Teoría de Lenguajes
Ejercicio dejado en la clase del 6 de mayo de 2020

Sebastián Taboh

10 de mayo de 2020

Enunciado (Ejercicio del parcial del 8 de mayo de 2017)

Sea
$$L = \{a^n b^m c^j d^k \mid n \leq m \leq 3 \ \land \ 2 \leq j \leq k\}$$
Demostrar que L no es regular.

Solución

Sea $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

Supongo que L sí es regular. Por el Lema de Pumping existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall \ \alpha \in L \ \Big(|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists \ x, y, z \in \Sigma^* \ \big(\alpha = xyz \land |xy| \leq n \land |y| \geq 1 \land \forall \ i \in \mathbb{N}_0 \ (xy^i z \in L)\big)\Big)$$

Vamos a ver 2 soluciones distintas y la diferencia que hay en las demostraciones en relación al análisis de casos según qué α e i tomemos. Más allá del largo de la demostración y el esfuerzo de pensar en no olvidarse de ningún caso, muchos casos distintos introducen más posibilidades para equivocarse, ya sea por equivocarse en un caso que se analiza o por omitir accidentalmente el análisis para casos necesarios.

- **Solución 1:**

  Sea $\alpha = a^2 b^2 c^{n+2} d^{n+2}$.

  Es claro que $|\alpha| = 2n + 8 \geq n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

  Además, $\alpha \in L$ dado que $2 \leq 2 \leq 3$ y $2 \leq n + 2 \leq n + 2$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

  Así, existe una descomposición válida de α en $x, y, z \in \Sigma^*$, es decir, cadenas $x, y, z \in \Sigma^*$ que cumplen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq n$ y $|y| \geq 1$, para la cual para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $xy^i z \in L$.

  Veamos que $\exists \ i \in \mathbb{N}_0$ tal que $xy^i z \notin L$, llegando a un absurdo.

  - Si $|y|_a \geq 1$ (para quienes no recuerden, $|y|_a$ es cantidad de as en y), entonces
  $$|xy^i z|_a \geq |y^i|_a = i \ |y|_a \geq i \ 1 = i$$
    Dado que la cantidad de as de las palabras de L siempre es menor o igual que 3, si $i > 3$ entonces $xy^i z$ no pertenece a L.
  - Si $|y|_b \geq 1$ el razonamiento es el mismo:
  $$|xy^i z|_b \geq |y^i|_b = i \ |y|_b \geq i \ 1 = i$$
    Dado que la cantidad de bs de las palabras de L siempre es menor o igual que 3, si $i > 3$ entonces $xy^i z$ no pertenece a L.
  - Si $|y|_c \geq 1$, entonces
  $$\begin{aligned} |xy^i z|_c &= \Big((n+2) - |y|_c\Big) + |y^i|_c + |z|_c \\ &= \Big((n+2) - |y|_c\Big) + i \ |y|_c + |z|_c \\ &= (n+2) + (i-1) \ |y|_c + |z|_c \\ &\geq (n+2) + (i-1) \ 1 + |z|_c \\ &\geq n + 1 + i \end{aligned}$$

Dado que y seguro no tiene ds porque puede abarcar a lo sumo los primeros n caracteres de α y ninguno de ellos es una d, entonces

$$|xy^iz|_d = |x|_d + |y^i|_d + |z|_d = 0 + i\ 0 + |z|_d = n + 2$$

Seguro que si $i \geq 2$ entonces $|xy^iz|_c \geq n+3 > n+2 = |xy^iz|_d$ y por tanto $xy^iz \notin L$ dado que no vale $|xy^iz|_c \leq |xy^iz|_d$.

De hecho, con $i = 3$ la palabra xy^iz seguro no pertenece a L.

- Si $|y|_a = 1$ entonces la otra a de α que no está en y necesariamente está en x o en z:

$$|xy^iz|_a = |x|_a + |y^i|_a + |z|_a = (|x|_a + |z|_a) + i\ |y|_a = 1 + i$$

  Si $i = 3$, $|xy^iz|_a = 1 + i = 4 > 3$ y por tanto $xy^iz \notin L$.
- Si $|y|_a = 2$ entonces

$$|xy^iz|_a = |y^i|_a = i\ |y|_a = 2\ i$$

  Si $i = 3$, $|xy^iz|_a = 2\ i = 6 > 3$ y por tanto $xy^iz \notin L$.
- Los mismos argumentos valen si $|y|_b = 1$ o $|y|_b = 2$.

- **Solución 2:**

Sea $\alpha = c^{n+1}d^{n+1}$.

Es claro que $|\alpha| = 2n + 2 \geq n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Además, $\alpha \in L$ dado que $0 \leq 0 \leq 3$ y $2 \leq n + 1 \leq n + 1$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Así, existe una descomposición válida de α en $x, y, z \in \Sigma^*$, es decir, cadenas $x, y, z \in \Sigma^*$ que cumplen $\alpha = xyz$, $|xy| \leq n$ y $|y| \geq 1$, para la cual para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $xy^iz \in L$.

Sean $n_0 := |xy| \leq n$ y $m := |y|$, $1 \leq m \leq n_0$.

Veamos que $\exists\ i \in \mathbb{N}_0$ tal que $xy^iz \notin L$, llegando a un absurdo.

Dado que y seguro no tiene ds porque puede abarcar a lo sumo los primeros n caracteres de α y ninguno de ellos es una d, entonces $y = c^m$. Además, $x = c^{|xy|-|y|}$ y $z = c^{n+1-|xy|}d^{n+1}$.

Obtenemos

$$\begin{aligned} xy^iz &= c^{n_0-m}(c^m)^i c^{n+1-n_0}d^{n+1} \\ &= c^{n+1+(i-1)m}d^{n+1} \end{aligned}$$

Si $i \geq 2$ entonces

$$\begin{aligned} |xy^iz|_c &= n + 1 + (i-1)\ m \\ &\geq n + 1 + 1\ m \\ &\geq n + 1 + 1\ 1 \\ &= n + 2 \\ &> n + 1 \\ &= |xy^iz|_d \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las palabras de L tienen una cantidad de cs menor o igual a la cantidad de ds, seguro $xy^iz \notin L$ si $i \geq 2$.