lambda) = [q] \text{ (por def. } \widehat{\delta'})$$

de estas dos se deduce que

$$\widehat{\delta}(q, \lambda) = q \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], \lambda) = [q]$$

Theorem

$$\widehat{\delta}(q,x) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q]\,,x) = [r]$$

Demostración.

Demostración por inducción en $|\alpha|$
caso base: $|\alpha| = 0$

$$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q \text{ (por def. } \widehat{\delta}\text{)}$$

$$\widehat{\delta'}\left([q]\,,\lambda\right) = [q] \text{ (por def. } \widehat{\delta'}\text{)}$$

de estas dos se deduce que

$$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q \Rightarrow \widehat{\delta'}([q]\,,\lambda) = [q]$$

Theorem

$$\widehat{\delta}(q,x) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q]\,,x) = [r]$$

Demostración.

Demostración por inducción en $|\alpha|$
caso base: $|\alpha| = 0$

$$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q \text{ (por def. } \widehat{\delta}\text{)}$$

$$\widehat{\delta'}\left([q]\,,\lambda\right) = [q] \text{ (por def. } \widehat{\delta'}\text{)}$$

de estas dos se deduce que

$$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q \Rightarrow \widehat{\delta'}([q]\,,\lambda) = [q]$$

□

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.

Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.

Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.

Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.

Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

$\square$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n+1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.

Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.

Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.

Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.

Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

□

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n+1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n+1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.

Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.

Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.

Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.

Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n+1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$, y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n+1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

Demostración.

paso inductivo: $|x| = n + 1$, con $n \geq 0$. Tomemos la cadena xa con $|x| = n$.
Queremos probar que $\widehat{\delta}(q, xa) = r \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], xa) = [r]$.
Por hipótesis inductiva tenemos que $\widehat{\delta}(q, x) = p \Rightarrow \widehat{\delta'}([q], x) = [p]$.
Entonces:

$$\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) = \delta(p, a) = r \Rightarrow \delta'([p], a) = [r],$$

donde la implicación proviene de la definición de δ'.
Utilizando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $\widehat{\delta'}([q], x) = [p]$,y por lo tanto, reemplazando $[p]$ en el consecuente de esa implicación obtenemos

$$\delta'([p], a) = \delta'(\widehat{\delta'}([q], x), a) = \widehat{\delta'}([q], xa) = [r].$$

□

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

$$p \overset{k}{\equiv} q \triangleq \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p, x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q, x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$
3. $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ si $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$
4. $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \overset{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta(r, a)\right)$
5. $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

$$p \overset{k}{\equiv} q \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p,x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q,x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\overset{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

$$p \overset{k}{\equiv} q \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p, x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q, x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\overset{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$
3. $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ *si* $Q - F \neq \emptyset$ *y* $F \neq \emptyset$
4. $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \overset{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta\,(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta\,(r, a)\right)$
5. $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

$$p \overset{k}{\equiv} q \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p,x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q,x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\overset{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$
3. $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ *si* $Q - F \neq \emptyset$ *y* $F \neq \emptyset$
4. $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \overset{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta\,(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta\,(r,a)\right)$
5. $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

$$p \overset{k}{\equiv} q \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p, x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q, x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\overset{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$
3. $\left(Q/ \overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ *si* $Q - F \neq \emptyset$ *y* $F \neq \emptyset$
4. $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \overset{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta\,(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta\,(r, a)\right)$
5. $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\stackrel{k}{\equiv}$)

$$p \stackrel{k}{\equiv} q \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p,x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q,x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\stackrel{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*
2. $\stackrel{k+1}{\equiv} \subseteq \stackrel{k}{\equiv}$
3. $\left(Q/\stackrel{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ *si* $Q - F \neq \emptyset$ *y* $F \neq \emptyset$
4. $p \stackrel{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \stackrel{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta\,(p,a) \stackrel{k}{\equiv} \delta\,(r,a)\right)$
5. $\left(\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\stackrel{k+n}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

$$p \overset{k}{\equiv} q \triangleq \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}(p,x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q,x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\overset{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$
3. $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q-F, F\}$ *si* $Q - F \neq \emptyset$ *y* $F \neq \emptyset$
4. $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \overset{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)\right)$
5. $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

Definition (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

$$p \overset{k}{\equiv} q \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}(p, x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, x) \in F\right)$$

Theorem

Propiedades de la indistinguibilidad de orden k

1. $\overset{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$
3. $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ *si* $Q - F \neq \emptyset$ *y* $F \neq \emptyset$
4. $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \overset{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta(r, a)\right)$
5. $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

Demostración.

$\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia: idem $\equiv$. $\square$

Demostración.

$\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$, o sea, $k+1$ indistinguibilidad $\Rightarrow$ k indistinguibilidad

$$\left.\begin{array}{r} \forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k+1) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p,x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q,x) \in F\right) \\ (|x| \leq k) \Rightarrow (|x| \leq k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\forall x \in \Sigma^*, (|x| \leq k) \Rightarrow \left(\widehat{\delta}\,(p,x) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q,x) \in F\right)$$

$\square$

Demostración.

$\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ si $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$: Surge de la definición de $\overset{k}{\equiv}$ con $k = 0$. □

Demostración.

$p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(p \overset{0}{\equiv} r\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta\left(p, a\right) \overset{k}{\equiv} \delta\left(r, a\right)\right)$

$\Rightarrow$) Ya se vió que $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$, lo que equivale a decir que $p \overset{k+1}{\equiv} r \Rightarrow p \overset{0}{\equiv} r$

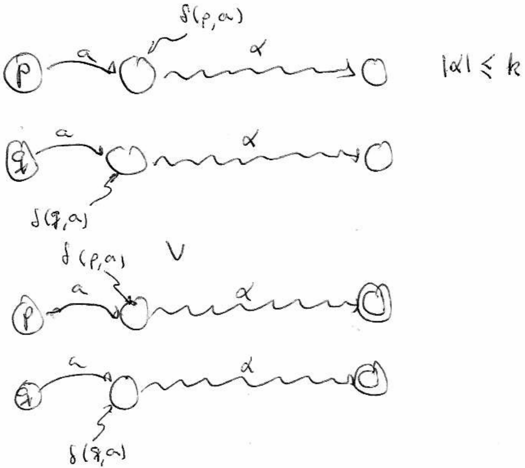
Por otro lado, si no fuera cierto que $\forall a \in \Sigma, \delta\left(p, a\right) \overset{k}{\equiv} \delta\left(r, a\right)$, entonces

$$\exists a \in \Sigma, \exists \alpha \in \Sigma^*,$$

$$(|\alpha| \leq k) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(p, a\right), \alpha\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(r, a\right), \alpha\right) \notin F\right)$$

o viceversa

□



δ(p,a)
a
α
|α| ≤ k
a
α
δ(q,a)
δ(p,a)
V
a
α
a
α
δ(q,a)

Demostración.

pero entonces $p \overset{k+1}{\not\equiv} r$, ya que $|a\alpha| \leq k+1$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $p \overset{k+1}{\not\equiv} q$. Entonces, o $p \overset{0}{\not\equiv} q$, o $\exists a\alpha$, con $|a\alpha| \leq k+1$ que distingue p de q, o sea que

$$\left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(p,a\right),\alpha\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(q,a\right),\alpha\right) \notin F\right) \text{ o viceversa}$$

pero entonces $\delta\left(p,a\right) \overset{k}{\not\equiv} \delta\left(q,a\right)$. $\square$

Demostración.

$\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

caso base: $n = 0$ $\quad \overset{k}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$

paso inductivo: suponemos que es cierto para n

$$\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right),$$

y tratamos de probarlo para $n+1$, o sea, queremos probar que

$$\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right). \tag{1}$$

$\square$

Demostración.

Sabemos que $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Leftrightarrow \forall q, p \in Q, \left(q \overset{k}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k+n+1}{\equiv} r\right)$, por lo que, la fórmula (1) puede reescribirse como

$$\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall q, p \in Q, \left(q \overset{k}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k+n+1}{\equiv} r\right), \tag{2}$$

la cual puede demostrarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q \overset{k+n+1}{\equiv} r &\Leftrightarrow \underbrace{\left(q \overset{0}{\equiv} r\right)}_{\Updownarrow} \wedge \underbrace{\left(\forall a \in \Sigma,\, \delta(q,a) \overset{k+n}{\equiv} \delta(r,a)\right)}_{\Updownarrow} \\ &\Leftrightarrow \overbrace{\left(q \overset{0}{\equiv} r\right)} \wedge \overbrace{\left(\forall a \in \Sigma,\, \delta(q,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)\right)} \\ &\Leftrightarrow q \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r, \end{aligned}$$

Algorithm 1 Algoritmo de minimización de un AFD

```
P ← {Q − F, F} /* con los elementos de Q − F y F sin marcar */
repeat
    P′ ← ∅
    for each X ∈ P do /* particiona cada X ∈ P */
        while (∃e ∈ X) ∧ (¬marked(e, X)) do
            X₁ ← {e}        /* con e sin marcar */
            mark(e, X)       /* marcar e en X */
            for each e′ ∈ X do
                if (¬marked(e′, X) ∧ (∀a ∈ Σ, [δ(e, a)] = [δ(e′, a)]) then
                    X₁ ← X₁ ∪ {e′}
                    mark(e′, X)       /* marcar e′ en X */
                end if
            end for
            P′ ← P′ ∪ {X₁}
        end while
    end for
    if (P′ ≠ P) then /* las partic. actual y anterior ¿son diferentes? */
        stop ← false /* si son diferentes → seguir */
        P ← P′
    else
        stop ← true /* si son iguales → finalizar */
    end if
until stop
```

Lemma

Sean M y M' un par de AFDs, donde $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_0, F >$ y M no posee estados inaccesibles.Si todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en M conducen también a estados diferentes en M',entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M.

$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \Rightarrow \widehat{\delta'}\left(q'_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta'}\left(q'_0, \beta\right)\right) \Rightarrow |Q| \leq \left|Q'\right|$$

Lemma

Sean M y M' un par de AFDs, donde $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_0, F >$ y M no posee estados inaccesibles. *Si todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en M conducen también a estados diferentes en M',entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M.*

$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \Rightarrow \widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, \beta)\right)$$
$$\Rightarrow |Q| \leq |Q'|$$

Lemma

Sean M y M' un par de AFDs, donde $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_0, F >$ y M no posee estados inaccesibles.Si todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en M conducen también a estados diferentes en M', entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M.

$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \Rightarrow \widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, \beta)\right)$$

$$\Rightarrow |Q| \leq |Q'|$$

Lemma

Sean M y M' un par de AFDs, donde $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_0, F >$ y M no posee estados inaccesibles.Si todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en M conducen también a estados diferentes en M',entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M.

$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \Rightarrow \widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, \beta)\right)$$
$$\Rightarrow |Q| \leq |Q'|$$

Lemma

Sean M y M' un par de AFDs, donde $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F >$ y M no posee estados inaccesibles.Si todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en M conducen también a estados diferentes en M',entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M.

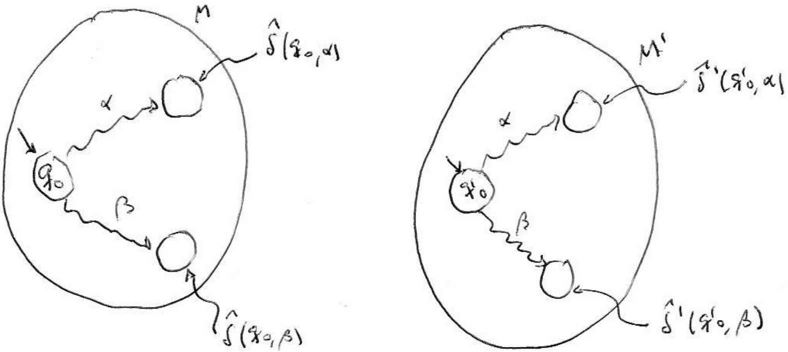
$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \widehat{\delta}\,(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}\,(q_0, \beta) \Rightarrow \widehat{\delta'}\,(q_0', \alpha) \neq \widehat{\delta'}\,(q_0', \beta)\right)$$

$$\Rightarrow |Q| \leq |Q'|$$

Lemma

Sean M y M' un par de AFDs, donde $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F >$ y M no posee estados inaccesibles.Si todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en M conducen también a estados diferentes en M',entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M.

$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \widehat{\delta}\,(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}\,(q_0, \beta) \Rightarrow \widehat{\delta'}\,\left(q_0', \alpha\right) \neq \widehat{\delta'}\,\left(q_0', \beta\right)\right) \Rightarrow |Q| \leq \left|Q'\right|$$



si $\hat{\delta}(q_0,\alpha) \neq \hat{\delta}(q_0,\beta) \Rightarrow \hat{\delta}'(q'_0,\alpha) \neq \hat{\delta}'(q'_0,\beta)$

entonces $|Q| \leq |Q'|$

Demostración.

Se trata de encontrar una función inyectiva de Q en Q'. La existencia de tal función implica que $|Q'| \geq |Q|$. Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min\left\{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q\right\}$$

donde se supone una relación de orden en Σ^* dada por la longitud, para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud.Puede definirse entonces una función $f : Q \to Q'$ mediante

$$f(q) = \widehat{\delta}'\left(q_0', g(q)\right).$$

$\square$

Demostración.

Se trata de encontrar una función inyectiva de Q en Q'. La existencia de tal función implica que $|Q'| \geq |Q|$. Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \text{mín}\left\{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q\right\}$$

donde se supone una relación de orden en Σ^* dada por la longitud, para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud.Puede definirse entonces una función $f : Q \to Q'$ mediante

$$f(q) = \widehat{\delta}'\left(q'_0, g(q)\right).$$

$\square$

Demostración.

Se trata de encontrar una función inyectiva de Q en Q'. La existencia de tal función implica que $|Q'| \geq |Q|$. Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \text{mín}\left\{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q\right\}$$

donde se supone una relación de orden en Σ^* dada por la longitud, para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud. Puede definirse entonces una función $f : Q \to Q'$ mediante

$$f(q) = \widehat{\delta'}\left(q'_0, g(q)\right).$$

$\square$

Demostración.

Se trata de encontrar una función inyectiva de Q en Q'. La existencia de tal función implica que $|Q'| \geq |Q|$. Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \text{mín}\left\{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q\right\}$$

donde se supone una relación de orden en Σ^* dada por la longitud, para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud.Puede definirse entonces una función $f : Q \to Q'$ mediante

$$f(q) = \widehat{\delta'}\left(q'_0, g(q)\right).$$

□

Demostración.

Se trata de encontrar una función inyectiva de Q en Q'. La existencia de tal función implica que $|Q'| \geq |Q|$. Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \text{mín}\left\{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q\right\}$$

donde se supone una relación de orden en Σ^* dada por la longitud, para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud. Puede definirse entonces una función $f : Q \to Q'$ mediante

$$f(q) = \widehat{\delta}'\left(q_0', g(q)\right).$$

□

Demostración.

Se trata de encontrar una función inyectiva de Q en Q'. La existencia de tal función implica que $|Q'| \geq |Q|$. Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g\left(q\right) = \text{mín}\left\{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}\left(q_0, \alpha\right) = q\right\}$$

donde se supone una relación de orden en Σ^* dada por la longitud, para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud.Puede definirse entonces una función $f : Q \to Q'$ mediante

$$f\left(q\right) = \widehat{\delta'}\left(q'_0, g\left(q\right)\right).$$

$\square$

Demostración.

Como para cualquier par de estados diferentes $p, q \in Q$ es cierto que

$$\widehat{\delta}\left(q_0, g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, g\left(q\right)\right)$$

entonces es cierto también que

$$\widehat{\delta}'\left(q_0', g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta}'\left(q_0', g\left(q\right)\right),$$

pero esto equivale a decir que

$$f\left(p\right) \neq f\left(q\right),$$

de esto último surge que la función $f : Q \to Q'$ así definida es inyectiva, y por lo tanto

$$\left|Q\right| \leq \left|Q'\right|.$$

□

Demostración.

Como para cualquier par de estados diferentes $p, q \in Q$ es cierto que

$$\widehat{\delta}\left(q_0, g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, g\left(q\right)\right)$$

entonces es cierto también que

$$\widehat{\delta'}\left(q'_0, g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta'}\left(q'_0, g\left(q\right)\right),$$

pero esto equivale a decir que

$$f\left(p\right) \neq f\left(q\right),$$

de esto último surge que la función $f : Q \to Q'$ así definida es inyectiva, y por lo tanto

$$\left|Q\right| \leq \left|Q'\right|.$$

$\square$

Demostración.

Como para cualquier par de estados diferentes $p, q \in Q$ es cierto que

$$\widehat{\delta}\left(q_0, g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, g\left(q\right)\right)$$

entonces es cierto también que

$$\widehat{\delta'}\left(q'_0, g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta'}\left(q'_0, g\left(q\right)\right),$$

pero esto equivale a decir que

$$f\left(p\right) \neq f\left(q\right),$$

de esto último surge que la función $f : Q \rightarrow Q'$ así definida es inyectiva, y por lo tanto

$$\left|Q\right| \leq \left|Q'\right|.$$

$\square$

Demostración.

Como para cualquier par de estados diferentes $p, q \in Q$ es cierto que

$$\widehat{\delta}\left(q_0, g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, g\left(q\right)\right)$$

entonces es cierto también que

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta'}\left(q_0', g\left(q\right)\right),$$

pero esto equivale a decir que

$$f\left(p\right) \neq f\left(q\right),$$

de esto último surge que la función $f : Q \to Q'$ así definida es inyectiva, y por lo tanto

$$\left|Q\right| \leq \left|Q'\right|.$$

$\square$

Demostración.

Como para cualquier par de estados diferentes $p, q \in Q$ es cierto que

$$\widehat{\delta}\left(q_0, g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, g\left(q\right)\right)$$

entonces es cierto también que

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', g\left(p\right)\right) \neq \widehat{\delta'}\left(q_0', g\left(q\right)\right),$$

pero esto equivale a decir que

$$f\left(p\right) \neq f\left(q\right),$$

de esto último surge que la función $f : Q \to Q'$ así definida es inyectiva, y por lo tanto

$$\left|Q\right| \leq \left|Q'\right|.$$

$\square$

Lemma

Sea M_R el autómata reducido correspondiente al autómata $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. Entonces, cualquier autómata M' que reconozca el mismo lenguaje no poseerá menos estados que el autómata reducido M_R, o sea,

$$\forall M', L(M') = L(M_R) \Rightarrow |Q'| \geq |Q_R|$$

Lemma

Sea M_R *el autómata reducido correspondiente al autómata* $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. *Entonces, cualquier autómata* M' *que reconozca el mismo lenguaje no poseerá menos estados que el autómata reducido* M_R, *o sea,*

$$\forall M', L(M') = L(M_R) \Rightarrow |Q'| \geq |Q_R|$$

Lemma

Sea M_R el autómata reducido correspondiente al autómata $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. Entonces, cualquier autómata M' que reconozca el mismo lenguaje no poseerá menos estados que el autómata reducido M_R, o sea,

$$\forall M', L(M') = L(M_R) \Rightarrow |Q'| \geq |Q_R|$$

Lemma

Sea M_R el autómata reducido correspondiente al autómata $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. Entonces, cualquier autómata M' que reconozca el mismo lenguaje no poseerá menos estados que el autómata reducido M_R, o sea,

$$\forall M', L\left(M'\right) = L\left(M_R\right) \Rightarrow \left|Q'\right| \geq \left|Q_R\right|$$

Demostración.

por el absurdo: Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_R|$, entonces según el lema anterior deben existir dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

pero entonces, como $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata reducido M_R entonces $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F \text{ o viceversa,}$$

de donde

$$\alpha\gamma \in L\left(M_R\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin L\left(M_R\right).$$

$\square$

Demostración.

por el absurdo: Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_R|$, entonces según el lema anterior deben existir dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

pero entonces, como $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata reducido M_R entonces $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F \text{ o viceversa,}$$

de donde

$$\alpha\gamma \in L\left(M_R\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin L\left(M_R\right).$$

□

Demostración.

por el absurdo: Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_R|$, entonces según el lema anterior deben existir dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

pero entonces, como $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata reducido M_R entonces $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F \text{ o viceversa,}$$

de donde

$$\alpha\gamma \in L\left(M_R\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin L\left(M_R\right).$$

$\square$

Demostración.

por el absurdo: Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_R|$, entonces según el lema anterior deben existir dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

pero entonces, como $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata reducido M_R entonces $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F \text{ o viceversa,}$$

de donde

$$\alpha\gamma \in L\left(M_R\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin L\left(M_R\right).$$

$\square$

Demostración.

por el absurdo: Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_R|$, entonces según el lema anterior deben existir dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

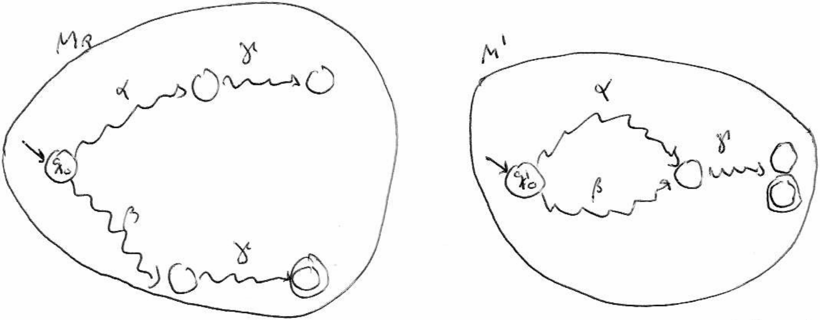
pero entonces, como $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata reducido M_R entonces $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_R}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_R}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F \text{ o viceversa,}$$

de donde

$$\alpha\gamma \in L\left(M_R\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin L\left(M_R\right).$$

$\square$



o viceversa

$$\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M_R) \iff \beta\gamma \notin \mathcal{L}(M_R)$$
$$\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M') \iff \beta\gamma \in \mathcal{L}(M')$$

$$\mathcal{L}(M_R) \neq \mathcal{L}(M')$$

Demostración.

Por otro lado, como $\widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) = \widehat{\delta'}(q'_0, \beta)$, es obvio que

$$\widehat{\delta'}\left(q'_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta'}\left(q'_0, \beta\gamma\right) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

de estas dos se infiere que

$$\alpha\gamma \in L\left(M'\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \in L\left(M'\right).$$

Por lo tanto $L(M_R) \neq L(M')$, lo que contradice la hipótesis $L(M') = L(M_R)$. $\square$

Demostración.

Por otro lado, como $\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)$, es obvio que

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\gamma\right) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

de estas dos se infiere que

$$\alpha\gamma \in L\left(M'\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \in L\left(M'\right).$$

Por lo tanto $L\left(M_R\right) \neq L\left(M'\right)$, lo que contradice la hipótesis $L\left(M'\right) = L\left(M_R\right)$. $\square$

Demostración.

Por otro lado, como $\widehat{\delta'}(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}(q_0', \beta)$, es obvio que

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\gamma\right) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

de estas dos se infiere que

$$\alpha\gamma \in L\left(M'\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \in L\left(M'\right).$$

Por lo tanto $L(M_R) \neq L(M')$, lo que contradice la hipótesis $L(M') = L(M_R)$. $\square$

Demostración.

Por otro lado, como $\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)$, es obvio que

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\gamma\right) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

de estas dos se infiere que

$$\alpha\gamma \in L\left(M'\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \in L\left(M'\right).$$

Por lo tanto $L\left(M_R\right) \neq L\left(M'\right)$, lo que contradice la hipótesis $L\left(M'\right) = L\left(M_R\right)$. $\square$

Demostración.

Por otro lado, como $\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)$, es obvio que

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\gamma\right) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

de estas dos se infiere que

$$\alpha\gamma \in L\left(M'\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \in L\left(M'\right).$$

Por lo tanto $L\left(M_R\right) \neq L\left(M'\right)$, lo que contradice la hipótesis $L\left(M'\right) = L\left(M_R\right)$. □