

75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO I**FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES****TRABAJO PRACTICO N° 2**
*2do Cuatrimestre 2009***Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Eutrofización Lacustre****Producido por: Dr. Pablo Tarela****INTRODUCCION: EL PROCESO DE EUTROFIZACION**

Uno de los problemas ambientales más cruciales de nuestra era es el de la eutrofización de cuerpos de agua estacionados. El término eutrófico se interpreta como “rico en nutrientes”.

La eutrofización, también conocida como el proceso de envejecimiento natural de las aguas estacionadas, ha crecido dramáticamente desde los años 60, sobre todo en los países industrializados con agricultura intensificada, debido al excesivo aporte de cargas de nutrientes vegetales, básicamente fósforo y nitrógeno. En consecuencia, en contraste con la eutrofización natural, el problema reciente se denomina eutrofización antropogénica.

La eutrofización usualmente se manifiesta como un crecimiento excesivo de fitoplancton que torna de un color verde a las aguas estacionadas y a los cursos de agua lentos.

La productividad primaria (es decir, el crecimiento del fitoplancton, expresado como carbón producido por unidad de área del lago y por unidad de tiempo) es alta, dando lugar a relativamente altas concentraciones de materia orgánica disuelta (MOD) en el agua. Esto logra mantener una población de bacterias heterotróficas que descomponen la materia orgánica y agotan el contenido de oxígeno disuelto del agua. En lagos profundos, este agotamiento del oxígeno puede crear condiciones anaeróbicas en el hipolimnio, que dan lugar a procesos biológicos y químicos indeseados resultando en muerte de peces.

Aunque se necesitan entre 16 y 20 elementos para el crecimiento de las plantas de agua dulce (entre otros, carbón, silicio, calcio, potasio, magnesio, aluminio), la eutrofización antropogénica se debe casi exclusivamente al sobre-enriquecimiento de fósforo y nitrógeno, los cuales resultan del crecimiento de las cargas externas de nutrientes provenientes de una gran variedad de fuentes puntuales y distribuidas (por ejemplo, aguas residuales comunales e industriales, escorrentía desde la zona agrícola, escorrentía desde la zona urbana, deposiciones atmosféricas).

MODELO DE BALANCE DE FOSFORO

En los ecosistemas naturales lénticos uno o algunos de los nutrientes vegetales (mayormente fósforo; a veces nitrógeno; raramente silicio) están presentes en concentraciones tan bajas que limitan el crecimiento del fitoplancton, ejerciendo entonces un control sobre el conjunto del ecosistema acuático. Este “factor limitante del crecimiento” es, para la mayoría de los lagos, el fósforo, o, más precisamente, las formas biodisponibles de fósforo, es decir, aquellas que las algas pueden captar.

Bajo la hipótesis de que existe mezcla completa de las aguas del lago, se plantea que la concentración de fósforo sigue la ley:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{V} (Q_e P_e - Q_s P) - \frac{k}{H} P + \frac{A L_d}{V} + \Omega D (P_c - P)^{1/2} \quad (1)$$

$$P(t=0) = P_0$$

donde

P	concentración media de fósforo en el lago [ML^{-3}]
P_0	concentración media inicial de fósforo en el lago [ML^{-3}]
t	tiempo [T]
V	volumen del lago [L^3]
H	profundidad media del lago [L]
Ω	área horizontal media del lago [L^2]
Q_e	caudal de ingreso al lago por afluente [$\text{L}^3 \text{T}^{-1}$]
P_e	concentración de fósforo en el afluente [ML^{-3}]
Q_s	caudal de egreso del lago [$\text{L}^3 \text{T}^{-1}$]
k	tasa de sedimentación [LT^{-1}]
L_d	tasa de aporte lateral distribuido de fósforo por unidad de superficie de drenaje [$\text{MT}^{-1} \text{L}^{-2}$]
A	área horizontal de la superficie de drenaje [L^2]
D	tasa de desorción desde sedimentos del fondo por unidad de superficie del lago [$\text{M}^{1/2} \text{T}^{-1} \text{L}^{-2/3}$]
P_c	concentración crítica para desorción de fósforo desde los sedimentos del fondo [ML^{-3}]

PROBLEMA DEL CICLO TROFICO DE UN LAGO

Se utilizará el modelo (1) para predecir la evolución de la concentración de fósforo en un lago en particular. Para ello se considerarán las siguientes hipótesis de trabajo:

$$V(t) = V_0 + (Q_e - Q_s) \Delta t \quad (2)$$

$$Q_e = Q_m + \Delta Q \cos(wt) \quad w = \frac{\pi}{6} \left[\frac{1}{\text{mes}} \right] \quad (3)$$

$$Q_s = Q_m + \Delta Q \cos(w(t-3)) \quad (4)$$

$$D = \begin{cases} 0 & P \geq P_c \\ D_0 & P < P_c \end{cases} \quad (5)$$

$$L_d = \begin{cases} L_{d1} & t = \text{mes } 9 \\ L_{d2} & t = \text{mes } 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

$$P_e = \begin{cases} P_{e1} & 3 < t < 9 \quad (\text{invierno}) \\ P_{e2} & 9 < t < 3 \quad (\text{verano}) \end{cases} \quad (7)$$

$$H(t) = \frac{V(t)}{\Omega} \quad (8)$$

DESARROLLO DEL PRACTICO

A) Parámetros

Considere XYZ las tres últimas cifras de su número de Padrón (seleccionar 1 padrón en el caso de equipos de 2 alumnos). Si XYZ=000, considere X=5, Y=Z=0. Si YZ=00, considere Y=5, Z=0.

Defina los parámetros del modelo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= XYZ/100 \text{ } \mu\text{g/l} \\
 V_0 &= YZ \text{ Hm}^3 \\
 \Omega &= XYZ \text{ Ha} \\
 Q_m &= (Z+1)/(Z+2)*5000 \text{ m}^3/\text{día} \\
 \Delta Q &= 0.75 Q_m \text{ m}^3/\text{día} \\
 P_{e1} &= XYZ/20 \text{ } \mu\text{g/l} \\
 P_{e2} &= XYZ/50 \text{ } \mu\text{g/l} \\
 k &= 10^{-6} \text{ m/seg} \\
 L_{d1} &= (Z+1)/2500 \text{ kg/Ha/mes} \\
 L_{d2} &= (Z+1)/10000 \text{ kg/Ha/mes} \\
 A &= (XYZ)^2 \text{ Ha} \\
 D &= (Z+Y)/10000 \text{ kg}^{1/2} / \text{Ha}^{2/3} / \text{mes} \\
 P_c &= 5 \text{ } \mu\text{g/l}
 \end{aligned}$$

Presente una tabla con todas las definiciones, los valores numéricos y las unidades.

B) Discretización y programación

Discretice el problema matemático utilizando los siguientes métodos:

B.1. Euler (explícito)

B.2. Euler (implícito)

B.3. Runke-Kutta orden 2

Desarrolle un programa de cálculo para resolver el problema del ciclo trófico del lago, utilizando como opciones cada uno de los 3 métodos pedidos. Considere que los aportes externos repiten su ciclo anualmente, y prevea un período de análisis no menor a 20 años. Considere, como aproximación, que el estado eutrófico se alcanza cuando la concentración media de fósforo supera los 20 $\mu\text{g/l}$.

C) Análisis de Estabilidad para esquemas explícitos

C.1. Usando el método de Euler explícito, seleccione un paso de cálculo adecuado para la escala de tiempo del problema planteado. Resuelva el problema hasta obtener un estado estacionario (dinámico) como solución, o hasta un tiempo mínimo de 20 años.

C.2. Resuelva nuevamente el problema utilizando un paso de tiempo 10 veces superior. Realice este procedimiento mientras sea posible, y grafique las soluciones obtenidas. Interprete los resultados. Indique el paso de tiempo máximo admisible.

C.3. Idem anterior, pero reduciendo el paso en un factor 10 cada vez. Cual es el límite posible de reducción del paso de tiempo? A que se debe esto?

C.4. Idem C.2. Pero utilizando el esquema implícito.

C.5. Idem C.2. Pero utilizando el esquema RK2.

C.6. Compare las soluciones para mismos pasos de tiempo. Interprete los resultados. Obtenga sus conclusiones.

D) Análisis de métodos

D.1. Con un paso de tiempo apto para los 3 esquemas (según resultados de sección anterior), compare las soluciones numéricas. Obtenga cuantitativamente las diferencias entre ellas. Interprete los resultados.

D.2. Realice una comparación de performance computacional de cada método (tiempo de cálculo en CPU)

D.3. Indique cual método es el mas apto para este caso. Justifique.

CONCLUSIONES

Presente sus conclusiones. En particular, comente sobre:

- la relación problema matemático-problema numérico,
- problemas numéricos para resolver un mismo problema matemático,
- convergencia,
- velocidad de convergencia,
- errores de redondeo.