Lema de Pumping y propiedades de lenguajes regulares

Sebastián Taboh

6 de mayo de 2020

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?
  - damos un AFD o un AFND o un λ-AFND que lo genere

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?
  - damos un AFD o un AFND o un λ-AFND que lo genere
  - damos una expresión regular que lo genere

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?
  - damos un AFD o un AFND o un λ-AFND que lo genere
  - damos una expresión regular que lo genere
  - damos una gramática regular que lo genere

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?
  - damos un AFD o un AFND o un λ-AFND que lo genere
  - damos una expresión regular que lo genere
  - damos una gramática regular que lo genere
  - usamos propiedades de los lenguajes regulares

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?
  - damos un AFD o un AFND o un λ-AFND que lo genere
  - damos una expresión regular que lo genere
  - damos una gramática regular que lo genere
  - usamos propiedades de los lenguajes regulares
- ¿Cómo probamos que un lenguaje no es regular?

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?
  - damos un AFD o un AFND o un λ-AFND que lo genere
  - damos una expresión regular que lo genere
  - damos una gramática regular que lo genere
  - usamos propiedades de los lenguajes regulares
- ¿Cómo probamos que un lenguaje no es regular?
  - usamos el Lema de Pumping para lenguajes regulares

Repaso

¿Cómo demostramos?

- ¿Cómo probamos que un lenguaje es regular?
  - damos un AFD o un AFND o un λ-AFND que lo genere
  - damos una expresión regular que lo genere
  - damos una gramática regular que lo genere
  - usamos propiedades de los lenguajes regulares
- ¿Cómo probamos que un lenguaje no es regular?
  - usamos el Lema de Pumping para lenguajes regulares
  - usamos propiedades de los lenguajes regulares

Repaso

Propiedades de los lenguajes regulares

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares, L_1 definido sobre el alfabeto Σ.

- $L_1 \cup L_2$ es regular

Repaso

Propiedades de los lenguajes regulares

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares, L_1 definido sobre el alfabeto Σ.

- $L_1 \cup L_2$ es regular
- $L_1 L_2$ es regular

Repaso

Propiedades de los lenguajes regulares

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares, L_1 definido sobre el alfabeto Σ.

- $L_1 \cup L_2$ es regular
- $L_1 L_2$ es regular
- ${L_1}^*$ es regular

Repaso

Propiedades de los lenguajes regulares

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares, L_1 definido sobre el alfabeto Σ.

- $L_1 \cup L_2$ es regular
- $L_1 L_2$ es regular
- ${L_1}^*$ es regular
- ${L_1}^c = \Sigma^* - L_1$ es regular

Repaso

Propiedades de los lenguajes regulares

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares, L_1 definido sobre el alfabeto Σ.

- $L_1 \cup L_2$ es regular
- $L_1 L_2$ es regular
- ${L_1}^*$ es regular
- ${L_1}^c = \Sigma^* - L_1$ es regular
- $L_1 \cap L_2$ es regular

Repaso

Propiedades de los lenguajes regulares

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares, L_1 definido sobre el alfabeto Σ.

- $L_1 \cup L_2$ es regular
- $L_1 L_2$ es regular
- ${L_1}^*$ es regular
- ${L_1}^c = \Sigma^* - L_1$ es regular
- $L_1 \cap L_2$ es regular
- $L_1 - L_2$ es regular

Repaso

Propiedades de los lenguajes regulares

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares, L_1 definido sobre el alfabeto Σ.

- $L_1 \cup L_2$ es regular
- $L_1 L_2$ es regular
- ${L_1}^*$ es regular
- ${L_1}^c = \Sigma^* - L_1$ es regular
- $L_1 \cap L_2$ es regular
- $L_1 - L_2$ es regular
- ${L_1}^+$ es regular

Repaso

Más propiedades de los lenguajes regulares

- Sean $n \in \mathbb{N}$ y $L_1, \ldots, L_n$ lenguajes regulares.
  - $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular

Repaso

Más propiedades de los lenguajes regulares

- Sean $n \in \mathbb{N}$ y $L_1, \ldots, L_n$ lenguajes regulares.
  - $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular

    NO vale para todas las uniones infinitas

Repaso

Más propiedades de los lenguajes regulares

- Sean $n \in \mathbb{N}$ y $L_1, \ldots, L_n$ lenguajes regulares.
  - $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular

    NO vale para todas las uniones infinitas
  - $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ es regular

Repaso

Más propiedades de los lenguajes regulares

- Sean $n \in \mathbb{N}$ y $L_1, \ldots, L_n$ lenguajes regulares.
  - $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular

    NO vale para todas las uniones infinitas
  - $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ es regular

    NO vale para todas las intersecciones infinitas

Repaso

Más propiedades de los lenguajes regulares

- Sean $n \in \mathbb{N}$ y $L_1, \ldots, L_n$ lenguajes regulares.
  - $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular

    NO vale para todas las uniones infinitas
  - $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ es regular

    NO vale para todas las intersecciones infinitas
- **Teorema:** Todo lenguaje finito es regular.

Repaso

Lema de Pumping

Lema de Pumping:

Si L es un lenguaje regular definido sobre Σ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ \alpha \in L$$

$$\Big(|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* \ \left(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i \in \mathbb{N}_0\ (xy^i z \in L)\right)\Big)$$

Enunciado (Ejercicio 2 de la Práctica 5 del 1C de 2020)

Dado $L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i$ es par$\}$

Enunciado (Ejercicio 2 de la Práctica 5 del 1C de 2020)

Dado $L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$

a) Demostrar que L cumple

$$\forall\, \alpha \Big(\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \\ \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\, i\ (xy^i z \in L)\big) \Big)$$

Enunciado (Ejercicio 2 de la Práctica 5 del 1C de 2020)

Dado $L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$

a) Demostrar que L cumple

$$\forall\, \alpha \Big(\ (\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2) \\ \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\, i\ (xy^i z \in L)\big) \ \Big)$$

b) Demostrar que L no es regular.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. α empieza con cero 0s.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. α empieza con cero 0s.
2. α empieza con sólo un 0.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. α empieza con cero 0s.
2. α empieza con sólo un 0.
3. α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. α empieza con cero 0s.
2. α empieza con sólo un 0.
3. α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:
   I. la cantidad de 0s es par.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. α empieza con cero 0s.
2. α empieza con sólo un 0.
3. α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:
   I. la cantidad de 0s es par.
   II. la cantidad de 0s es impar.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

$$\alpha = 1^b \text{ para algún } b \geq 2$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

$$\alpha = 1^b \text{ para algún } b \geq 2$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 1^2 \qquad z = 1^{b-2}$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \lor i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \land |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq 2 \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

$$\alpha = 1^b \text{ para algún } b \geq 2$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 1^2 \qquad z = 1^{b-2}$$

Valen $\alpha = xyz$,

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

$$\alpha = 1^b \text{ para algún } b \geq 2$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 1^2 \qquad z = 1^{b-2}$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$,

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

$$\alpha = 1^b \text{ para algún } b \geq 2$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 1^2 \qquad z = 1^{b-2}$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \lor i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \land |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq 2 \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

$$\alpha = 1^b \text{ para algún } b \geq 2$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 1^2 \qquad z = 1^{b-2}$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$ y

$$\forall\ i\ (xy^i z = 1^{2i+(b-2)} = 0^0 1^{2i+(b-2)} \in L)$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

1. α empieza con cero 0s.

$$\alpha = 1^b \text{ para algún } b \geq 2$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 1^2 \qquad z = 1^{b-2}$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$ y

$$\forall\ i\ (xy^i z = 1^{2i+(b-2)} = 0^0 1^{2i+(b-2)} \in L)$$

Obs.: hay más descomposiciones pero **una alcanza**.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. ~~α empieza con cero 0s.~~
2. α empieza con sólo un 0.
3. α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:
   I. la cantidad de 0s es par.
   II. la cantidad de 0s es impar.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

2. α empieza con sólo un 0.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

2. α empieza con sólo un 0.

$$\alpha = 0^1 1^j$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

2. α empieza con sólo un 0.

$$\alpha = 0^1 1^j \underset{\alpha \in L}{\Longrightarrow} j = 0$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

2. α empieza con sólo un 0.

$$\alpha = 0^1 1^j \underset{\alpha \in L}{\Longrightarrow} j = 0 \implies \alpha = 0$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

2. α empieza con sólo un 0.

$$\alpha = 0^1 1^j \underset{\alpha \in L}{\implies} j = 0 \implies \alpha = 0 \implies |\alpha| = 1 < 2$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

2. α empieza con sólo un 0.

$$\alpha = 0^1 1^j \underset{\alpha \in L}{\implies} j = 0 \implies \alpha = 0 \implies |\alpha| = 1 < 2$$

La implicación vale trivialmente.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \lor i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. ~~α empieza con cero 0s.~~
2. ~~α empieza con sólo un 0.~~
3. α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:
   I. la cantidad de 0s es par.
   II. la cantidad de 0s es impar.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.I. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es par.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.I. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es par.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a',\ a' \geq 1 \text{ y } b \geq 0$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.I. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es par.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a',\ a' \geq 1 \text{ y } b \geq 0$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0^2 \qquad z = 0^{a-2} 1^b$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \lor i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \land |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq 2 \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^iz \in L)\big)$$

3.I. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es par.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a',\ a' \geq 1 \text{ y } b \geq 0$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0^2 \qquad z = 0^{a-2}1^b$$

Valen $\alpha = xyz$,

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.I. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es par.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a',\ a' \geq 1 \text{ y } b \geq 0$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0^2 \qquad z = 0^{a-2} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$,

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.I. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es par.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a',\ a' \geq 1 \text{ y } b \geq 0$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0^2 \qquad z = 0^{a-2} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.I. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es par.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a',\ a' \geq 1 \text{ y } b \geq 0$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0^2 \qquad z = 0^{a-2} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$ y

$$\forall\ i\ (xy^i z = 0^{2i} 0^{a-2} 1^b = 0^{2(i+a'-1)} 1^b \in L)$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. ~~α empieza con cero 0s.~~
2. ~~α empieza con sólo un 0.~~
3. α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:
   I. ~~la cantidad de 0s es par.~~
   II. la cantidad de 0s es impar.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1,\ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1,\ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0 \qquad z = 0^{a-1} 1^b$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x \ \exists y \ \exists z \ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall \ i \ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1, \ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0 \qquad z = 0^{a-1} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$,

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \lor i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \land |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq 2 \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1,\ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0 \qquad z = 0^{a-1} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$,

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1,\ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0 \qquad z = 0^{a-1} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$ y

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1,\ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0 \qquad z = 0^{a-1} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$ y

- si $i = 0$, la cantidad de 0s de $xy^i z$ pasa a ser par:

$$xy^i z = xz = \epsilon\ 0^{a-1} 1^b = 0^{(2a'+1)-1} 1^b = 0^{2a'} 1^b \in L$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1,\ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0 \qquad z = 0^{a-1}1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$ y

- si $i = 0$, la cantidad de 0s de $xy^i z$ pasa a ser par:

$$xy^i z = xz = \epsilon\ 0^{a-1}1^b = 0^{(2a'+1)-1}1^b = 0^{2a'}1^b \in L$$

- si $i \geq 1$ ($i = i' + 1$ con $i' \geq 0$), sigue habiendo más 0s que 1s:

$$xy^i z = \epsilon\ 0^i\ 0^{a-1}1^b = 0^{a+i-1}1^b = 0^{a+i'}1^b \in L$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

3.II. α empieza con al menos dos 0s y la cantidad de 0s es impar.

$$\alpha = 0^a 1^b \text{ con } a = 2a' + 1,\ a' \geq 1 \text{ y } a > b$$

Sean

$$x = \epsilon \qquad y = 0 \qquad z = 0^{a-1} 1^b$$

Valen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq 2$, $|y| \geq 1$ y $\forall\ i\ (xy^i z \in L)$:

- si $i = 0$, la cantidad de 0s de $xy^i z$ pasa a ser par:

$$xy^i z = xz = \epsilon\ 0^{a-1} 1^b = 0^{(2a'+1)-1} 1^b = 0^{2a'} 1^b \in L$$

- si $i \geq 1$ ($i = i' + 1$ con $i' \geq 0$), sigue habiendo más 0s que 1s:

$$xy^i z = \epsilon\ 0^i\ 0^{a-1} 1^b = 0^{a+i-1} 1^b = 0^{a+i'} 1^b \in L$$

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. ~~α empieza con cero 0s.~~
2. ~~α empieza con sólo un 0.~~
3. α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:
   I. ~~la cantidad de 0s es par.~~
   II. ~~la cantidad de 0s es impar.~~

a) análisis por casos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

$$\alpha \in L$$

1. ~~α empieza con cero 0s.~~
2. ~~α empieza con sólo un 0.~~
3. ~~α empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos:~~
   I. ~~la cantidad de 0s es par.~~
   II. ~~la cantidad de 0s es impar.~~

Enunciado (Ejercicio 2 de la Práctica 5 del 2C de 2019)

Dado $L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$

a) Demostrar que L cumple

$$\forall\, \alpha \Big(\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\, i\ (xy^i z \in L)\big) \Big)$$

b) Demostrar que L no es regular.

b) vueltas de tuerca

- ¿Sirve el Lema de Pumping?

b) vueltas de tuerca

- ¿Sirve el Lema de Pumping?

  Lema de Pumping:

  Si L es un lenguaje regular entonces existe n tal que

$$\forall\ \alpha\ \Big(\ \big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n\big) \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

b) vueltas de tuerca

- ¿Sirve el Lema de Pumping?

  Lema de Pumping:

  Si L es un lenguaje regular entonces existe n tal que

  $$\forall\ \alpha\ \Big(\ \big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n\big) \\ \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

  - ¡Sobre L seguro que **no**!

b) vueltas de tuerca

- ¿Sirve el Lema de Pumping?

  Lema de Pumping:

  Si L es un lenguaje regular entonces existe n tal que

  $$\forall\ \alpha \Big(\ \big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n\big) \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

  - ¡Sobre L seguro que **no**!

    En *a*) demostramos que vale el Lema para $n = 2$.

b) vueltas de tuerca

- ¿Sirve el Lema de Pumping?

  Lema de Pumping:

  Si L es un lenguaje regular entonces existe n tal que

  $$\forall\ \alpha \Big(\ (\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n) \\ \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

  - ¡Sobre L seguro que **no**!

    En *a*) demostramos que vale el Lema para $n = 2$.

  - Es una **implicación**, **no** un **si y sólo si**.

b) vueltas de tuerca

- Tenemos

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$
- La intuición es que la “parte” no regular es $i > j$.

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$

- La intuición es que la "parte" no regular es $i > j$.

  ¿Cómo incorporaríamos a un autómata la noción de "cantidad de 0s leídos"?

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$
- La intuición es que la "parte" no regular es $i > j$.

  ¿Cómo incorporaríamos a un autómata la noción de "cantidad de 0s leídos"?
- Escribimos
$$L = L_1 \dot{\cup} L_2$$

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$
- La intuición es que la "parte" no regular es $i > j$.

  ¿Cómo incorporaríamos a un autómata la noción de "cantidad de 0s leídos"?
- Escribimos
$$L = L_1 \mathbin{\dot{\cup}} L_2$$

  $L_1 := \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$
- La intuición es que la "parte" no regular es $i > j$.

  ¿Cómo incorporaríamos a un autómata la noción de "cantidad de 0s leídos"?
- Escribimos
$$L = L_1 \mathbin{\dot\cup} L_2$$

  $L_1 := \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$

  $L_2 := \{0^i 1^j \mid i \text{ es par}\}$

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$
- La intuición es que la "parte" no regular es $i > j$.

  ¿Cómo incorporaríamos a un autómata la noción de "cantidad de 0s leídos"?
- Escribimos
$$L = L_1 \mathbin{\dot\cup} L_2$$

  $L_1 := \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$

  $L_2 := \{0^i 1^j \mid i \text{ es par}\}$
- L_2 es regular: $(00)^* 1^*$

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$
- La intuición es que la "parte" no regular es $i > j$.

  ¿Cómo incorporaríamos a un autómata la noción de "cantidad de 0s leídos"?
- Escribimos
$$L = L_1 \mathbin{\dot\cup} L_2$$

  $L_1 := \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$

  $L_2 := \{0^i 1^j \mid i \text{ es par}\}$
- L_2 es regular: $(00)^* 1^*$
- $L_1 = L - L_2$ (la unión era disjunta)

b) vueltas de tuerca

- Tenemos
$$L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$$
- La intuición es que la "parte" no regular es $i > j$.

  ¿Cómo incorporaríamos a un autómata la noción de "cantidad de 0s leídos"?
- Escribimos
$$L = L_1 \dot\cup L_2$$
  $L_1 := \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$

  $L_2 := \{0^i 1^j \mid i \text{ es par}\}$
- L_2 es regular: $(00)^* 1^*$
- $L_1 = L - L_2$ (la unión era disjunta)
- Si L fuera regular, L_1 también lo sería (regulares cerrados por resta)

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Si L_1 fuera regular, por el Lema de Pumping existiría n tal que

$$\forall\ \alpha\ \Big(\ (\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n) \\ \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \land i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Si L_1 fuera regular, por el Lema de Pumping existiría n tal que

$$\forall\ \alpha\ \Big(\ (\alpha \in L \land |\alpha| \geq n) \\ \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

- Sea $\alpha = 0^{2n+1}1^{2n}$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \land i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Si L_1 fuera regular, por el Lema de Pumping existiría n tal que

$$\forall\ \alpha \Big(\ (\alpha \in L \land |\alpha| \geq n) \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

- Sea $\alpha = 0^{2n+1}1^{2n}$

  Vale que $2n+1$ es impar,

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Si L_1 fuera regular, por el Lema de Pumping existiría n tal que

$$\forall\ \alpha \Big(\ (\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n) \\ \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

- Sea $\alpha = 0^{2n+1}1^{2n}$

  Vale que $2n+1$ es impar, $2n+1 > 2n$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Si L_1 fuera regular, por el Lema de Pumping existiría n tal que

$$\forall\, \alpha \Big((\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n) \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\, i\ (xy^i z \in L)\big) \Big)$$

- Sea $\alpha = 0^{2n+1}1^{2n}$

  Vale que $2n+1$ es impar, $2n+1 > 2n \implies \alpha \in L_1$.

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Si L_1 fuera regular, por el Lema de Pumping existiría n tal que

$$\forall \alpha \Big((\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n) \\ \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big) \Big)$$

- Sea $\alpha = 0^{2n+1}1^{2n}$

  Vale que $2n+1$ es impar, $2n+1 > 2n \implies \alpha \in L_1$.

  También vale $|\alpha| \geq n$.

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Si L_1 fuera regular, por el Lema de Pumping existiría n tal que

$$\forall\ \alpha\ \Big(\ (\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq n) \\ \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\ \Big)$$

- Sea $\alpha = 0^{2n+1} 1^{2n}$

  Vale que $2n+1$ es impar, $2n+1 > 2n \Longrightarrow \alpha \in L_1$.

  También vale $|\alpha| \geq n$.

- Entonces

$$\exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Sea $\alpha = 0^{2n+1} 1^{2n} \in L_1$, vale $|\alpha| \geq n$.
- Entonces

$$\exists x \; \exists y \; \exists z \; \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall \; i \; (xy^i z \in L)\big)$$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Sea $\alpha = 0^{2n+1} 1^{2n} \in L_1$, vale $|\alpha| \geq n$.
- Entonces

$$\exists x \; \exists y \; \exists z \; \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\, i \; (xy^i z \in L)\big)$$

- Como $|xy| \leq n$ y $|y| \geq 1$, x sólo puede tener 0s e $y = 0^m$ con $m \geq 1$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i$ es impar$\}$ no es regular:

- Sea $\alpha = 0^{2n+1} 1^{2n} \in L_1$, vale $|\alpha| \geq n$.
- Entonces

$$\exists x \; \exists y \; \exists z \; \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall \; i \; (xy^i z \in L)\big)$$

- Como $|xy| \leq n$ y $|y| \geq 1$, x sólo puede tener 0s e $y = 0^m$ con $m \geq 1$
- Si $i = 0$, $xy^i z = xz$ es como α pero con al menos un 0 menos:

$$xz = 0^{|x|} 0^{2n+1-|x|-m} 1^{2n} = 0^{2n+1-m} 1^{2n}$$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Sea $\alpha = 0^{2n+1}1^{2n} \in L_1$, vale $|\alpha| \geq n$.
- Entonces

$$\exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

- Como $|xy| \leq n$ y $|y| \geq 1$, x sólo puede tener 0s e $y = 0^m$ con $m \geq 1$
- Si $i = 0$, $xy^i z = xz$ es como α pero con al menos un 0 menos:

$$xz = 0^{|x|}0^{2n+1-|x|-m}1^{2n} = 0^{2n+1-m}1^{2n}$$

- Como $m \geq 1$, $|xz|_0 = 2n + 1 - m \leq 2n = |xz|_1 \Rightarrow xz \notin L_1$

b) vueltas de tuerca

Mostramos que $L_1 = \{0^i 1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$ no es regular:

- Sea $\alpha = 0^{2n+1} 1^{2n} \in L_1$, vale $|\alpha| \geq n$.
- Entonces

$$\exists x \; \exists y \; \exists z \; \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\, i \; (xy^i z \in L)\big)$$

- Como $|xy| \leq n$ y $|y| \geq 1$, x sólo puede tener 0s e $y = 0^m$ con $m \geq 1$
- Si $i = 0$, $xy^i z = xz$ es como α pero con al menos un 0 menos:

$$xz = 0^{|x|} 0^{2n+1-|x|-m} 1^{2n} = 0^{2n+1-m} 1^{2n}$$

- Como $m \geq 1$, $|xz|_0 = 2n + 1 - m \leq 2n = |xz|_1 \Rightarrow xz \notin L_1$
- Se concluye que L_1 no es regular y por tanto L tampoco.

Enunciado (Ejercicio 1)o) de la Práctica 5 del 1C de 2020)

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Determinar si el lenguaje

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\} \cup \{c^{3p} \mid p \geq 0\}$$

definido sobre el alfabeto Σ es regular o no.

Si es regular, dar un AF o una ER que lo defina. Si no, demostrarlo.

Solución

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\} \cup \{c^{3p} \mid p \geq 0\}$$

Solución

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\} \cup \{c^{3p} \mid p \geq 0\}$$

- La unión es disjunta.

Solución

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\} \cup \{c^{3p} \mid p \geq 0\}$$

- La unión es disjunta.
- $\{c^{3p} \mid p \geq 0\}$ es claramente regular: $(ccc)^*$

Solución

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\} \cup \{c^{3p} \mid p \geq 0\}$$

- La unión es disjunta.
- $\{c^{3p} \mid p \geq 0\}$ es claramente regular: $(ccc)^*$
- La intuición es que $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$ no es regular.

  Si tenemos un autómata, cuando empiezan las b, ¿cómo sabemos cuántas a leímos?

Solución

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\} \cup \{c^{3p} \mid p \geq 0\}$$

- La unión es disjunta.
- $\{c^{3p} \mid p \geq 0\}$ es claramente regular: $(ccc)^*$
- La intuición es que $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$ no es regular.

  Si tenemos un autómata, cuando empiezan las b, ¿cómo sabemos cuántas a leímos?
- Si L fuera regular,

$$L - \{c^{3p} \mid p \geq 0\} = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$$

  sería regular por ser resta de lenguajes regulares.

Solución

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\} \cup \{c^{3p} \mid p \geq 0\}$$

- La unión es disjunta.
- $\{c^{3p} \mid p \geq 0\}$ es claramente regular: $(ccc)^*$
- La intuición es que $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$ no es regular.

  Si tenemos un autómata, cuando empiezan las b, ¿cómo sabemos cuántas a leímos?
- Si L fuera regular,

  $$L - \{c^{3p} \mid p \geq 0\} = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$$

  sería regular por ser resta de lenguajes regulares.
- Veamos que no es así mediante 2 soluciones distintas.

Solución 1

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

Solución 1

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- Quiero ver que **no** existe n tal que

$$\forall\ \alpha \in L$$
$$|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

Solución 1

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- Quiero ver que **no** existe n tal que

$$\forall\ \alpha \in L$$
$$|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

- O sea, quiero ver que para todo n

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

Solución 1

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- Quiero ver que **no** existe n tal que

$$\forall\ \alpha \in L$$
$$|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)$$

- O sea, quiero ver que para todo n

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

Es muy importante no equivocarse al negar la fórmula.

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$

$$|\alpha| \geq n \land \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^iz \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Fijo que $xy^iz \notin L$ signifique $xy^iz = a^lb^l$ para algún l (no fijo).

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Fijo que $xy^i z \notin L$ signifique $xy^i z = a^l b^l$ para algún l (no fijo).

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- $\alpha \in L$ significa $\alpha = a^i b^j$, $i \neq j$.

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- $\alpha \in L$ significa $\alpha = a^i b^j$, $i \neq j$.

  Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n-n_0} b^j$$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n-n_0} b^j = a^{n_0-m} a^{mi} a^{n-n_0} b^j$$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$\begin{aligned} xy^i z &= a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n-n_0} b^j = a^{n_0-m} a^{mi} a^{n-n_0} b^j \\ &= a^{n-m} a^{im} b^j \end{aligned}$$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$\begin{aligned} xy^i z &= a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n - n_0} b^j = a^{n_0 - m} a^{mi} a^{n - n_0} b^j \\ &= a^{n-m} a^{im} b^j \end{aligned}$$

- O sea que no depende de qué subcadenas sean x e y, sólo depende de la longitud de y.

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \neq n$ y ahora vamos a ver quién es j.
  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^j$$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \geq n-1$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^{n-m} b^{j-(n-m)}$$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \geq n-1$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^{n-m} b^{j-(n-m)}$$

  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ i_n\ n = j \iff n \mid j$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \geq n-1$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^{n-m} b^{j-(n-m)}$$

  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ i_n\ n = j \iff n \mid j$
  - $m = n-1$: $\exists\ i_{n-1}\ /\ i_{n-1}\ (n-1) = j-1 \iff n-1 \mid j-1$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \geq n-1$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

  $$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^{n-m} b^{j-(n-m)}$$

  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ i_n\ n = j \iff n \mid j$
  - $m = n-1$: $\exists\ i_{n-1}\ /\ i_{n-1}\ (n-1) = j-1 \iff n-1 \mid j-1$
  - $\ldots$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \geq n-1$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^{n-m} b^{j-(n-m)}$$

  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ i_n\ n = j \iff n \mid j$
  - $m = n-1$: $\exists\ i_{n-1}\ /\ i_{n-1}\ (n-1) = j-1 \iff n-1 \mid j-1$
  - $\dots$
  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ i_1\ 1 = j-(n-1) \iff 1 \mid j-(n-1)$

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \geq n-1$ y ahora vamos a ver quién es j.
  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

  $$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^{n-m} b^{j-(n-m)}$$

  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ i_n\ n = j \iff n \mid j$
  - $m = n-1$: $\exists\ i_{n-1}\ /\ i_{n-1}\ (n-1) = j-1 \iff n-1 \mid j-1$
  - $\ldots$
  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ i_1\ 1 = j-(n-1) \iff 1 \mid j-(n-1)$
- ¿Para cualquier n existe j así? ¿Quién es?

Solución 1: Intento 1

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \land \forall\ x,y,z\ \big((\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Aclaración: procedimiento **no** válido como procedimiento general.
- Tomo $\alpha = a^n b^j$ con $j \geq n-1$ y ahora vamos a ver quién es j.

  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

  $$xy^i z = a^{n-m} a^{im} b^{n-m} b^{j-(n-m)}$$

  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ i_n\ n = j \iff n \mid j$
  - $m = n-1$: $\exists\ i_{n-1}\ /\ i_{n-1}\ (n-1) = j-1 \iff n-1 \mid j-1$
  - $\ldots$
  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ i_1\ 1 = j-(n-1) \iff 1 \mid j-(n-1)$
- ¿Para cualquier n existe j así? ¿Quién es? Ni idea.

Solución 1: Intento 2

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.

Solución 1: Intento 2

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Fijo que $xy^i z \notin L$ signifique $xy^i z = a^l b^l$ para algún l (no fijo).

Solución 1: Intento 2

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L \ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Fijo que $xy^i z \notin L$ signifique $xy^i z = a^l b^l$ para algún l (no fijo).
- $\alpha \in L$ significa $\alpha = a^i b^j$, $i \neq j$.

Solución 1: Intento 2

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Fijo que $xy^i z \notin L$ signifique $xy^i z = a^l b^l$ para algún l (no fijo).
- $\alpha \in L$ significa $\alpha = a^i b^j$, $i \neq j$.

  O sea,

Solución 1: Intento 2

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \land \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Fijo que $xy^i z \notin L$ signifique $xy^i z = a^l b^l$ para algún l (no fijo).
- $\alpha \in L$ significa $\alpha = a^i b^j$, $i \neq j$.

  O sea,

  - $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$

Solución 1: Intento 2

Sea n un natural cualquiera. Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \land \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Aclaración: el procedimiento que sigue **no** es válido como procedimiento general.
- Fijo que $xy^i z \notin L$ signifique $xy^i z = a^l b^l$ para algún l (no fijo).
- $\alpha \in L$ significa $\alpha = a^i b^j$, $i \neq j$.

  O sea,
  - $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$
  - o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.
- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.
- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.
- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:
  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.
- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:
  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$xy^i z = a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n - n_0} b^{\cdots}$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.
- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:
  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$\begin{aligned} xy^i z &= a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n - n_0} b^{\cdots} \\ &= a^{n_0 - m} a^{mi} a^{n - n_0} b^{\cdots} \end{aligned}$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.
- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:
  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$\begin{aligned} xy^i z &= a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n-n_0} b^{\cdots} \\ &= a^{n_0-m} a^{mi} a^{n-n_0} b^{\cdots} \\ &= a^{n+(i-1)m} b^{\cdots} \end{aligned}$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tengo $\alpha = a^i b^{i-k^-}$ con $0 < k^- \leq i$ o $\alpha = a^i b^{i+k^+}$ con $0 < k^+$.
- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:
  Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y| \geq 1$

$$\begin{aligned} xy^i z &= a^{n_0 - m}\ (a^m)^i\ a^{n-n_0} b^{\cdots} \\ &= a^{n_0-m} a^{mi} a^{n-n_0} b^{\cdots} \\ &= a^{n+(i-1)m} b^{\cdots} \end{aligned}$$

- O sea que no depende de qué subcadenas sean x e y, sólo depende de la longitud de y.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:
  Sea $m := |y|$, $1 \leq m \leq n$
  $$xy^i z = a^{n+(i-1)m} b^{\cdots}$$
- O sea que no depende de qué subcadenas sean x e y, sólo depende de la longitud de y.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z = a^l b^l)\big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^{\cdots}$.
  Si los primeros n caracteres son a, no tengo que separar en casos para analizar todas las posibles descomposiciones válidas:
  Sea $m := |y|$, $1 \leq m \leq n$

$$xy^i z = a^{n+(i-1)m} b^{\cdots}$$

- O sea que no depende de qué subcadenas sean x e y, sólo depende de la longitud de y.
- Entonces, quiero ver que

$\exists\ \alpha \in L\ /$

$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \land \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m}b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ a^{n+(i_m-1)m} b^{n-k^-} = a^l b^l$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ a^{n+(i_m-1)m} b^{n-k^-} = a^l b^l$$
$$\equiv\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ n + (i_m - 1)\ m = n - k^-$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ a^{n+(i_m-1)m} b^{n-k^-} = a^l b^l$$
$$\equiv\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ n + (i_m - 1)\ m = n - k^-$$
$$\equiv\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = -k^-$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = -k^-$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = -k^-$$

- Si hay más as que bs y quiero bombear y que queden en igual cantidad, tengo que **sacar** as al bombear:

$$i_m = 0$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ / \\ |\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = -k^-$$

- Si hay más as que bs y quiero bombear y que queden en igual cantidad, tengo que **sacar** as al bombear:

$$i_m = 0$$

Esto también surge de $(i_m - 1)\ m = -k^-$ sabiendo que $0 < m$ y $0 < k^-$.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n,\ m = k^-$$

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n,\ m = k^-$$

- Esto sólo vale si $n = 1$, pero n era un natural cualquiera.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tengo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con $0 < k^- \leq n$ o $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con $0 < k^+$.

Si tomo $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n,\ m = k^-$$

- Esto sólo vale si $n = 1$, pero n era un natural cualquiera.

Tomar $\alpha = a^n b^{n-k^-}$ con k^- fijo, $0 < k^- \leq n$, no sirve.

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \land \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

Solución 1: Intento 2

Quiero ver que

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ (a^{n+(i_m-1)m} b^{\cdots} = a^l b^l)$$

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ a^{n+(i_m-1)m} b^{n+k^+} = a^l b^l$$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ a^{n+(i_m-1)m} b^{n+k^+} = a^l b^l$$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ a^{n+(i_m-1)m} b^{n+k^+} = a^l b^l$$
$$\equiv\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ n + (i_m - 1)\ m = n + k^+$$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\begin{aligned}
&\forall\, m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\, i_m \ /\ a^{n+(i_m-1)m} b^{n+k^+} = a^l b^l \\
&\quad \equiv\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\, i_m \ /\ n + (i_m - 1)\, m = n + k^+ \\
&\quad \equiv\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\, i_m \ /\ (i_m - 1)\, m = k^+
\end{aligned}$$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = k^+$$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = k^+$$

  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ (i_1 - 1)\ 1 = k^+ \iff 1 \mid k^+$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = k^+$$

  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ (i_1 - 1)\ 1 = k^+ \iff 1 \mid k^+$
  - $m = 2$: $\exists\ i_2\ /\ (i_2 - 1)\ 2 = k^+ \iff 2 \mid k^+$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = k^+$$

  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ (i_1 - 1)\ 1 = k^+ \iff 1 \mid k^+$
  - $m = 2$: $\exists\ i_2\ /\ (i_2 - 1)\ 2 = k^+ \iff 2 \mid k^+$
  - $\ldots$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = k^+$$

  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ (i_1 - 1)\ 1 = k^+ \iff 1 \mid k^+$
  - $m = 2$: $\exists\ i_2\ /\ (i_2 - 1)\ 2 = k^+ \iff 2 \mid k^+$
  - $\dots$
  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ (i_n - 1)\ n = k^+ \iff n \mid k^+$

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = k^+$$

  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ (i_1 - 1)\ 1 = k^+ \iff 1 \mid k^+$
  - $m = 2$: $\exists\ i_2\ /\ (i_2 - 1)\ 2 = k^+ \iff 2 \mid k^+$
  - $\ldots$
  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ (i_n - 1)\ n = k^+ \iff n \mid k^+$

- Alcanza con un k^+ que cumpla todo eso simultáneamente.

Solución 1: Intento 2

Tomo $\alpha = a^n b^{n+k^+}$ con k^+ fijo, $0 < k^+$,

- Quiero ver que

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq n, \exists\ i_m\ /\ (i_m - 1)\ m = k^+$$

  - $m = 1$: $\exists\ i_1\ /\ (i_1 - 1)\ 1 = k^+ \iff 1 \mid k^+$
  - $m = 2$: $\exists\ i_2\ /\ (i_2 - 1)\ 2 = k^+ \iff 2 \mid k^+$
  - $\ldots$
  - $m = n$: $\exists\ i_n\ /\ (i_n - 1)\ n = k^+ \iff n \mid k^+$

- Alcanza con un k^+ que cumpla todo eso simultáneamente.
- Elijo $k^+ = n!$

Repaso de la Solución 1

- Tengo $L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$

Repaso de la Solución 1

- Tengo $L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$
- Quiero ver que para todo n

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$

$$|\alpha| \geq n \land \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

Repaso de la Solución 1

- Tengo $L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$
- Quiero ver que para todo n

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^{n+n!}$

Repaso de la Solución 1

- Tengo $L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$
- Quiero ver que para todo n

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^{n+n!}$
- $|\alpha| = n + n + n! \geq n$ y $\alpha \in L$ dado que $n \neq n + n!$ cualquiera sea n.

Repaso de la Solución 1

- Tengo $L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$
- Quiero ver que para todo n

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^{n+n!}$
- $|\alpha| = n + n + n! \geq n$ y $\alpha \in L$ dado que $n \neq n + n!$ cualquiera sea n.
- Para cualquier descomposición válida x, y, z con $m := |y|$ tenemos que

$$xy^i z = a^{n+(i-1)m} b^{n+n!}$$

Repaso de la Solución 1

- Tengo $L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$
- Quiero ver que para todo n

$$\exists\ \alpha \in L\ /$$
$$|\alpha| \geq n \wedge \forall\ x, y, z\ \big((\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1) \Rightarrow \exists\ i\ (xy^i z \notin L)\big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^{n+n!}$
- $|\alpha| = n + n + n! \geq n$ y $\alpha \in L$ dado que $n \neq n + n!$ cualquiera sea n.
- Para cualquier descomposición válida x, y, z con $m := |y|$ tenemos que

$$xy^i z = a^{n+(i-1)m} b^{n+n!}$$

- Siempre existe $i_m = \dfrac{n!}{m} + 1$ tal que

$$xy^i z = a^{n+(i-1)m} b^{n+n!} = a^{n+(\frac{n!}{m}+1-1)m} b^{n+n!} = a^{n+n!} b^{n+n!} \notin L$$

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular.

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular.
- Veamos que L'^c no es regular por absurdo.

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular.
- Veamos que L'^c no es regular por absurdo.
- Supongo que L'^c es regular. Por el Lema de Pumping, existe n tal que

  $$\forall\ \alpha \in L'^c$$
  $$\Big(\ |\alpha| \geq n \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L'^c)\big)\Big)$$

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular.
- Veamos que L'^c no es regular por absurdo.
- Supongo que L'^c es regular. Por el Lema de Pumping, existe n tal que

  $\forall\ \alpha \in L'^c$

  $$\Big(\ |\alpha| \geq n \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L'^c)\big)\Big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^n$:

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular.
- Veamos que L'^c no es regular por absurdo.
- Supongo que L'^c es regular. Por el Lema de Pumping, existe n tal que

  $\forall\ \alpha \in L'^c$

  $$\Big(\ |\alpha| \geq n \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^i z \in L'^c)\big)\Big)$$
- Tomo $\alpha = a^n b^n$: $|\alpha| = 2n \geq n$ y $\alpha \in L'^c$ porque $\alpha \notin L'$.

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular.
- Veamos que L'^c no es regular por absurdo.
- Supongo que L'^c es regular. Por el Lema de Pumping, existe n tal que

  $\forall\ \alpha \in L'^c$

  $$\Big(\ |\alpha| \geq n \implies \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L'^c)\big)\Big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^n$: $|\alpha| = 2n \geq n$ y $\alpha \in L'^c$ porque $\alpha \notin L'$.
- Para cualquier descomposición válida x, y, z con $m := |y|$ tenemos que

$$xy^{i_m} z = a^{n+(i_m-1)m} b^n$$

Solución 2

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular.
- Veamos que L'^c no es regular por absurdo.
- Supongo que L'^c es regular. Por el Lema de Pumping, existe n tal que

  $\forall\ \alpha \in L'^c$

  $$\Big(\ |\alpha| \geq n \Longrightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1 \land \forall\ i\ (xy^i z \in L'^c)\big)\Big)$$

- Tomo $\alpha = a^n b^n$: $|\alpha| = 2n \geq n$ y $\alpha \in L'^c$ porque $\alpha \notin L'$.
- Para cualquier descomposición válida x, y, z con $m := |y|$ tenemos que

  $$xy^{i_m}z = a^{n+(i_m-1)m}b^n$$

- Para que $xy^{i_m}z \in L'$, es decir, que $n + (i_m - 1)m \neq n$, tomo $i_m = 0$.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$$

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \land i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

> Si L contiene a un lenguaje LLC no regular y además libre de contexto entonces L no es regular.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

  Si L contiene a un lenguaje LLC no regular y además libre de contexto entonces L no es regular.
  Demostración: Supongo que L es regular.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

> Si L contiene a un lenguaje LLC no regular y además libre de contexto entonces L no es regular.
> Demostración: Supongo que L es regular.
>
> Escribo L como $L = (L - LLC) \cup LLC$, que es una unión disjunta.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

> Si L contiene a un lenguaje LLC no regular y además libre de contexto entonces L no es regular.
> Demostración: Supongo que L es regular.
>
> Escribo L como $L = (L - LLC) \cup LLC$, que es una unión disjunta.
>
> - Si $L - LLC$ es regular entonces $LLC = L - (L - LLC)$ es regular por ser resta de lenguajes regulares. Abs.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

> Si L contiene a un lenguaje LLC no regular y además libre de contexto entonces L no es regular.
> Demostración: Supongo que L es regular.
>
> Escribo L como $L = (L - LLC) \cup LLC$, que es una unión disjunta.
>
> - Si $L - LLC$ es regular entonces $LLC = L - (L - LLC)$ es regular por ser resta de lenguajes regulares. Abs.
> - Si $L - LLC$ es libre de contexto, entonces L es libre de contexto por ser unión de lenguajes libres de contexto. Abs.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

Si L contiene a un lenguaje LLC no regular y además libre de contexto entonces L no es regular.
Demostración: Supongo que L es regular.

Escribo L como $L = (L - LLC) \cup LLC$, que es una unión disjunta.

- Si $L - LLC$ es regular entonces $LLC = L - (L - LLC)$ es regular por ser resta de lenguajes regulares. Abs.
- Si $L - LLC$ es libre de contexto, entonces L es libre de contexto por ser unión de lenguajes libres de contexto. Abs.

Se concluye que L es no regular.

Intento de Solución

$$L' = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

- L' es regular si y sólo si L'^c es regular. Veamos que L'^c no es regular.
- Teniendo en cuenta que L'^c incluye a $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$,

  invoco la siguiente propiedad (¡que no es válida!):

> Si L contiene a un lenguaje LLC no regular y además libre de contexto entonces L no es regular.
> Demostración: Supongo que L es regular.
>
> Escribo L como $L = (L - LLC) \cup LLC$, que es una unión disjunta.
>
> - Si $L - LLC$ es regular entonces $LLC = L - (L - LLC)$ es regular por ser resta de lenguajes regulares. Abs.
> - Si $L - LLC$ es libre de contexto, entonces L es libre de contexto por ser unión de lenguajes libres de contexto. Abs. ¡No es absurdo!
>
> Se concluye que L es no regular.

Intento de Solución

Lenguajes regulares $\subsetneq$ Lenguajes libres de contexto

Intento de Solución

$$\text{Lenguajes regulares} \subsetneq \text{Lenguajes libres de contexto}$$

- Los lenguajes regulares son lenguajes libres de contexto.

Intento de Solución

Lenguajes regulares $\subsetneq$ Lenguajes libres de contexto

- Los lenguajes regulares son lenguajes libres de contexto.
- El intento de demostración es incorrecto porque

  un lenguaje libre de contexto puede ser regular.

Intento de Solución

Lenguajes regulares $\subsetneq$ Lenguajes libres de contexto

- Los lenguajes regulares son lenguajes libres de contexto.
- El intento de demostración es incorrecto porque

  un lenguaje libre de contexto puede ser regular.
- Un contraejemplo concreto para la propiedad falsa es el lenguaje

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

Intento de Solución

Lenguajes regulares $\subsetneq$ Lenguajes libres de contexto

- Los lenguajes regulares son lenguajes libres de contexto.
- El intento de demostración es incorrecto porque
  un lenguaje libre de contexto puede ser regular.
- Un contraejemplo concreto para la propiedad falsa es el lenguaje

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

  - Es el generado por la expresión regular $a^* b^*$.

Intento de Solución

Lenguajes regulares $\subsetneq$ Lenguajes libres de contexto

- Los lenguajes regulares son lenguajes libres de contexto.
- El intento de demostración es incorrecto porque
  un lenguaje libre de contexto puede ser regular.
- Un contraejemplo concreto para la propiedad falsa es el lenguaje

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \wedge i \neq j\}$$

  - Es el generado por la expresión regular a^*b^*.
  - Contiene al lenguaje no regular y libre de contexto $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$.

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

  $\Longrightarrow$ no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

  $\Longrightarrow$ no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular
- Verificar que el α propuesto para Pumping cumple las hipótesis.

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

  $\Longrightarrow$ no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular
- Verificar que el α propuesto para Pumping cumple las hipótesis.
- A veces hay que darle ciertas vueltas de tuercas

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

  $\Longrightarrow$ no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular
- Verificar que el α propuesto para Pumping cumple las hipótesis.
- A veces hay que darle ciertas vueltas de tuercas
  - Usar propiedades de lenguajes regulares (operaciones como la resta).

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

    $\Longrightarrow$ no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular
- Verificar que el α propuesto para Pumping cumple las hipótesis.
- A veces hay que darle ciertas vueltas de tuercas
  - Usar propiedades de lenguajes regulares (operaciones como la resta).
- Entender el análisis por casos.

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

  $\Longrightarrow$ no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular
- Verificar que el α propuesto para Pumping cumple las hipótesis.
- A veces hay que darle ciertas vueltas de tuercas
  - Usar propiedades de lenguajes regulares (operaciones como la resta).
- Entender el análisis por casos.
  - para toda α: **todas** las posibilidades (cantidad par e impar de 0s, etc.)

Puntos importantes

- Fijar el Lema de Pumping
  - existe alguna descomposición, no todas cumplen
  - es una implicación, no un si y sólo si

  $\Longrightarrow$ no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular
- Verificar que el α propuesto para Pumping cumple las hipótesis.
- A veces hay que darle ciertas vueltas de tuercas
  - Usar propiedades de lenguajes regulares (operaciones como la resta).
- Entender el análisis por casos.
  - para toda α: **todas** las posibilidades (cantidad par e impar de 0s, etc.)
  - ver que existe **una** descomposición válida

Para compensarles, un ejercicio de parcial :D

Ejercicio del 8 de mayo de 2017

Sea

$$L = \{a^n b^m c^j d^k \mid n \leq m \leq 3 \ \wedge \ 2 \leq j \leq k\}$$

Demostrar que L no es regular.