2do. Parcial Integrador - Análisis III - 08/07/03

1. Siendo $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n n!}{n^n} z^n$, hallar el radio de convergencia r y calcular $\int_{|z|=r/2} (2 + z + \frac{1}{z}) f(z) \frac{dz}{z}$.

2. Sea $f(t)$ real y par, periódica de período $T = 2$.
   Sus coeficientes de Fourier a_k verifican: $a_k = 0, \quad \text{si} \quad |k| > 1$.
   Si se cumple que: $\frac{1}{2} \int_0^2 |f(t)|^2 dt = 1$ y si $f(\frac{1}{2}) = 0$, hallar $f(t)$ usando la serie exponencial.

3. Si se verifica que $\phi(t) + \int_0^t (t-x)\phi(x)dx = u(t)$, demostrar que $\phi(t) = \cos(t)$.

4. Resolver:
   $u'_t = u'_{xx} \qquad x \in (0, \pi), \quad t > 0$
   $u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$
   $u(x,0) = e^x$

5. Si $F(s) = \log(\frac{s^2+9}{s^2+1})$, hallar $f(t)$.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 15/07/03

1. Dada la ecuación:
$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-2t} e^{-st} dt - \int_0^{\infty} \left[\int_0^t \cos(\alpha u) du \right] e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + \alpha^2}, \quad f(0) = 0$$
   verificar que $\forall \ \alpha \ \in \ \mathbb{R}$, la abscisa de convergencia de $F(s)$ es $Re(s) = 2$.

2. Si $\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}$, deducir:
   a)$\mathcal{F}[te^{-|t|}]$. b) $\mathcal{F}[\frac{4t}{(1+t^2)^2}]$.(Ayuda: antitransformar y expresar la exponencial en forma trigonométrica.)

3. Resolver:
   $u''_{tt} + 2u'_t + u = \alpha^2 u''_{xx}$
   $u(0,t) = u(1,t) = 0$
   $u(x,0) = 0$
   $u(x,1) = 4\sin(3\pi x)$.

4. Dada $f(t) = t - t^2$, podemos obtener tres expansiones en Serie de Fourier:
   a) la asociada a $f(t)$, $t \in (-1,1)$ es:
$$\frac{-1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(n\pi t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi)$$
   b) la serie de cosenos de $f(t)$ $t \in (0,1)$ es:
$$\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \cos(2n\pi t)$$
   c) la serie de senos de $f(t)$ $t \in (0,1)$ es:
$$\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)\pi t)$$
   i) Graficar las funciones a las que cada una de las series converge.
   ii) Analizar en cada caso el decrecimiento de los coeficientes (comparados con potencias de n) y relacionarlo con las propiedades geométricas de las extensiones de $f(t)$.
   iii) Si $f \in C^n$, ¿ Podría generalizar este comportamiento?.

5. Resolver el siguiente sistema, sabiendo que $y(1) = 1$:

   $y'(t-1)U(t-1) = \delta(t)$

   $x(t) + y(t) = U(t)$

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 22/07/03

1. $f(t)$ es real, periódica de período $T = 6$ y $f(t) = -f(t-3)$. Sus coeficientes de Fourier son tales que $c_k = 0$ para $k = 0$ y $k > 2$ y c_1 es real positivo.

   Además $\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}[f(t)]^2 dt = \frac{1}{2}$.

   Demostrar que $f(t) = A\cos(Bt + C)$ y hallar A, B y C.

2. La salida de un sistema $y(t)$ está relacionada con la entrada $x(t)$ por:

   $y'(t) + 10y(t) = x(t) \star z(t), \quad \text{donde} \quad z(t) = e^{-t}H(t) + 3\delta(t)$

   a) Hallar $\frac{\mathcal{F}[y(t)]}{\mathcal{F}[x(t)]}$.

   b) Si $x(t) = \delta(t)$, hallar $y(t)$. (Ayuda: $\mathcal{F}[e^{\beta t}H(t)] = \frac{-1}{\beta - i\omega}$.)

3. Si $\mathcal{L}[y(t)] = [(s+\alpha)(1-e^{-sT})]^{-1}, \quad T > 0$ fijo, hallar $y(t)$.

4. Resolver:

$$\begin{cases} u'_t = 2u'_{xx} \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0 \\ u(0,t) = 5, \quad u(\pi,t) = 10 \\ u(x,0) = \sin 3x - \sin 5x \end{cases}$$

5. Resolver:

$$\begin{cases} x' + y = 0 \\ x + y' = 1 - H(t-2), \quad x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 05/08/03

1. Si la serie de Fourier en $0 < t < T$ de $g(t) = \frac{1}{2}T - t$ es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_0 n}\sin\omega_0 nt; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, deducir que si $f(t)$ es periódica integrable de período T y está representada por su serie de Fourier con coeficientes b_n, se cumple:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\omega_0 n}$$

2. Si $x(t) = e^{-t}H(t), \quad y(t) = e^{t}H(-t)$,

   a) Hallar $\mathcal{F}[x(t)]$ y $\mathcal{F}[y(t)]$.

   b) Calcular $x(t) \star y(t)$ a partir del resultado de a) recordando que $\mathcal{F}[e^{-\beta|t|}] = \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$.

3. a) Hallar $\mathcal{L}[y''(t-a)H(t-a)]$.

   b) Establecer las condiciones iniciales para que la ecuación:

   $y''(t-1)H(t-1) + y'(t-1)H(t-1) = 0 \quad$ tenga como solución $y(t) = e^{-t}$.

4. Hallar la señal causal $x(n)$ cuya transformada Z tiene polos simples en $z = 1$ y $z = 1/2$ con residuaos 2 y -1 respectivamente y un cero simple en $z = 0$.

   Demostrar las propiedades que se usen y dar la ROC.

5. Si $F(s) = \arctan(\frac{1}{s})$, hallar $f(t)$ y verificar el resultado.
   ($\arctan s = \pi/2 - \arctan(\frac{1}{s})$).

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 12/08/03

1. a) Si $g(z) = (z-a)\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n, \quad b_n \neq 0\ \forall\ n$ y $f(z)$ es analítica salvo en $z = 0$ donde tiene un polo doble con residuo $-5/3$, analizar qué tipo de singularidad es $z = a$ para $f(g(z))$ y hallar $Res[f(g(z)), z = a]$

   b) Si $f(z)$ es entera tal que $\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{f(z)}{z^k}\right| = 0$ para $k > 0$, mostrar que $f(z)$ es un polinomio de grado menor que k.

2. Resolver:
   $u'_t = u''_{xx}, \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 3\pi, \quad u(x,0) = 0.$

3. Si $F(\omega)$ es la Transformada de Fourier de $f(t)$ y si $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+i\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = Ae^{-2t}U(t)$, hallar $f(t)$ sabiendo que $f(0) = 1$.

4. Resolver:
   $$\begin{cases} x'' + y' = 2 \\ 4x + y' = 6, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y(1) = 4 \end{cases}$$

5. a) Hallar la ecuación en diferencias del sistema LTI causal cuya función de transferencia es
   $H(z) = \dfrac{1}{(1 - 1/2z^{-1})(1 - 1/4z^{-1})}$.

   b) Demostrar las propiedades que se usen.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 11/12/03

1. Mostrar que si $f(z)$ es analítica , entonces $\nabla^2|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$.

2. a) Sean $f(x)$ y $g(x)$ regulares a trozos y períodicas de perído T. Si a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f y α_n y β_n son los coeficientes de Fourier de g, demostrar que
   $$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

   b) Sea $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$ y $f_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$, demostrar que $f_k(t) = \dfrac{1}{\pi}f(t) \star \dfrac{\sin(kt)}{t}$.

3. Sea $f(t) = 2$ si $1 \le t \le 2$ y $f(t) = 0$, para los demás valores de t.

   a) Expresar $f(t)$ como combinación lineal de traslaciones de $U(t)$.

   b) Resolver $y' + 3y + 2\int_0^t y\,dx = f(t); \quad y(0) = 1$. Enunciar las propiedades que se usen.

4. a) Mostrar que
   $$\lim_{s\to\infty} s\,[sF(s) - f(0)] = f'(0)$$

   b) Obtener una fórmula para hallar recursivamente $f^n(0)$ a partir de $F(s)$.

   Establecer todas las hipótesis necesarias y los resultados que se utilicen en a) y b).

5. Si $X(z) = arctg(a/z)$, hallar la sucesión $x(n)$. Demostrar las propiedades que se usen y dar la ROC.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 18/12/03

1. Demostrar que si $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ es tal que $p(z_0) \neq 0,\ q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$ entonces z_0 es un polo simple simple de $f(z)$ con residuo $b_1 = \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.

2. Demostrar que si $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios tales que $gr(P) < gr(Q) = n$ y $Q(s)$ tiene n raíces reales distintas: $\alpha_1 \dots \alpha_n$, ninguna de ellas raíz de $P(s)$ entonces:
$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

3. a) Sea $0 < a < \pi$. Hallar la serie de Fourier asociada a $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq a \\ 0 & \text{si} \quad a < |x| \leq \pi \end{cases}$ y analizar convergencia.

   b) Hallar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2na)}{n}$.

4. Resolver:
   $y'' + 2ay' + a^2 y = f(t); \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$ siendo $f(t)$ regular a trozos y de O.E.

5. Dada la ecuación en diferencias: $y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$ hallar la función de transferencia del sistema LTI causal. Dar la ROC y la respuesta impulsiva. Enunciar las propiedades que se usen.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 02/03/04

1. Sea $g(z)$ analítica en $|z| \leq R$. Si $f(z)$ es analítica en $|z| \leq R$ salvo en b_1 y $b_2 \quad \in |z| < R$ donde tiene polos de multiplicidad 1 y 2 y $f(z)$ tiene ceros en a_1, a_2 y $a_3 \quad \in |z| < R$ de multipicidades $1, 2$ y 3 respectivamente, probar que
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = g(a_1) + 2g(a_2) + 3g(a_3) - g(b_1) - 2g(b_2)$$

2. Analizar la naturaleza de la convergencia de la Serie de Fourier de $f(x) = x^3$ en $[-\pi, \pi]$. ¿Se puede derivar la serie término a término?

3. Hallar la ecuación en diferencias del sistema cuya función de transferencia es
   $H(z) = \dfrac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$

4. Calcular $\mathcal{F}[e^{-a|t-1|}]$ y deducir $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2}[e^{-|x|}]$

5. Determinar $f(t)$ para que los sistemas:
   1) $ay'' + by' + cy = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
   y
   2) $ay'' + by' + cy = f(t),\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
   tengan exactamente la misma solución.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 17/02/04

1. Si $f(z)$ es acotada y analítica en $0 < |z - z_0| < r$, entonces $f(z)$ es analítica en z_0 o z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$.

2. Resolver:
$u_t = 16u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \ t > 0$
$u(0,t) = u(2,t) = 0$
$u(x,0) = 16x$

3. Hallar $y(0)$ e $y'(0)$ para que la ecuación $y'' + \alpha y' + (\frac{\alpha^2}{4} - 1)y = \delta(t)$ tenga como solución $y(t) = e^{-(\alpha/2)t}Sh(t) - e^{-(\alpha/2)t}Ch(t)$.

4. Dada la ecuación $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}U(t) + \frac{1}{3}e^{2t}U(t)$, hallar $X(s)$. Graficar la región de convergencia, marcar polos y ceros y determinar si $X(s)$ tiene polo o cero en infinito.

5. a) Demostrar que si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$
b) Hallar $\mathcal{F}[\frac{1}{a^2+t^2}]$ sabiendo que $\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad a > 0.$

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 24/02/04

1. Sea $f(z)$ entera y tal que $\lim_{z->\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Probar que $f(z)$ es constante.

2. Sea $f(t) = u(t) + iv(t), \quad t \in [0, 2\pi]$. Si c_n y $\hat{u}_n$ son los coeficientes de las series exponenciales de Fourier de f y u respectivamente, demostrar que $\hat{u}_n = \frac{c_n + \overline{c_{-n}}}{2}$. Justificar todos los pasos.

3. a) Calcular $\mathcal{F}[e^{-a|t|}], \quad a > 0.$
b) Mostar que $f(-t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{f}(\omega)]$.
b) Sean $a > 0, \ b > 0$ y $f_a(t) = \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}$. Usando Transformada de Fourier, probar que $f_a(t) \star f_b(t) = f_{a+b}(t)$

4. Hallar $Y(s)$ y enunciar las propiedades que se usen:
$ty'' + 2y' + (t+1)y = 0, \quad y(0) = 0 = y'(0).$

5. a) Dada la sucesión $x(n) = (\cos\omega_0 n)u(n)$, demostrar que $X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$ y dar la ROC.
b) Si $y(n) = a^n x(n)$, hallar $Y(z)$ y su ROC. (Usar una propiedad adecuada).

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 02/03/04

1. Sea $g(z)$ analítica en $|z| \leq R$. Si $f(z)$ es analítica en $|z| \leq R$ salvo en b_1 y $b_2 \quad \in |z| < R$ donde tiene polos de multiplicidad 1 y 2 y $f(z)$ tiene ceros en a_1, a_2 y $a_3 \quad \in |z| < R$ de multipicidades $1, 2$ y 3 respectivamente, probar que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = g(a_1) + 2g(a_2) + 3g(a_3) - g(b_1) - 2g(b_2)$$

2. Analizar la naturaleza de la convergencia de la Serie de Fourier de $f(x) = x^3$ en $[-\pi, \pi]$. ¿Se puede derivar la serie término a término?

3. Hallar la ecuación en diferencias del sistema cuya función de transferencia es
$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$

4. Calcular $\mathcal{F}[e^{-a|t-1|}]$ y deducir $\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}[e^{-|x|}]$

5. Determinar $f(t)$ para que los sistemas:
1) $ay'' + by' + cy = 0, \ \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1$
y
2) $ay'' + by' + cy = f(t), \ \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
tengan exactamente la misma solución.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 08/07/04

(a) Si $f(z)$ es analítica en $|z| > R$ y $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, probar que existe $\lim_{|z|\to\infty} z^2 f(z)$.

(b) Resolver:
$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_t = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0$$
$$u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = \sin x$$

(c) a) Hallar la Transformada de Fourier de $f(t) = 1 - t^2$ si $|t| \leq 1$, $f(t) = 0$ si $|t| > 1$.

b) Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\cos(x/2)dx$.

(d) Dada la señal $y(t) = x_1(t-2) \star x_2(-t+3)$, siendo $x_1(t) = e^{-2t}U(t)$ y $x_2(t) = e^{-3t}U(t)$, hallar $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Determinar la región de convergencia.

(e) Hallar la se nal discreta $x(n)$ cuya transformada Z tiene polos simples en $z = -1, z = 2$ y $z = 3$ con residuos $1/2, 2$ y 1 respectivamente y un cero doble en $z = 0$. Determinar la ROC y demostrar las propiedades que se usen.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 15/07/04

(a) Dada $f(x) = \begin{cases} 5\sin x & \text{si} \quad -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 4 & \text{si} \quad x = -\frac{\pi}{2} \\ x^2 & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

determinar a qué converge en cada punto del $[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de $f(x)$ sin calcularla. Justificar todas las respuestas. Analizar la convergencia de dicha serie en $\mathbb{R}$.

(b) a) Demostrar que si $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}[f(t)e^{i\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$, siendo $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$.

b) Calcular$\mathcal{F}[f(t)\cos(2t)]$, siendo $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < T \\ 0 & \text{si} \quad |t| > T \end{cases}$

(c) Demostrar que si $f(t)$ y $f'(t)$ son regulares a trozos y de orden exponencial:
a) $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$, donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ b) $\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$.

(d) a) Hallar $\mathcal{L}[J_0(t)]$, siendo $J_0(t)$ solución de la ecuación de Bessel con $\nu = 0$: $ty'' + y' + ty = 0$, tal que $J_0(0^+) = 1$ y $J'_0(0^+) = 0$).
b) Calcular $\int_0^t J_0(x)J_0(t-x)\,dx$.

(e) Dada $X(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)z^{-k}$ convergente en $|z| > R$ (Transformada Z de la sucesión $x(n)$)

a) mostrar que: $x(n) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz$ donde C es una curva cerrada contenida en $|z| > R$.

b) Si $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$, hallar $x(n)$ usando a) para $n \geq 0$ y $n < 0$.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 29/07/04

(a) a) Hallar el desarrollo en Serie de Fourier de: $E(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [-2,0] \\ 0 & \text{si} \quad t \in (0,2] \end{cases}$

b) En un circuito simple RLC la carga $q(t)$ en el condensador satisface la ecuación:
$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) - E(t) = 0, \quad L, R \text{ y } C \text{ constantes positivas.}$$
Hallar la Serie exponencial de Fourier de $q(t) \in C^2(\mathbb{R})$ periódica de período 4, con $E(t)$ la función del item a). Justificar todos los pasos.

(b) a) Demostrar$\mathcal{F}[f(ax-b)] = \dfrac{1}{|a|}e^{i\omega\frac{b}{a}}\hat{f}(\dfrac{\omega}{a})$.

b) Expresar la solución $y(x,t)$ de:$\begin{cases} y(x+1,t) - 2y(x,t) + y(x-1,t) = y'_t(x,t) \\ y(x,0) = f(x) \end{cases}$

donde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$

(c) a) Demostrar $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$, con $F(S) = \mathcal{L}[f(t)]$.
b) Resolver $y'' + a^2y = \cos(at)U(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$.
c) Resolver $y'' + a^2y = \sin(at)U(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$.

(d) a) Demostrar que la transformada Z de $x_1(n) \star x_2(n)$ es $X_1(z)X_2(z)$

b) Hallar la salida $y(n)$ del sistema LTI causal si la respuesta impulsiva es $h(n) = (\dfrac{1}{2})^n u(n)$ y la entrada es $x(n) = u(n)$. Determinar los polos y la ROC de $Y(z)$.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 05/08/04

(a) Sea f continua por partes en $[0,c]$ y $f(x) = f(x - \frac{c}{2})$ para todo x tal que $\frac{c}{2} < x \leq c$. Comprobar que la serie de Fourier de senos de f sólo presenta téminos de la forma $c_k sen(2k\frac{\pi x}{c})$.

(b) **a)** Si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, demostrar $\mathcal{F}[F(\omega)] = 2\pi f(-t)$,
b) Resolver:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad t > 0, \; -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Ayuda: $\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad a > 0$

(c) **a)** Probar que si existe $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ y $\mathcal{L}[f(t) = F(s)$, entonces $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int\limits_s^\infty F(u)du$.

b) Hallar $\mathcal{L}\left(\frac{1-\cos 2t}{t}\right)(s)$

(d) **a)** Demostrar que si $X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$ entonces $\mathcal{Z}[z_0^n x(n)] = X(\frac{z}{z_0})$ y dar la ROC.

b) Si $x(n) = \sin(\omega_0 n)u(n)$, demostrar que $X(z) = \dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega_0) + z^{-2}}$ y dar la ROC.

c) A partir de lo anterior deducir el desarrollo en serie de Fourier de

$$f(t) = \frac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2} \qquad 0 < r < 1$$

(e) **a)** Determinar $f(t)$ para que los siguientes sistemas tengan la misma solución:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0^+) = 0 \\ y'(0^+) = 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = f(t) \\ y(0^+) = 0 \\ y'(0^+) = 0 \end{cases}$$

b) Hallar $y(t)$. Justificar.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 21/02/06

(a) Sea $f(z)$ analítica tal que $f(z) = f(z+a), f(z) = f(z+ib), \quad a > 0, \; b > 0$. Probar que $f(z)$ es constante.

(b) a) Hallar la serie de Fourier de cosenos y la de senos de $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi t & \text{si} \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{4}\pi t(\pi - t) & \text{si} \quad t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$

b) Analizar en cada caso el decrecimiento de los coeficientes (comparados con potencias de n).

c) Si $S_{c,n}$ y $S_{s,n}$ son sumas parciales de los desarrolos de Fourier en cosenos y senos respectivamente (obtenidos en a)), ¿Cuál aproxima mejor a $f(t)$?.¿Por qué?.

(c) La ecuación diferencial: $y''' + (1+\alpha)y'' + \alpha(\alpha+1)y' + \alpha^2 y = x, \quad (y = y(t),\ x = x(t),\ \alpha = \text{constante})$ modela un sistema LTI causal cuya respuesta impulsiva es $h(t)$ (condiciones iniciales nulas). Si $g(t) = h'(t) + h(t)$

a) Determinar cuántos polos tiene $G(s)$.

b) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema resulta estable? ($y(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$)

(d) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Demostrar:

a) $\mathcal{F}[tf(t)] = i(\hat{f})'$, b)$\mathcal{F}[\hat{f}] = 2\pi f(-t)$

c) Hallar i) $\mathcal{F}[te^{-|t|}]$, ii) $\mathcal{F}[\frac{4t}{(1+t^2)^2}]$, iii) $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, mencionando en cada caso las propiedade usadas. (Nota $\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}$)

(e) Dada la ecuación en diferencias: $y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$ hallar la función de transferencia del sistema LTI causal. Dar la ROC y la respuesta impulsiva. Enunciar las propiedades que se usen.

2do. Parcial Integrador - Análisis III - 28/02/06

(a) Sea $f(t)$ real y par, periódica de período $T = 2$ y c_n sus coeficientes complejos de Fourier.

a) Demostrar que $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_n = c_{-n} \in \mathbb{R}$.

b) Hallar $f(t)$ si además se sabe que $c_n = 0$ si $|n| \geq 2$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt = 2$ y $f(\frac{1}{2}) = 0$.

(b) Dada la ecuación: $y(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{2}(e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)})\, u \sin(5u)\, du,$

a) Hallar $Y(s)$ y graficar la región de convergencia.

b) Hallar la ecuación diferencial y las condiciones iniciales del problema cuya solución es $y(t)$.

(c) a) Demostrar que si $\mathcal{F}[f(t] = \hat{f}(\omega)$, entonces $\mathcal{F}[f(t)\sin(bt)] = \dfrac{1}{2i}[\hat{f}(\omega - b) - \hat{f}(\omega + b)]$.

b) Utilizar a) y una propiedad adecuada para hallar $\hat{f}[\omega]$, siendo $f(t) = \dfrac{\sin(bt)}{a^2 + t^2}$. ($\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$)

(d) Hallar $Y^+(z)$, su región de convergencia y la sucesión $y(n)$ sabiendo que:
$y(n) = y(n-1) + y(n-2), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$