75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1
2do. Cuatrimestre 2009

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por métodos iterativos

Preparado por el Prof. Miguel Ángel Cavaliere

Objetivos:

- Experimentar con el uso de métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales representados por matrices simétricas definidas positivas y tridiagonales en bloques (similares por ejemplo a los que se obtienen discretizando ecuaciones diferenciales por el método de diferencias finitas).
- Verificar experimentalmente los resultados teóricos mediante estimaciones empíricas respecto de la velocidad de convergencia del proceso iterativo.

Desarrollo:

En el apéndice se presentan tres matrices cuadradas denominadas A_6, A_9 y A_{12} (donde el subíndice corresponde a la dimensión de las mismas). Dichas matrices son simétricas definidas positivas y presentan una estructura tridiagonal en bloques definidas a partir de submatrices de 3x3 tal como allí se indica. Asimismo estas tres matrices sugieren un patrón para generar matrices A_n siendo n un multiplo de 3. Se pide:

a) Escribir uno o varios programas que permitan aplicar el método SOR a sistemas de ecuaciones lineales representados por $\boldsymbol{A_n}\ \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{b_n}$ (donde el subíndice identifica la dimensión del sistema de acuerdo con lo indicado en el Apéndice). Es un requisito que se tenga en cuenta la estructura de estas matrices y se opere solamente con los elementos no nulos de las mismas, o sea, que dichas matrices $\boldsymbol{A_n}$ no deberán estar representadas computacionalmente por un arreglo bidimensional sino que las fórmulas del método deberán escribirse para estas matrices en particular.
b) Para $\boldsymbol{n}$ = 6, 9, 12 y 30 calcular los vectores $\boldsymbol{b_n}$ tal que correspondan a los casos en que la solución $\boldsymbol{x_n}$ tenga todas sus componentes iguales a 1.
c) Para los 4 sistemas de ecuaciones definidos en el punto anterior obtener soluciones con una precisión relativa RTOL= 0.001 aplicando el método de Gauss Seidel (SOR con ω=1) y arrancando el proceso iterativo considerando nulas todas las componentes de $\boldsymbol{x^{(0)}}$. Para ello se utilizará el siguiente criterio de convergencia:

$$R^{(k)} \leq RTOL \text{ donde } R^{(k)} = \frac{\left\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|\underline{x}^{(k)}\right\|_\infty}$$

d) Repetir el punto c) aplicando ahora el método SOR utilizando para cada sistema de ecuaciones distintos valores de ω comprendidos entre 1 y 2 (se sugiere tomar alrededor de 20 valores distintos) y graficar la cantidad de iteraciones requeridas para alcanzar la precisión pedida en función del parámetro de sobrerelajación ω.

e) Estimar para cada sistema de ecuaciones el valor de ω que minimiza el número de iteraciones requeridas ($\omega_{\text{óptimo}}$). Dado que es muy probable que de la curva obtenida no presente un valor mínimo sino que haya un intervalo de valores de ω para los cuales el número de iteraciones sea mínimo, se sugiere incrementar adecuadamente el valor de RTOL y barrer el intervalo donde se presupone que se ubica el mínimo con valores de ω lo suficientemente cercanos para poder estimar dos decimales de $\omega_{\text{óptimo}}$.

f) Sabiendo que la solución exacta $\underline{x}$ tiene todas sus componentes iguales a uno estimar el radio espectral del método de Gauss Seidel sobre la base de la siguiente expresión

$$\left\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\right\|_\infty \approx \rho_{GS}{}^k \left\|\underline{x}^{(0)} - \underline{x}\right\|_\infty$$

Efectuar la estimación tomando logaritmos en la expresión anterior de forma tal de ajustar una recta cuya pendiente sea el logaritmo del radio espectral buscado.

g) Calcular para cada sistema de ecuaciones el valor de ($\omega_{\text{óptimo}}$) a partir de las estimaciones del radio espectral de la matriz de iteración de Gauss Seidel (ρ_{GS}) obtenidos en el punto f) utilizando la siguiente expresión teórica y comparar con los resultados obtenidos en el punto e) anterior explicitando las conclusiones correspondientes.

$$\omega_{optimo} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_{GS})}}$$

Apéndice:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \text{ y } D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 \\ D_1 & B_3 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 & \\ D_1 & B_2 & D_1 \\ & D_1 & B_3 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 & & \\ D_1 & B_2 & D_1 & \\ & D_1 & B_2 & D_1 \\ & & D_1 & B_3 \end{pmatrix}$$