Apuntes de Matemática 2

Facultad de Informática
U.N.L.P.

Docentes: Nicolás Kepes, Lucila Calderón, Cecilia Sottile, Adriana Galli, Antonio Palmitano.

Año 2020

Índice general

Capítulo 1

Funciones

Los contenidos de la materia Matemática 2 se corresponden con los contenidos de la materia Análisis Matemático 1 que clásicamente se ven en muchas carreras de ciencias y de informática, estos contenidos se centran en el estudio y aplicación de funciones para resolver problemas de muy diversos tipos.

1.1. Definición

Una función es una relación especial entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto, por ello también usamos como sinónimo de función la palabra asignación.

Muchos fenómenos de la vida diaria se pueden representar como funciones, por ejemplo, podemos relacionar la cantidad de dígitos que posee una clave con la cantidad de claves posibles, en particular, si una clave tiene 4 dígitos, hay 10^4 claves posibles, si tiene 8 dígitos, hay 10^8 claves posibles, y así. Esto puede representarse como:

$$P(4) = 10^4$$

$$P(8) = 10^8$$

Y más generalmente como

$$P(n) = 10^n, \quad \text{siendo } n \text{ un número natural.}$$

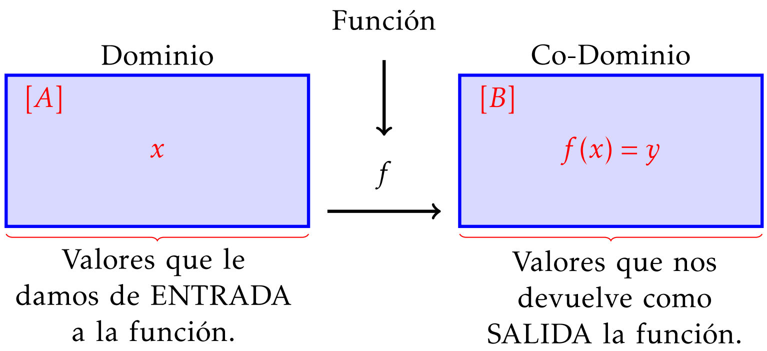
Algunas funciones no se rigen a partir de fórmulas matemáticas, por ejemplo podemos mencionar la asignación que existe entre cada persona y su número de documento, otro ejemplo está dado por la función que asigna a cada persona su altura.

En todos los casos podemos observar que a cada elemento de un primer conjunto se le asigna un único elemento de un segundo conjunto, en el ejemplo anterior tenemos un primer conjunto dado por las personas, luego a cada persona se le asigna un único elemento del conjunto de los números, de manera que a cada persona le corresponde el número de su altura. Vemos en este ejemplo claramente que todas las personas tienen asignada una única altura.

En esta materia trabajaremos con funciones numéricas, es decir funciones que relacionan dos conjuntos de números, y especialemnte aquellas determinadas por una fórmula matemática.

simbólicamente notaremos $f : A \to B$ y diremos que f asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B, en particular se notará $f(x) = y$ para decir que al elemento x del conjunto A se le asigna el elemento y del conjunto B.

Diremos que el conjunto A es el Dominio de la función f, es decir que el dominio de una función es el conjunto de los elementos de entrada, a los cuales se les asignará mediante la función un correspondiente en el segundo conjunto.



Ejemplo: Si consideramos la función definida por la fórmula $f(x) = x^2 + 1$ podemos observar que a cada elemento x se le asigna el elemento $x^2 + 1$, en particular veamos que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ y que $f(3) = 3^2 + 1 = 10$.
Dado que la fórmula no posee ningún tipo de restricción diremos que el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales, ya que a cualquier número real se lo puede elevar al cuadrado y luego sumarle uno.
en símbolos: $Dom(f) = \mathbb{R}$
usaremos especialmente la notación de intervalos, es decir $Dom(f) = (-\infty; \infty)$

Ejemplo: Si consideramos la función definida por la fórmula $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$ podemos observar que la función está definida a partir de una división, y teniendo en cuenta que no se puede dividir por cero, tenemos que no puede suceder que $x - 3 = 0$, luego $x = 3$ no estará en el dominio de la función. Simbolicamente $Dom(g) = (-\infty; 3) \bigcup (3; \infty)$.

1.1.1. Ejercicios

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $a(x) = x + 1$

   b) $b(x) = x^2 + 1$

   c) $c(x) = \dfrac{1}{x}$

   d) $d(x) = \dfrac{2}{x+3}$

   e) $e(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$

   f) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 4x + 3}$

   g) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$

   h) $h(x) = |x + 1|$

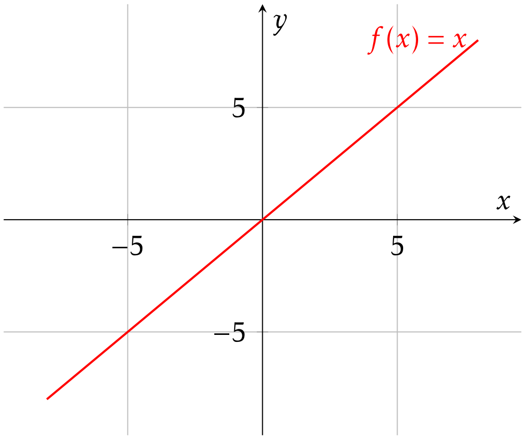
i) $i(x) = 2^x$
j) $j(x) = 2^{x-5}$
k) $k(x) = ln(x)$
l) $l(x) = ln(x+4)$

2. Realizar el ejercicio de las páginas 26 y 27 del libro *El lenguaje de funciones y gráficas*. (páginas 28 y 29 del archivo en formato pdf)

1.2. Lineal

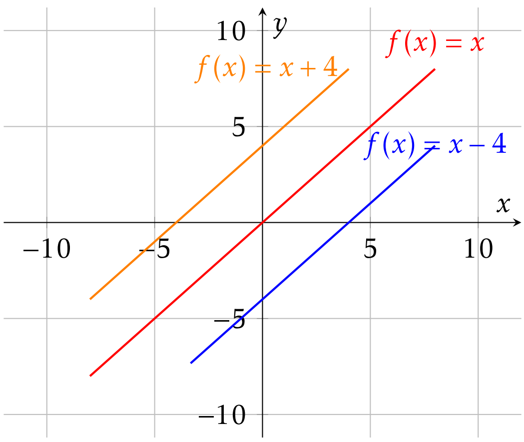
Una Función Lineal es de la forma $f(x) = y = mx + b$ en donde m es su pendiente y b la ordenada al origen.

Podemos ver un caso típico, $y = x$, en donde $m = 1$ y $b = 0$. Su representación gráfica es una recta de la siguiente manera.



1.2.1. Traslaciones

Podemos hacer un desplazamiento de las rectas sobre el eje y. Por ejemplo veamoslo con $y = x$, y sus desplazamientos hacia ambos sentidos 4 lugares.



Este comportamiento lo podemos entender también como rectas con pendiente $m = 1$ y ordenadas al origen $b = 4$ y $b = -4$.

1.2.2. Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = 2x + 1$
2. $b(x) = x - 6$

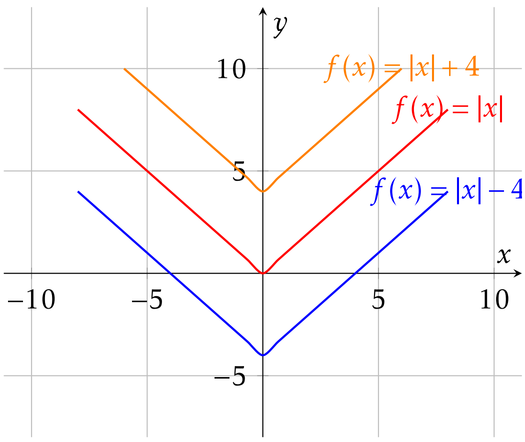
1.3. Valor Absoluto

En este caso la función en cuestión se entiende de la siguiente manera:

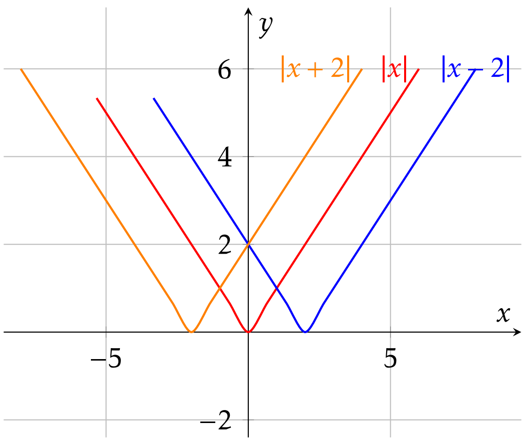
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con lo cual podemos observar una típica función valor absoluto en rojo y sus desplazamientos 4 lugares sobre el eje y.

1.3.1. Traslaciones



Si los desplazamientos los hacemos sobre el eje x, lo que debemos modificar es el interior de las barras de valor absoluto. Por ejemplo, veamos los siguientes desplazamientos 2 lugares sobre el eje x.



1.3.2. Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = |2x| + 1$

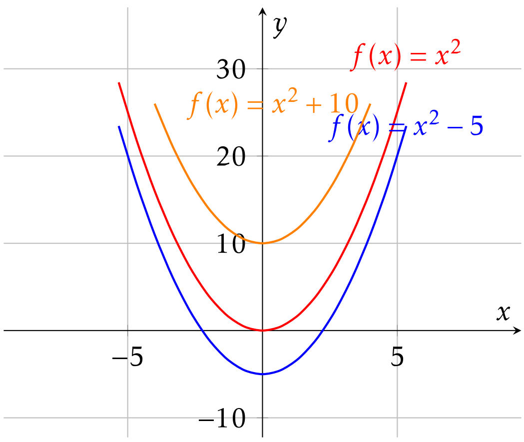
2. $b(x) = |x - 6|$

1.4. Cuadrática

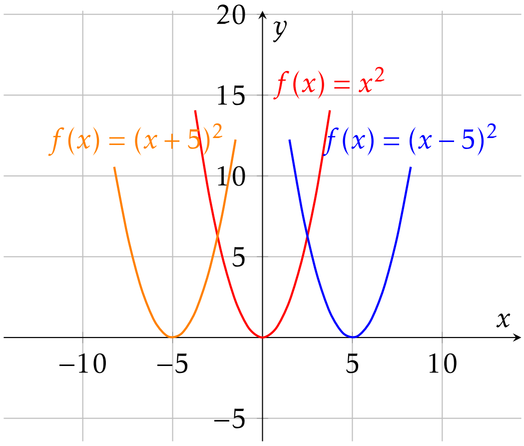
Las funciones cuadráticas son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Su representación gráfica está dada por una parábola de la siguiente manera.

1.4.1. Traslaciones

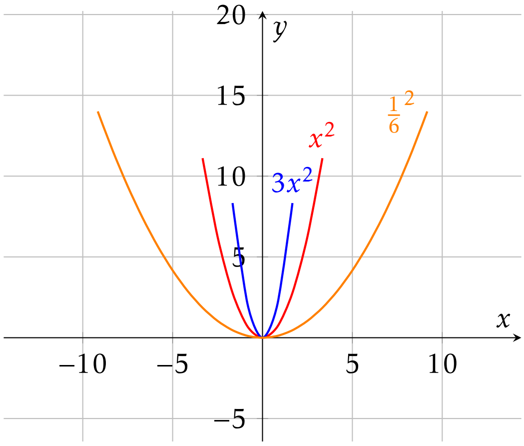
Si trasladamos la parábola $y = x^2$ 4 lugares sobre el eje y, obtenemos lo siguiente.



Y si la traslación es sobre el eje x,



1.4.2. Dilataciones



1.4.3. Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

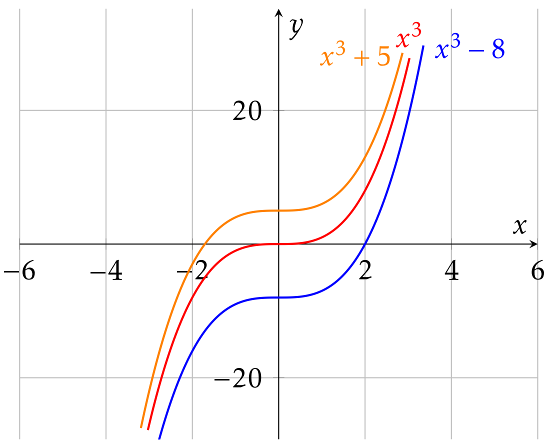
1. $a(x) = 3x^2 + 3$

2. $b(x) = (x - 6)^2$

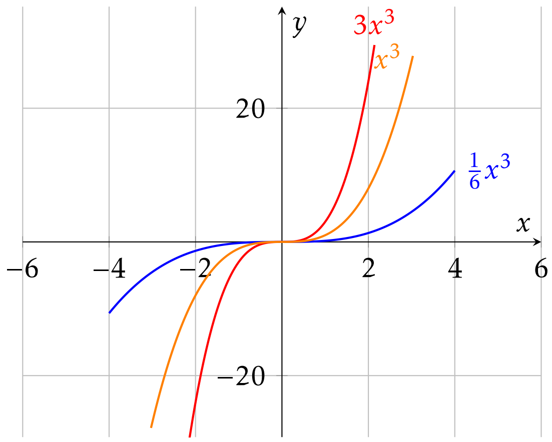
1.5. Cúbicas

Las funciones cúbicas son de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1.5.1. Traslaciones



1.5.2. Dilataciones



1.5.3. Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

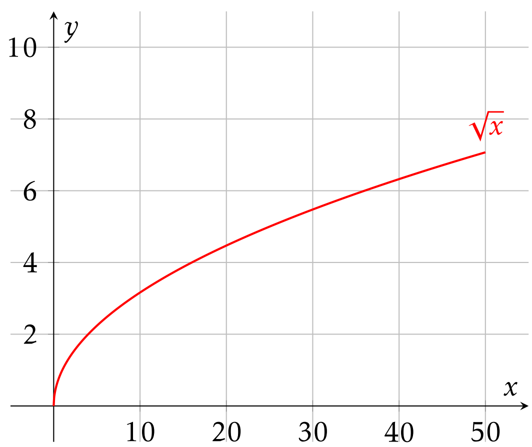
1. $a(x) = x^3 + 1$
2. $b(x) = (x-2)^3$

1.6. Potencias Racionales

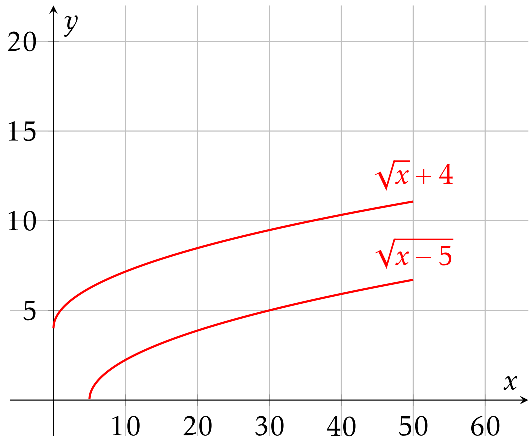
Una de las funciones de esta clase más conocida es: **La función raíz cuadrada**.

$$y = \sqrt{x}$$

El dominio de la función raíz cuadrada es $[0, +\infty)$.



1.6.1. Traslaciones



1.6.2. Ejercicios

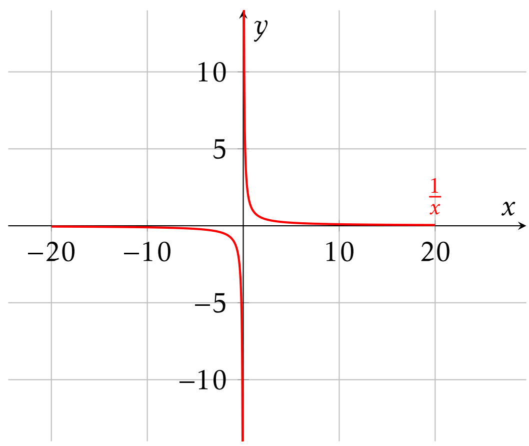
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

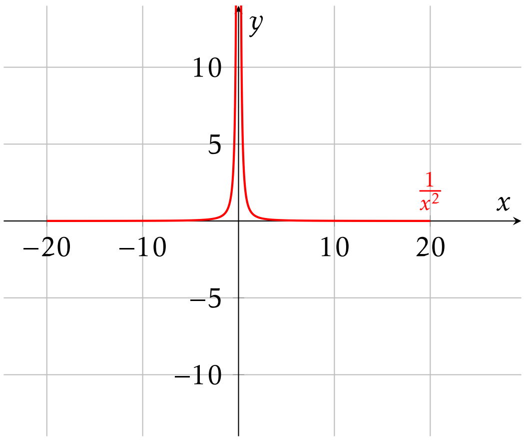
1. $a(x) = \sqrt{x} + 2$

2. $b(x) = \sqrt{x-3}$

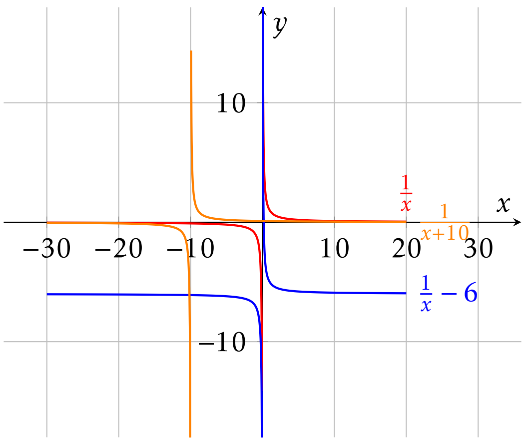
1.7. Racionales

Una función racional es un cociente o razón $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios. El dominio de una función racional es el conjunto de $\mathbb{R}$ para los cuales $q(x) \neq 0$.





1.7.1. Traslaciones



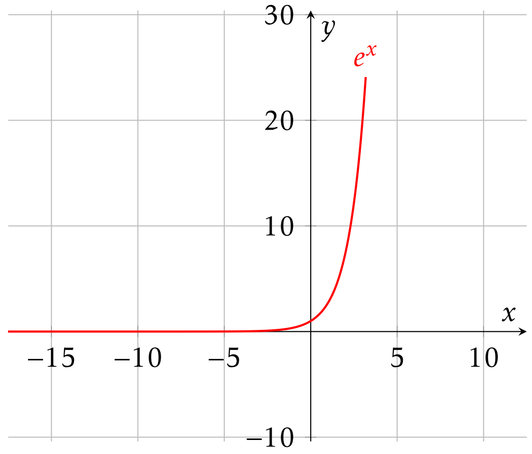
1.7.2. Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

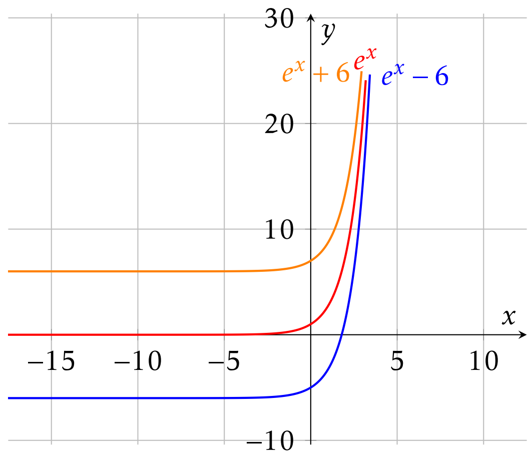
1. $a(x) = \dfrac{1}{x} + 4$

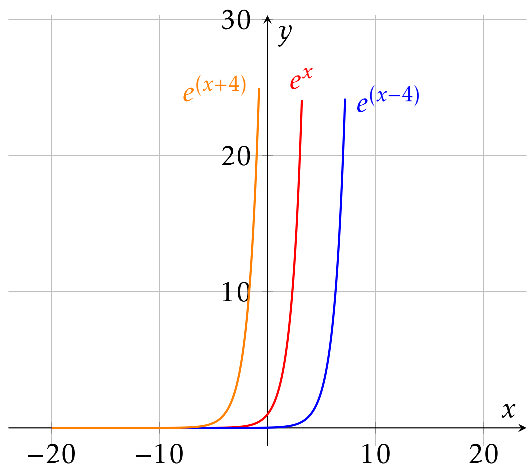
2. $b(x) = \dfrac{1}{x-8}$

1.8. Exponencial



1.8.1. Traslaciones



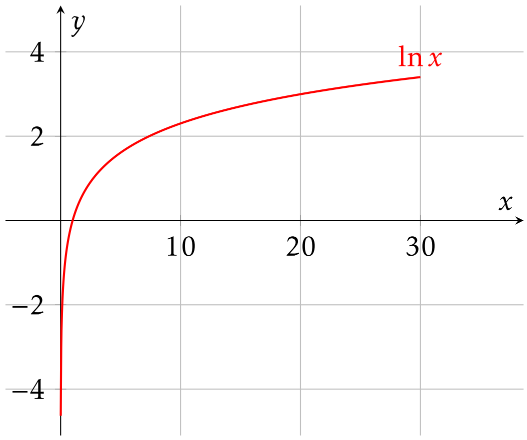


1.8.2. Ejercicios

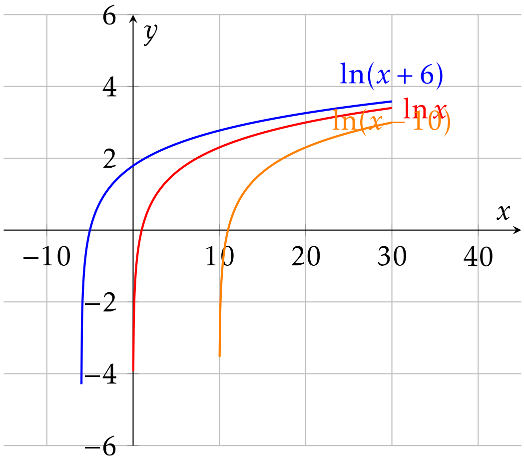
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = e^{x-5}$
2. $b(x) = e^x + 3$

1.9. Logarítmica



1.9.1. Traslaciones

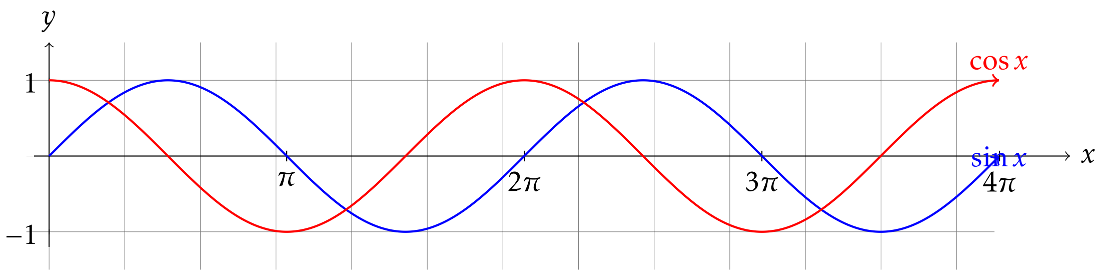


1.9.2. Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = ln(x+2)$
2. $b(x) = ln(x) - 4$

1.10. Trigonométricas



1.10.1. Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = cos(x) + 3$
2. $b(x) = sen(x) - 2$

Ayúdese a graficar las funciones pedidas con el programa GeoGebra on line:

https://www.geogebra.org

En el siguiente link pueden aprender a usarlo:

https://www.youtube.com/watch?v=LKcln4012AU

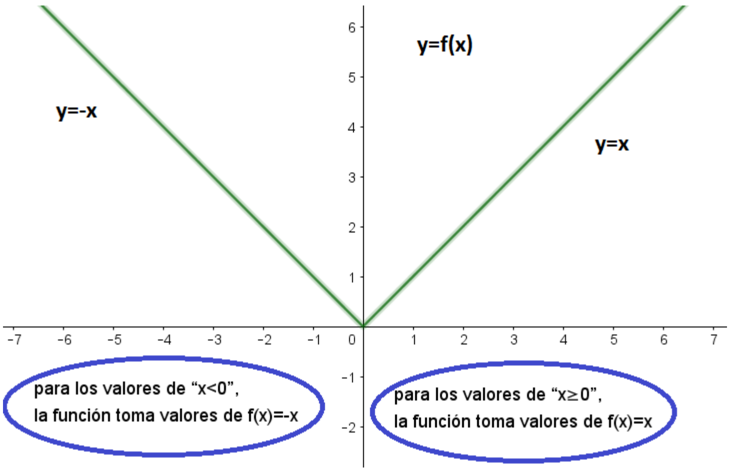
Capítulo 2

Funciones Continuación

Hasta ahora hemos visto las funciones elementales del análisis matemático. A partir de estas vamos definir nuevas funciones de expresiones más complejas. En algunos casos vamos a poder dibujarlas como traslaciones y dilaciones de una función, pero en otros casos no. Para estos casos necesitaremos de un estudio más detallado de la función.

2.1. Funciones a trozos

A veces una función se describe mediante el uso de fórmulas diferentes en distintas partes de su dominio. Por ejemplo la función valor absoluto vista antes, $Dom(f) = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$, sin embargo para valores $x \in (-\infty, 0)$, la función toma valores $-x$ y para valores $x \in [0, +\infty)$, la función toma valores x. Veamos su gráfica:



Ejemplo 1) Para la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x < 1 \\ x^2+1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 5 & si \quad x > 2 \end{cases} .$$

a) Hallar el dominio de $f(x)$.

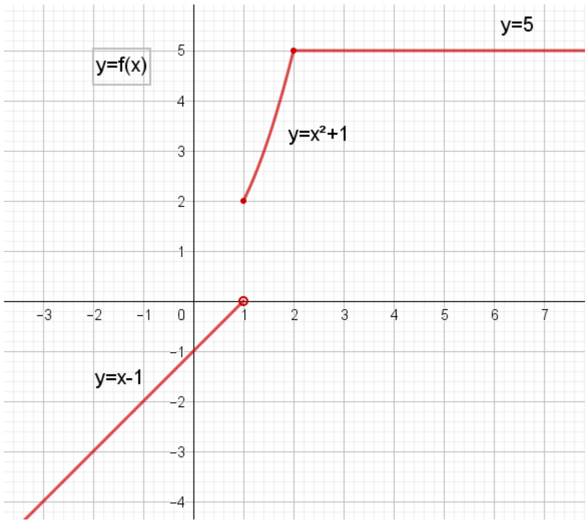
b) Hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

c) Realice su gráfica.

a) El dominio de $f(x)$ es: $Dom(f) = \mathbb{R}$, pues para $x < 1$ la función es lineal y está bien definida. Un razonamiento similar ocurre para $1 \leq x \leq 2$ y $x > 2$.

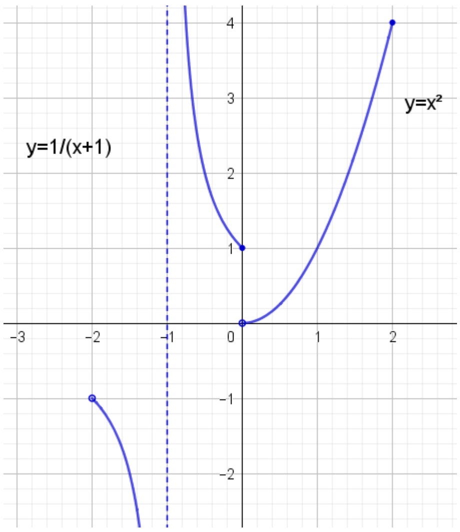
b) Como $x = 0 \in (-\infty, 1)$, ($f(x)$ toma la forma de $(x-1)$) $\Rightarrow \quad f(0) = 0 - 1 = -1$.
Como $x = 1 \in [1, 2]$, ($f(x)$ toma la forma de (x^2+1)) $\Rightarrow \quad f(1) = 1^2 + 1 = 2$.
Como $x = 4 \in (2, +\infty)$, ($f(x)$ toma la forma de 5) $\Rightarrow \quad f(4) = 5$.

c) La gráfica de f es:



Ejemplo 2) Sea $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & si \quad -2 < x \leq 0 \\ \\ x^2 & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

El dominio de la función es $Dom(g) = (-2, -1) \cup (-1, 2]$, 'sacamos' $x = -1$, ya que el denominador de la función $\dfrac{1}{x+1}$ no puede ser cero, por lo tanto no está definido para ese valor de x.



2.1.1. Ejercicios

1) Hallar el dominio de las siguientes funciones a trozos y graficar.

a) $f_1(x) = \begin{cases} -x & si & x \leq 0 \\ x^2 & si & 0 < x \leq 1 \\ 1 & si & x > 1 \end{cases}$.

b) $f_2(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si & x \leq 1 \\ x^2 + 2x & si & x > 1 \end{cases}$.

c) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ \\ ln(x) & si \quad x > 0 \end{cases}.$

d) $f_4(x) = \begin{cases} e^x & si \quad 0 \leq x < 2 \\ \\ 5 & si \quad x = 2 \\ \\ \dfrac{2}{x-4} & si \quad 2 < x < 6 \end{cases}.$

Sugerencia: Para verificar si las gráficas son correctas utilizar GeoGebra. El comando **Si** permite definir funciones a trozos: Si[condición1,expresión1, condición2,expresión2,...].

Por ejemplo para definir la función $f(x)$ del Ejemplo 1, debemos utilizar
$Si[x < 1, x-1, 1 <= x <= 2, x^2+1, x > 2, 5]$.

2.2. Operaciones entre funciones

Otra forma de obtener funciones es a partir de hacer ciertas operaciones entre las funciones conocidas . A continuación definimos la suma, resta, producto, división y composición de funciones. Es preciso que tengamos cuidado a la hora de definir el dominio de las nuevas funciones.

2.2.1. Suma, resta, producto y cociente de funciones

Definición Supongamos que f y g son funciones con dominios D_1 y D_2, respectivamente. **Las funciones** $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ están definidas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

para todo $x \in D_1 \cap D_2$ (es decir, para x que pertenezca a ambos dominios).

La función $\dfrac{f}{g}$ está definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

para $x \in (D_1 \cap D_2 - \{x : g(x) = 0\})$.

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si c es un número real, entonces la función cf está definida para todo x en el dominio de f mediante $(cf)(x) = cf(x)$.

Ejemplo 3) Sean $f(x) = x-3$ y $g(x) = \sqrt{x}$, cuyos dominios son: $Dom(f) = (-\infty, +\infty)$ y $Dom(g) = [0, +\infty)$.

Los puntos comunes a tales dominios son $(-\infty, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$.

Las diferentes combinaciones algebraicas de las dos funciones son:

Función	Expresión	Dominio
$f+g$	$(f+g)(x) = x-3+\sqrt{x}$,	$[0,+\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x) = x-3-\sqrt{x}$,	$[0,+\infty)$
$f \cdot g$	$(f\cdot g)(x) = (x-3)\cdot\sqrt{x}$,	$[0,+\infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$,	$(0,+\infty)$ ('sacamos' $x=0$)
$\left(\frac{g}{f}\right)$	$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$,	$[0,3)\cup(3,+\infty)$ ('sacamos' $x=3$)

2.2.2. Composición de funciones

Una operación sobre funciones que no corresponde directamente con las usuales es la **composición de dos funciones**.

Definición Si f y g son funciones, la **composición** de estas funciones se escribe como $f\circ g$ ('g compuesta con f'), está definida por

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f\circ g$ consiste de todos los números x en el dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f. Simbólicamente,

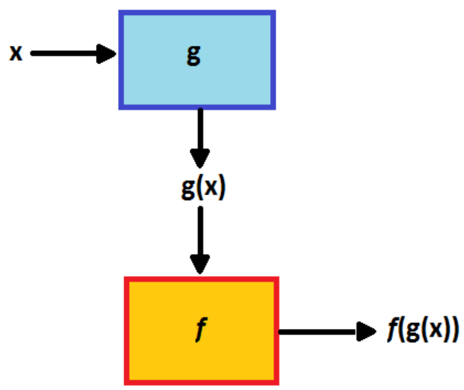
$$Dom(f\circ g) = \{x \in Dom(g) \quad \text{tal que} \quad g(x)\in Dom(f)\}.$$

Otra forma equivalente es,

$$Dom(f\circ g) = \{x \in Dom(g)\} - \{x \quad \text{tal que} \quad g(x)\notin Dom(f)\}.$$

Para evaluar la composición $g\circ f$ (cuando está definida), invertimos el orden para encontrar primero $g(x)$ y después $g(f(x))$. El dominio de $g\circ f$ es el conjunto de números x en el dominio de f, tales que $f(x)$ esté en el dominio de g.
Por lo general, las funciones $(f\circ g)$ y $(g\circ f)$ son muy diferentes.

Observación
La composición de dos funciones es un proceso de dos pasos, como se indica en el siguiente esquema:



Importante: Para definir $f(g(x))$, primero se necesita definir $g(x)$, por lo que x debe estar en el dominio de g. A continuación, f debe definirse en el punto $g(x)$, de modo que el número $g(x)$ deba estar en el dominio de f. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4) Para $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = ln(x)$, determinar $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y $(f \circ f)$ e identificar el dominio de cada una.

Primero tenemos indentificamos el dominio de f y g: $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Dom(g) = (0,+\infty)$.
Luego obtenemos la expresión de $f \circ g$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ln(x)) = (ln(x))^2 + 1,$$

Por último, $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) / g(x) \in Dom(f)\}$.
Los x que están en $Dom(g)$ son $x \in (0,+\infty)$, como $g(x) = ln(x)$, sabemos que la función logaritmo toma todos los valores de y (recordar su gráfica), es decir $ln(x) \in \mathbb{R} = Dom(f)$.

Por lo tanto $Dom(f \circ g) = Dom(g) = (0,+\infty)$.

Composición	Dominio
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ln(x)) = (ln(x))^2 + 1$	$(0,+\infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = ln(x^2+1)$	$\mathbb{R}$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1$	$\mathbb{R}$

Para ver que el $Dom(g \circ f) = \mathbb{R}$, observar que $f(x)$ está definida para cual valor de x en $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$ debe estar en el dominio de g, con lo cual $x^2+1 > 0$, y esto ocurre para cualquier valor de x (pues un número elevado al cuadrado es siempre positivo y si le sumo un número positivo, sigue quedando positivo), así que no 'sacamos' ningún valor del dominio de f.

◇

A menudo se necesitará reconocer que una función dada es una composición de funciones más simples.

Ejemplo 5) Identificar las funciones f y g de modo que la función dada se pueda escribir como $f \circ g$,
a) $\sqrt{x^2+1}$, b) $\cos^2(x)$.

La función del inciso a) se puede pensar que x^2+1 está dentro de la raíz cuadrada. Así $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2+1$.

En el inciso b) podemos pensar $\cos(x)$ está dentro de x^2. Por lo tanto, $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos(x)$.

Ejemplo 6) La siguiente tabla de valores muestra algunos valores que toman las funciones f y g.

x	$f(x)$	$g(x)$
1	1	2
2	3	0
3	-2	-7

A partir de estos datos determinar: a) $f(g(1))$, b) $g(f(2))$.

a) Si vemos en el cuadro, sabemos que $g(1) = 2$, con lo cual, $f(g(1)) = f(2) = 3$.

b) $g(f(2)) = g(3) = -7$.

◇

Observación Es posible componer más de dos funciones.

$$(f \circ g \circ h)(x) = [(f \circ g) \circ h](x) = [f \circ (g \circ h)](x) = f(g(h(x))).$$

2.2.3. Ejercicios

1) Sean $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt{x-3}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $M(x) = sin(x)$ y $W(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. A partir de estas funciones determinar.

a) Dominio de cada una de las funciones.

b) Expresión y dominio de: i) $(g+W)$, ii) $(h \cdot M)$ y iii) $(\dfrac{g}{f})$.

c) Expresión y dominio de las siguientes funciones compuestas: i) $(f \circ g)$, ii) $(h \circ f)$ y $(M \circ h)$.

d) Expresión de $(h \circ M \circ f)$.

2) Expresar las funciones dadas como composición de dos o más funciones simples.

a) $senx^3$, b) $\sqrt{x^4+1}$, c) $\dfrac{1}{x^2+1}$.

3) Dadas $f(x) = 2-x$ y $g(x) = \begin{cases} -x & -2 \leq x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$, hallar

i) $f(g(0))$ y $g(f(0))$.

ii) $f(f(2))$ y $g(g(-1))$.

iii) $f(g(\frac{1}{2}))$ y $g(f(3))$.

Capítulo 3

Límites-Parte 1

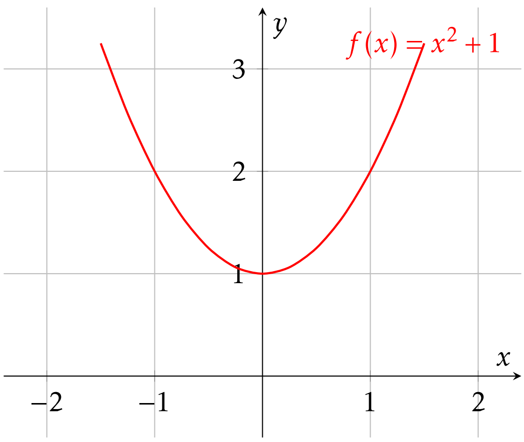
En este capítulo desarrollaremos el concepto de límite de una función, una de las nociones fundamentales del cálculo. A partir de esto, podremos analizar el comportamiento de una función tanto alrededor de un punto, como cuando los valores de x del dominio aumentan indefinidamente. Esto nos permitirá tener una idea más aproximada de la representación gráfica de una función. También la noción de limite nos llevará a definir los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración que se verán más adelante.

Muchos de estos temas se utilizan, en informática, para calcular el orden de un algoritmo.

3.1. Hacia el concepto de limite

Comenzaremos con una idea intuitiva del estudio del comportamiento de una función alrededor de un punto.

Ejemplo 1: En el siguiente gráfico se muestra parte de la función $f(x) = x^2 + 1$



Luego si calculamos algunos valores que toma la función para valores menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(0{,}5) &= 1{,}25 \\ f(0{,}5) &= 1{,}25 \\ f(0{,}75) &= 1{,}56 \\ f(0{,}80) &= 1{,}64 \\ f(0{,}90) &= 1{,}81 \\ f(0{,}95) &= 1{,}90 \\ f(0{,}99) &= 1{,}98 \\ f(0{,}999) &= 1{,}998 \end{aligned}$$

Lo que podemos observar aquí es, que si tomamos valores de x menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.
Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por izquierda, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y puede simbolizarse de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee : *el límite cuando x tiende a* 1, *por izquierda, de* $x^2 + 1$ *es igual a 2.*

Este límite puede calcularse sencillamente, por ser una función polinómica , reemplazando directamente la variable en la fórmula de la función [1], es decir:

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

En muchos otros casos tendremos que modificar previamente la expresión antes de reemplazar la variable.

Sigamos adelante con el mismo Ejemplo. Ahora, si calculamos algunos valores que toma la función para valores mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(2) = &\quad 5\\
f(1{,}5) = &\quad 3{,}25\\
f(1{,}25) = &\quad 2{,}56\\
f(1{,}2) = &\quad 2{,}44\\
f(1{,}1) = &\quad 2{,}21\\
f(1{,}05) = &\quad 2{,}10\\
f(1{,}01) = &\quad 2{,}02\\
f(1{,}001) = &\quad 2{,}002
\end{aligned}$$

Si tomamos valores de x mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.
Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por derecha, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1^+} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee: *el límite cuando x tiende a* 1, *por derecha, de* $x^2 + 1$ *es igual a 2.*

Aquí, podemos hacer lo mismo que antes, reemplazar directamente en la fórmula de la función, es decir

$$\lim_{x\to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

En este caso en particular, casualmente tanto los límites por izquierda y por derecha coinciden en su resultado pero no sucede en todos los casos.

A estos límites, tanto al límite por izquierda como al límite por derecha, los llamamos **límites laterales**.

En este ejemplo, podemos decir que, el límite cuando x tiende a 1 de $(x^2 + 1)$ es 2, es decir que, si no se hace mención alguna a si el límite es por izquierda o por derecha, se entiende que ambos límites laterales coinciden. Puede simbolizarse así:

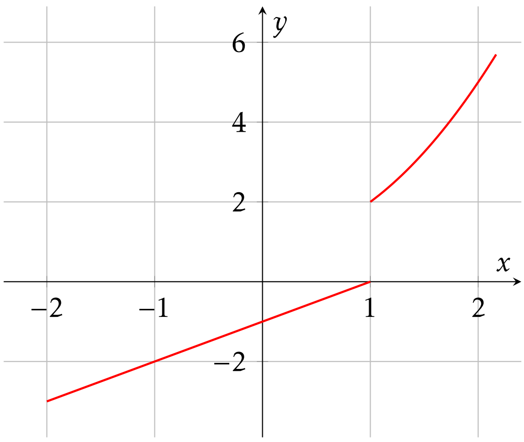
[1] Veremos más adelante por qué se puede hacer esto.

$$\lim_{x\to 1} x^2+1=2$$

Veamos otro Ejemplo.

Ejemplo 2: Qué sucede ahora con el límite cuando $x \longrightarrow 1$ para la función $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x<1 \\ x^2+1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}.$$



En este caso la función está definida por partes, con fórmulas diferentes para los casos en que $x<1$ o en que $x\geq 1$. Calculemos los límites laterales.

El límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ por izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x-1\ .$$

Al calcular el límite cuando $x \longrightarrow 1$ por izquierda, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x<1$ por lo que la fórmula de la función será $f(x)=x-1$.

Este límite puede calcularse simplemente reemplazando la variable en la fórmula.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x-1=1-1=0$$

El límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ por derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2+1.$$

Al calcular el límite cuando $x \longrightarrow 1$ por derecha, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x\geq 1$ por lo que la fórmula de la función será $f(x)=x^2+1$.

Este límite puede calcularse simplemente reemplazando la variable en la fórmula.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2+1=1^2+1=2$$

Concluimos que como los límites laterales no coinciden, el límite de la función $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ no existe.

Ejemplo 3: Consideremos la función racional

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

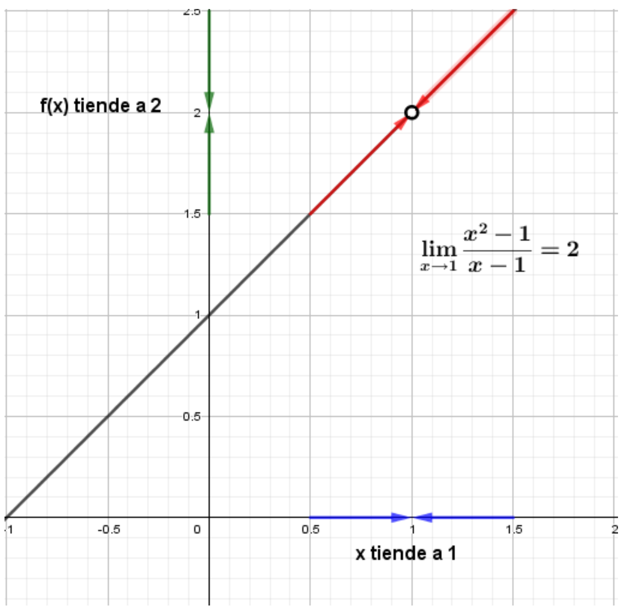
Observemos que **la función g no está definida para** $x = 1$ (es decir que no existe $g(1)$), pero si para cualquier otro número real. Entonces nos podríamos preguntar cómo se comporta la función cuando x toma valores próximos a 1.
Para responder a esta pregunta calculamos los valores de $g(x)$ para valores de x cercanos a 1.

$$\begin{aligned}
g(0{,}75) &= \quad 1{,}75\\
g(0{,}90) &= \quad 1{,}90\\
g(0{,}99) &= \quad 1{,}99\\
g(0{,}999) &= \quad 1{,}999\\
g(1) & \quad\ \text{no existe}\\
g(1{,}001) &= \quad 2{,}001\\
g(1{,}01) &= \quad 2{,}01\\
g(1{,}1) &= \quad 2{,}1\\
g(1{,}25) &= \quad 2{,}25
\end{aligned}$$

A partir de estos datos , no es dificil de concluir que a medida de que x toma valores cada vez más próximos a 1 (tanto por valores mayores como por menores), $g(x)$ toma valores cada vez más próximos a 2. Entonces,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Observemos gráficamente la información que nos brinda el calculo del limite anterior:



La noción de límite ,tal como la describimos en los ejemplos, está destinada a comunicar el comportamiento de una función cerca de algún punto de interés, pero en realidad no en ese punto. Más adelante veremos que podemos determinar limites haciendo operaciones algebraicas.

Ahora, vamos a formalizar los conceptos que vimos en los ejemplos anteriores.

3.2. Definiciones

En las siguientes definiciones consideramos x_0 y L números reales y $f(x)$ una función.

Definición 1
Se dice que el límite por izquierda a x_0 es

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de x_0 pero menor que x_0. Y se lee *el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 por la izquierda es igual a L.*

Definición 2
Se dice que el límite por derecha a x_0 es

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L,$$

si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de x_0 pero mayor que x_0. Y se lee *el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 por la derecha es igual a L.*

Definición 3
Se dice que el límite cuando x tiende a x_0 es L , y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

En otras palabras, un limite existe si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como se desee) escogiendo x lo bastante cerca de x_0 (tanto por valores mayores como por menores), pero no igual a x_0.

Ejemplo 4: a) Si f es la función identidad, entonces para cualquier valor de x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

(b) Si f es la función constante, (función con el valor constante c), entonces para cualquier valor de x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$$

3.3. Propiedades Algebraicas de los limites

Para calcular límites de funciones, que son a su vez combinaciones aritméticas de funciones con límites conocidos, utilizamos varias reglas sencillas.

Sean, L, M, k y x_0 números reales,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = M$$

entonces,

1. Propiedad de la suma/diferencia:	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$
2. Propiedad del multiplo por una constante:	$\lim\limits_{x\to x_0} k\,f(x) = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k\,L$
3. Propiedad del producto:	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x). \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L.M$
4. Propiedad del cociente:	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}, \qquad M \neq 0$
5. Propiedad de la potencia:	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n = [L]^n$, n entero positivo
6. Propiedad de la raíz:	$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L} = [L]^{1/n}$, n entero positivo

Importante:

1. **Todas estas propiedades son válidas si los limites de las funciones existen.**

2. **La propiedad del cociente no se puede utilizar cuando el limite del denominador es** 0**. Veremos más adelante como resolver este tipo de limites.**

3. **En la siguiente sección se mostrarán herramientas que permitan solucionar los limites de la forma** $\dfrac{0}{0}$**.**

Ejemplo 5: Calcular los siguientes limites utilizando propiedades y el Ejemplo 4.

$a)\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(2x^2 - 3x + 4) \qquad b)\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}.$

$$
\begin{aligned}
a)\ \lim_{x\to 0}(2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x\to 0}(2x^2) - \lim_{x\to 0}(3x) + \lim_{x\to 0}(4) \quad \text{(prop. 1)}\\
&= 2\lim_{x\to 0}(x^2) - 3\lim_{x\to 0}(x) + \lim_{x\to 0}(4) \quad \text{(prop. 2)}\\
&= 2(\lim_{x\to 0} x)^2 - 3\lim_{x\to 0}(x) + \lim_{x\to 0}(4) \quad \text{(prop.5)}\\
&= 2(0)^2 - 3(0) + 4 \qquad\qquad \text{(Ejemplo 4)}\\
&= 0 - 0 + 4 = 4
\end{aligned}
$$

$$b)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)} \qquad \text{(prop. 4)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x} \qquad \text{(prop. 1 y 2)}$$

$$= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} \qquad \text{(prop. 5)}$$

$$= \frac{-8+8-1}{5+6} = -\frac{1}{11}$$

Importante: Propiedad de sustitución directa
Si f es un polinomio o una función racional y x_0 está en el dominio de f, entonces

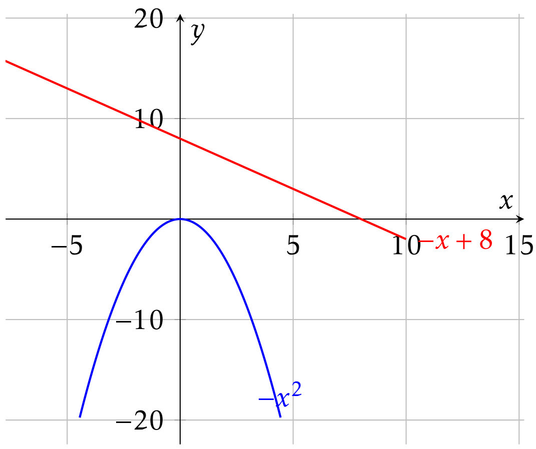
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman continuas en x_0 y se estudian en el próximo capítulo.

Ejemplo 6:

(a) Sean $f(x) = -x+8$ y $g(x) = -x^2$, calcular $\lim_{x\to -5} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} g(x)$.

Primero observemos sus gráficas:



De aquí, se obtiene que: $\lim_{x\to -5} f(x) = \lim_{x\to -5} -x+8 = 13$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} -x^2 = -4$.

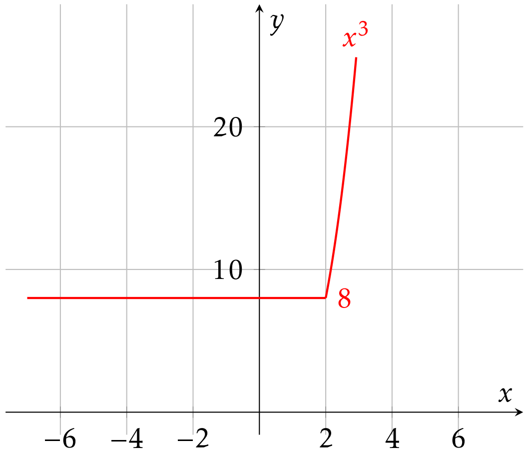
(b) Para $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \geq 2 \\ 8 & si \quad x < 2 \end{cases}$, hallar el $\lim_{x\to 2} f(x)$, si existe.

Esta función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. En $x = 2$ la función cambia su forma, con lo cual debemos analizar los limites laterales.

Por un lado, el limite por derecha es $\lim_{x\to 2^+} x^3 = 8$, y el limite por izquierda es $\lim_{x\to 2^-} 8 = 8$.

Como los limites laterales coinciden , $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$.

La siguiente es la gráfica de f.

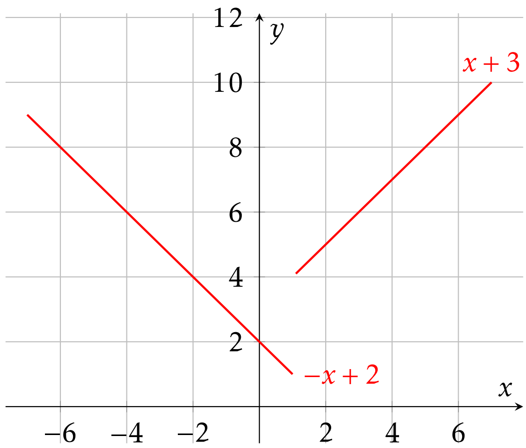


(c) Sea h dada por,

$$h(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x > 1 \\ -x+2 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \to 1} h(x)$.

Como en el item b), se trata de una función a trozos. Gráficamente, podemos observar que $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe.



Ahora veamos analíticamente, es decir, haciendo las cuentas.

$\lim_{x \to 1^+} x+3 = 4 \quad$ y $\quad \lim_{x \to 1^-} -x+2 = 1$.

Los limites laterales no coinciden, entonces $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe.

3.3.1. Ejercicios

1. Calcular los siguientes límites de las siguientes funciones, si existen.

    a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x>2 \\ \\ 1 & si \quad x\leq 2 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

    b) Sea g la función valor absoluto, $g(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$.

    Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. Qué puede concluir respecto al $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$?.

    c) Dada $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x-4} & si \quad x>4 \\ \\ 8-2x & si \quad x<4 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 4} h(x)$.

    d) Sea $f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & si \quad x\leq 0 \\ \\ x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$, y $\lim\limits_{x\to -1} f_2(x)$.

2. Calcular los siguientes limites utilizando propiedades.

    i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x+3}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} x^3+5x^2+10$

    iii) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$ iv) $\lim\limits_{x\to \pi} sen(x-\pi)$

    v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 1} ln\left(\dfrac{2}{x^3+1}\right)$

    vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{e^x}$ viii) $\lim\limits_{x\to 0} 3\,cos(x^2)(1+x)^4$

    ix) $\lim\limits_{x\to 3} |x-3|$ x) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x}$