Definition

Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ es independiente del contexto sii las producciones en P son de la forma

$$A \to \alpha, \quad \text{con} \quad A \in V_N \quad \text{y} \quad \alpha \in (V_N \cup V_T)^*.$$

Si en particular $\alpha \in (V_N \cup V_T)^+$ (o sea, sin reglas borradoras) la diremos que la gramática es **propia.**

Example

Dada la gramática $G = \langle \{E\}, \{+, *, \textbf{id}, \textbf{const}\}, P, E\rangle$ con

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & E \to E + E, \\ & E \to E * E, \\ & E \to \textbf{id}, \\ & E \to \textbf{const}\}, \end{aligned}$$

Definition

Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ es independiente del contexto sii las producciones en P son de la forma

$$A \rightarrow \alpha, \;\; \text{con} \;\; A \in V_N \;\; \text{y} \;\; \alpha \in (V_N \cup V_T)^* .$$

Si en particular $\alpha \in (V_N \cup V_T)^+$ (o sea, sin reglas borradoras) la diremos que la gramática es **propia**.

Example

Dada la gramática $G = \langle \{E\}, \{+, *, \textbf{id}, \textbf{const}\}, P, E\rangle$ con

$$P = \{ \begin{array}{l} E \rightarrow E + E, \\ E \rightarrow E * E, \\ E \rightarrow \textbf{id}, \\ E \rightarrow \textbf{const}\}, \end{array}$$

Definition

Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ es independiente del contexto sii las producciones en P son de la forma

$$A \rightarrow \alpha, \;\; \text{con} \;\; A \in V_N \;\;\; \text{y} \;\; \alpha \in (V_N \cup V_T)^* \, .$$

Si en particular $\alpha \in (V_N \cup V_T)^+$ (o sea, sin reglas borradoras) la diremos que la gramática es **propia.**

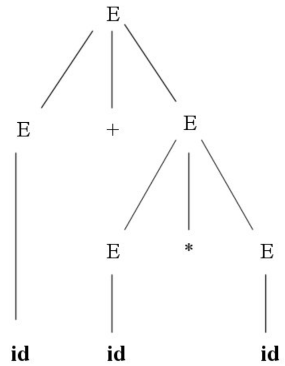
Example

Dada la gramática $G = \langle \{E\}, \{+, *, \mathbf{id}, \mathbf{const}\}, P, E \rangle$ con

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & E \rightarrow E + E, \\ & E \rightarrow E * E, \\ & E \rightarrow \mathbf{id}, \\ & E \rightarrow \mathbf{const}\}, \end{aligned}$$

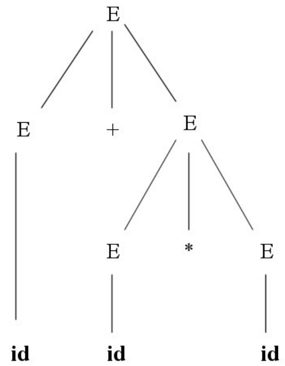
Example

un Árbol de derivación posible de la cadena **id + id * id** es



Example

un Árbol de derivación posible de la cadena **id + id * id** es



Definition (Árbol de derivación)

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto. Un árbol de derivación para G es tal que

1. cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
2. excepto la raíz, cuya etiqueta es el símbolo distinguido S.
3. si un vértice es interior, su etiqueta debe pertenecer a V_N.
4. si un vértice n posee la etiqueta A y sus hijos $n_1, \ldots, n_k$ poseen etiquetas $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, entonces $A \to X_1 \ldots X_k$ debe ser una producción de P.
5. si un vértice posee la etiqueta λ, entonces es una hoja y es el único hijo de su padre.

Definition (Árbol de derivación)

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ una gramática independiente de contexto. Un árbol de derivación para G es tal que

1. cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
2. excepto la raíz, cuya etiqueta es el símbolo distinguido S.
3. si un vértice es interior, su etiqueta debe pertenecer a V_N.
4. si un vértice n posee la etiqueta A y sus hijos $n_1, \ldots, n_k$ poseen etiquetas $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, entonces $A \rightarrow X_1, \ldots, X_k$ debe ser una producción de P.
5. si un vértice posee la etiqueta λ, entonces es una hoja y es el único hijo de su padre.

Definition (Árbol de derivación)

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto. Un árbol de derivación para G es tal que

1. cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
2. excepto la raíz, cuya etiqueta es el símbolo distinguido S.
3. si un vértice es interior, su etiqueta debe pertenecer a V_N.
4. si un vértice n posee la etiqueta A y sus hijos $n_1, \ldots, n_k$ poseen etiquetas $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, entonces $A \to X_1, \ldots, X_k$ debe ser una producción de P.
5. si un vértice posee la etiqueta λ, entonces es una hoja y es el único hijo de su padre.

Definition (Árbol de derivación)

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto. Un árbol de derivación para G es tal que

1. cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
2. excepto la raíz, cuya etiqueta es el símbolo distinguido S.
3. si un vértice es interior, su etiqueta debe pertenecer a V_N.
4. si un vértice n posee la etiqueta A y sus hijos $n_1, \ldots, n_k$ poseen etiquetas $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, entonces $A \rightarrow X_1, \ldots, X_k$ debe ser una producción de P.
5. si un vértice posee la etiqueta λ, entonces es una hoja y es el único hijo de su padre.

Definition (Árbol de derivación)

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto. Un árbol de derivación para G es tal que

1. cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
2. excepto la raíz, cuya etiqueta es el símbolo distinguido S.
3. si un vértice es interior, su etiqueta debe pertenecer a V_N.
4. si un vértice n posee la etiqueta A y sus hijos $n_1, \ldots, n_k$ poseen etiquetas $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, entonces $A \rightarrow X_1, \ldots, X_k$ debe ser una producción de P.
5. si un vértice posee la etiqueta λ, entonces es una hoja y es el único hijo de su padre.

Definition (Árbol de derivación)

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto. Un árbol de derivación para G es tal que

1. cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
2. excepto la raíz, cuya etiqueta es el símbolo distinguido S.
3. si un vértice es interior, su etiqueta debe pertenecer a V_N.
4. si un vértice n posee la etiqueta A y sus hijos $n_1, \ldots, n_k$ poseen etiquetas $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, entonces $A \to X_1, \ldots, X_k$ debe ser una producción de P.
5. si un vértice posee la etiqueta λ, entonces es una hoja y es el único hijo de su padre.

Definition (Árbol de derivación)

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto. Un árbol de derivación para G es tal que

1. cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
2. excepto la raíz, cuya etiqueta es el símbolo distinguido S.
3. si un vértice es interior, su etiqueta debe pertenecer a V_N.
4. si un vértice n posee la etiqueta A y sus hijos $n_1, \ldots, n_k$ poseen etiquetas $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, entonces $A \rightarrow X_1, \ldots, X_k$ debe ser una producción de P.
5. si un vértice posee la etiqueta λ, entonces es una hoja y es el único hijo de su padre.

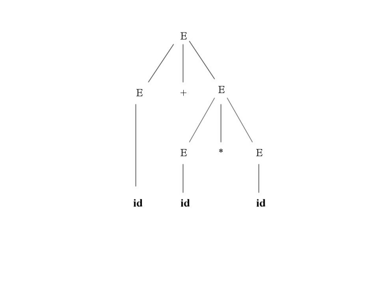
Definition (Gramáticas ambiguas)

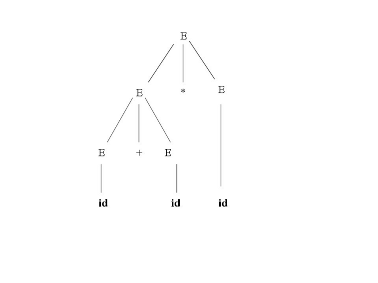
Una gramática independiente del contexto G es ambigua sii

$$\exists x \in \mathcal{L}(G) \text{ tal que ésta posee más de un árbol de derivación.}$$

Example

Siguiendo con la gramática del ejemplo anterior, podemos encontrar los siguientes **dos** árboles de derivación para la cadena **id + id * id**





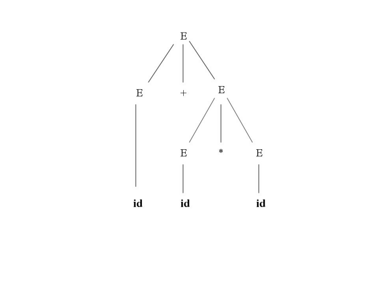
Definition (Gramáticas ambiguas)

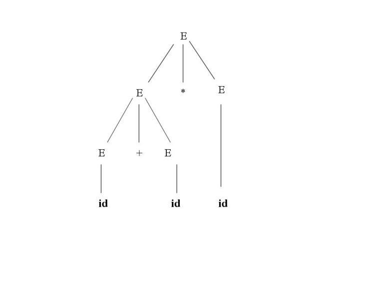
Una gramática independiente del contexto G es ambigua sii

$\exists x \in \mathcal{L}(G)$ tal que ésta posee más de un árbol de derivación.

Example

Siguiendo con la gramática del ejemplo anterior, podemos encontrar los siguientes **dos** árboles de derivación para la cadena **id + id * id**





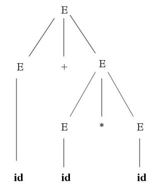
Definition (Gramáticas ambiguas)

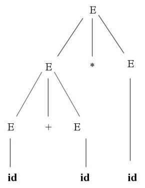
Una gramática independiente del contexto G es ambigua sii

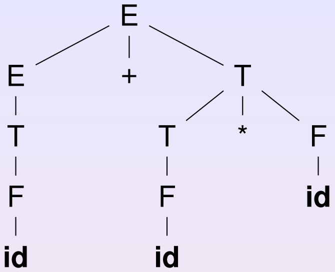
$$\exists x \in \mathcal{L}(G) \text{ tal que ésta posee más de un árbol de derivación.}$$

Example

Siguiendo con la gramática del ejemplo anterior, podemos encontrar los siguientes **dos** árboles de derivación para la cadena **id + id * id**





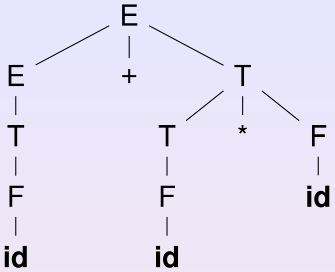


Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id*****id**:

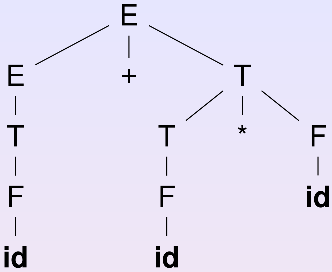
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id*****id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

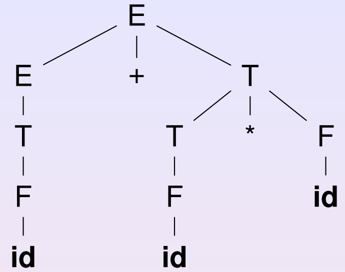


Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id*****id**:

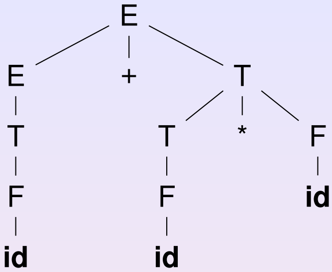
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id*****id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id***id**:

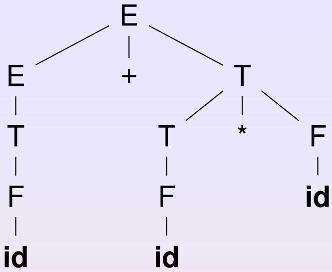
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id*id**:

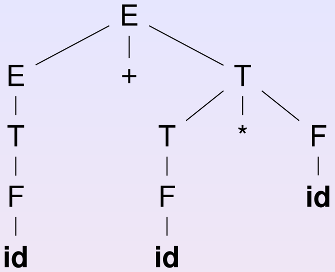
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

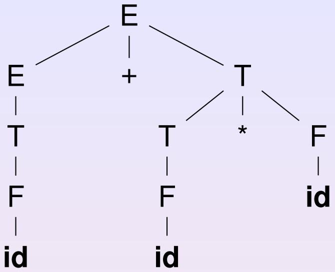
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

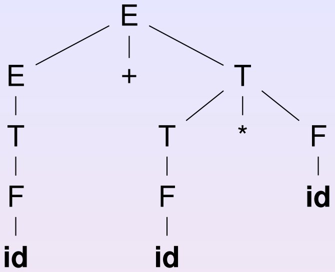
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

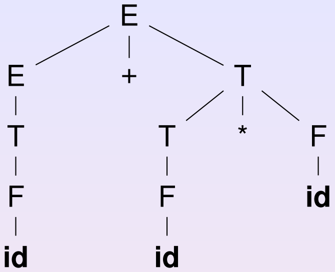


Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id*****id**:

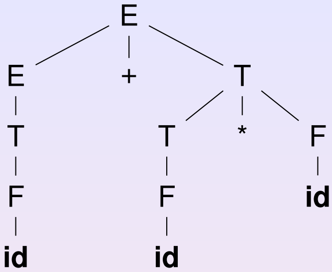
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id*****id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

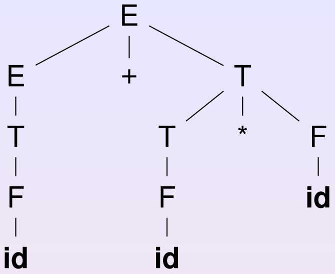
$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$

$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$

$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

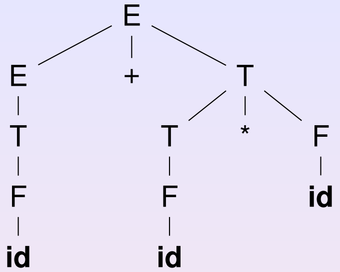


Derivación más a la izquierda de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id** + **id***id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

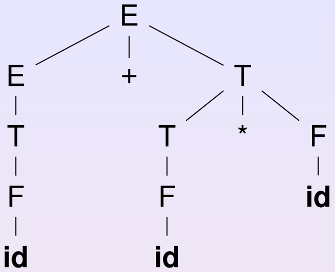


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

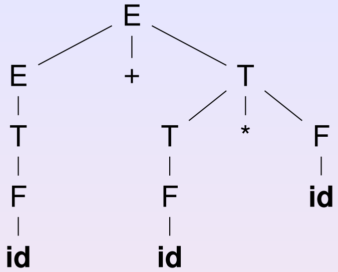


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

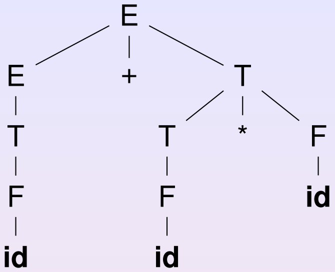


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

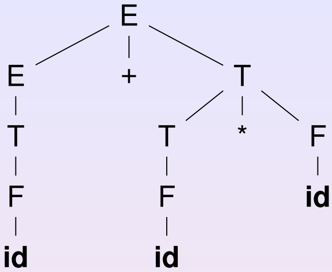


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

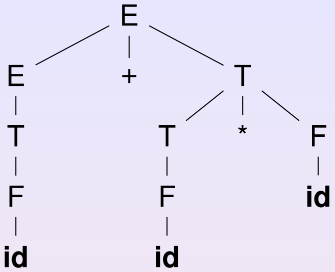


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

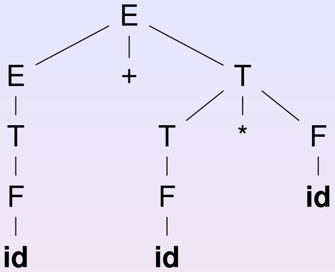


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

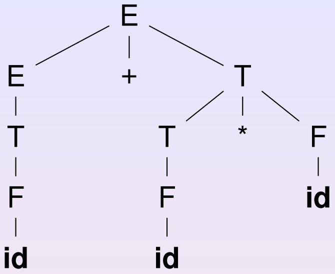


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

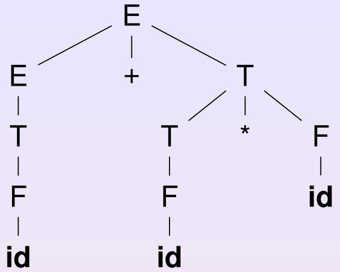


Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E + T \underset{L}{\Rightarrow} T + T \underset{L}{\Rightarrow} F + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + T * F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + F * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E + T \underset{R}{\Rightarrow} E + T * F \underset{R}{\Rightarrow} E + T * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E + F * \mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F + \mathbf{id} * \mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id} + \mathbf{id} * \mathbf{id}$$



Derivación más a la izquierda de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{L}{\Rightarrow} E+T \underset{L}{\Rightarrow} T+T \underset{L}{\Rightarrow} F+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+T*F$$
$$\underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+F*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*F \underset{L}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Derivación más a la derecha de la cadena **id + id*id**:

$$E \underset{R}{\Rightarrow} E+T \underset{R}{\Rightarrow} E+T*F \underset{R}{\Rightarrow} E+T*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} E+F*\mathbf{id}$$
$$\underset{R}{\Rightarrow} E+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} T+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} F+\mathbf{id}*\mathbf{id} \underset{R}{\Rightarrow} \mathbf{id}+\mathbf{id}*\mathbf{id}$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_2 \in V_T^*$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto, } L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \to \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \to \alpha' \in P \text{ y } \alpha_2 \in V_T^*$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto *L* es **intrínsecamente ambiguo** sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, \; L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es **intrínsecamente ambiguo** sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_2 \in V_T^*$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto, } L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \to \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } \ldots$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_2 \in V_T^*.$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \to \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \to \alpha' \in P \text{ y } \alpha_2 \in V_T^*.$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_2 \in V_T^*.$$

Definition

Un lenguaje independiente de contexto L es intrínsecamente ambiguo sii

$$\forall G \text{ indep. de contexto}, L = \mathcal{L}(G) \Rightarrow G \text{ es ambigua.}$$

Definition

Derivación más a la izquierda $\underset{L}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{L}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_1 \in V_T^*.$$

Definition

Derivación más a la derecha $\underset{R}{\Rightarrow}$ es aquella derivación en la que

$$\alpha_1 A \alpha_2 \underset{R}{\Rightarrow} \alpha_1 \alpha' \alpha_2 \text{ si } A \rightarrow \alpha' \in P \text{ y } \alpha_2 \in V_T^*.$$

Definition

Llamamos camino de X en un árbol $\mathcal{T}(A)$, donde X es un nodo, a la cadena $A, X_1, \ldots, X_k, X$ tal que $A \to \ldots X_1 \ldots \to \ldots X_2 \ldots \to \ldots\ldots \to \ldots X_k \ldots \to \ldots X \ldots$ donde $A, X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(A)$.

Definition

Llamamos altura de $\mathcal{T}(A)$ a

$$\text{máx}\,\{|\alpha x| : x \text{ es una hoja de } \mathcal{T}(A) \text{ y } \alpha x \text{ es un camino de } x\}$$

Definition

longitud de un camino de X es la cantidad de arcos del camino que une A con X en $\mathcal{T}(A)$.

Definition

Llamamos camino de X en un árbol $\mathcal{T}(A)$, donde X es un nodo, a la cadena $A, X_1, \ldots, X_k, X$ tal que
$A \to \ldots X_1 \ldots \to \ldots X_2 \ldots \to \ldots\ldots \to \ldots X_k \ldots \to \ldots X \ldots$
donde $A, X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(A)$.

Definition

Llamamos altura de $\mathcal{T}(A)$ a

$$\text{máx}\{|\alpha x| : x \text{ es una hoja de } \mathcal{T}(A) \text{ y } \alpha x \text{ es un camino de } x\}$$

Definition

longitud de un camino de X es la cantidad de arcos del camino que une A con X en $\mathcal{T}(A)$.

Definition

Llamamos camino de X en un árbol $\mathcal{T}(A)$, donde X es un nodo, a la cadena $A, X_1, \ldots, X_k, X$ tal que
$A \to \ldots X_1 \ldots \to \ldots X_2 \ldots \to \ldots\ldots \to \ldots X_k \ldots \to \ldots X \ldots$
donde $A, X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(A)$.

Definition

Llamamos altura de $\mathcal{T}(A)$ a

$$\text{máx}\,\{|\alpha x| : x \text{ es una hoja de } \mathcal{T}(A) \text{ y } \alpha x \text{ es un camino de } x\}$$

Definition

longitud de un camino de X es la cantidad de arcos del camino que une A con X en $\mathcal{T}(A)$.

Definition

Llamamos camino de X en un árbol $\mathcal{T}(A)$, donde X es un nodo, a la cadena $A, X_1, \ldots, X_k, X$ tal que
$A \to \ldots X_1 \ldots \to \ldots X_2 \ldots \to \ldots\ldots \to \ldots X_k \ldots \to \ldots X \ldots$
donde $A, X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(A)$.

Definition

Llamamos altura de $\mathcal{T}(A)$ a

$$\max\{|\alpha x| : x \text{ es una hoja de } \mathcal{T}(A) \text{ y } \alpha x \text{ es un camino de } x\}$$

Definition

longitud de un camino de X es la cantidad de arcos del camino que une A con X en $\mathcal{T}(A)$.

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $T(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \text{máx}\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$
- paso inductivo:

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \max\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$
- paso inductivo:

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \max\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- paso base: $h = 0$
- paso inductivo

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \max\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- paso base $h = 0$
- paso inductivo

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ *una gramática independiente de contexto con* $P \neq \emptyset$ *y sea* $\mathcal{T}(S)$ *un árbol de derivación en G para* α *cuya altura designaremos como h.*
Si $a = \text{máx}\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, *entonces* $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en *h*.

- paso base $h = 0$
- paso inductivo

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \max\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$
- paso inductivo:

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \max\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en *h*.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo:

$\square$

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \max\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo:

$\square$

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \text{máx}\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo:

□

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \text{máx}\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo:

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \max\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo: Si $\mathcal{T}(S)$ es de altura $h+1$, entonces la longitud del camino hasta alguna de sus hojas será $h+1$. Sea α la base de $\mathcal{T}(S)$ (de altura $h+1$), y sea γ la base de altura h

$\square$

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ *una gramática independiente de contexto con* $P \neq \emptyset$ *y sea* $\mathcal{T}(S)$ *un árbol de derivación en G para* α *cuya altura designaremos como h.*
Si $a = \text{máx}\{|\beta| : A \rightarrow \beta \in P\}$, *entonces* $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo: Si $\mathcal{T}(S)$ es de altura $h+1$, entonces la longitud del camino hasta alguna de sus hojas será $h+1$. Sea α la base de $\mathcal{T}(S)$ (de altura $h+1$), y sea γ la base de altura h

□

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \text{máx}\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo: Si $\mathcal{T}(S)$ es de altura $h + 1$, entonces la longitud del camino hasta alguna de sus hojas será $h + 1$. Sea α la base de $\mathcal{T}(S)$ (de altura $h + 1$), y sea γ la base de altura h

□

Lemma

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$ una gramática independiente de contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol de derivación en G para α cuya altura designaremos como h.
Si $a = \text{máx}\{|\beta| : A \to \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$.

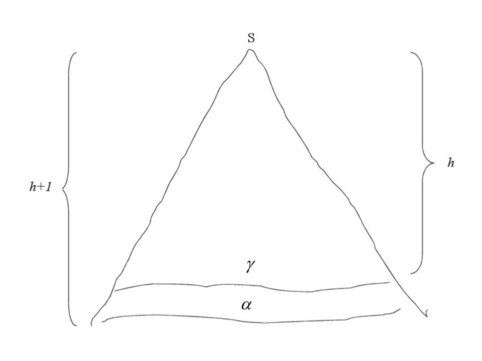
Demostración.

por inducción en h.

- caso base: $h = 0$ si $h = 0$, el único árbol de derivación posible es el símbolo distinguido S y su altura es nula. Por lo tanto $a^h = a^0 = 1$ y $|S| \leq 1$.
- paso inductivo: Si $\mathcal{T}(S)$ es de altura $h + 1$, entonces la longitud del camino hasta alguna de sus hojas será $h + 1$. Sea α la base de $\mathcal{T}(S)$ (de altura $h + 1$), y sea γ la base de altura h

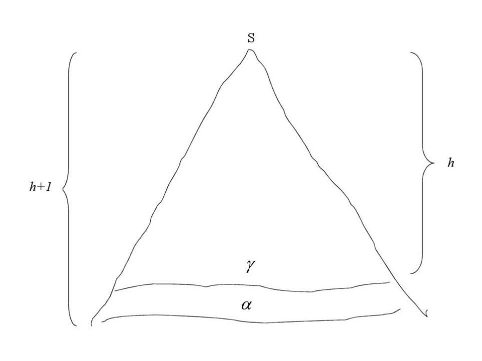
□

Demostración.



luego $|\alpha| \leq a\,|\gamma|$.
Pero, por h.i. $|\gamma| \leq a^h$, entonces $|\alpha| \leq a\,|\gamma| \leq aa^h = a^{h+1}$. □

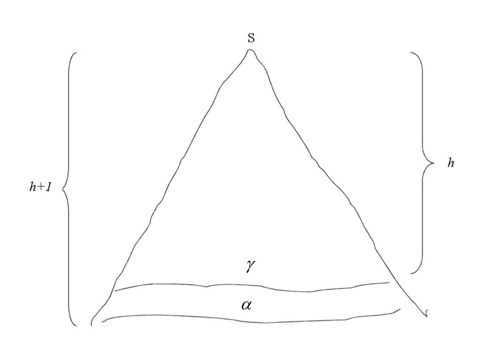
Demostración.



luego $|\alpha| \leq a\,|\gamma|$.

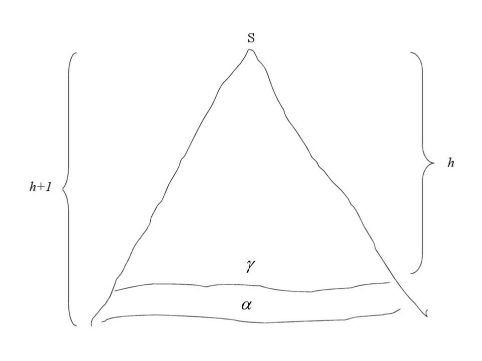
Pero, por h.i. $|\gamma| \leq a^h$, entonces $|\alpha| \leq a\,|\gamma| \leq aa^h = a^{h+1}$. $\square$

Demostración.



luego $|\alpha| \leq a\,|\gamma|$.
Pero, por h.i. $|\gamma| \leq a^h$, entonces $|\alpha| \leq a\,|\gamma| \leq aa^h = a^{h+1}$. $\square$

Demostración.



luego $|\alpha| \leq a\,|\gamma|$.
Pero, por h.i. $|\gamma| \leq a^h$, entonces $|\alpha| \leq a\,|\gamma| \leq aa^h = a^{h+1}$. $\square$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$\forall L$ *indep. del contexto*, $\exists n > 0$:

$\forall \alpha \in L, (|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s$:

$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$

$$\forall i \geq 0, (rx^iyz^is \in L))$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$\forall L$ *indep. del contexto*, $\exists n > 0 :$

$\forall \alpha \in L, \big(|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s :$

$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$

$$\forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L)\big)$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \textit{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$

$$\forall \alpha \in L, \left(|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s : \right.$$

$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$

$$\left. \forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L) \right)$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \textit{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$
$$\forall \alpha \in L, \left(|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s : \right.$$
$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$
$$\left. \forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L) \right)$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \text{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$
$$\forall \alpha \in L, \Big(|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s :$$
$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$
$$\forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L) \Big)$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \textit{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$
$$\forall \alpha \in L, (\, |\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s :$$
$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$
$$\forall i \geq 0, (rx^iyz^is \in L))$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \text{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$
$$\forall \alpha \in L, (\,|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s :$$
$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$
$$\forall i \geq 0, (rx^iyz^is \in L))$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \textit{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$
$$\forall \alpha \in L, (\, |\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s :$$
$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$
$$\forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L))$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \textit{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$
$$\forall \alpha \in L, (\, |\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s :$$
$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$
$$\forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L))$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$\forall L \textit{ indep. del contexto}, \exists n > 0 :$$
$$\forall \alpha \in L, (\, |\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s :$$
$$\alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge$$
$$\forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L))$$

Lemma (Pumping para gramáticas independientes del contexto.)

$$
\begin{aligned}
&\forall L \textit{ indep. del contexto}, \exists n > 0 : \\
&\forall \alpha \in L, (\,|\alpha| \geq n \Rightarrow \exists r, x, y, z, s : \\
&\qquad \alpha = rxyzs \quad \wedge \quad |xyz| \leq n \quad \wedge \quad |xz| > 0 \quad \wedge \\
&\qquad \forall i \geq 0, (rx^i yz^i s \in L))
\end{aligned}
$$

Demostración.

Sea G una gramática del tipo 2 tal que $L = \mathcal{L}(G)$ y sea $a = \text{máx}\{|\beta| : a \to \beta \in P\}$. Tomemos $n = a^{|V_N|+1}$ y consideremos la cadena $\alpha \in L$ tal que $|\alpha| \geq n$. Sea $\mathcal{T}(S)$ un árbol mínimo (de altura mínima) de derivación de α. Por el lema 13 resulta que $a^h \geq |\alpha|$, por lo que

$$a^h \geq |\alpha| \geq n = a^{|V_N|+1},$$

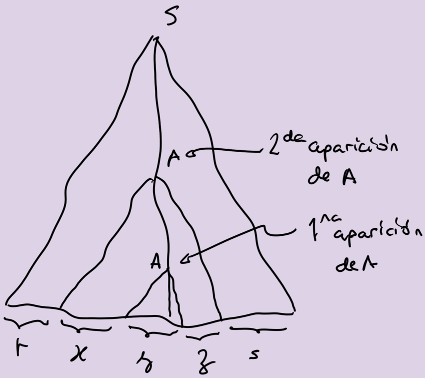
de donde

$$h \geq |V_N| + 1.$$

Entonces, existirá algún símbolo en α tal que su camino será de longitud mayor o igual a $|V_N| + 1$. Como la cantidad de símbolos no terminales es $|V_N|$, entonces en ese camino seguramente existe un no-terminal repetido. $\square$

Demostración.

Llamemos A a ese no-terminal repetido. Recorriendo dicho camino en forma ascendente consideremos la primera y la segunda aparición de dicho no-terminal, tal como se ve en la figura.



Demostración.

La segunda aparición de A da lugar a la cadena xyz. Como tenemos la garantía de que podemos encontrar un A tal que esa segunda aparición esté a una distancia no mayor que $|V_N| + 1$ respecto de la base, entonces es cierto que

$$n = a^{|V_N|+1} \geq |xyz| .$$

Por otro lado, como el árbol considerado es de altura mínima entre todos aquellos que sirven para generar la cadena α, siempre puedo encontrar un camino de longitud máxima entre la raíz y alguna hoja en el que x y z no sean simultáneamente nulas, ya que de no ser así podría derivarse α mediante un árbol mas bajo. □

Demostración.

Finalmente, ya que $A \overset{*}{\Rightarrow} y$ y que $A \overset{*}{\Rightarrow} xyz$, entonces es cierto que

$$S \overset{*}{\Rightarrow} rAs \overset{*}{\Rightarrow} rys,$$

con lo que $rx^0yz^0s = rys \in L$.

Y si consideramos cierto, por hipótesis inductiva, que $S \overset{*}{\Rightarrow} rx^{i-1}Az^{i-1}s \Rightarrow rx^{i-1}yz^{i-1}s$ entonces es también cierto que

$$S \overset{*}{\Rightarrow} rx^{i-1}Az^{i-1}s \Rightarrow rx^{i-1}xyzz^{i-1}s = rx^iyz^is,$$

y por lo tanto $rx^iyz^is \in L$. □

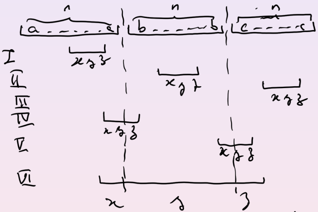
Example

Probar que el lenguaje $L = \{a^nb^nc^n : n \geq 1\}$ no es independiente del contexto.

$L = \{a^k b^k c^k : k \geq 0\}$ no es un LIC.

Supongamos que existe n para el cual L cumple Pumping. Podemos tomar entonces la cadena $a^n b^n c^n$.

Como $|a^n b^n c^n| = 3n \geq n$ esta debería poseer alguna descomposición válida



I, II y III desequilibran la cantidad de as, bs y cs respectivamente.

IV y V mezclan as y bs y bs y cs respectivamente

VI también mezcla, pero además excede la longitud permitida máxima n.

Propiedades de los lenguajes independientes del contexto.

Theorem

Si L_1 y L_2 son dos lenguajes independientes del contexto, entonces $L_1 \cup L_2$ lo es también.

Demostración.

Como L_1 y L_2 son dos lenguajes independientes del contexto, entonces existen dos gramáticas independientes del contexto $G_1 = \langle V_{N_1}, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ y $G_2 = \langle V_{N_2}, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ tales que $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$. Supongamos además, sin pérdida de generalidad que $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \emptyset$. Definamos entonces

$$G = \langle V_{N_1} \cup V_{N_2} \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S \rangle .$$

Puede demostrarse fácilmente que $\forall \alpha \in \Sigma^*, \alpha \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$. $\square$

Theorem

Si L_1 y L_2 son dos lenguajes independientes del contexto, entonces $L_1 L_2$ lo es también.

Demostración.

Como L_1 y L_2 son dos lenguajes independientes del contexto, entonces existen dos gramáticas independientes del contexto $G_1 = \langle V_{N_1}, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ y $G_2 = \langle V_{N_2}, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ tales que $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$. Supongamos además, sin pérdida de generalidad que $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \emptyset$. Definamos entonces

$$G = \langle V_{N_1} \cup V_{N_2} \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S \rangle .$$

Puede demostrarse fácilmente que $\forall \alpha \in \Sigma^*,\ \alpha \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$. $\square$

Theorem

Si L_1 es un lenguaje independiente del contexto, entonces L_1^+ lo es también.

Demostración.

Como L_1 es un lenguaje independiente del contexto, entonces existe una gramática independiente del contexto $G_1 = \langle V_{N_1}, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ tal que $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$.
Definamos entonces

$$G = \langle V_{N_1} \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S, S \to S_1\}, S \rangle .$$

Puede demostrarse fácilmente que
$\forall \alpha \in \Sigma^*, \alpha \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(G_1)^+$. $\square$

Theorem

Si L_1 y L_2 son dos lenguajes independientes del contexto, entonces $L_1 \cap L_2$ no siempre es un lenguaje independiente del contexto.

Demostración.

Sean

$$L_1 = \left\{a^n b^m c^l : m, n, l \geq 0 \quad \wedge \quad n = m\right\}$$
$$L_2 = \left\{a^n b^m c^l : n, m, l \geq 0 \quad \wedge \quad m = l\right\}.$$

Puede demostrarse que son lenguajes independientes del contexto ya que, por ejemplo la gramática

$$G_1 = \langle \{S, A, C\}, \{a, b, c\}, \{S \to AC \mid C,\ A \to aAb \mid ab,\ C \to cC \mid \lambda\}$$

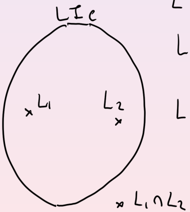
genera el lenguaje L_1.Lo mismo puede hacerse para L_2.

Demostración.

Pero

$$L_1 \cap L_2 = \left\{ a^n b^m c^l : m, n, l \geq 0 \quad \wedge \quad n = m = l \right\},$$

y este lenguaje no es independiente del contexto, como puede demostrarse utilizando el lema de pumping correspondiente a este tipo de lenguajes. □



$L_1 = \{a^n b^m c^l : n, m, l \geq 0 \wedge n = m\}$

$L_2 = \{a^n b^m c^l : n, m, l \geq 0 \wedge m = l\}$

$L_1 \cap L_2 = \{a^k b^k c^k : k \geq 0\}$

Theorem

El lenguaje $L = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ no es un lenguaje independiente del contexto.

Demostración.

Puede verse que el lenguaje $L_1 = \{a^n b^m a^n b^m : n, m \geq 0\}$ es tal que

$$L_1 = L \cap a^* b^* a^* b^*.$$

donde $a^* b^* a^* b^*$ es un lenguaje regular.

Puede probarse que la intersección entre un lenguaje regular y un lenguaje independiente del contexto da como resultado un lenguaje independiente del contexto.

□

Theorem

El lenguaje $L = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ no es un lenguaje independiente del contexto.

Demostración.

Puede verse que el lenguaje $L_1 = \{a^n b^m a^n b^m : n, m \geq 0\}$ es tal que

$$L_1 = L \cap a^* b^* a^* b^*.$$

donde $a^* b^* a^* b^*$ es un lenguaje regular.

Puede probarse que la intersección entre un lenguaje regular y un lenguaje independiente del contexto da como resultado un lenguaje independiente del contexto.

□

Theorem

El lenguaje $L = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ no es un lenguaje independiente del contexto.

Demostración.

Puede verse que el lenguaje $L_1 = \{a^n b^m a^n b^m : n, m \geq 0\}$ es tal que

$$L_1 = L \cap a^* b^* a^* b^*.$$

donde $a^* b^* a^* b^*$ es un lenguaje regular.

Puede probarse que la intersección entre un lenguaje regular y un lenguaje independiente del contexto da como resultado un lenguaje independiente del contexto. $\square$

Demostración.

(cont.) Pero utilizando el lema de pumping, puede demostrarse que L_1 no es independiente del contexto, por lo tanto L tampoco lo es.

Esto implica que para un lenguaje en el cual se las variables se declaran, una gramática independiente del contexto no es suficiente para especificar el lenguaje. $\square$

Demostración.

(cont.) Pero utilizando el lema de pumping, puede demostrarse que L_1 no es independiente del contexto, por lo tanto L tampoco lo es.

Esto implica que para un lenguaje en el cual se las variables se declaran, una gramática independiente del contexto no es suficiente para especificar el lenguaje. $\square$

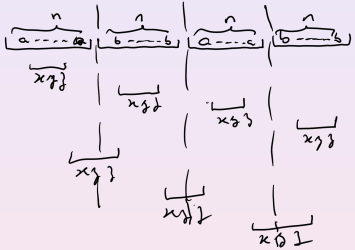
Demostración.

(cont.) Pero utilizando el lema de pumping, puede demostrarse que L_1 no es independiente del contexto, por lo tanto L tampoco lo es.

Esto implica que para un lenguaje en el cual se las variables se declaran, una gramática independiente del contexto no es suficiente para especificar el lenguaje. $\square$

$L = \{a^k b^l a^k b^l : k, l \geq 0\}$ no es LIC

Analizamos las descomposiciones posibles para la cadena $a^n b^n a^n b^n$ con n la longitud del lema de Pumping.



No consideramos los casos en los que $|xyz| > n$.

Theorem

Existe un lenguaje independiente del contexto que es ***no-determinístico****.*

Demostración.

Consideremos el lenguaje $L = \{a^k b^k c^k, k \geq 0\}$. Sabemos que L no es independiente del contexto.
Determinemos ahora qué tipo de lenguaje es el complemento de L, o sea $\overline{L}$.
Este lenguaje puede escribirse como

$$\begin{aligned} \overline{L} &= \{a^i b^j c^k, \text{con } i \neq j,\ i, j, k \geq 0\} \cup \\ & \{a^i b^j c^k, \text{con } j \neq k,\ i, j, k \geq 0\} \cup \\ & \overline{a^* b^* c^*}, \end{aligned}$$

Entonces, este lenguaje puede escribirse comola unión de dos lenguajes independientes del contexto, y un lenguaje regular.
Es, por lo tanto, independiente del contexto. $\square$

cont.

Puede demostrarse que el complemento de un lenguaje independiente del contexto **determinístico** (LICD) es también independiente del contexto **determinístico**, O sea, para cualquier lenguaje L es cierto que

$$L \text{ es LICD} \Rightarrow \overline{L} \text{ es LICD}$$

Entonces, si $\overline{L}$ fuera independiente del contexto **determinístico** (LICD), entonces su complemento $\overline{\overline{L}}$ también lo sería.

Pero $\overline{\overline{L}} = L$, y L ni siquiera es independiente del contexto.

Por lo tanto, $\overline{L}$ debe ser independiente del contexto **no-determinístico**.

cont.

Puede demostrarse que el complemento de un lenguaje independiente del contexto **determinístico** (LICD) es también independiente del contexto **determinístico**, O sea, para cualquier lenguaje L es cierto que

$$L \text{ es LICD} \Rightarrow \overline{L} \text{ es LICD}$$

Entonces, si $\overline{L}$ fuera independiente del contexto **determinístico** (LICD), entonces su complemento $\overline{\overline{L}}$ también lo sería.

Pero $\overline{\overline{L}} = L$, y L ni siquiera es independiente del contexto.

Por lo tanto, $\overline{L}$ debe ser independiente del contexto **no-determinístico**. □

cont.

Puede demostrarse que el complemento de un lenguaje independiente del contexto **determinístico** (LICD) es también independiente del contexto **determinístico**, O sea, para cualquier lenguaje L es cierto que

$$L \text{ es LICD} \;\Rightarrow\; \overline{L} \text{ es LICD}$$

Entonces, si $\overline{L}$ fuera independiente del contexto **determinístico** (LICD), entonces su complemento $\overline{\overline{L}}$ también lo sería.

Pero $\overline{\overline{L}} = L$, y L ni siquiera es independiente del contexto.

Por lo tanto, $\overline{L}$ debe ser independiente del contexto **no-determinístico.**

cont.

Puede demostrarse que el complemento de un lenguaje independiente del contexto **determinístico** (LICD) es también independiente del contexto **determinístico**, O sea, para cualquier lenguaje L es cierto que

$$L \text{ es LICD} \;\Rightarrow\; \overline{L} \text{ es LICD}$$

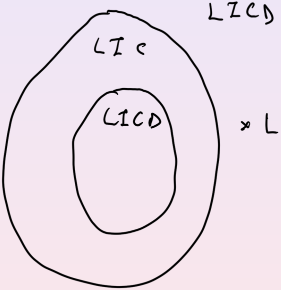
Entonces, si $\overline{L}$ fuera independiente del contexto **determinístico** (LICD), entonces su complemento $\overline{\overline{L}}$ también lo sería.

Pero $\overline{\overline{L}} = L$, y L ni siquiera es independiente del contexto.

Por lo tanto, $\overline{L}$ debe ser independiente del contexto **no-determinístico**. $\square$

LIC = Lenguajes Indep. del contexto

LICD = LIC determinísticos



Consideremos

$$L = \{a^k b^k c^k : k \geq 0\}$$

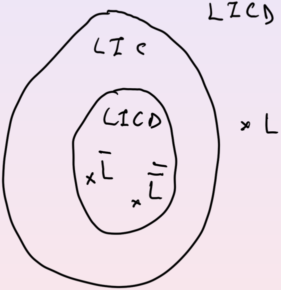
Hallemos su complemento $\overline{L}$:

$$\overline{L} = \{a^i b^j c^k : i,j,k \geq 0 \wedge i \neq j\} \cup \{a^i b^j c^k : i,j,k \geq 0 \wedge j \neq k\} \cup \overline{a^* b^* c^*}$$

¿Dónde está $\overline{L}$?

LIC = Lenguajes Indep. del contexto

LICD = LIC determinísticos



Consideremos

$$L = \{a^k b^k c^k : k \geq 0\}$$

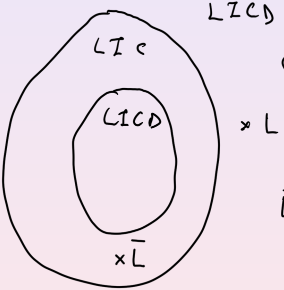
Hallemos su complemento $\bar{L}$:

$$\bar{L} = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \wedge i \neq j\} \cup$$
$$\{a^j b^i c^k : i, j, k \geq 0 \wedge j \neq k\} \cup$$
$$\overline{a^* b^* c^*}$$

¿Dónde está $\bar{L}$?

LIC = Lenguajes Indep. del contexto

LICD = LIC determinísticos



Consideremos

$$L = \{a^k b^k c^k : k \geq 0\}$$

Hallemos su complemento $\overline{L}$:

$$\overline{L} = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \wedge i \neq j\} \cup \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \wedge j \neq k\} \cup \overline{a^* b^* c^*}$$

¿Dónde está $\overline{L}$?

Definition

Dada una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$, una cadena α de símbolos tal que $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$ es llamada **forma sentencial** sii $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$.

Definition

Dada una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$, un símbolo $A \in V_N$ es **alcanzable** sii $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \ldots A \ldots$, o sea, existe una forma sentencial que lo contiene.

Definition

Dada una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$, el símbolo A es **activo** sii $\exists \alpha \in V_T^* : A \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$.

Algorithm 1 para obtener el conjunto de no-terminales activos de una gramática

$Act \leftarrow \emptyset$
repeat
    for cada producción $A \rightarrow \alpha \in P$ **do**
        if $\alpha \in (Act \cup V_T)^*$ **then**
            $Act \leftarrow Act \cup \{A\}$
        end if
    end for
until *Act* no cambie

Definition

Una gramática G es **reducida** sii $\forall A \in V_N$, A es alcanzable y activo.

proposition

Sea G una gramática independiente de contexto, existe una gramática propia (o sea, sin producciones borradoras) G′ que genera el mismo lenguaje sin la cadena nula:

$$\forall G \ GIC, \exists G' \ GIC \ propia : L(G) = L(G') \quad \vee \quad L(G) = L(G') \cup \{\lambda\}$$

No terminal anulable

Se dice que un no-terminal A es anulable sii

$$A \stackrel{*}{\Rightarrow} \lambda.$$

Algorithm 2 Cálculo del conjunto se no-terminales anulables

$An \leftarrow \emptyset$
for cada producción $A \rightarrow \alpha \in P$ **do**
    if $\alpha = \lambda$ **then**
        $An \leftarrow An \cup \{A\}$
    end if
end for
repeat
    for cada producción $A \rightarrow \alpha \in P$ **do**
        if $\alpha \in An^*$ **then**
            $An \leftarrow An \cup \{A\}$
        end if
    end for
until que *Act* no cambie

Algorithm 3 Obtención de una GIC propia

Calcular el conjunto de símbolos anulables
for cada $A \rightarrow \alpha$ **do**
    if $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k$ con $\alpha_{j_1}\alpha_{j_2} \ldots \alpha_{j_n}$ anulables **then**
        agregar $A \rightarrow \alpha'$,(donde α' se obtiene eliminando cada subconjunto en $\{\alpha_{j_1}\alpha_{j_2} \ldots \alpha_{j_n}\}$ de α.)
    end if
    if $\alpha = \lambda$ **then**
        eliminar $A \rightarrow \alpha$
    end if
end for

Example

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow ABCD, \\
A &\rightarrow aA \mid \lambda, \\
C &\rightarrow cC \mid c, \\
B &\rightarrow BbC \mid \lambda, \\
D &\rightarrow d \mid dD\}
\end{aligned}
$$

conjunto de no-terminales anulables: $\{A, B\}$.
$S \rightarrow ABCD$ genera

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow ABCD \\
S &\rightarrow ACD \\
S &\rightarrow BCD \\
S &\rightarrow CD
\end{aligned}
$$

Example (cont.)

$A \to aA$ genera las producciones

$$A \to aA$$
$$A \to a$$

$B \to BbC$ genera las producciones

$$B \to BbC$$
$$B \to bC$$

luego son eliminadas las producciones

$$A \to \lambda$$
$$B \to \lambda$$

Example (cont.)

con lo que queda

$$S \to ABCD$$
$$S \to ACD$$
$$S \to BCD$$
$$S \to CD$$
$$A \to aA$$
$$A \to a$$
$$B \to BbC$$
$$B \to bC$$
$$A \to aA$$
$$C \to cC \mid c$$
$$D \to d \mid dD$$

Definition

Forma Normal de Chomsky
Sea L un lenguaje independiente de contexto tal que $\lambda \notin L$, existe una gramática G cuyas producciones don de la forma

$$A \rightarrow BC$$
$$A \rightarrow a$$

donde $a \in V_T$ y $A, B, C \in V_N$, tal que $\mathcal{L}(G) = L$.

Definition

Forma Normal de Greibach
Sea L un lenguaje independiente de contexto tal que $\lambda \notin L$, existe una gramática G cuyas producciones don de la forma

$$A \rightarrow a\alpha$$

donde $a \in V_T$ y $\alpha \in V_N^*$, tal que $\mathcal{L}(G) = L$.