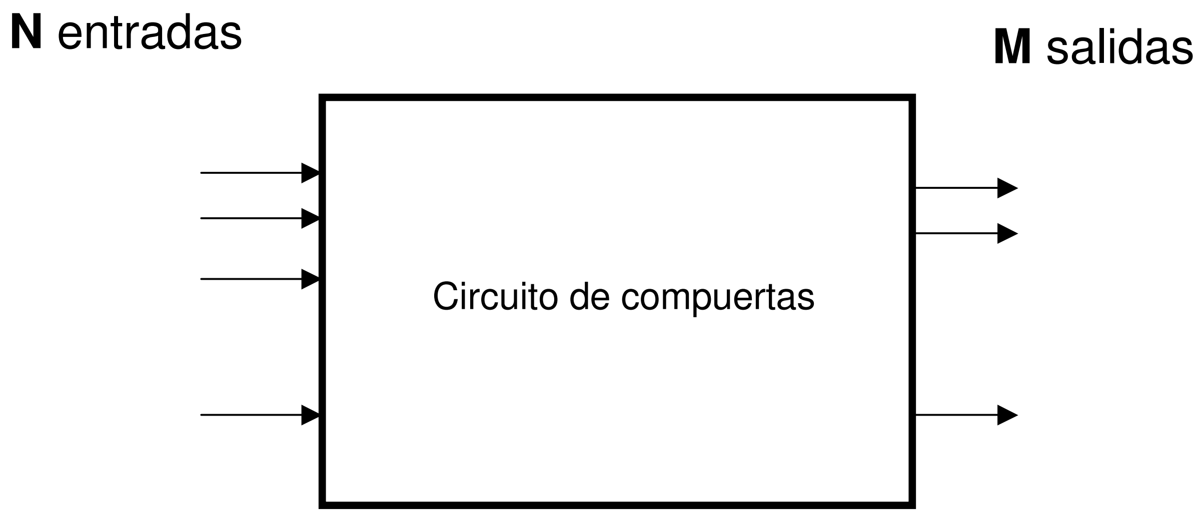
66.70 Estructura del Computador

Diseño de circuitos combinacionales

Lógica combinacional



Definiciones básicas

- Qué es **analizar** un circuito?
- Qué es **sintetizar** un circuito?
- Qué es **diseñar** un circuito?
- Qué es **implementar** un circuito?

Lógica combinacional

- Lógica de dos niveles
  - Suma de productos
  - Producto de sumas
- Lógica multinivel

Ejemplo: $x'y + xy' + xz = x'y + x(y' + z)$

Buscando un método

Necesitamos expresiones algebraicas simples…

⇨ *Menor costo, menor tamaño, menor consumo…*

Cómo lo hago?

- Con qué criterio comparamos dos expresiones equivalentes
- Cómo llegamos a una expresión más simple?

Desde el álgebra a los costos

- Cantidad de términos
- Cantidad de literales por término

Compuertas

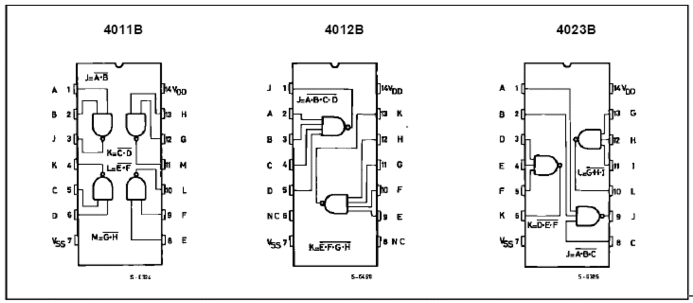
Costos

Medidas de simplicidad
de una expresión booleana

1° Cantidad de compuertas

2° Cantidad de entradas

PIN CONNECTIONS



Obtención de circuitos simples

- Criterio:

  Definición de ***expresión mínima***

- *Métodos simplificación*
  - *Algebraicos*
  - *Gráficos*
  - *Tabular*

Simplificación por método algebraico

- Se trabaja directamente sobre la expresión algebraica (prueba y error)

- Se basa en eliminar términos y literales aplicando los postulados y los teoremas del Algebra de Boole

Simplificación por método algebraico

Ejemplo:

$$F = A'C' + ABC + BC' + A'B'C + A'BC$$

$$F = A'C' + BC' + BC(A + A') + A'C(B + B')$$

$$F = A'C' + BC' + BC + A'C$$

$$F = A'(C' + C) + B(C' + C)$$

$$F = A' + B$$

Simplificación por método algebraico

Características de este método:

- No incluye un procedimiento formal que asegure llegar a una expresión mínima

- Proclive a que se comentan errores de copia en los literales

- Se torna difícil con más de 4 o 5 variables

Simplificación por mapas de Karnaugh

- Relación entre el mapa de K y la tabla de verdad
- Definiciones:
  - Adyacencias
  - Implicante primo
  - Implicante primo esencial
- Permite encontrar las expresiones mínimas en forma de Suma de Productos o Producto de Sumas
  (mínima cantidad de términos y mínima cantidad de entradas)
- Se basa en: (1) encontrar todos los implicantes primos
  (2) seleccionar un conjunto mínimo de implicantes que cubra la función

Simplificación por mapas de Karnaugh

Por los 1’s de la función

F(A, B, C, D)

Tabla de verdad

1		1	1
	1	1	
1	1		
1			1

1. Marcar implicantes primos
2. Marcar Imp. primos esenciales
3. Construir expr.algebr c/ IPE
4. Agregar 1’s hasta completar F

EXPRESION/es MÍNIMA/s

“Suma de Productos”

Resolver:

F = A’C’ + ABC + BC’ + A’B’C + A’BC

Simplificación por mapas de Karnaugh

Por los 1's de la función

Ejemplo 1

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12	8
01	1 1	5 1	13	9
11	3 1	7 1	15 1	11
10	2 1	6	14 1	10

Ejemplo 3

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1 1	5 1	13	9 1
11	3	7 1	15 1	11 1
10	2	6	14	10

Ejemplo 2

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13 1	9 1
11	3	7 1	15 1	11
10	2 1	6 1	14	10

Simplificación por mapas de Karnaugh

Por los 0's de la función

F(A, B, C, D)

Tabla de verdad

	0		
0			0
		0	0
	0	0	

1. Marcar implicantes primos
2. Marcar Imp. primos esenciales
3. Construir expr.algebr c/ IPE
4. Agregar 0's hasta completar F

EXPRESION/es MÍNIMA/s

"Producto de Sumas"

Resolver:

F = A'C' + ABC + BC' + A'B'C + A'BC

Redundancias

o “Funciones incompletamente especificadas”

- Significado. Casos de aplicación.

- Mapas de K que contienen redundancias
  - ✓ Cuando conviene incluirlas en un implicante
  - ✓ Relación entre las redundancias de distintos implicantes
  - ✓ Redundancias e implicantes primos esenciales

Simplificación por mapas de Karnaugh

Con redundancias

F(A, B, C, D)

Tabla de verdad

1	x	1	1
	x	x	
	1	1	

"Aprovechar" redundancias

Sólo sin son útiles para simplificar

1. Marcar implicantes primos
2. Marcar Imp. primos esenciales
3. Construir expr.algebr c/ IPE
4. Agregar 1's hasta completar F

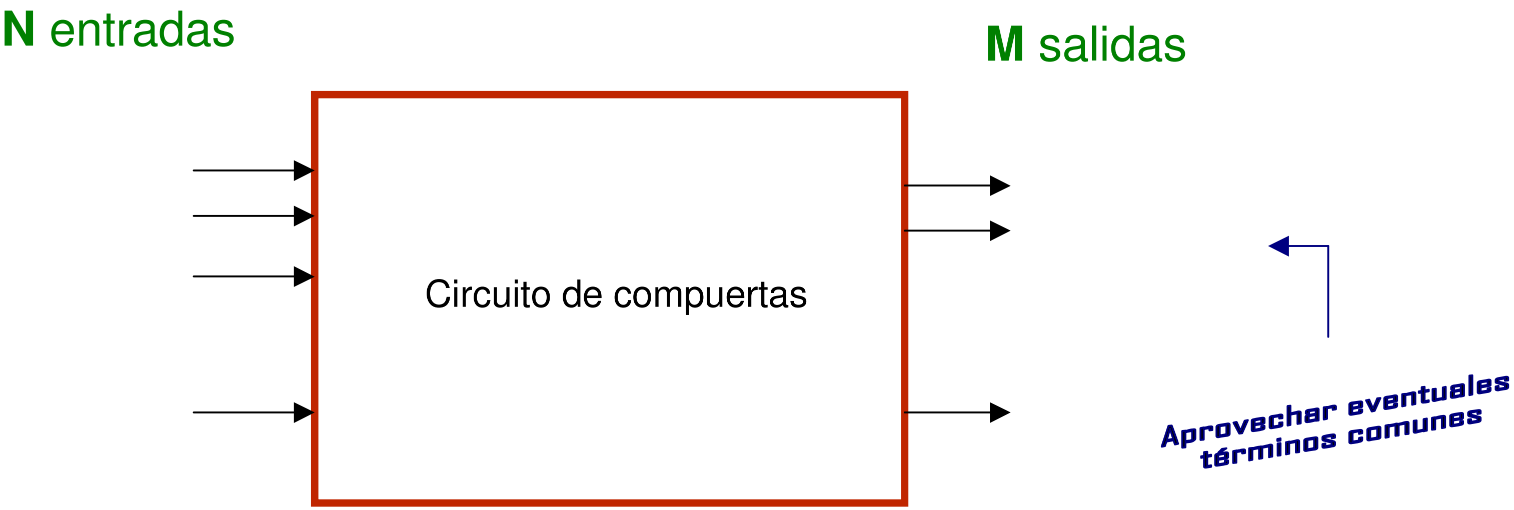
EXPRESION/es MÍNIMA/s

"Producto de Sumas"

Bajando más los costos

- ✓ Reducir número de compuertas y mínimo número de entradas
- Elegir entre solución por suma de productos o por producta de sumas
- Reducir el número de inversores
- Reducir el número de circuitos integrados
  (los CI comerciales incluyen varias compuertas en el mismo chip dependiendo del número de entradas)
- Utilizar sólo compuertas NAND
  - Ventajas:
    - Menor costo que AND OR
    - Unificar el tipo de compuertas utilizadas en la implementación
  - Como?
- Compuertas NOR: idem NAND

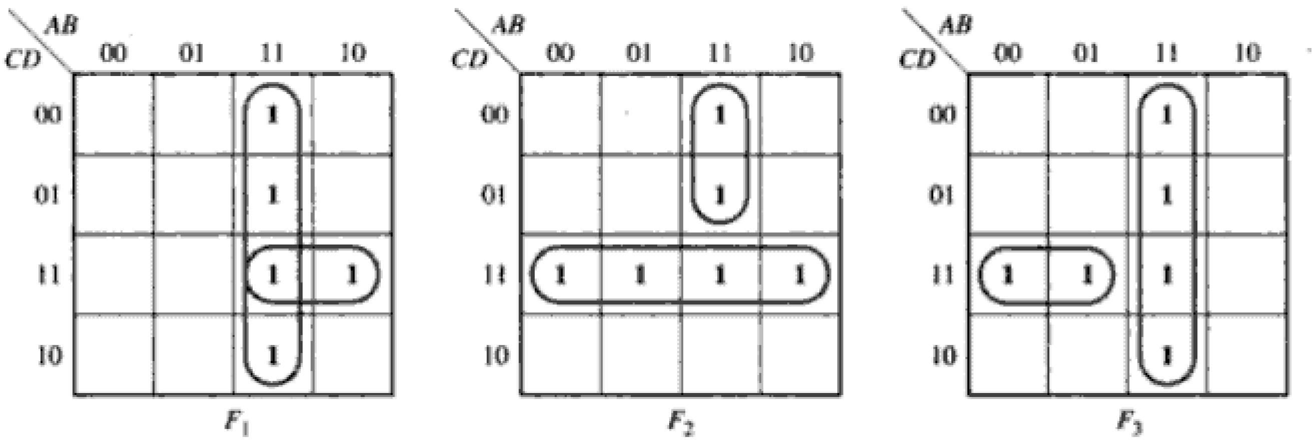
Problemas de salida múltiple



Ejemplo: *columna de 8 leds encendida en correspondencia con datos de tres bits a la entrada*

Problemas de salida múltiple

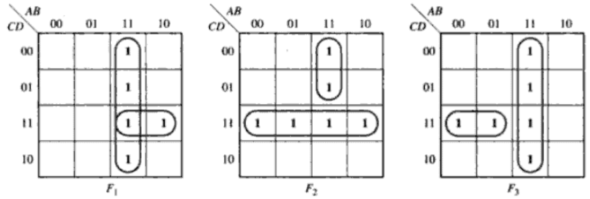
$$F_1(A, B, C, D) = \Sigma\, m(11, 12, 13, 14, 15)$$
$$F_2(A, B, C, D) = \Sigma\, m(3, 7, 11, 12, 13, 15)$$
$$F_3(A, B, C, D) = \Sigma\, m(3, 7, 12, 13, 14, 15)$$



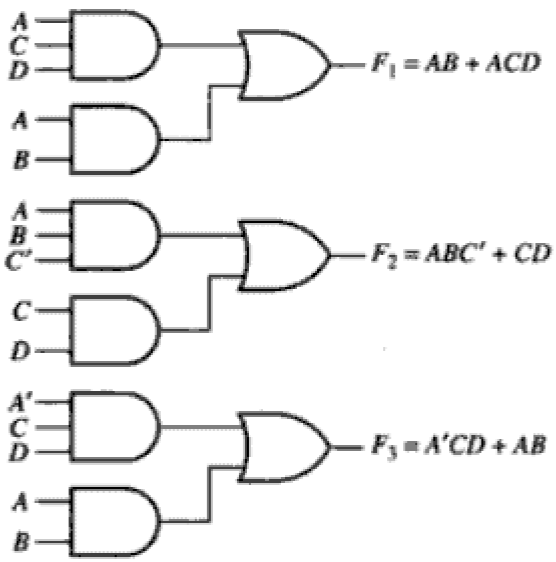
¿Qué compuertas puedo ahorrar respecto del problema de salida única?

Problemas de salida múltiple

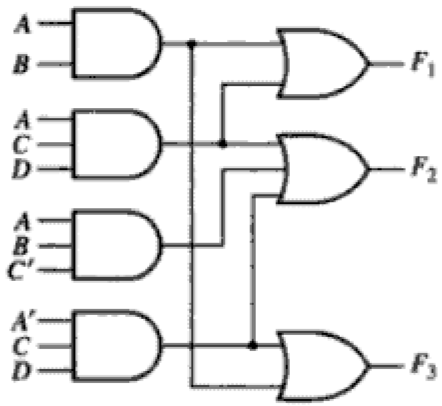
$$F_1(A, B, C, D) = \Sigma\, m(11, 12, 13, 14, 15)$$
$$F_2(A, B, C, D) = \Sigma\, m(3, 7, 11, 12, 13, 15)$$
$$F_3(A, B, C, D) = \Sigma\, m(3, 7, 12, 13, 14, 15)$$



Implementación directa de F_1 F_2 y F_3



Consideradas como salida múltiple



Mapas de Karnaugh de 5 variables

Vecindades?

E=0

1			1
	X	X	
X			1

E=1

1			1
1	1	1	1
X			X

Mapas de Karnaugh de 6 variables

Vecindades?

F=0	1			X	1			1
		1	X			X	X	
		1	1					
	1			1	X			1
F=1	X			1	1			1
	1	X	X	1	1	1	1	1
		X	X					
	1			1	X			X
	A=0				A=1			

Simplificación por mapa de Karnaugh

- Ventajas
  - Da un procedimiento formal hacia la expresión mínima
  - Aplicable para S de P y para P de S
  - Fácil de aplicar (con pocas variables)

- Desventajas
  - No es aplicable a más de 5 o ¿6? variables
  - Depende de la habilidad visual y experiencia
  - No es apropiado para implementar en software

Algoritmo de Quine-McCluskey

- Resulta apropiado para implementarlo en **software**

- Se organiza en forma **tabular**

- No impone límites, en principio, sobre el **número de variables**

Algoritmo de Quine-McCluskey

Básicamente consiste en:

1. **Eliminar** tanto literales como sea posible **aplicando sistemáticamente** **XY + XY' = X**

2. Usar una **tabla de implicantes primos** para seleccionar un conjunto mínimo de implicantes primos que combinados por medio de OR producen la función a simplificar

Algoritmo de Quine-McCluskey

Pueden combinarse

AB'CD' + AB'CD = AB'C

1 0 1 0 + 1 0 1 1 = 1 0 1 -

No pueden combinarse

A'BC'D + A'BCD'

0 1 0 1 + 0 1 1 0

1. Encontrar todos los implicantes primos
    1. Agrupar minitérminos según la cantidad de 1's
    2. Comparar grupos adyacentes solamente
    3. Combinar minitérminos -> implicantes
    4. Combinar implicantes en pasos sucesivos (tildar cada implicante usado en cada combinación)
    5. Eliminar implicantes duplicados

2. Elegir un conjunto mínimo de implicantes primos
    1. Construir la tabla de implicantes con:
        a. Los implicantes de menor orden que no fueron tildados
        b. Los implicantes de mayor orden
    2. Elegir los implicantes primos esenciales
    3. Completar por medio de otros implicantes primos todos los minitérminos de la función

Ejemplo: **F(A,B,C,D) = ∑ m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)**

Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d)=\sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

Paso 1

Agrupar minitérminos según la cantidad de 1's

grupo 0	0	0000
grupo 1	1	0001
	2	0010
	8	1000
grupo 2	5	0101
	6	0110
	9	1001
	10	1010
grupo 3	7	0111
	14	1110

Sólo debemos comparar grupos adyacentes

Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d)=\sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

Paso 2 (Combinar implicantes de grupos vecinos)

Columna I

grupo 0	0	0000	✓
grupo 1	1	0001	✓
	2	0010	✓
	8	1000	✓
grupo 2	5	0101	✓
	6	0110	✓
	9	1001	✓
	10	1010	✓
grupo 3	7	0111	✓
	14	1110	✓

Columna II

0,1	000-
0,2	00-0
0,8	-000
1,5	0-01
1,9	-001
2,6	0-10
2,10	-010
8,9	100-
8,10	10-0
5,7	01-1
6,7	011-
6,14	-110
10,14	1-10

Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d)=\sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

Paso 3 (Agrupar la columna 2 y combinar implic. de grupos vecinos)

Columna I

grupo 0	0	0000	✓
grupo 1	1	0001	✓
	2	0010	✓
	8	1000	✓
grupo 2	5	0101	✓
	6	0110	✓
	9	1001	✓
	10	1010	✓
grupo 3	7	0111	✓
	14	1110	✓

Columna II

0,1	000-	✓
0,2	00-0	✓
0,8	-000	✓
---	---	---
1,5	0-01	
1,9	-001	✓
2,6	0-10	✓
2,10	-010	✓
8,9	100-	✓
8,10	10-0	✓
---	---	---
5,7	01-1	
6,7	011-	
6,14	-110	✓
10,14	1-10	✓

Columna III

0,1,8,9	-00-
0,2,8,10	-0-0
0,8,1,9	-00-
0,8,2,10	-0-0
---	---
2,6,10,14	--10
2,10,6,14	--10

Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d)=\sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

Paso 4 (Eliminar combinaciones repetidas)

Columna I

grupo 0	0	0000	✓
grupo 1	1	0001	✓
	2	0010	✓
	8	1000	✓
grupo 2	5	0101	✓
	6	0110	✓
	9	1001	✓
	10	1010	✓
grupo 3	7	0111	✓
	14	1110	✓

Columna II

0,1	000-	✓
0,2	00-0	✓
0,8	-000	✓
1,5	0-01	
1,9	-001	✓
2,6	0-10	✓
2,10	-010	✓
8,9	100-	✓
8,10	10-0	✓
5,7	01-1	
6,7	011-	
6,14	-110	✓
10,14	1-10	✓

Columna III

0,1,8,9	-00-
0,2,8,10	-0-0
~~0,8,1,9~~	~~-00-~~
~~0,8,2,10~~	~~-0-0~~
2,6,10,14	--10
~~2,10,6,14~~	~~--10~~

Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

Paso 5 (Formar F con los términos no tildados)

Columna I

grupo 0	0	0000	✓
grupo 1	1	0001	✓
	2	0010	✓
	8	1000	✓
grupo 2	5	0101	✓
	6	0110	✓
	9	1001	✓
	10	1010	✓
grupo 3	7	0111	✓
	14	1110	✓

Columna II

0,1	000-	✓
0,2	00-0	✓
0,8	-000	✓
1,5	0-01	
1,9	-001	✓
2,6	0-10	✓
2,10	-010	✓
8,9	100-	✓
8,10	10-0	✓
5,7	01-1	
6,7	011-	
6,14	-110	✓
10,14	1-10	✓

Columna III

0,1,8,9	-00-
0,2,8,10	-0-0
~~0,8,1,9~~	~~-00-~~
~~0,8,2,10~~	~~-0-0~~
2,6,10,14	--10
~~2,10,6,14~~	~~--10~~

f = a'c'd + a'bd + a'bc + b'c' + b'd' + cd'

Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

Resultado obtenido:

f = a'c'd + a'bd + a'bc + b'c' + b'd' + cd'

Coincide con el que podríamos obtener por medio .
del mapa de Karnaugh?

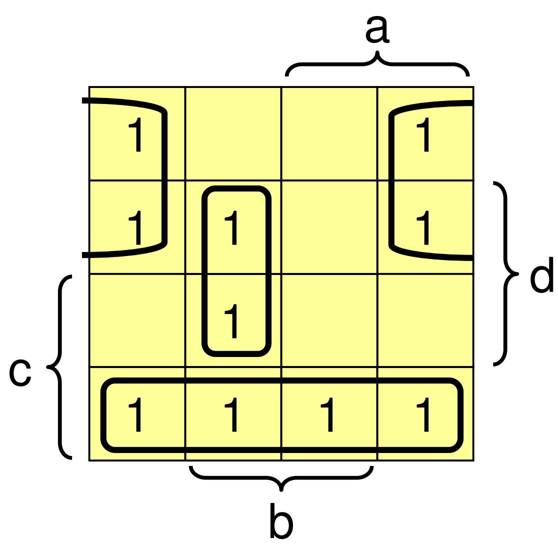
Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

Resultado obtenido:

f = a'c'd + a'bd + a'bc + b'c' + b'd' + cd' ← **Quine-McCluskey**

F = a'bd + cd' + b'c' ←



Algoritmo de Quine-McCluskey

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$$

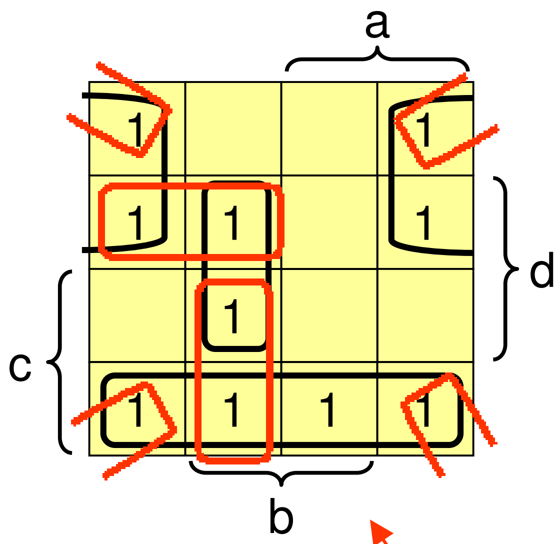
Resultado obtenido:

f = a'c'd + a'bd + a'bc + b'c' + b'd' + cd'

← **Quine-McCluskey**

F = a'bd + cd' + b'c'

←



Necesitamos un método para eliminar los términos redundantes

"Tabla de implicantes primos"

Tabla de implicantes primos

(Segunda parte del algoritmo de Quine-McCluskey)

f = a'c'd + a'bd + a'bc + b'c' + b'd' + cd'

Implicantes primos		minitérminos									
		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	b'c'	**X**	**X**					**X**	**X**		
(0,2,8,10)	b'd'	**X**		**X**				**X**		**X**	
(2,6,10,14)	cd'			**X**		**X**				**X**	**X**
(1,5)	a'c'd		**X**		**X**						
(5,7)	a'bd				**X**		**X**				
(6,7)	a'bc					**X**	**X**				

¿Cómo sabemos cuáles son los ímplicantes primos esenciales?

Tabla de implicantes primos

(Segunda parte del algoritmo de Quine-McCluskey)

f = a’c’d + a’bd + a’bc + b’c’ + b’d’ + cd’

minitérminos

Implicantes primos

		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	b’c’	**X**	**X**					**X**	**X**		
(0,2,8,10)	b’d’	**X**		**X**				**X**		**X**	
(2,6,10,14)	cd’			**X**		**X**				**X**	**X**
(1,5)	a’c’d		**X**		**X**						
(5,7)	a’bd				**X**		**X**				
(6,7)	a’bc					**X**	**X**				

Una vez que un implicante fue incluido en F, todos los minitérminos que este abarca dejan de ser tenidos en cuenta para formar F

Tabla de implicantes primos

(Segunda parte del algoritmo de Quine-McCluskey)

f = a'c'd + a'bd + a'bc + b'c' + b'd' + cd'

minitérminos

Implicantes primos

		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	b'c'	X	X					X	X		
(0,2,8,10)	b'd'	X		X				X		X	
(2,6,10,14)	cd'			X		X				X	X
(1,5)	a'c'd		X		X						
(5,7)	a'bd				X		X				
(6,7)	a'bc					X	X				

(0,1,8,9) y (2,6,10,14) fueron incluidos

Una vez que un implicante fue incluido en F, todos los minitérminos que este abarca dejan de ser tenidos en cuenta.

Tabla de implicantes primos

(Segunda parte del algoritmo de Quine-McCluskey)

f = a'c'd + a'bd + a'bc + b'c' + b'd' + cd'

minitérminos

Implicantes primos

		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	b'c'	X	X					X	X		
(0,2,8,10)	b'd'	X		X				X		X	
(2,6,10,14)	cd'			X		X				X	X
(1,5)	a'c'd		X		X						
(5,7)	a'bd				X		X				
(6,7)	a'bc					X	X				

(0,1,8,9) y (2,6,10,14) fueron incluidos

Con los Implicantes primos esenciales no cubrimos toda la función.

Con qué criterio elegimos la cantidad mínima de IP- NE?

Tabla de implicantes primos

(Segunda parte del algoritmo de Quine-McCluskey)

f = a’c’d + a’bd + a’bc + b’c’ + b’d’ + cd’

minitérminos

Implicantes primos

		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	b’c’	X	X					X	X		
(0,2,8,10)	b’d’	X		X				X		X	
(2,6,10,14)	cd’			X		X				X	X
(1,5)	a’c’d		X		X						
(5,7)	a’bd				X		X				
(6,7)	a’bc					X	X				

(0,1,8,9) y (2,6,10,14) fueron incluidos

Con los Implicantes primos esenciales no cubrimos toda la función.

Con qué criterio elegimos la cantidad mínima de IP- NE?

Elegimos los implicantes que incluyen mayor cantidad de minitérminos

Adicionalmente el método de Petrick da una solución óptima al problema de se- leccionar los IP-NE

Pasos para diseñar un circuito lógico combinacional

1. *Planteo informal del problema*
2. *Identificación de variables dependientes e independientes*
3. *Formalizar las salidas como funciones lógicas*
4. *Encontrar todas las expresiones mínimas posibles (por 1's y por 0's)*
5. *Diagrama circuital de una de esas expr. mínimas (cuál?)*
6. *Elegir circuitos integrados (un único tipo de compuerta?)*
7. *Implementación física*

Ver tranparencia:
"Bajando más los costos"

Bibliografía

-------------------- SISTEMAS NUMERICOS -----------------------

- Teoría de Conmutación y Diseño Lógico – Hill F., Peterson G. - Ed. Limusa
  Capitulo 2

- La PC por dentro – Ginzburg Mario - Ed. Biblioteca Técnica Superior - 3º Edición
  Apéndice 1

Aritmética binaria:

- La PC por dentro – Ginzburg Mario - Ed. Biblioteca Técnica Superior - 3º Edición
  Complemento a la unidad 1 (al final del libro)

Adicionalmente una referencia a la norma IEEE 754 puede consultarse en:
http://es.wikipedia.org/wiki/IEEE_punto_flotante

-------------- ALGEBRA DE BOOLE Y DISEÑO DE CIRCUITOS COMBINACIONALES ----------

- Introducción a las Técnicas Digitales con CI – GinzburgMario - Ed Biblioteca Técnica Superior - 8º Ed.
  Capítulos 4, 5 y 6

- Teoría de Conmutación y Diseño Lógico – Hill F., Peterson G. - Ed. Limusa
  Capítulos 3, 4, 6 y 7