El método de Po Shen Loh: Una nueva perspectiva sobre la ecuación cuadrática

Manuela Montoya Sanes

27 de febrero de 2026

Resumen

La fórmula cuadrática es uno de los resultados más conocidos en matemáticas elementales. Sin embargo, el matemático Po Shen Loh, de la Universidad Carnegie Mellon, propuso en 2019 un método alternativo para resolver ecuaciones de segundo grado que resulta más intuitivo y elegante. Este artículo presenta su técnica, basada en relaciones entre coeficientes y simetría, y la compara con el enfoque tradicional.

1. Introducción

La ecuación cuadrática general

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

tiene como solución conocida

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Sin embargo, Po Shen Loh observó que este enfoque, aunque correcto, oscurece la relación natural entre las raíces. Su método se basa en dos propiedades fundamentales:

- La suma de las raíces está relacionada con el coeficiente b.
- El producto de las raíces está relacionado con el coeficiente c.

2. El método tradicional vs. el enfoque de Po Shen Loh

Consideremos primero la forma mónica de la ecuación cuadrática:

$$x^2 + Bx + C = 0 \tag{3}$$

donde $B = \frac{b}{a}$ y $C = \frac{c}{a}$.

2.1. Relaciones de Vieta

Las fórmulas de Vieta establecen que si r_1 y r_2 son las raíces, entonces:

$$r_1 + r_2 = -B \tag{4}$$
$$r_1 \cdot r_2 = C \tag{5}$$

2.2. La idea central de Po Shen Loh

La clave del método es darse cuenta de que las dos raíces deben tener la forma:

$$r_1 = u + d, \quad r_2 = u - d \tag{6}$$

donde u es el punto medio de las raíces y d es la distancia desde ese punto medio a cada raíz.

Por las relaciones de Vieta, la suma es:

$$(u + d) + (u - d) = 2u = -B \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{B}{2} \tag{7}$$

El producto es:

$$(u + d)(u - d) = u^2 - d^2 = C \tag{8}$$

Despejando d^2:

$$d^2 = u^2 - C \tag{9}$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$x = u \pm \sqrt{u^2 - C} = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \tag{10}$$

3. Demostración formal

Teorema 3.1 (Método de Po Shen Loh). *Para la ecuación cuadrática $x^2 + Bx + C = 0$, las soluciones son:*

$$x = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \tag{11}$$

Demostración. Sean r_1 y r_2 las raíces. Por Vieta:

$$r_1 + r_2 = -B \tag{12}$$
$$r_1 r_2 = C \tag{13}$$

Definimos $u = \frac{r_1+r_2}{2} = -\frac{B}{2}$ y $d = \frac{r_1-r_2}{2}$. Entonces $r_1 = u + d$, $r_2 = u - d$. Sustituyendo en el producto:

$$(u + d)(u - d) = u^2 - d^2 = C \tag{14}$$
$$\Rightarrow d^2 = u^2 - C = \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C \tag{15}$$

Por tanto, $d = \pm\sqrt{u^2 - C}$, y las raíces son $u \pm d$. □

4. Ejemplos ilustrativos

Ejemplo 4.1 (Ecuación con raíces enteras)**.** *Resolver* $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Aplicamos el método:

$$u = -\frac{(-5)}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \tag{16}$$

$$d^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25-24}{4} = \frac{1}{4} \tag{17}$$

$$d = \pm\frac{1}{2} \tag{18}$$

Por lo tanto:

$$r_1 = 2{,}5 + 0{,}5 = 3 \tag{19}$$

$$r_2 = 2{,}5 - 0{,}5 = 2 \tag{20}$$

Ejemplo 4.2 (Ecuación con raíces complejas)**.** *Resolver* $x^2 + 2x + 5 = 0$.
Calculamos:

$$u = -\frac{2}{2} = -1 \tag{21}$$

$$d^2 = (-1)^2 - 5 = 1 - 5 = -4 \tag{22}$$

$$d = \pm 2i \tag{23}$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1 + 2i \tag{24}$$

$$r_2 = -1 - 2i \tag{25}$$

5. Ventajas del método de Po Shen Loh

- **Intuitividad**: El método parte de la simetría natural de las raíces alrededor de su punto medio.
- **Menos memorización**: No requiere recordar la fórmula completa, solo las relaciones de Vieta.
- **Conexión conceptual**: Relaciona explícitamente los coeficientes con la geometría de las raíces.
- **Facilidad para raíces complejas**: El procedimiento es idéntico, solo que d resulta imaginario.

6. Generalización para la forma estándar

Para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, simplemente dividimos entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{26}$$

Aplicamos el método con $B = b/a$ y $C = c/a$:

$$u = -\frac{b}{2a} \tag{27}$$

$$d^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{28}$$

Por tanto:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{29}$$

Obtenemos así la fórmula cuadrática tradicional, demostrando la equivalencia.

7. Conclusión

El método de Po Shen Loh no es un descubrimiento matemático nuevo en el sentido de revelar ecuaciones desconocidas, sino una reinterpretación pedagógica que facilita la comprensión de la estructura de la ecuación cuadrática. Su enfoque basado en la simetría y las relaciones de Vieta ofrece una alternativa más elegante y menos mecánica que la memorización de la fórmula cuadrática.

Este método está ganando popularidad en la enseñanza de las matemáticas, pues permite a los estudiantes entender *por qué* funciona la fórmula, en lugar de solo *cómo* aplicarla.

Referencias

[1] Loh, P. S. (2019). *A Simple Proof of the Quadratic Formula*. arXiv:1910.06709.

[2] Vieta, F. (1615). *De aequationum recognitione et emendatione*.

[3] Stewart, J. (2015). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. Cengage Learning.

A. Demostración alternativa usando completación de cuadrados

El método tradicional de completación de cuadrados:

$$x^2 + Bx + C = 0 \tag{30}$$

$$x^2 + Bx = -C \tag{31}$$

$$x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C \tag{32}$$

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C \tag{33}$$

$$x + \frac{B}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \tag{34}$$

$$x = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \tag{35}$$

Nótese la similitud con el método de Po Shen Loh, que enfatiza la interpretación geométrica de $u = -B/2$ como el punto medio de las raíces.