Guia adicional

(*Algunos de los ejercicios que se tomaron en parciales*)

Análisis III - Cátedra Isaacson - mayo 2006

1. Hallar todas las funciones $f(z)$ analíticas en $|z| \leq 4$ tales que $f(2-i) = 3+4i$ y $|f(z)| \leq 5 \quad \forall z \in |z| \leq 4$.

2. Sean $p(z)$ y $q(z)$ funciones analíticas en z_0 tales que $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$. Demostrar que:

   a) $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ tiene polo simple es z_0 con residuo $\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

   b) $\dfrac{1}{(q(z))^2}$ tiene polo doble es z_0 con residuo $\dfrac{-q''(z_0)}{(q'(z_0))^3}$.

3. **a)** Hallar, la armónica conjugada de $u(x,y) = 2(x^2 - y^2) - y$, tal que $v(0,0) = 0$. Justificar.

   b) Con $f = u + iv$ de **a)**, calcular $\displaystyle\int_{|z|=\pi} \frac{f(z)}{(z+2)^2} dz$.

4. **a)** Hallar y clasificar todas las singularidades de $f(z) = \dfrac{1}{\sinh(z)}$. **b)** Escribir la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ indicando la región de convergencia y su radio R.

   c)Calcular $\displaystyle\oint_{|z|=R/2} \frac{z^3 + 3i}{\sinh(z)}\, dz$.

5. **a)** Analizar convergencia y **b)** Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3}{25 + x^5}\, dx$.

6. Analizar convergencia y calcular la integral: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

7. Sea $f(z)$ entera, $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y $f(i+1) \neq f(2i)$ ¿ Qué puede decir sobre su desarrollo en serie ? ¿qué tipo de singularidad tiene en $z = \infty$?

8. $P(z)$ es un polinomio de grado n que no tiene ceros en $|z| \geq R$ (> 0). Si **C** es la circunferencia $|z| = R$, calcular la integral: $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{P'(z)}{P(z)} dz$

9. **a)** Hallar y clasificar todas las singularidades de $f(z) = \dfrac{1}{senh(z)}$, **b)** Escribir la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ indicando la región de convergencia.

10. Analizar convergencia y calcular la integral: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2 + \alpha^2} dx$

11. **a)** Transformar la región $0 < Re(z) < 1$ mediante la función $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$. **b)** Transformar la región $(x,y) \in \mathbb{C} : \{x \geq 0;\ 0 \leq y \leq x\}$ mediante $w = z^n$, con $n =$ 1,2, 3.

12. Calcular:

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{e^{2z}}{(z^2+4)^2} dx$$

13. Calcular, usando el teorema de los residuos:

$$\int_0^\infty \frac{sin^2(x)}{(x^2+4)^2} dx$$

sugerencia: notar que $2\ sin^2(x) = 1 - cos(2x)$

14. **a)** $f(z)$ es entera, $f(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$ y $f(2i) \neq f(-2i)$ ¿ Qué puede decir sobre su desarrollo en serie ? ¿qué tipo de singularidad tiene en $z = \infty$? **b)**¿Existe alguna función $f(z)$ *analítica* tal que $\alpha(x, y) = y^2 x$ sea su parte real o imaginaria ? Justificar.

15. **a)** Calcular la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-4)^3}$ para $0 < |z-4| < R$, hallando el máximo valor de R para que el desarrollo sea válido. A partir de éste, hallar el residuo de $f(z)$ en $z = 4$. **b)** Caracterizar todos los puntos singulares de la función $f(z) = \dfrac{1 - e^{2z}}{z^4}$ y evaluar los residuos en dichos puntos.

16. Es posible hallar una homográfica tal que: **i)** $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \dfrac{2}{3}$, **ii)** $\displaystyle\int_{|z-2|<R} f(z) = 2\pi i$ y además, **iii)** tenga un polo en $z = 2$? En caso afirmativo, hallarla, en caso negativo, no.

17. Analizar convergencia y calcular, usando el Teorema de los Residuos: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

18. Calcular, usando el Teorema de los Residuos: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

19. Hallar la parte principal del desarrollo en potencias de z en un entorno de $z = 0$, indicando el dominio de convergencia de la función $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$.

20. Hallar todas las funciones $f(z)$, enteras que satisfacen las siguientes dos condiciones:
i)$f(1+2i) = 6i$ ii) $|f(z)| < e^2$.

21. Hallar el desarrollo de Laurent de $z^2 cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ alrededor de $z = 1$ y hallar la región de convergencia. Justificar.

22. Calcular $\displaystyle\int_C \frac{z}{1-e^z} dz$, donde C es la frontera de la región interior a $|z| = 4$ y exterior al cuadrado de lados $x = 1$; $x = -1$, $y = 7$; $y = -1$.

23. Siendo $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n n!}{n^n} z^n$, hallar el radio de convergencia r y calcular $\displaystyle\int_{|z|=r/2} (1 - z + \frac{5}{z}) f(z) \frac{dz}{z}$.

24. Sea D una región tal que si $z \in D \Rightarrow \overline{z} \in D$.
a) Probar que si $f(z)$ es analítica en D y es tal que $f(z) = iv(x, y)$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces $f(z) = cte$ en D.
b) si $f(z)$ es analítica en D y $\overline{f(\overline{z})} = f(z) \;\; \forall\, z \in D$, entonces $f(\overline{z})$ no puede ser analítica en D salvo que $f(z) = cte.$ en D. (Ayuda: Usar $h(z) = f(z) - \overline{f(z)}$ y a)).
c) Usando b) demostrar que $(\overline{z})^5 - (\overline{z})^3$ no es analítica.

25. Hallar $f(z)$ analítica salvo en $z = 1$ y $z = 4$ donde tiene polos simples si además $\text{Res}[f(z), z = 4] = -1$, infinito es un cero simple y $\displaystyle\int_{|z|=5} f(z) dz = 8i$

26. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$. Analizar convergencia. Justificar.

27. Hallar $f(z)$ analítica salvo en $z = 1$ y $z = 4$ donde tiene polos simples si además $\text{Res}[f(z), z = 4] = -1$, infinito es un cero simple y $\displaystyle\int_{|z|=5} f(z) dz = 8i$

28. Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x sen(x)}{x^4 + 16} dx$. Justificar.

29. $f(z) = u + iv$ es una función analítica y $p(t)$ es un polinomio en una variable. Si $v = p(u)$, demostrar que $f(z) = cte$. Justificar adecuadamente.