Capítulo 3

Límites-Parte 1

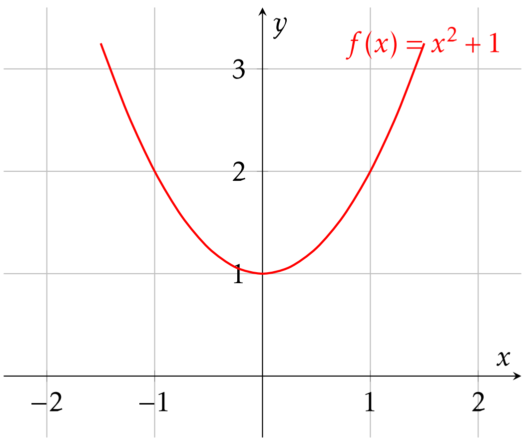
En este capítulo desarrollaremos el concepto de límite de una función, una de las nociones fundamentales del cálculo. A partir de esto, podremos analizar el comportamiento de una función tanto alrededor de un punto, como cuando los valores de x del dominio aumentan indefinidamente. Esto nos permitirá tener una idea más aproximada de la representación gráfica de una función. También la noción de limite nos llevará a definir los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración que se verán más adelante.

Muchos de estos temas se utilizan, en informática, para calcular el orden de un algoritmo.

3.1. Hacia el concepto de limite

Comenzaremos con una idea intuitiva del estudio del comportamiento de una función alrededor de un punto.

Ejemplo 1: En el siguiente gráfico se muestra parte de la función $f(x) = x^2 + 1$



Luego si calculamos algunos valores que toma la función para valores menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \quad 1\\
f(0{,}5) &= \quad 1{,}25\\
f(0{,}5) &= \quad 1{,}25\\
f(0{,}75) &= \quad 1{,}56\\
f(0{,}80) &= \quad 1{,}64\\
f(0{,}90) &= \quad 1{,}81\\
f(0{,}95) &= \quad 1{,}90\\
f(0{,}99) &= \quad 1{,}98\\
f(0{,}999) &= \quad 1{,}998
\end{aligned}$$

Lo que podemos observar aquí es, que si tomamos valores de x menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.
Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por izquierda, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y puede simbolizarse de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee : *el límite cuando x tiende a* 1, *por izquierda, de* $x^2 + 1$ *es igual a 2.*

Este límite puede calcularse sencillamente, por ser una función polinómica , reemplazando directamente la variable en la fórmula de la función [1], es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

En muchos otros casos tendremos que modificar previamente la expresión antes de reemplazar la variable.

Sigamos adelante con el mismo Ejemplo. Ahora, si calculamos algunos valores que toma la función para valores mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(2) = &\quad 5 \\ f(1{,}5) = &\quad 3{,}25 \\ f(1{,}25) = &\quad 2{,}56 \\ f(1{,}2) = &\quad 2{,}44 \\ f(1{,}1) = &\quad 2{,}21 \\ f(1{,}05) = &\quad 2{,}10 \\ f(1{,}01) = &\quad 2{,}02 \\ f(1{,}001) = &\quad 2{,}002 \end{aligned}$$

Si tomamos valores de x mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.
Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por derecha, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee: *el límite cuando x tiende a* 1, *por derecha, de* $x^2 + 1$ *es igual a 2.*

Aquí, podemos hacer lo mismo que antes, reemplazar directamente en la fórmula de la función, es decir

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

En este caso en particular, casualmente tanto los límites por izquierda y por derecha coinciden en su resultado pero no sucede en todos los casos.

A estos límites, tanto al límite por izquierda como al límite por derecha, los llamamos **límites laterales**.

En este ejemplo, podemos decir que, el límite cuando x tiende a 1 de $(x^2 + 1)$ es 2, es decir que, si no se hace mención alguna a si el límite es por izquierda o por derecha, se entiende que ambos límites laterales coinciden. Puede simbolizarse así:

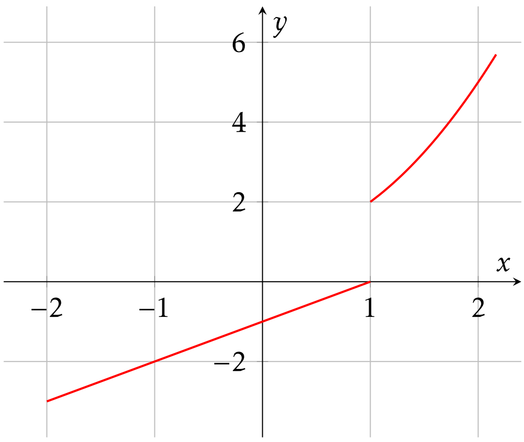
[1] Veremos más adelante por qué se puede hacer esto.

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$$

Veamos otro Ejemplo.

Ejemplo 2: Qué sucede ahora con el límite cuando $x \longrightarrow 1$ para la función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



En este caso la función está definida por partes, con fórmulas diferentes para los casos en que $x < 1$ o en que $x \geq 1$. Calculemos los límites laterales.

El límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ por izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - 1 .$$

Al calcular el límite cuando $x \longrightarrow 1$ por izquierda, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x < 1$ por lo que la fórmula de la función será $f(x) = x - 1$.

Este límite puede calcularse simplemente reemplazando la variable en la fórmula.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - 1 = 1 - 1 = 0$$

El límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ por derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1.$$

Al calcular el límite cuando $x \longrightarrow 1$ por derecha, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x \geq 1$ por lo que la fórmula de la función será $f(x) = x^2 + 1$.

Este límite puede calcularse simplemente reemplazando la variable en la fórmula.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

Concluimos que como los límites laterales no coinciden, el límite de la función $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ no existe.

Ejemplo 3: Consideremos la función racional

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

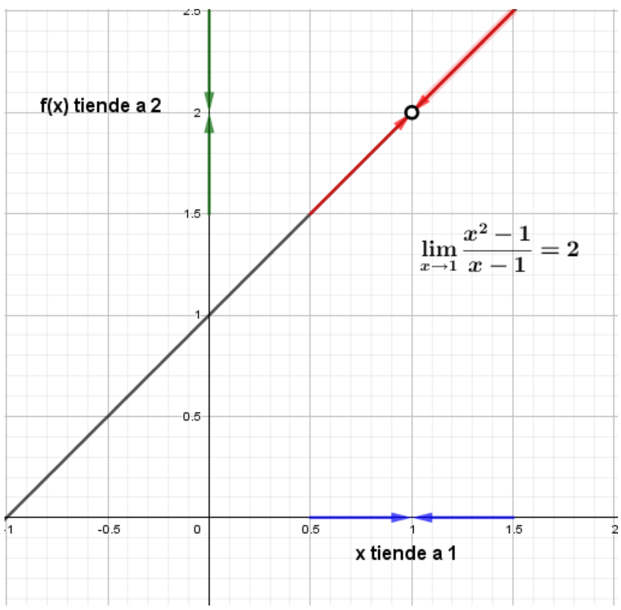
Observemos que **la función g no está definida para** $x = 1$ (es decir que no existe $g(1)$), pero si para cualquier otro número real. Entonces nos podríamos preguntar cómo se comporta la función cuando x toma valores próximos a 1.
Para responder a esta pregunta calculamos los valores de $g(x)$ para valores de x cercanos a 1.

$$\begin{aligned}
g(0{,}75) = &\quad 1{,}75 \\
g(0{,}90) = &\quad 1{,}90 \\
g(0{,}99) = &\quad 1{,}99 \\
g(0{,}999) = &\quad 1{,}999 \\
g(1) &\quad \text{no existe} \\
g(1{,}001) = &\quad 2{,}001 \\
g(1{,}01) = &\quad 2{,}01 \\
g(1{,}1) = &\quad 2{,}1 \\
g(1{,}25) = &\quad 2{,}25
\end{aligned}$$

A partir de estos datos , no es dificil de concluir que a medida de que x toma valores cada vez más próximos a 1 (tanto por valores mayores como por menores), $g(x)$ toma valores cada vez más próximos a 2. Entonces,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Observemos gráficamente la información que nos brinda el calculo del limite anterior:



La noción de límite ,tal como la describimos en los ejemplos, está destinada a comunicar el comportamiento de una función cerca de algún punto de interés, pero en realidad no en ese punto. Más adelante veremos que podemos determinar limites haciendo operaciones algebraicas.

Ahora, vamos a formalizar los conceptos que vimos en los ejemplos anteriores.

3.2. Definiciones

En las siguientes definiciones consideramos x_0 y L números reales y $f(x)$ una función.

Definición 1
Se dice que el límite por izquierda a x_0 es

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de x_0 pero menor que x_0. Y se lee *el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 por la izquierda es igual a L.*

Definición 2
Se dice que el límite por derecha a x_0 es

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L,$$

si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de x_0 pero mayor que x_0. Y se lee *el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 por la derecha es igual a L.*

Definición 3
Se dice que el límite cuando x tiende a x_0 es L , y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

En otras palabras, un limite existe si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como se desee) escogiendo x lo bastante cerca de x_0 (tanto por valores mayores como por menores), pero no igual a x_0.

Ejemplo 4: a) Si f es la función identidad, entonces para cualquier valor de x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

(b) Si f es la función constante, (función con el valor constante c), entonces para cualquier valor de x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$$

3.3. Propiedades Algebraicas de los limites

Para calcular límites de funciones, que son a su vez combinaciones aritméticas de funciones con límites conocidos, utilizamos varias reglas sencillas.

Sean, L, M, k y x_0 números reales,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = M$$

entonces,

1. Propiedad de la suma/diferencia:	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \pm M$
2. Propiedad del multiplo por una constante:	$\lim\limits_{x \to x_0} k\, f(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k\,L$
3. Propiedad del producto:	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L.M$
4. Propiedad del cociente:	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}, \qquad M \neq 0$
5. Propiedad de la potencia:	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n = [L]^n$, n entero positivo
6. Propiedad de la raíz:	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L} = [L]^{1/n}$, n entero positivo

Importante:

1. **Todas estas propiedades son válidas si los limites de las funciones existen.**

2. **La propiedad del cociente no se puede utilizar cuando el limite del denominador es** 0**. Veremos más adelante como resolver este tipo de limites.**

3. **En la siguiente sección se mostrarán herramientas que permitan solucionar los limites de la forma** $\dfrac{0}{0}$**.**

Ejemplo 5: Calcular los siguientes limites utilizando propiedades y el Ejemplo 4.

$a)\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (2x^2 - 3x + 4) \qquad b)\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}.$

$$
\begin{aligned}
a)\ \lim_{x \to 0} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 0}(2x^2) - \lim_{x \to 0}(3x) + \lim_{x \to 0}(4) \quad \text{(prop. 1)} \\
&= 2\lim_{x \to 0}(x^2) - 3\lim_{x \to 0}(x) + \lim_{x \to 0}(4) \quad \text{(prop. 2)} \\
&= 2(\lim_{x \to 0} x)^2 - 3\lim_{x \to 0}(x) + \lim_{x \to 0}(4) \quad \text{(prop.5)} \\
&= 2(0)^2 - 3(0) + 4 \qquad \text{(Ejemplo 4)} \\
&= 0 - 0 + 4 = 4
\end{aligned}
$$

$$b)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)} \qquad \text{(prop. 4)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^3 + 2\lim\limits_{x\to -2} x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 1}{\lim\limits_{x\to -2} 5 - 3\lim\limits_{x\to -2} x} \qquad \text{(prop. 1 y 2)}$$

$$= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} \qquad \text{(prop. 5)}$$

$$= \frac{-8+8-1}{5+6} = -\frac{1}{11}$$

Importante: Propiedad de sustitución directa
Si f es un polinomio o una función racional y x_0 está en el dominio de f, entonces

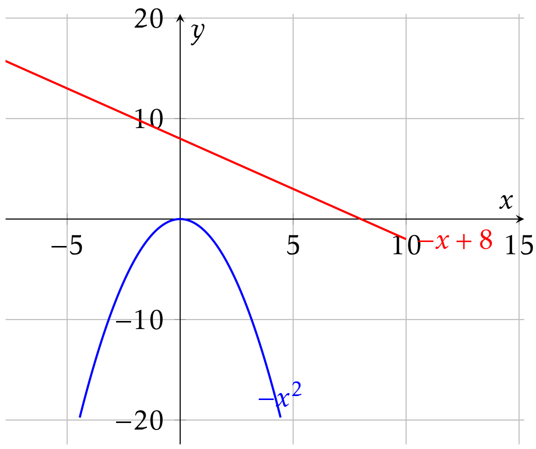
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman continuas en x_0 y se estudian en el próximo capítulo.

Ejemplo 6:

(a) Sean $f(x) = -x+8$ y $g(x) = -x^2$, calcular $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

Primero observemos sus gráficas:



De aquí, se obtiene que: $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = \lim\limits_{x\to -5} -x+8 = 13$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} -x^2 = -4$.

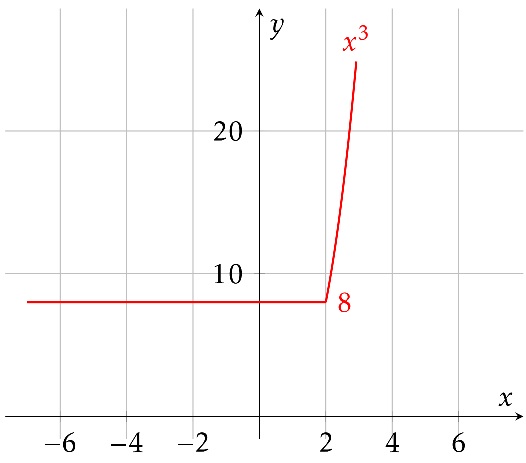
(b) Para $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \geq 2 \\ 8 & si \quad x < 2 \end{cases}$, hallar el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, si existe.

Esta función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. En $x = 2$ la función cambia su forma, con lo cual debemos analizar los limites laterales.

Por un lado, el limite por derecha es $\lim\limits_{x\to 2^+} x^3 = 8$, y el limite por izquierda es $\lim\limits_{x\to 2^-} 8 = 8$.

Como los limites laterales coinciden , $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$.

La siguiente es la gráfica de f.

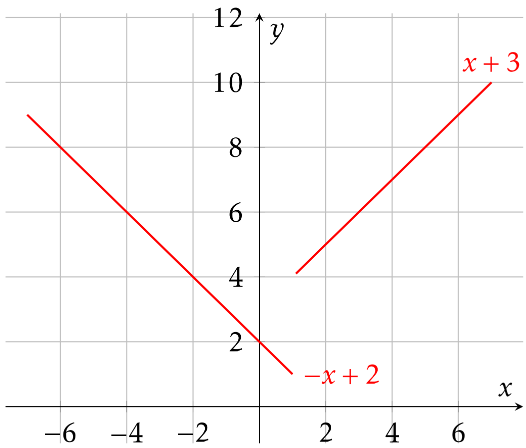


(c) Sea h dada por,

$$h(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x > 1 \\ \\ -x+2 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x\to 1} h(x)$.

Como en el item b), se trata de una función a trozos. Gráficamente, podemos observar que $\lim_{x\to 1} h(x)$ no existe.



Ahora veamos analíticamente, es decir, haciendo las cuentas.

$\lim_{x\to 1^+} x+3 = 4 \quad$ y $\quad \lim_{x\to 1^-} -x+2 = 1$.

Los limites laterales no coinciden, entonces $\lim_{x\to 1} h(x)$ no existe.

3.3.1. Ejercicios

1. Calcular los siguientes límites de las siguientes funciones, si existen.

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 2 \\ & \\ 1 & si \quad x \leq 2 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

   b) Sea g la función valor absoluto, $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

   Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. Qué puede concluir respecto al $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$?.

   c) Dada $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & si \quad x > 4 \\ & \\ 8-2x & si \quad x < 4 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 4} h(x)$.

   d) Sea $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & si \quad x \leq 0 \\ & \\ x^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$, y $\lim\limits_{x\to -1} f_2(x)$.

2. Calcular los siguientes limites utilizando propiedades.

   i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x+3}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} x^3 + 5x^2 + 10$

   iii) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ iv) $\lim\limits_{x\to \pi} sen(x - \pi)$

   v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 2}}{x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 1} ln\left(\dfrac{2}{x^3 + 1}\right)$

   vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{e^x}$ viii) $\lim\limits_{x\to 0} 3\,cos(x^2)(1+x)^4$

   ix) $\lim\limits_{x\to 3} |x - 3|$ x) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x}$