

CURSILLO

UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS
DINÁMICOS Y APLICACIONES

Área de especialización:
Sistemas Dinámicos y Aplicaciones

Contents

1	Introducción. ¿Por qué investigamos en sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales?	2
2	Conceptos básicos relativos a las ecuaciones diferenciales	3
2.1	Soluciones y Trayectorias	7
2.2	Geometría de una EDO	8
3	Teoremas Fundamentales	8
4	Métodos analíticos, algebraicos y geométricos EDO	10
4.1	Reducción del problema de dos cuerpos. El sistema de Kepler	12
5	Introducción	14
6	Sistemas Dinámicos Topológicos	15
6.1	Expansividad, sombramiento y estabilidad topológica	15
6.1.1	Prueba del Teorema 5.7	17
7	Atractor de Lorenz Geométrico. Expansividad	19

1 Introducción. ¿Por qué investigamos en sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales?

En el estudio de fenómenos de muy distinta índole (física, economía, sociología, ecología, astronomía, etc...) se busca una ley que rijan el comportamiento de los estados de un determinado sistema dependiendo de una determinada magnitud que denominaremos variable independiente. Frecuentemente la variable independiente representa el tiempo, pero otras magnitudes pueden jugar también este papel. Entenderemos que el conjunto de estados es un espacio geométrico (variedad) que representa todos los posibles valores de las características que deseamos analizar en el fenómeno a estudiar.

Cuando la evolución de los estados queda unívocamente determinada a tiempos pasados y futuros por su configuración presente, decimos que tenemos un sistema dinámico determinista. También cabe la posibilidad de que el proceso estudiado esté determinado pero no de forma unívoca, entonces hablamos de sistema dinámico semi-determinista. Por último, los sistemas que están fuera de estas dos clasificaciones se denominan no-deterministas. En adelante, nos centraremos siempre en los sistemas deterministas. No obstante, no debemos dejarnos llevar por la idea de que estos sistemas no pueden presentar una gran complejidad, ya que en el caso no lineal aparece con alta probabilidad caos, un concepto matemático que ha sido considerado por algunos científicos como el tercer gran descubrimiento del siglo XX (después de la relatividad y la mecánica cuántica) y que ha sido inspirador del evocador efecto mariposa.

De forma abstracta un sistema dinámico se define como la terna (G, M, ψ) , en la que ψ es una acción de un semigrupo G (los tiempos) con identidad e actuando sobre un conjunto M (los estados)

$$\psi : G \times M \longrightarrow M \quad (g, x) \longrightarrow \psi_g(x),$$

de forma que se verifica

$$\psi_g(x) \circ \psi_h(x) = \psi_{g \circ h}(x), \quad \psi_e = Id.$$

Para el caso en el que G es un grupo diremos que el sistema dinámico es invertible. Dentro de esta categoría destacamos dos tipos: (a) $G = \mathbb{N}$ o $G = \mathbb{Z}$, que corresponde con los sistemas dinámicos discretos. (b) $G = \mathbb{R}/\mathbb{C}$, los sistemas dinámicos continuos, que conforman el contenido del presente curso.

Hasta ahora nada ha sido dicho acerca de la justificación de las ecuaciones diferenciales y su relación con los sistemas dinámicos. En efecto, la relación es muy estrecha como muestra la siguiente afirmación:

Sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales. Asumiendo que ψ es de tipo C^1 en todo su dominio y que M es una variedad diferenciable, el sistema dinámico (\mathbb{R}, M, ψ) permite definir un campo vectorial en M dado por

$$F(x) = \frac{d}{dt} \psi_t(x) \Big|_{t=0}.$$

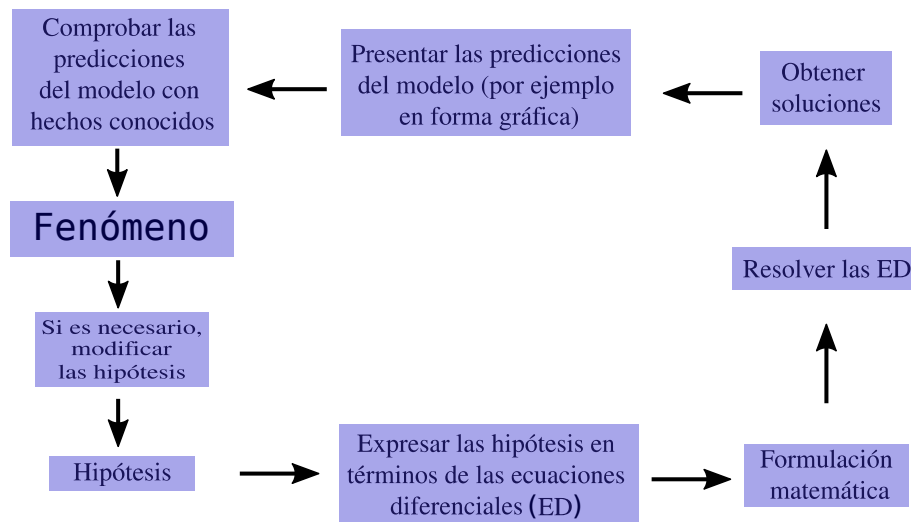
De este modo la ecuación diferencial

$$\dot{x} = F(x)$$

tiene como curvas integrales a las funciones definidas por la acción de ψ

$$t \longrightarrow \psi_t(x).$$

En resumen, el estudio y comprensión de muchos fenómenos está ligado a un sistema dinámico y una amplísima variedad de estos tiene asociada una ecuación diferencial. Sus soluciones y descripción cualitativa permiten analizar, medir, estimar y predecir el comportamiento del sistema dinámico y en consecuencia del fenómeno en cuestión. Es entonces en este proceso donde hace aparición la modelización matemática que permite definir la ecuación diferencial asociada a un determinado sistema dinámico mediante el siguiente diagrama iterativo



2 Conceptos básicos relativos a las ecuaciones diferenciales

A lo largo de estas notas y por simplicidad en nuestra exposición, vamos a considerar $M = \mathbb{R}^m$. En cualquier caso, la extensión a cualquier variedad es válida. Sea F una función continua y conocida dada por

$$\begin{aligned} F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n & F &\in C(\Omega) \\ (z_1, \dots, z_m) &\longmapsto F(z_1, \dots, z_m) \end{aligned}$$

y sea x una función desconocida dada por

$$x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^s \quad x \in C^k(I) \quad k \geq 1$$

donde W , Ω , y I son abiertos. Entonces tenemos la siguiente definición

Definición 1 (EDO) Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una relación funcional del tipo

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^r) = 0, \quad (m = r + 2) \quad (2.1)$$

donde t es la variable independiente para la función $x(t)$, que es la función incógnita (también variable dependiente) a determinar

$$x^i(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.2)$$

Se dice que r es el orden de la EDO.

Para el caso $s > 1$ también se denomina a (2.1) como un sistema de ecuaciones diferenciales. Además en los casos en los que F no dependa explícitamente de la variable t se dice que tenemos una ecuación autónoma y caso contrario una ecuación no autónoma.

En lo sucesivo y salvo que se indique lo contrario, nos centramos en una fórmula menos general de la relación (2.1). Para ello vamos a suponer que

$$\frac{\partial F}{\partial x_m} \Big|_{\Omega} \neq 0$$

Bajo la hipótesis anterior podemos aplicar el teorema de la función implícita y así nos aseguramos que localmente es posible presentar (2.1) en la siguiente forma

$$x^r = f(t, x, x', x'', \dots, x^{r-1}) \quad (2.3)$$

Al llevar a cabo este proceso diremos que hemos llevado a la EDO (2.1) a su forma normal. Además, podemos proseguir en dicha normalización reduciendo el grado de la ecuación, ya que dada la ecuación (2.3), siempre podemos transformarla en una ecuación de primer orden. A continuación se presentan algunos ejemplos de EDO asociadas a fenómenos de distinta naturaleza.

Ejemplo 1. (Dinámica de Poblaciones) Denotemos por $P(t)$ el tamaño de una población al tiempo t . El modelo más sencillo de la dinámica de poblaciones es el *Modelo de Malthus*:

La razón de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dP(t)}{dt} \propto P(t), \quad \text{esto es,} \quad \frac{dP(t)}{dt} = k P(t),$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad.

El modelo de Malthus se usa para modelar el crecimiento de pequeñas poblaciones en intervalos de tiempo cortos (por ejemplo, crecimiento de bacterias en una caja de Petri).

Ejemplo 2. (Enfriamiento/calentamiento de un cuerpo) Un cuerpo colocado en un medio que tiene una temperatura T_m tiende a alcanzar la temperatura del medio. Denotemos por $T(t)$ la temperatura del cuerpo al tiempo t . El modelo más sencillo que estudia la evolución de $T(t)$ en el tiempo es la *Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton*:

la razón con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre $T(t)$ y T_m , la temperatura del medio que lo rodea (llama temperatura ambiente):

$$\frac{dT(t)}{dt} \propto T(t) - T_m, \quad \text{esto es,} \quad \frac{dT(t)}{dt} = k (T(t) - T_m),$$

donde k es la constante de proporcionalidad ($k > 0$ calentamiento y $k < 0$ enfriamiento).

Ejemplo 3. (Propagación de una enfermedad) Una enfermedad se propaga a través de una comunidad por personas que interactúan con otras personas enfermas. Denotemos por $x(t)$ y por $y(t)$ el número de personas infectadas y no infectadas al tiempo t , respectivamente.

Modelo de propagación de la enfermedad: la rapidez con la que se propaga la enfermedad es proporcional al número de encuentros entre los infectados y los no infectados:

$$\frac{dx}{dt} \propto xy, \quad \text{esto es,} \quad \frac{dx}{dt} = kxy,$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Por ejemplo si

- Una comunidad tiene una población fija de n personas.
- Se introduce una persona infectada dentro de esta comunidad.
- Entonces $x(t)$ e $y(t)$ satisfacen: $x(t) + y(t) = n + 1$.
- Además, $x(0) = 1$.

Entonces el modelo para este ejemplo es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx(n+1-x), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

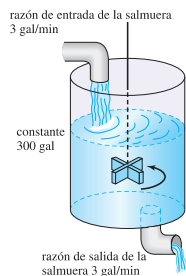
Ejemplo 4. (Mezclas de soluciones) Supongamos que una sustancia, disuelta en un líquido, entra en un compartimento a una velocidad v_e (velocidad de entrada). Después de algún proceso sale del compartimento a una velocidad v_s (velocidad de salida). Denotemos por $x(t)$ es la cantidad de sustancia en el compartimento al tiempo t . EL modelo más simple que permite conocer la evolución de $x(t)$ es la *ley de balance o conservación*:

la rapidez con la que $x(t)$ cambia respecto del tiempo es:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_e - v_s.$$

$$v_e = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de entrada} \\ \text{del liquido (vol/t)} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{Concentración de la sustancia} \\ \text{al entrar (cantidad/vol)} \end{array} \right\}$$

$$v_s = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de salida} \\ \text{del liquido (vol/t)} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{Concentración de la sustancia} \\ \text{al salir (cantidad/vol)} \end{array} \right\}$$



Un tanque mezclador inicialmente contiene 300 litros de salmuera (agua con sal). Otra solución de salmuera entra al tanque a razón de 3 litros por minuto; la concentración de sal que entra es 1/2 kilo/litro. Cuando la solución en el tanque está bien mezclada, sale con la misma rapidez con que entra. Hallar la EDO que modela la cantidad de sal a lo largo del tiempo.

$$v_e = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de entrada} \\ \text{del liquido (vol/t)} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{Concentración de la sustancia} \\ \text{al entrar (cantidad/vol)} \end{array} \right\} = \left(3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right) \left(2 \frac{\text{lb}}{\text{gal}} \right) = 6 \frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

$$v_s = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de salida} \\ \text{del liquido (vol/t)} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{Concentración de la sustancia} \\ \text{al salir (cantidad/vol)} \end{array} \right\} = \left(3 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right) \left(\frac{x(t)}{300} \frac{\text{lb}}{\text{gal}} \right) = \frac{A(t)}{100} \frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

Por lo tanto el modelo es el PVI:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 6 - \frac{A(t)}{100}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Acabamos de ver algunos ejemplos aplicados donde aparecen EDO. Definimos ahora con precisión qué significa resolver una ecuación o un sistema.

Definición 2 (Solución de una EDO) Una solución $x(t) = \phi(t)$ de la ecuación (2.3) es cualquier función definida en un abierto $I \subset \mathbb{R}$ tipo $C^r(I)$ que satisface la relación (2.3).

Ejemplo 5 Los siguientes ejemplos ilustran algunas formas en las que se puede obtener una solución.

a) $\dot{x} = x \Rightarrow x(t) = x_0 e^{t-t_0}$

b)
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \cos(t - t_0) + y_0 \sin(t - t_0) \\ y(t) = y_0 \cos(t - t_0) - x_0 \sin(t - t_0) \end{cases}$$

Los ejemplos a) y b) son casos en que las soluciones pueden encontrarse en forma explícita. No siempre este es el caso, veamos algunos ejemplos

c) consideremos la ecuación

$$\dot{x}x - t = 0 \tag{2.4}$$

Las curvas dadas por $-t^2 + x^2 = k$ definen una función $x(t)$ (para cada valor fijo de k) que son solución de (2.4). Así que esta familia de curvas definen soluciones de la ecuación en forma implícita.

d) en el ejemplo anterior es fácil obtener la ecuación explícita a partir de la familia de soluciones implícitas. Basta con despejar

$$-t^2 + x^2 = k \Rightarrow x(t) = \pm \sqrt{k + t^2}.$$

Este proceso no siempre es posible. Como ejemplo consideremos la EDO

$$\dot{x} = \frac{2t}{1-x} e^x.$$

La familia de soluciones implícitas es:

$$x - t^2 e^x = k e^x \rightarrow \text{de la que no es posible despejar } x$$

Así hemos visto que las soluciones de una EDO pueden darse en forma explícita a), b) o en forma implícita c), d). Por último también podemos describir las soluciones en forma paramétrica

e) Consideremos de nuevo la ecuación estudiada en c)

$$\dot{x}x - t = 0.$$

Podemos introducir una nueva variable independiente que parametrice la familia de curvas solución

$$x^2 - t^2 = k$$

$$x(\tau) = \sqrt{k} \cosh(\tau)$$

$$x(\tau) = \sqrt{k} \sinh(\tau) \quad (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}$ parametriza la curva solución.

Atendiendo a la definición determinista, el estado de un sistema en un tiempo concreto condiciona los estados futuros y pasados. En este sentido, cuando analizamos un fenómeno y hacemos una medición puntual de las características examinadas en un tiempo t_0 , la evolución del citado fenómeno corresponde con la solución que en el instante t_0 toma los valores observados. Surge así la definición de problema de valor inicial.

Definición 3 Un problema de valor inicial o problema de Cauchy es una ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

con

$$f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde Ω es un conjunto abierto, junto con un punto $(t_0, y_0) \in \Omega$, llamado la condición inicial. Una solución al problema de valor inicial es una solución de la EDO que satisface la condición inicial. Ver ejemplo 4.

2.1 Soluciones y Trayectorias

Atendiendo a la definición de solución que se ha proporcionado como una función diferenciable

$$x: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^s \quad W, I \text{ son abiertos}$$

tenemos que la gráfica de $x(t)$ está contenida en \mathbb{R}^{s+1} . A menudo veremos que también consideraremos la trayectoria asociada a la gráfica de la solución, que es la proyección de esta al eliminar el tiempo (variable independiente). Es decir,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = +x_1 \end{cases} \Rightarrow \psi(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\cos(-t), \sin(-t)) \text{ es una solución}$$

Su gráfica en $\mathbb{R}^{s+1} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ es una hélice y su trayectoria una circunferencia en \mathbb{R}^2 . Otra solución válida sería

$$\phi(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\sin(-t), \cos(-t))$$

esta solución comparte la misma trayectoria que $\psi(t)$ pero para cada instante t , asigna un lugar distinto en la hélice, por lo tanto, $\psi(t)$ y $\phi(t)$ definen dos soluciones distintas. Otro aspecto importante relativo a las soluciones, es que su número puede variar como puede verse en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6 a) *Ejemplo de ecuaciones sin solución*

$$(\dot{x})^2 + x^2 + t^2 + 1 = 0, \quad (\dot{x} + 1)^2 = 0, \quad x(0) = 0,$$

b) *Ejemplo de una ecuación con dos soluciones con la misma condición inicial. El problema de valor inicial*

$$\dot{x} = 3x^{3/2}, \quad x(0) = 0,$$

tiene dos soluciones distintas:

$$\gamma_1(t) = 0, \quad \gamma_2(t) = t^3.$$

¿Por qué debemos identificar estas situaciones? ¿Por qué no son deseables?

2.2 Geometría de una EDO

Una EDO como la dada por la siguiente fórmula puede ser vista como la distribución de un campo de rectas

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

En efecto, la derivada de la función $x(t)$ respecto de t en el punto t_0 se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x(t_0)$ y tal pendiente es igual a $f(t_0, x(t_0))$. (Ver Figura 2.1)

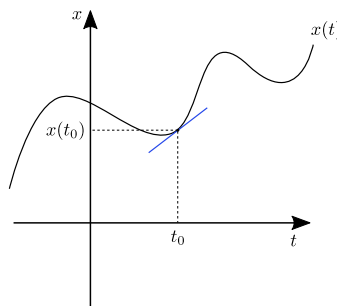


Figure 2.1: Recta tangente a la solución $x(t)$.

Aplicando esta idea, el lado derecho de la EDO nos da la pendiente que debe tener la recta tangente a la solución de la EDO en cada punto (t, x) del plano. Por lo cual, obtenemos un campo de rectas en el plano. (Ver Figura 2.2)

Por lo cual, el problema analítico de buscar una función $x(t)$ que sea solución de la EDO se transforma en el problema geométrico de buscar las curvas o trayectorias en el plano que son tangentes a las rectas de la distribución.

3 Teoremas Fundamentales

Teorema 1. (existencia y unicidad de soluciones) *Supongamos que*

- $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto (conexo),

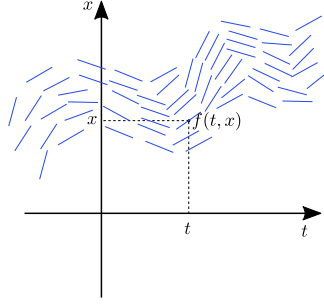


Figure 2.2: Recta tangentes a las soluciones de la edo.

- $\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 .

a) Si $\mathbf{x}_0 \in U$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

tiene una **solución única** $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$.

b) Si $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son dos soluciones del problema de valor inicial definidas en los abiertos $I_1 \subset \mathbb{R}$ e $I_2 \subset \mathbb{R}$, respectivamente, entonces

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Teorema 2. (continuidad de soluciones respecto de condiciones iniciales)

Supongamos que

- $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto (conexo),
- $\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 .
- Para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, $\phi(t; \mathbf{x}_0)$ denota la solución única del problema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Entonces, $\phi(t; \mathbf{x}_0)$ depende continuamente de la condición inicial \mathbf{x}_0 .

Teorema 3. (continuidad de soluciones respecto de parametros) Supongamos que

- $U \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es un abierto (conexo),
- $\mathbf{f} : U \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 .
- Para cada $(\mathbf{x}_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda$, $\phi(t; \mathbf{x}_0, \lambda_0)$ denota la solución única del problema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Entonces, $\phi(t; \mathbf{x}_0, \lambda_0)$ depende continuamente de λ_0 .

Teorema 4. (intervalo maximal). *Supongamos que*

- $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto (conexo),
- $\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 .

*Si $\mathbf{x}_0 \in U$, entonces existe un **intervalo abierto maximal** $J \subset \mathbb{R}$ tal que el problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

tiene una solución única $\tilde{\gamma}(t)$ definida en J , esto es, si el problema de valor inicial tiene una solución $\mathbf{x}(t)$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces

$$I \subset J \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(t) = \tilde{\gamma}(t), \quad \forall t \in I.$$

Teorema 5. *Supongamos $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Sea $\gamma(t)$ la solución del problema de valor inicial*

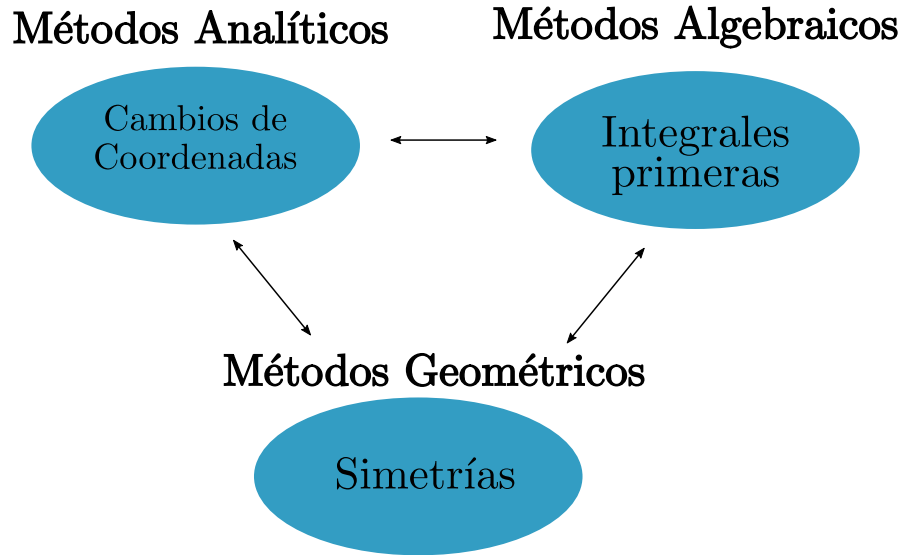
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

en el intervalo abierto maximal $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Si $\beta < \infty$, entonces para cualquier conjunto compacto $K \subset U$, existe un $t_1 \in (\alpha, \beta)$ tal que $\gamma(t_1) \notin K$.

4 Métodos analíticos, algebraicos y geométricos EDO

Cuando estudiamos una EDO podemos fijar nuestra atención en aspectos muy diversos, aunque existen dos grandes bloques, estudio cualitativo o estudio cuantitativo. Por ejemplo, dada una condición inicial o un conjunto de ellas, podemos estar interesados en conocer con precisión la solución del problema de Cauchy asociado. Este análisis tiene que ver con las características cuantitativas de la EDO y tiene como objetivo encontrar fórmulas analíticas (preferiblemente explícitas) de la función solución. Para ello contamos con un buen arsenal de métodos que permiten lograr nuestro objetivo. Dichos métodos se encuentran clasificados en dos grandes categorías; ecuaciones lineales y no lineales. Para las ecuaciones lineales con coeficientes constantes el problema de la integración está totalmente resuelto y disponible en cualquier paquete de software del mercado. El caso con coeficientes no constantes empieza a presentar más dificultades y solo en algunos casos existen métodos generales. La mayor dificultad se centra en el caso no lineal, para el que hay algunos tipos de ecuaciones clasificadas y resueltas, pero en general la gran mayoría de estas ecuaciones deben ser abordadas de forma particular y de muchas de ellas poco puede decirse. Este panorama puede antojarse desalentador, pero visto de otra forma es lo que hace de la disciplina un campo extraordinario para la investigación. En cualquier caso, en nuestra área no solo nos ocupamos de aspectos cuantitativos, los métodos cualitativos tienen un protagonismo fundamental y nos centraremos más en examinar el comportamiento global de todas las soluciones. Para ello se estudia el “esqueleto” del flujo generado por las soluciones buscando órbitas especiales (periódicas, homoclínicas, heteroclínicas, ciclos-límite, etc...), variedades invariantes (“subsistemas dentro del sistema total”), así como también atendiendo a su comportamiento en cuanto a estabilidad o bifurcaciones.

En esta sección se presentan de manera muy informal y superficial algunas técnicas que pueden ayudar en el estudio de ecuaciones diferenciales no lineales. La lectora o lector de la misma, tendrá que tener en cuenta que no se pretende abarcar de forma amplia las técnicas no lineales ya que ello implicaría varias monografías.



Definición 4 (Cambio de variable) En una ecuación del tipo dado en (2.1), un cambio de variable puede proporcionar una forma más conveniente de la misma. Distinguimos los siguientes cambios de variables:

- Cambio de variable independiente. Consiste en sustituir la variable independiente (tiempo) t por otra τ cuya relación con la original viene dada por una función estrictamente monótona y derivable. Cuando la derivada es negativa, decimos que se produce una inversión del tiempo.
- Cambio de variable dependiente. Cuando lo que modificamos es la variable dependiente mediante un difeomorfismo $\rho : \Omega \rightarrow \Sigma$.

Definición 5 (Integral primera) Una integral primera es una función dependiente de las variables de la ecuación diferencial y sus derivadas y resulta constante cuando se introduce en ella la dependencia respecto a la variable dependiente.

Definición 6 Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable real o compleja que es también un grupo. De tal forma que las operaciones de grupo (multiplicación e inversión) son funciones diferenciables.

Por ejemplo, podemos considerar el conjunto $R = \{R_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}$ de transformaciones en el plano \mathbb{R}^2 dadas por las rotaciones de ángulo θ . Es claro que los elementos de R verifican las siguientes propiedades

- Para todo α, β se tiene que: $R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}$
- $R_0 = Id$
- Toda rotación y su inversa verifican: $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

El conjunto R junto con la composición tiene estructura de grupo abeliano y usualmente podemos referirnos como un grupo de transformaciones en el plano y se denota como S^1 , dado que puede establecerse un difeomorfismo entre ambos conjuntos. En consecuencia R es un grupo de Lie ya que también tiene estructura de variedad unidimensional.

Definición 7 (Simetrías continuas) Si consideramos una ecuación diferencial y $x(t)$ una solución de la misma. Decimos que el grupo de lie G es una simetría de la ecuación diferencial si $g \circ x(t)$ también es solución para cualquier elemento $g \in G$.

4.1 Reducción del problema de dos cuerpos. El sistema de Kepler

En mecánica celeste, el problema de los dos cuerpos consisten en estudiar un sistema dinámico formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 que solo interactúan por mutua atracción gravitatoria. Acorde a la ley de la gravitación universal de Newton tenemos que sus ecuaciones son las siguientes

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 m_1 &= -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^T, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 m_2 &= -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^T,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{G} = 6.7 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$ es la constante de gravitación universal. La conservación de la energía mecánica de un sistema aislado nos proporciona la siguiente integral

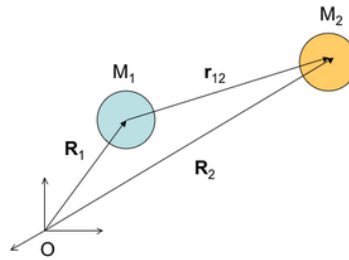
$$\mathcal{H}_{2B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{p}_1|^2}{m_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|^2}{m_2} \right) - \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},\tag{4.2}$$

donde \mathbf{p}_i es el momento lineal asociado a cada cuerpo i th mass.

La presencia de la integral de la energía permite expresar el sistema anterior en formulación Hamiltoniana. Este proceso nos lleva a escribir el sistema de segundo orden con seis variables en un nuevo sistema de primer orden y con 12 variables.

r5.5cm

Figure 4.1: Two masses under mutual gravitational interaction in an inertial frame.



Este sistema puede ser simplificado por medio del siguiente cambio simpléctico de variables

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \longrightarrow (\mathbf{r}_{cm}, \mathbf{r}, \mathbf{p}_{cm}, \mathbf{p}_r)\tag{4.3}$$

donde \mathbf{r}_{cm} es el centro de masas, $\mathbf{p}_{cm} = \mathbf{p}$ es el momento lineal total, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la posición relativa de la primera masa respecto de la segunda y \mathbf{p}_r es su momento conjugado dado por

$$\mathbf{p}_r = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}.\tag{4.4}$$

Por tanto, la expresión del hamiltoniano (4.2) en las variables nuevas es

$$\tilde{\mathcal{H}}_{2B}(\mathbf{r}_{cm}, \mathbf{r}, \mathbf{p}_{cm}, \mathbf{p}_r) = \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{p}_r|^2}{\mu} + \frac{|\mathbf{p}_{cm}|^2}{M} \right) - \frac{\mathcal{G} M \mu}{r}, \quad (4.5)$$

donde M y μ son las masas total y reducidas del sistema dadas por

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.6)$$

Después de esta transformación las ecuaciones canónicas para $\tilde{\mathcal{H}}$ son

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{cm} &= \frac{\mathbf{p}_{cm}}{M}, & \dot{\mathbf{p}}_{cm} &= 0, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\mathbf{p}_r}{\mu}, & \dot{\mathbf{p}}_r &= -\frac{\mathcal{G} M \mu}{r^3} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De las primeras dos ecuaciones podemos obtener la evolución del centro de masas una vez fijadas las condiciones iniciales $(\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0, \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0)$

$$\mathbf{r}_{cm} = (\mathbf{p}_1^0 + \mathbf{p}_2^0) t + (\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_2^0),$$

de modo que podemos centrarnos sólomente en las ecuaciones relativas a $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_r)$. Así, por medio de este cambio de variable, hemos reducido el problema de los dos cuerpos al problema de Kepler

$$\mathcal{H}_K(\mathbf{r}, \mathbf{p}_r) = \frac{|\mathbf{p}_r|^2}{2\mu} - \frac{\mathcal{G} M \mu}{r}. \quad (4.8)$$

En el proceso anterior hemos pasado de un sistema de ecuaciones de segundo orden y con seis grados de libertad a un sistema de primer orden y con tres grados de libertad. Hemos reducido la simetría del grupo de las traslaciones. Dicho proceso puede continuarse haciendo uso del resto de simetrías llegando a su reducción total.

5 Introducción

Muchas propiedades topológicas de los sistemas dinámicos se analizan en espacios métricos. En este cursillo analizaremos las propiedades de: expansividad, sombramiento y estabilidad topológica para homeomorfismos definidos sobre un espacio métrico compacto. En esta dirección, Walters [19] demostró que cada homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombramiento de pseudo-órbitas es topológicamente estable. Este resultado se extiende al contexto medible [9].

Motivado por las ecuaciones de Lorenz, [10], se da un modelo geométrico que representa la dinámica de las ecuaciones de Lorenz, para tal construcción, ver [2, 5, 20]. En esta dirección veremos que tal atractor geométrico de Lorenz no es expansivo en el sentido de Bowen-Walters, [3], pero si es expansivo en el sentido de Komuro, [8].

6 Sistemas Dinámicos Topológicos

Muchas propiedades topológicas de los sistemas dinámicos se analizan en espacios métricos. En este cursillo analizaremos las propiedades de: expansividad, sombramiento y estabilidad topológica para homeomorfismos definidos sobre un espacio métrico compacto. En esta dirección, Walters [19] demostró que cada homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombramiento de pseudo-órbitas es topológicamente estable. Este resultado se extiende al contexto medible [9].

Existe una noción cercana a espacios métricos, los que se conocen como espacios 2-métricos. En estos espacios, recientemente en [4], se da la noción de expansividad en el sentido topológico y de la medida. Otro tipo de enfoque son los espacios métricos difusos, [6, 7]. Ver también, [1, 11, 12, 13].

Motivado por las ecuaciones de Lorenz, [10], se da un modelo geométrico que representa la dinámica de las ecuaciones de Lorenz, para tal construcción, ver [2, 5, 20]. En esta dirección veremos que tal atractor geométrico de Lorenz no es expansivo en el sentido de Bowen-Walters, [3], pero si es expansivo en el sentido de Komuro, [8].

6.1 Expansividad, sombramiento y estabilidad topológica

Sea X un conjunto no vacío. Se dice que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *métrica* si cumple las siguientes propiedades:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X \text{ (simetría);}$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X \text{ (desigualdad triangular).}$$

Al par (X, d) lo llamaremos un espacio métrico. Siguiendo Utz, [17], definiremos cuando un sistema dinámico es *inestable*, lo que actualmente se les conoce como *expansivos*.

Definition 6.1 ([17]) Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo sobre un espacio métrico (X, d) . Se dice que f es expansivo si existe $\delta > 0$ (llamada constante de expansividad) tal que para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un entero $n = n(x, y)$ para el cual

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

Para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, se define el siguiente conjunto:

$$\Gamma_\varepsilon^f(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Notar que $x \in \Gamma_\varepsilon^f(x)$, $\forall x \in X$. Por lo tanto, f es expansivo si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que

$$\Gamma_\delta^f(x) = \{x\}, \forall x \in X.$$

Example 6.2 Sea $X = \mathbb{R}^2$. Seleccione un punto O de X . Defina $f(O) = O$ y si $O \neq p \in X$, defina $f(p) = q$ donde q es el punto del rayo Op con punto final O , tal que $d(O, q) = 2d(O, p)$.

Sea $d(x, y) = r$, entonces

$$d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n r, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Verefiquemos el caso $n = 1$, es decir

$$d(f(x), f(y)) = 2r.$$

Podemos suponer que O es el origen. Sean $p, q \in X$, $d(p, q) = r$ y sea $\theta > 0$ el ángulo que forma los rayos Op y Oq . Por la Ley de Cosenos:

$$\begin{aligned} (d(p, q))^2 &= (d(O, p))^2 + (d(O, q))^2 - 2d(O, p)d(O, q) \cos \theta \\ (d(f(p), f(q)))^2 &= (d(O, f(p)))^2 + (d(O, f(q)))^2 - 2d(O, f(p))d(O, f(q)) \cos \theta \\ &= 4(d(O, p))^2 + 4(d(O, q))^2 - 8d(O, p)d(O, q) \cos \theta \\ &= 4[(d(O, p))^2 + (d(O, q))^2 - 2d(O, p)d(O, q) \cos \theta] \\ &= 4(d(p, q))^2, \end{aligned}$$

es decir,

$$d(f(p), f(q)) = 2r.$$

Sean $p, q \in X$ tales que q están el mismo rayo Op , entonces

$$d(f(p), f(q)) = 2d(p, q)$$

Ahora supongamos que se cumple para cierto n , es decir

$$d(f^n(p), f^n(q)) = 2^n d(p, q).$$

Ahora para $n + 1$:

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}(p), f^{n+1}(q)) &= d(f(f^n(p)), f(f^n(q))) \\ &= 2d(f^n(p), f^n(q)) \\ &= 2 \cdot 2^n d(p, q) \\ &= 2^{n+1} d(p, q). \end{aligned}$$

$$d(f^{n+1}(p), f^{n+1}(q)) = d(f(f^n(p)), f(f^n(q))) = 2d(f^n(p), f^n(q)) = 2 \cdot 2^n d(p, q)$$

Sea $\delta > 0$ arbitrario, entonces es posible elegir $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2^n d(p, q) > \delta.$$

Por lo tanto, f es expansive con constante de expansividad $\delta > 0$.

Definition 6.3 Sea $\delta > 0$. Una δ pseudo-órbita para $f : X \rightarrow X$ es una bi-sucesión $(x_n)_{-\infty}^{\infty}$ de puntos de X tal que

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definition 6.4 Una δ pseudo-órbita, $(x_n)_{-\infty}^{\infty}$, para f es ε -sombreada por x si

$$d(x_n, f^n(x)) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definition 6.5 *f se dice que tiene la propiedad de pseudo-órbita sombreada si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que cada δ pseudo-órbita para f es ε -sombreada por algún punto de X . Esto es,*
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que para cada $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ con

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

existe $x \in X$ tal que

$$d(x_n, f^n(x)) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si $\varphi : X \rightarrow X$ y $\psi : X \rightarrow X$ son continuas, entonces $d(\varphi, \psi)$ denotará $\sup_{x \in X} d(\varphi(x), \psi(x))$.

Definition 6.6 *Un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ es topológicamente estable si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $g : X \rightarrow X$ es cualquier homomorfismo con $d(f, g) < \delta$ entonces existe una aplicación continua $h : X \rightarrow X$ con $h \circ g = f \circ h$ y $d(h, id) < \varepsilon$.*

Theorem 6.7 ([19]) *Un homeomorfismo expansivo con la propiedad de pseudo-órbita sombreada es topológicamente estable.*

6.1.1 Prueba del Teorema 6.7

Previamente mostraremos algunos lemas previos, siguiendo Walters, [19].

Lemma 6.8 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo expansivo con constante de expansividad e . Para cada $N \geq 1$ existe $\delta > 0$ con la propiedad que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq e$ para todo n con $|n| < N$. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq e$ para todo n con $|n| < N$ implica que $d(x, y) < \varepsilon$.*

Proof. Sea N dado. Dado que X es compacto y f continua, implica que f es uniformemente continua y así f^n también es uniformemente continua para todo n con $|n| < N$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f^n(x), f^n(y)) \leq e$ para todo n con $|n| < N$.

Recíprocamente, sea $\varepsilon > 0$ dado. Supongamos que no hay tal N con la propiedad requerida, entonces para cada $N \geq 1$ existen $x_n, y_n \in X$ con

$$d(f^n(x_n), f^n(y_n)) \leq e \text{ para todo } n \text{ con } |n| < N$$

y

$$d(x_n, y_n) \geq \varepsilon.$$

Por la compacidad de X , podemos elegir N_i con $x_{N_i} \rightarrow x$ y $y_{N_i} \rightarrow y$. Entonces

$$d(x, y) \geq \varepsilon$$

y

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq e \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Esto contradice la propiedad de expansividad de f . □

Lemma 6.9 *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo expansivo con constante de expansividad e y con la propiedad de pseudo-órbita sombreada. If $\varepsilon < \frac{e}{2}$ y δ corresponde a ε de la definición 6.5 entonces existe un único $x \in X$ el cual ε -traza a una δ -pseudo-órbita dada.*

Proof. Por hipótesis, existe $x \in X$ el cual ε -traza a una δ -pseudo-órbita (x_n) . Suponga que $y \in X$ también ε -traza a (x_n) , entonces usando la desigualdad triangular se tiene

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^n(y)) &\leq d(f^n(x), x_n) + d(x_n, f^n(y)) \\ &< 2\varepsilon \\ &< \varepsilon \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por la expansividad de f se tiene que $x = y$. \square

Sea $\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3}$ y elegimos $\delta > 0$ el correspondiente a ε de la definición 6.5. Sea $g : X \rightarrow X$ un homeomorfismo con $d(f, g) < \delta$.

Sea $x \in X$

Afirmación 1: La g -órbita, $\{g^n(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ es una δ -pseudo-órbita para f . En efecto,

$$\begin{aligned} d(f(g^n(x)), g^{n+1}(x)) &= d(f(g^n(x)), g(g^n(x))) \\ &\leq d(f, g) \\ &< \delta, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$d(f(g^n(x)), g^{n+1}(x)) < \delta,$$

lo que prueba la afirmación 1.

Por Lemma 6.9, existe un único punto $h(x) \in X$ cuya f -órbita sombrea $\{g^n(x)\}_{-\infty}^{\infty}$. Esto define una aplicación $h : X \rightarrow X$ con

$$d(f^n(h(x)), g^n(x)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in X. \quad (6.1)$$

En (6.1), tomando $n = 0$, se tiene

$$d(h(x), Id(x)) < \varepsilon, \forall x \in X.$$

esto implica que

$$d(h, Id) < \varepsilon$$

Afirmación 2: $h \circ g = f \circ h$. En efecto, de (6.1), aplicando a $x = g(x)$, se tiene

$$d(f^n(h(g(x))), g^n(g(x))) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in X.$$

es decir,

$$d(f^n(h(g(x))), g^{n+1}(x)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in X.$$

Por otro lado, aplicando (6.1), para $n + 1$

$$\begin{aligned} d(f^n(f \circ h(x)), g^{n+1}(x)) &= d(f^{n+1}(h(x)), g^{n+1}(x)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(g(x))$ y $f \circ h(x)$ ε -sombreen a $\{g^{n+1}(x)\}_{-\infty}^{\infty}$. Por lo tanto, por Lemma 6.9, $h(g(x)) = f \circ h(x)$, $\forall x \in X$, es decir

$$h \circ g = f \circ h,$$

lo que prueba la afirmación 2.

Afirmación 3: h es continua. En efecto sea $\lambda > 0$ dado. Usando Lema 6.8, elegimos N tal que $d(f^n(u), f^n(v)) < e \forall |n| < N$ implica que $d(u, v) < \lambda$.

Elegimos $\eta > 0$ tal que $d(x, y) < \eta$ implica que $d(g^n(x), g^n(y)) < \frac{e}{3} \forall |n| < N$. Entonces si $d(x, y) < \eta$,

$$\begin{aligned} d(f^n(h(x)), f^n(h(y))) &= d(hg^n(x), hg^n(y)) \\ &\leq d(hg^n(x), g^n(x)) + d(g^n(x), g^n(y)) + d(g^n(y), hg^n(y)) \\ &< \varepsilon + \frac{e}{3} + \varepsilon \\ &< e \forall |n| < N. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $d(x, y) < \eta$ implica que $d(h(x), h(y)) < \lambda$, esto prueba la continuidad de h .

Afirmación 4: La aplicación h es la única con $h \circ g = f \circ h$ y $d(h, Id) < \varepsilon$. En efecto, supongamos que existe otra l , entonces

$$\begin{aligned} d(f^n l(x), f^n h(x)) &= d(lg^n(x), hg^n(x)) \\ &\leq d(lg^n(x), g^n(x)) + d(g^n(x), hg^n(x)) \\ &< 2\varepsilon \\ &< e \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Por la expansividad de f se tiene que $l(x) = h(x)$, $\forall x \in X$, Por lo tanto $h = l$.

Sea e la constante de expansividad de f y $\varepsilon > 0$. defina $\bar{\varepsilon} < \min\{\frac{e}{3}, \varepsilon\}$. Aplicado los resultados previos $\bar{\varepsilon}$, se tiene que $\bar{\varepsilon} < \frac{e}{3}$ se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $g : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo y $d(g, f) < \delta$ entonces existe una única función continua $h : X \rightarrow X$ con $h \circ g = f \circ h$ y $d(h, Id) < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$. Por lo tanto f es topologicamente estable, lo que demuestra el Teorema 6.7.

7 Atractor de Lorenz Geométrico. Expansividad

El famoso sistema de ecuaciones diferenciales propuesto por Lorenz, [10]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z. \end{aligned} \tag{7.1}$$

como reducción de un modelo para predecir el tiempo. Un análisis detallado de estas ecuaciones puede encontrarse en el libro de Sparrow, [14].

Una propuesta geométrica que representa a las ecuaciones de Lorenz (7.1), son dados en [2, 5, 20], conocido como el Atractor de Lorenz Geométrico. Más aún Tucker, prueba que atractores similares al modelo geométrico de Lorenz, ocurre en el sistema original (7.1):

Theorem 7.1 ([15, 16]) *Las ecuaciones de Lorenz (7.1) soportan un atractor robusto extraño para los clásicos parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$.*

Un tipo de expansividad para flujos es dada por Bowen-Walters,[3].

Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ tal que ϕ es continua y $\phi(t + s, x) = \phi(s, \phi(t, x))$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$. En este caso ϕ es llamado flujo sobre X . Sea ϕ_t denota el homeomorfismo de X definido por $\phi_t(x) = \phi(t, x)$. Escribiremos $\{\phi_t\}$ para el flujo en lugar de ϕ .

Definition 7.2 ([3]) ϕ es BW-expansivo si $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ con la propiedad que si $d(\phi_t(x), \phi_{s(t)}) < \delta \forall t \in \mathbb{R}$ para un par de puntos $x, y \in X$ y una aplicación continua $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $s(0) = 0$, entonces $y = \phi_t(x)$, donde $|t| < \varepsilon$.

Sea L una 2-dimensional variedad suave compacta (llamada variedad ramificada de Lorenz). La variedad ramificada L es incrustada en \mathbb{R}^3 como un subconjunto. Se asume que un semi-flujo φ es definido sobre L . asociado al semi-flujo φ , se define una aplicación unidimensional expansora (esencialmente, con derivada mayor que 1). Denotemos por (L_f, φ_f) como el semi-flujo de Lorenz sobre la variedad ramificada con aplicación de retorno f . El límite inverso

$$(\tilde{L}_f, \tilde{\varphi}_f) = \lim_{\leftarrow} (L_f, \varphi_f)$$

es llamado el atractor de Lorenz con la aplicación de retorno f .

Theorem 7.3 El atractor de Lorenz $(\tilde{L}_f, \tilde{\varphi}_f)$ nos es BW-expansivo.

Proof. Mostraremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$, existen $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{L}$ y $q \in K$ tales que

$$\tilde{y} \notin \tilde{x} \cdot [-\varepsilon, \varepsilon]$$

y

$$\tilde{d}(\tilde{x} \cdot t, \tilde{y} \cdot g(t)) \leq \delta \text{ for all } t \in \mathbb{R}.$$

En efecto, defina $\varepsilon = 1$. Sea $\delta > 0$ dado. Notar que existe $\tilde{z} \in \tilde{L}$ tal que $z^0 = b$ y $z^s \in \text{arc}(e, b)$ para todo $s \leq 0$.

Además, existe un entero $N > 0$ tal que $\sum_{n \geq N} 2^{-n} D \leq \frac{\delta}{4}$, donde D es el diámetro de L .

Tome un $\gamma > 0$ tal que $d(z^u, z^v) < 4\gamma$ implica que $d(z^{u+s}, z^{v+s}) < \frac{\delta}{6}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ con $|s| \leq N$ (Por continuidad).

También, existe $s_0 < 0$ tal que

$$z^{s_0} \cdot (-\infty, 0] \subset B(e, 2\gamma).$$

Además, existe $s_1 < s_0$ tal que

$$z^{s_1} \cdot (-\infty, 0] \subset B(e, \gamma).$$

Tome $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{L}$ tal que

$$x^0 = z^{s_1} \text{ y } y^0 = z^{s_1 - 2\varepsilon}.$$

Notar que $y^0 \notin x^0 \cdot [-\varepsilon, \varepsilon]$, ya que si lo fuera se tendría que $y^0 = x^0 \cdot t$ para algún $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, es decir, $z^{s_1 - 2\varepsilon} = z^{s_1} \cdot t$, para algún $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, la cual es falsa, por lo tanto, $y^0 \notin x^0 \cdot [-\varepsilon, \varepsilon]$ y por lo que implica que

$$\tilde{y} \notin \tilde{x} \cdot [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Defina $g \in K$ por

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0; \\ \frac{s_0 - s_1 + 2\varepsilon}{s_0 - s_1} t & \text{si } 0 < t \leq s_0 - s_1; \\ t + 2\varepsilon & \text{si } t > s_0 - s_1. \end{cases}$$

Si $t \leq 0$, entonces $g(t) = t$. En este caso,

$$x^t = z^{s_1+t} \in z^{s_1} \cdot (-\infty, 0] \subset B(e, \gamma)$$

y

$$y^t = z^{s_1+t-2\varepsilon} \in z^{s_1} \cdot (-\infty, 0] \subset B(e, \gamma)$$

Entonces $d(x^t, y^t) \leq 2\gamma \leq 4\gamma$.

Por lo tanto

$$d(x^t, y^t) \leq 4\gamma, \forall t \leq 0.$$

Si $0 < t \leq s_0 - s_1$, entonces $g(t) = \frac{s_0-s_1+2\varepsilon}{s_0-s_1}t$. En este caso,

$$x^t = z^{s_0} \cdot (t - s_0 + s_1) \in z^{s_0} \cdot (-\infty, 0] \subset B(e, 2\gamma)$$

y

$$y^{g(t)} = z^{s_1-2\varepsilon+g(t)} = z^{s_0} \cdot (g(t) - s_0 + s_1 - 2\varepsilon) \in z^{s_0} \cdot (-\infty, 0] \subset B(e, 2\gamma)$$

esto es debido a que $t \leq s_0 - s_1$ implica que $\frac{1}{s_0-s_1}t \leq 1$, por lo que

$$\frac{s_0 - s_1 + 2\varepsilon}{s_0 - s_1}t \leq (s_0 - s_1 + 2\varepsilon)$$

es decir,

$$g(t) - (s_0 - s_1 + 2\varepsilon) \leq 0.$$

Por lo tanto

$$d(x^t, y^{g(t)}) \leq 4\gamma, \forall 0 < t \leq s_0 - s_1.$$

Si $t \geq s_0 - s_1$, entonces $g(t) = t + 2\varepsilon$. Entonces

$$x^t = z^{s_1+t} \text{ y } y^{g(t)} = z^{s_1+g(t)-2\varepsilon} = z^{s_1+t+2\varepsilon-2\varepsilon} = z^{s_1+t} = x^t$$

entonces $d(x^t, y^{g(t)}) = 0 \leq 4\gamma$.

En conclusión:

$$d(x^t, y^{g(t)}) \leq 4\gamma, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$d(x^{t+n}, y^{g(t)+n}) < \frac{\delta}{6} \text{ para todo } n \in \mathbb{R} \text{ con } |n| \leq N$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{x} \cdot t, \tilde{y} \cdot g(t)) &\leq \sum_{-N}^N 2^{-|n|} d(x^{t+n}, y^{g(t)+n}) + \frac{\delta}{2} \\ &< \left(\frac{\delta}{6}\right) \sum_{-N}^N 2^{-|n|} + \frac{\delta}{2} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{d}(\tilde{x} \cdot t, \tilde{y} \cdot g(t)) \leq \delta \text{ for all } t \in \mathbb{R}.$$

Lo se finaliza con la prueba del Teorema 7.3. □

Con la final de incluir al atractor de Lorenz, se propone una nueva forma de expansividad en virtud de Komuro:

Sea $C(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas sobre \mathbb{R} . Se define

$$C = \{g \in C(\mathbb{R}) : s(0) = 0\}.$$

y

$$K = \{g \in C : g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(s) > g(t)(s > t)\}.$$

Definition 7.4 ϕ es K^* -expansivo si $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ con la propiedad que si $d(\phi_t(x), \phi_{s(t)}) < \delta \forall t \in \mathbb{R}$ para un par de puntos $x, y \in X$ y una aplicación $g \in K$, entonces $y \cdot g(t_0) \in x \cdot [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

Theorem 7.5 El atractor de Lorenz $(\tilde{L}_f, \tilde{\varphi}_f)$ es K^* -expansivo.

Proof. Idea de la prueba. Escencialmente es probar que la aplicación de retorno unidimensional f es expansiva, luego por la propiedades de semi-flujo y del flujo (el del límite inverso) se tiene la K^* -expansividad del atractor de Lorenz. \square

References

- [1] M., Aphane, *On some results of Analysis in metric spaces and Fuzzy metric spaces*. Master Theses, 2009.
- [2] V.S. Afraimovich, V.V. Bykov and L.P. Shi'nikov, *On the appearence and structure of the Lorenz attractor*. Dokl. Acad. Sci. USSR, **234** (1977), 336–339.
- [3] R. Bowen and P. Walters, *Expansive one-parameter flows*. Journal Diffeerential Equations, **12** (1972), 180-193.
- [4] D. Carrasco-Olivera, R. Metzger, and C.A. Morales, *Expansivity in 2-metric space*. Indian Journal of Mathematics, **57**(3) (2015), 377-401.
- [5] J. Guckenheimer and R.F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*. Publ. Math. IHES, **50** (1979), 59–72.
- [6] A. George and P.V. Veeramani, *On some results of analysys for fuzzy metric spaces*. Fuzzy Sets and Systems, **90** (1997), 365–368.
- [7] V. Gregori and S. Romaguerra, *Some properties of fuzzy metric spaces*. Fuzzy Sets and Systems, **115** (2000), 485–489.
- [8] M. Komuro, *Properties of Lorenz attractors*. The Theory of Dynamical Systems and its applications of Nonlinear Problems (Kyoto, 1984), pp-4-16. World Sci, Publishing, Singapore (1984)
- [9] K. Lee and C.A. Morales, *Topological stability and pseudo-orbit tracing property for expansive measures*. J. Differential Equations, **162** (2017), 3467–3487.
- [10] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmosph. Sci., **20** (1963), 130–141.
- [11] F.N. Mehdi, *On the notion of Fuzzy Shadowing Property*. arxiv.org, 2015.
- [12] S. Nadaban, *Fuzzy b-metric spaces*. Int. J. Comput. Commun. Control, **11** (2) (2016), 273–281.
- [13] A. Seyyed, Ahmadi and R. Molaei Mohammad, *Stochastic Stability in Fuzzy Dynamical Systems*. Cankaya University Journal of Science and Engineering, **9** (1) (2012), 25?36.
- [14] C. Sparrow, *The Lorenz equations:bifurcations, chaos and strange attractors*. volume 41 of Applied Mathematical Sicences, Springer Verlag, 1982.
- [15] W. Tucker, *The Lorenz attractor exists*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **328** (1999), 1197–1202.
- [16] W. Tucker, *A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem*. Found Comput. Math., **2** (2002), 53–117.
- [17] W.R. Utz, *Unstable homeomorphisms*. Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 769-774.
- [18] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1982.

- [19] P. Walters, *On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability*, in: *The Structure of Attractors in Dynamical Systems*. Proc. Conf. North Dakota State Univ., Fargo, N.D., 1997, in Lecture Notes in Math., vol **668**, Springer, Berlin, 1978, pp. 231–244. (1950), 769–774.
- [20] R.F. Williams, *The strucure of the Lorenz attractor*. Publ. Math. IHES, **50** (1979), 73–99.