Theorem (Teorema)

Dada una gramática regular $G = \langle V_n, V_T, P, S \rangle$ *existe un AFND* $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *equivalente.*

Demostración.

Definamos M de la siguiente manera:

- $Q = V_N \cup \{q_f\}$, para mayor claridad, llamaremos q_A al estado correspondiente al no terminal A
- $\Sigma = V_T$
- $q_0 = q_S$
- $q_B \in \delta(q_A, a) \Leftrightarrow A \to aB \in P$
- $q_f \in \delta(q_A, a) \Leftrightarrow A \to a \in P$
- $q_A \in F \Leftrightarrow A \to \lambda \in P$
- $q_f \in F$

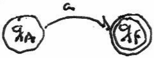
$\square$

- $V_N = \{A, B, C, \ldots\}$

  $Q = \{q_A, q_B, q_C, \ldots\} \cup \{q_f\}$

- 

- $A \to aB$ 

  $A \to a$ 

  $A \to \lambda$ 

- $q_f \in F$ 

- $\Sigma = V_T$

Demostración (cont.)

Como paso preliminar, demostremos que:

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} wB \Leftrightarrow q_B \in \delta\left(q_A, w\right)$$

Para $w = \lambda$, es cierto que $A \stackrel{*}{\Rightarrow} A$, y que $q_A \in \delta\left(q_A, \lambda\right)$, por lo tanto

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} A \Leftrightarrow q_A \in \delta\left(q_A, \lambda\right).$$

Para $w = \alpha a$ tenemos que

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha aB \Leftrightarrow \exists C \in V_N, A \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha C \wedge C \to aB$$

$\Leftrightarrow \exists q_C \in Q, q_C \in \delta\left(q_A, \alpha\right) \wedge q_B \in \delta\left(q_C, a\right)$ por h.i. y por la def. de M

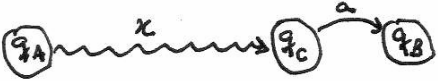
$$\Leftrightarrow q_B \in \delta\left(\delta\left(q_A, \alpha\right), a\right)$$

$$\Leftrightarrow q_B \in \delta\left(q_A, \alpha a\right)$$

$\square$

qpq

$A \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow xC \Rightarrow xaB \iff$



h.i.

$A \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow xC \iff$

por def. de M

$C \to aB \iff$

Demostración (cont.)

Utilizando lo anterior tenemos que

$$wa \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} wa$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists A \in V_N, S \overset{*}{\Rightarrow} wA \wedge A \rightarrow a \in P\right) \vee$$

$\left(\exists B \in V_N, S \overset{*}{\Rightarrow} waB \wedge B \rightarrow \lambda \in P\right)$ porque son las dos únicas maneras de lograr una f.s. formada sólo por terminales

$\Leftrightarrow (\exists q_A \in Q, q_A \in \delta(q_S, w) \wedge q_f \in \delta(q_A, a)) \vee$
$(\exists q_B \in Q, q_B \in \delta(q_S, wa) \wedge q_B \in F)$ por lo demostrado en el paso preliminar, y por la definición del AFND equivalente

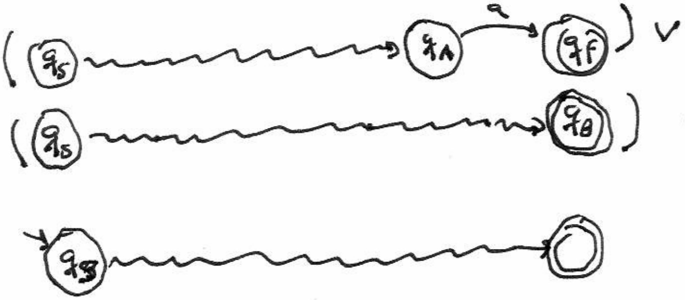
$$\Leftrightarrow q_f \in \delta(q_S, wa) \vee (\exists q_B \in Q, q_B \in \delta(q_S, wa) \wedge q_B \in F)$$

$$\Leftrightarrow wa \in \mathcal{L}(M)$$

$S \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow wa \quad \iff$

$(S \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow wA \wedge A \to a) \vee$

$(S \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow waB \wedge B \to \lambda) \iff$



Demostración (cont.)

Si $\lambda \in L$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathcal{L}(G) &\Leftrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} \lambda \\ &\Leftrightarrow S \rightarrow \lambda \in P \\ &\Leftrightarrow q_S \in F \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{L}(M) \end{aligned}$$

$\square$

Theorem (Teorema)

Dado un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ *existe una gramática regular* $G = \langle V_n, V_T, P, S\rangle$ *equivalente.*

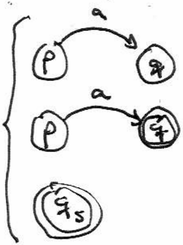
Demostración.

- $V_N = Q$, para mayor claridad, llamaremos A_p al no terminal correspondiente al estado $p \in Q$.
- $V_T = \Sigma$
- $S = A_{q_0}$
- $A_p \to aA_q \in P \Leftrightarrow \delta\left(p, a\right) = q$
- $A_p \to a \in P \Leftrightarrow \delta\left(p, a\right) = q \in F$
- $S \to \lambda \in P \Leftrightarrow q_0 \in F$

$\square$

- $V_T = \Sigma$
- $S = A_{q_0}$
- $Q = \{p, q, r, \ldots\}$

  $V_N = \{A_p, A_q, A_r, \ldots\}$
-
$$\left.\begin{array}{l} A_p \to a A_q \\ A_p \to a \\ S \to \lambda \end{array}\right\} \Leftarrow$$



Demostración (cont.)

Como paso preliminar, demostremos que:

$$\delta(p, w) = q \Leftrightarrow A_p \stackrel{*}{\Rightarrow} wA_q$$

, Para $w = \lambda$, es cierto que $\delta(p, \lambda) = p$ y que $A_p \stackrel{*}{\Rightarrow} A_p$, por lo tanto

$$\delta(p, \lambda) = p \Leftrightarrow A_p \stackrel{*}{\Rightarrow} A_p,$$

Para $w = \alpha a$ tenemos que

$$\delta(p, \alpha a) = q \Leftrightarrow \exists r \in Q, \delta(p, \alpha) = r \wedge \delta(r, a) = q$$

$\Leftrightarrow \exists A_r, A_p \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha A_r \wedge A_r \to aA_q \in P$ por h.i. y por la def. de G

$$\Leftrightarrow A_p \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha a A_q$$

□

qpsq

$$p \overset{x}{\rightsquigarrow} r \xrightarrow{a} q \iff$$

$$A_p \Rightarrow \cdots \Rightarrow xA_r \Rightarrow xaA_q$$

h.i.

$$p \overset{x}{\rightsquigarrow} r \iff$$

$$A_p \Rightarrow \cdots \Rightarrow xA_r$$

por def. de G

$$r \xrightarrow{a} q \iff$$

$$A_r \to aA_q$$

Demostración (cont.)

Utilizando lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
wa \in \mathcal{L}(M) &\Leftrightarrow \delta(q_0, wa) \in F \\
&\Leftrightarrow \exists p \in Q, \delta(q_0, w) = p \wedge \delta(p, a) \in F \\
&\Leftrightarrow \exists A_p, A_{q_0} \stackrel{*}{\Rightarrow} wA_p \wedge A_p \rightarrow a \in P \\
&\Leftrightarrow A_{q_0} \stackrel{*}{\Rightarrow} wa \Leftrightarrow wa \in \mathcal{L}(G)
\end{aligned}$$

Si $\lambda \in \mathcal{L}(M)$

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathcal{L}(M) &\Leftrightarrow q_0 \in F \\
&\Leftrightarrow S \rightarrow \lambda \in P \\
&\Leftrightarrow S \stackrel{*}{\Rightarrow} \lambda \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{L}(G)
\end{aligned}$$

$\square$

$\Longleftrightarrow$

$A_{q_0} \Rightarrow \cdots \Rightarrow wA_p \Rightarrow wa$