66.70 Estructura del Computador

Algebra de Boole

Algebra de Boole

...Para qué le podría hacer falta a un ingeniero?

...otra Algebra más!?

Algebra de Boole

- Concebida por George Boole (1815-1864) en su libro "THE LAWS OF THOUGHT"
  - Una oración es una proposición si sólo se le puede asignar uno de dos valores de verdad: Verdadero o Falso
  - ~~"El universo se generó a partir del Big Bang"~~
  - ~~"Pienso, luego existo"~~
  - Frases complejas creadas combinando otras simples

- Su formalización más precisa fue presentada recién en 1904 por Edward Vermilye Huntington:

  - 7 Axiomas –

- Establece un paralelo entre la Teoría de Conjuntos y el Cálculo Proposicional: *ambos son un Algebra de Boole*

- Da una base teórica para poder diseñar y analizar circuitos lógicos (electrónica digital)

Postulados de Huntington

- P1) Se define un conjunto *K* de objetos sujetos a una *ley de equivalencia* "=" de modo que

  si $a=b$ b puede sustituir a a en cualquier expresión sin afectar su validez

- P2) Regla de combinación "+" de modo que si a y b estan en K entonces $a+b$ esta en K

  P2´) Regla de combinación "." de modo que si a y b estan en K entonces $a.b$ esta en K

- P3) Existe un elemento 0 en K de modo que para todo a en K, $a+0=a$

  P3´) Existe un elemento 1 en K de modo que para todo a en K, $a.1=a$

- P4) $a + b = b + a$

  P4´) $a . b = b . a$

- P5) $a . (b + c) = (a. b) + (a . c)$

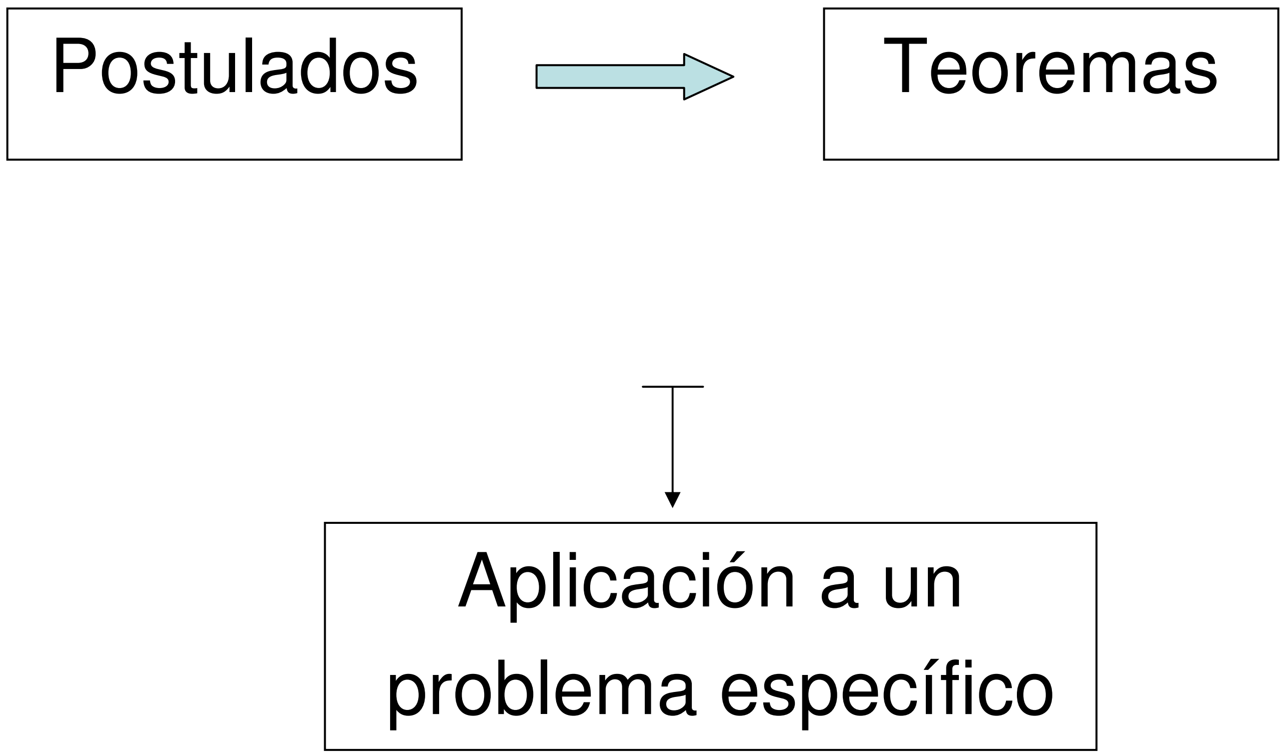
  P5´) $a + (b . c) = (a+b) . (a + c)$

- P6) Existe un ~a de modo que $a . \sim a = 0$

  $a + \sim a = 1$

- P7) Existen en K al menos dos elementos que no son equivalentes entre sí

Algebra de Boole



Aplicando el Algebra de Boole

Los siete postulados de Huntington deben verificarse en:

- los elementos del conjunto K
- los dos operadores

Principio de dualidad

+ ⇔ -

0 ⇔ 1

- *Presente en los Postulados de Huntington*
- *Si dos expresiones son iguales => sus duales también* son iguales

Teoremas

- Idempotencia: $a + a = a$ $a \cdot a = a$
- Elemento absorbente: $a + 1 = 1$ $a \cdot 0 = 0$
- Absorción : $a + (a \cdot b) = a$ $a \cdot (a + b) = a$
- Asociatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Complemento único: El elemento *a*' asociado al *a* es único
- Involución: $(a')' = a$
- En cualquier álgebra booleana: $0' = 1$ $1' = 0$
- Leyes de De Morgan $(a + b)' = a' \cdot b'$ $(a \cdot b)' = a' + b'$

Teoremas

Idempotencia

→ $x \cdot x = x.$

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &= xx + 0 && \text{por el postulado: } 3a)\\
&= xx + xx' && 6b)\\
&= x(x + x') && 5a)\\
&= x \cdot 1 && 6a)\\
&= x && 3b)
\end{aligned}
$$

→ $x + x = x.$

$$
\begin{aligned}
x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{por el postulado: } 3b)\\
&= (x + x)(x + x') && 6a)\\
&= x + xx' && 5b)\\
&= x + 0 && 6b)\\
&= x && 3a)
\end{aligned}
$$

Teoremas

Idempotencia

→ $x + 1 = 1.$

$$
\begin{aligned}
x + 1 &= 1 \cdot (x + 1) && \text{por el postulado: } 3b) \\
&= (x + x')(x + 1) && 6a) \\
&= x + x' \cdot 1 && 5b) \\
&= x + x' && 3b) \\
&= 1 && 6a)
\end{aligned}
$$

→ $x \cdot 0 = 0$ por dualidad.

Funciones lógicas

Dos valores posibles

Operadores lógicos

Constantes *binarias*

Variables binarias

Variables dependientes e independientes

Dominio y codominio

Funciones lógicas

- Representación por tablas de verdad
- Funciones de dos variables: *cuántas? cuáles?*
  - Idem N variables

Cómo expresar una función lógica?

- Un función tiene una única Tabla de Verdad.

- ¿Una función tiene una única Expresión Algebraica?

$$¿\quad x'y'z + x'yz + xy' = x'z + xy' \quad ?$$

- Expresiones *equivalentes*

Buscando la representación algebraica unívoca

ALGUNAS DEFINICIONES

LITERAL: Una variable y/o su complemento.

TÉRMINO PRODUCTO: Conjunto de literales relacionadas por el conectivo "**•**"

TÉRMINO SUMA: Conjunto de literales relacionadas por el conectivo "**+**"

TÉRMINO NORMAL:
Término producto o suma en el cual ningún literal aparece más de una vez
- Producto normal
- Suma normal

TÉRMINO CANÓNICO:
Término normal que contiene tantos literales como variables la función.

Buscando la representación algebraica unívoca

"El adjetivo <u>canónico</u> se usa con frecuencia en matemáticas para indicar que algo es natural, como debe ser e independiente de elecciones arbitrarias, que es absoluto y no relativo a un observador, que es intrínseco y no depende de un sistema de referencia… "

(Wikipedia)

<u>*SUMA CANÓNICA Y PRODUCTO CANONICO*</u>

- *Suma de minitérminos*

- *Producto de maxitérminos*

Representaciones unívocas de una función lógica

- ✓ Tabla de verdad
- ✓ Expresión algebraica por suma de minitérminos
- ✓ Expresión algebraica por producto de maxitérminos
- ✓ Suma de minitérminos en forma numérica
- ✓ Producto de maxitérminos en forma numérica

- cómo pasar de un tipo de representación a los otros

Compuertas

- Relación directa con la expresión algebraica
- Compuertas básicas: AND, OR, NOT
- Porqué representar por compuertas?

Representando funciones lógicas

Dada una función lógica F(x,y,..)

¿porqué? *¿porqué?*

"Expresión unívoca" "Expresión simple"

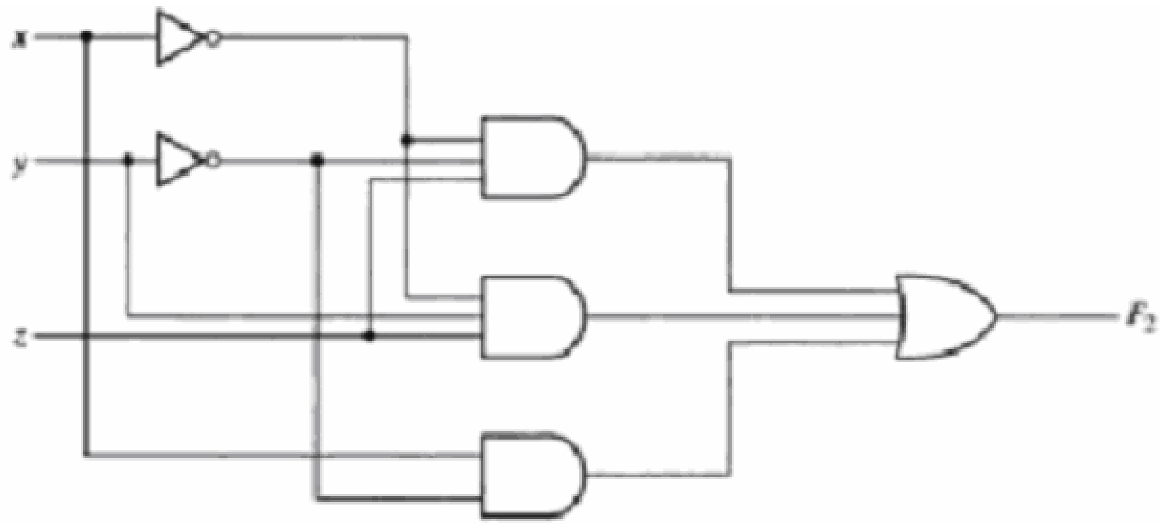
Medir la "simplicidad" de una expresión booleana

- ✓ *Número de términos*
- ✓ *Número de variables en cada término*

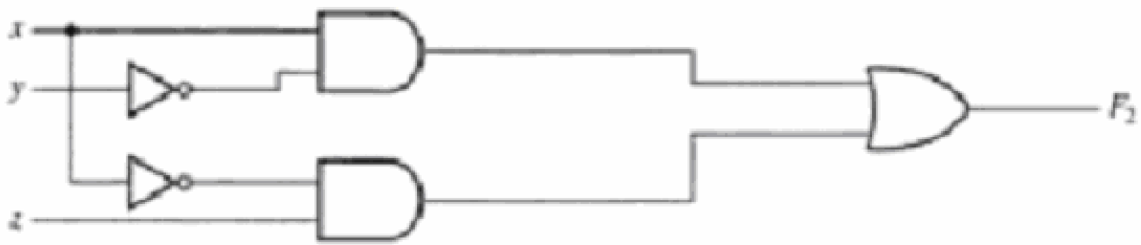
Expresión Mínima

Implementación con compuertas

$F(x,y,z) = x'y'z + x'y\,z + x\,y'$ $\qquad$ $F(x,y,z) = x'z + xy'$



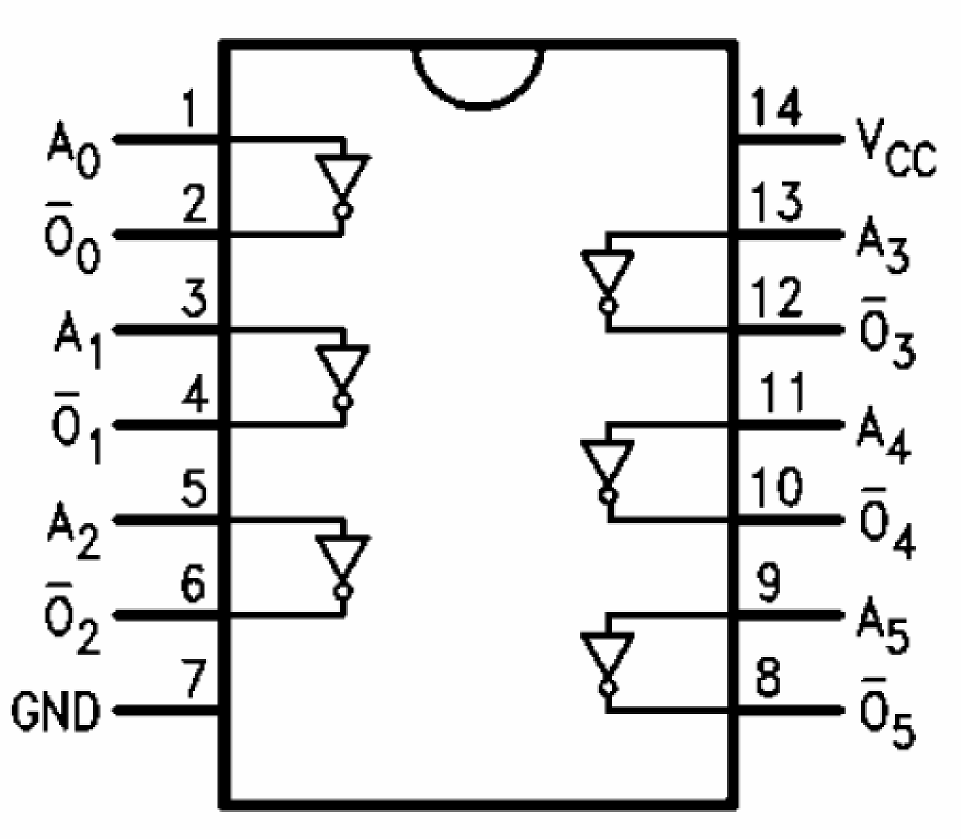
a) $F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$



b) $F_2 = xy' + x'z$

CI comerciales

74AC04



CI comerciales

74HC00

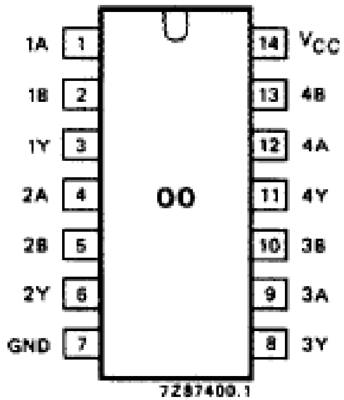


Fig.1 Pin configuration.

74HC00

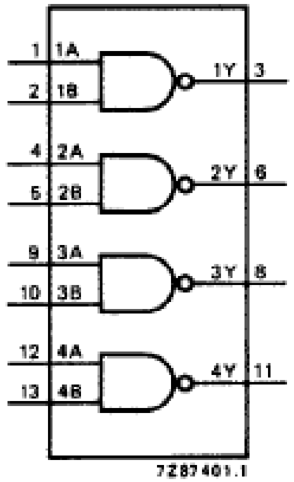
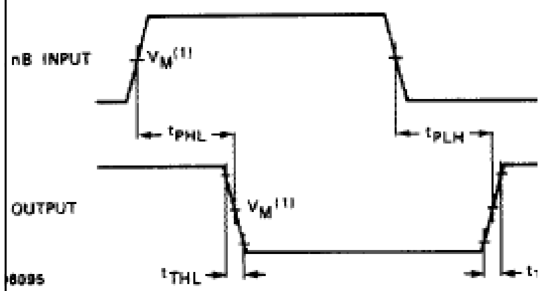


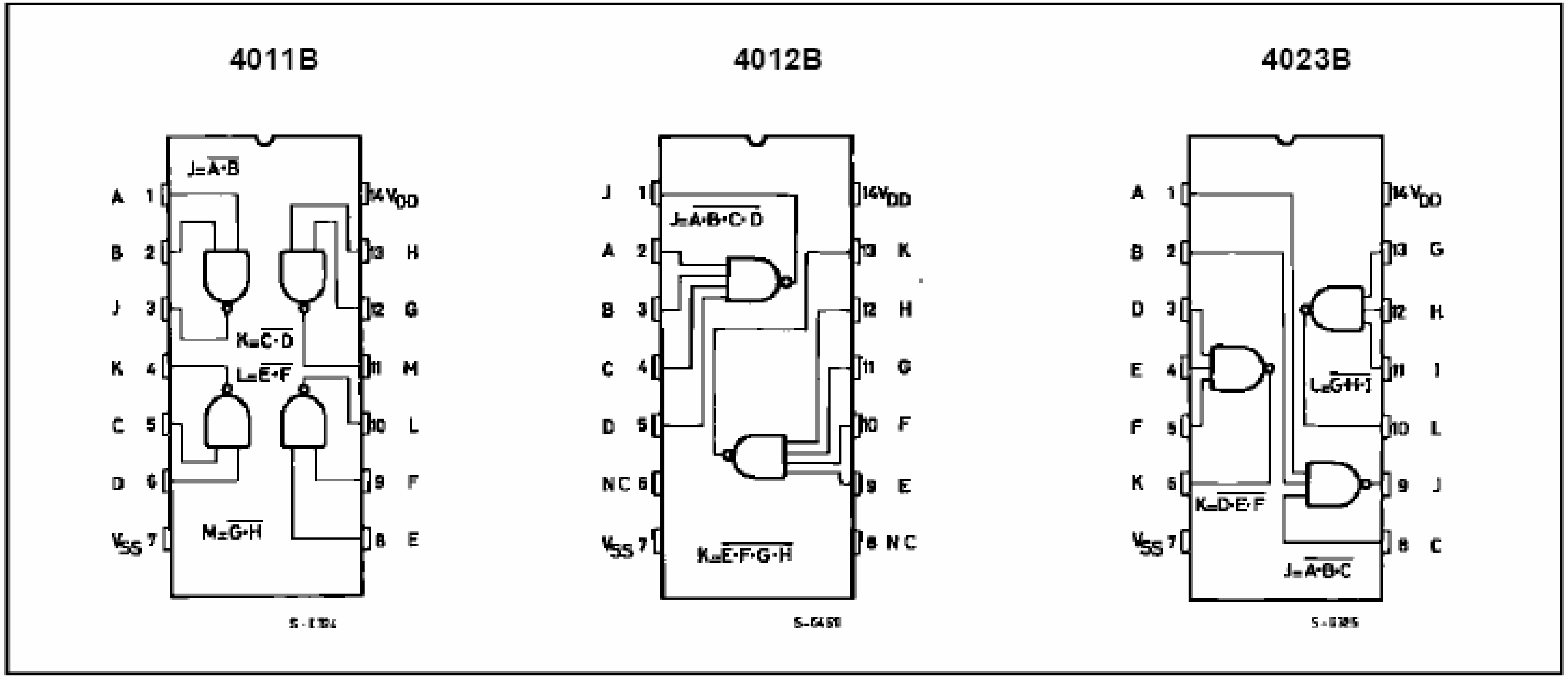
Fig.2 Logic symbol.

74HC00



CI comerciales

PIN CONNECTIONS



Expresiones algebraicas "simples"…

…se traducen en:

- ✓ Menos compuertas
- ✓ Menos entradas por compuerta
- ✓ *Menor costo*
- ✓ *Menor tamaño*
- ✓ *Menor consumo*