Unión de lenguajes regulares

Dados M_1 y M_2 AFDs tales que $\mathcal{L}(M_1) = L_1$ y $\mathcal{L}(M_2) = L_2$, el autómata $M_\cup$ que aceptará el lenguaje $L_1 \cup L_2$, estará dado por $M_\cup =< Q_\cup, \Sigma, \delta_\cup, q_{0\cup}, F_\cup >$ con:

- $Q_\cup = Q_1 \times Q_2$
- $\delta_\cup\left(\left(q, r\right), a\right) = \left(\delta_1\left(q, a\right), \delta_2\left(r, a\right)\right)$ para $q \in Q_1$ y $r \in Q_2$
- $q_{0_\cup} = \left(q_{0_1}, q_{0_2}\right)$
- $F_\cup = \{(p, q) : p \in F_1 \vee q \in Q_2\}$

entonces

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}\left(M\cup\right) \Leftrightarrow \\
\delta_\cup\left(\left(q_{0_1}, q_{0_2}\right)\right) \in F_\cup \Leftrightarrow \\
\left(\delta_1\left(q_{0_1}, x\right), \delta_2\left(q_{0_2}, x\right)\right) \in F_\cup \Leftrightarrow \\
\delta_1\left(q_{0_1}, x\right) \in F_1 \vee \delta_2\left(q_{0_2}, x\right) \in F_2 \Leftrightarrow \\
x \in \mathcal{L}(M_1) \vee x \in \mathcal{L}(M_1)
\end{aligned}
$$

Interseccioón de lenguajes regulares

Dados M_1 y M_2 AFDs tales que $\mathcal{L}(M_1) = L_1$ y $\mathcal{L}(M_2) = L_2$, el autómata $M_\cap$ que aceptará el lenguaje $L_1 \cap L_2$, estará dado por $M_\cap =< Q_\cap, \Sigma, \delta_\cap, q_{0\cap}, F_\cap >$ con:

- $Q_\cap = Q_1 \times Q_2$
- $\delta_\cap\left(\left(q, r\right), a\right) = \left(\delta_1\left(q, a\right), \delta_2\left(r, a\right)\right)$ para $q \in Q_1$ y $r \in Q_2$
- $q_{0_\cap} = \left(q_{0_1}, q_{0_2}\right)$
- $F_\cap = F_1 \times F_2 = \{(p, q) : p \in F_1 \wedge q \in Q_2\}$

entonces

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}\left(M_\cap\right) \Leftrightarrow \\
\delta_\cap\left(\left(q_{0_1}, q_{0_2}\right)\right) \in F_\cap \Leftrightarrow \\
\left(\delta_1\left(q_{0_1}, x\right), \delta_2\left(q_{0_2}, x\right)\right) \in F_\cap \Leftrightarrow \\
\delta_1\left(q_{0_1}, x\right) \in F_1 \wedge \delta_2\left(q_{0_2}, x\right) \in F_2 \Leftrightarrow \\
x \in \mathcal{L}(M_1) \wedge x \in \mathcal{L}(M_1)
\end{aligned}$$

Theorem

El conjunto de lenguajes regulares incluido en Σ^* es cerrado respecto de la complementación.

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$, con $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD cuya función de transición δ está definida para todos los elementos del alfabeto Σ . El autómata

$$M_\neg =< Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F >$$

acepta $\Sigma^* - \mathcal{L}(M)$.

También se puede demostrar que el conjunto de lenguajes regulares es cerrado respecto de la intersección, probando que lo es para la unión y para el complemento, y luego aplicando De Morgan

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}.$$

En forma análoga, puede probarse que el conjunto de lenguajes regulares es cerrado respecto de la unión a partir de la intersección y el complemento.

Entonces: el conjunto de los lenguajes regulares incluidos en Σ^* es cerrado respecto de la unión, dela intersección y del complemento.

De las tres anteriores puede deducirse también que:

Theorem

La unión finita y la intersección finita de lenguajes regulares dan por resultado un leguaje regular.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=1}^{n} L_i \textit{ es regular}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcap_{i=1}^{n} L_i \textit{ es regular}$$

- *para $n = 0$:* $\bigcup_{i=1}^{0} L_i = \emptyset$ *es regular*
- *para $n > 0$:* $\bigcup_{i=1}^{n} L_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i \cup L_n$ *es regular*

idem para $\cap$.

Example

Dada una familia de lenguajes infinita $\{L_i\}_{i=1,\infty}$ ¿Es $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ regular?

Sean $L_i = \{a^i b^i\}$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{a^i b^i\right\} = \left\{a^k b^k : k \in \mathbb{N}\right\}$$

que sabemos que no es regular.

Theorem

Todo lenguaje finito es regular.

Sean x_i las cadenas de un lenguaje L, con $1 \leq i \leq n$ y n $|L|$.

Definamos n lenguajes $L_i = \{x_i\}$, entonces el lenguaje L puede escribirse como

$$L = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}.$$

Como cada lenguaje $L_i = \{x_i\}$ es regular, entonces L también lo es

Problemas decidibles acerca de lenguajes regulares:

1. Pertenencia:

   dados el lenguaje regular L sobre Σ y $x \in \Sigma^*$,
   ¿pertenece x a L?

2. Finitud:

   dado el lenguaje regular L, ¿es L finito?

3. Vacuidad:

   dado el lenguaje regular L, ¿es L vacío?

4. Equivalencia:

   dados los lenguajes regulares L_1 y L_2,
   ¿son L_1 y L_2 equivalentes?

Respuestas

- Pertenencia: Dado el lenguaje regular L,
  - se construye su AFD M tal que $L(M) = L$.
  - *si* x es aceptada, *entonces* pertenece a L y
  sino no.
- Finitud: Un lenguaje regular L es finito, si en su AFD
  ningún ciclo es alcanzable desde el estado inicial y tampocopuede alcanzar algún estado final
  un estado final puede dar lugar a un 'ciclo'.

$$L \text{ finito} \Leftrightarrow \left(\forall q \in Q,\, q_0 \xrightarrow{*} q \wedge q \xrightarrow{*} f \in F \Rightarrow \left(\nexists\, q \xrightarrow{+} q\right)\right)$$

o lo que es lo mismo

$$L \text{ infinito} \Leftrightarrow \left(\exists q \in Q,\, q_0 \xrightarrow{*} q \;\wedge\; q \xrightarrow{*} f \in F \;\wedge q \xrightarrow{+} q\right)$$

- Vacuidad: Dado el lenguaje regular L,
  - se construye su AFD M tal que $\mathcal{L}(M) = L$
  - se determina el conjunto A de estados alcanzables.
  - *si* $F \cap A = \emptyset$ *entonces* el lenguaje L es vacío y *sino* no.
- Equivalencia: Dados los lenguajes regulares L_1 y L_2, aceptados por los autómatas M_1 y M_2 respectivamente, si el lenguaje regular

$$\left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) \cup \left(\overline{L_1} \cap L_2\right)$$

es vacío entonces L_1 y L_2 son equivalentes, sino no lo son.