

SI m, kg, s, C, A, cd, mol

## INTRODUCCIÓN

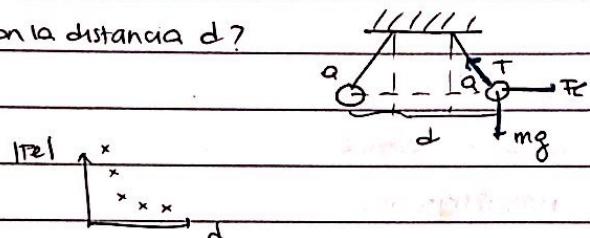
- Hay 2 tipos de carga: atracción / repulsión (experiencia)  
hicieron la experiencia con ámbar  y observaron repulsión y luego vieron ámbar y ébano y obtuvieron atracción.

- No existe monopolo magnético 

- Botella de Leyden - primer capacitor

- ¿cómo cambia la  $\vec{F}_e$  con la distancia  $d$ ?

Experimentalmente



A querer linearizar suponemos  $|F_e| \propto d^\alpha$

$$|F_e| = k d^\alpha$$

tomando el logaritmo:  $\ln |F_e| = \alpha \ln(d) + \ln(k)$

A graficar  $\ln |F_e|$  contra  $\ln(d)$ , la pendiente de la gráfica es  $\alpha$

Fuerza eléctrica para cargas puntuales en el vacío:

$$|F_e| \propto \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}$$

$$|F_e| = \frac{k_e q_1 \cdot q_2}{d^2}$$

Depende del sistema de unidades

$$k_e = 1$$

$$4\pi\epsilon_0$$

$\epsilon_0$ : permitividad eléctrica del vacío

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Ley de Coulomb

Hoy en día se usa:  $c = 299.792.458 \text{ m/s}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

postulados de la teoría de la relatividad

1. los leyes de la física son los mismos en cualquier sistema de referencia

2. la velocidad de la luz en cualquier sistema inercial (de referencia) es el cte (c).

• P. Feynman (1918-1988)

Problema de Fermi

$1e^-$  de cada millón

$$Ne^- \text{ de } \begin{matrix} \text{cada millón} \\ \text{cada millón} \end{matrix} \quad m = 60 \text{ ug} \quad \begin{matrix} \text{Me} = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ \text{Mp} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx Mn \end{matrix}$$

— 1 m —

Tenemos igual cantidad de  $p^+$  y  $e^-$  (son eléctricamente neutros).

$$m = N_p Mp + N_n Mn + Ne/m_e \quad N: \text{número}$$

Lo desprecio porque la masa es 2000 veces menor.

$$\approx 2 N_p \cdot M_p$$

$$N_p \approx 3 \times 10^{28} \approx N_e$$

$$N_{\text{eléctr. extraídos}} \approx 3 \times 10^{22}$$

$$\text{carga de un electrón} \quad e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$Q \approx 5 \times 10^3 \text{ C}$$

↑ carga de cada persona

$$|F_e| \sim e \times 10^9 \frac{(5 \times 10^3)^2}{1^2} \approx 2,5 \times 10^{17} \text{ N.}$$

Para la estimación sirve pero tener en cuenta que esta cuestión es para cargas puntuales solamente.

12/03/2020.

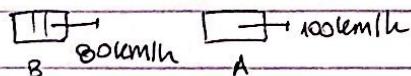
### Ambitos de la física

• Mecánica clásica / newtoniana (todo lo premio a la mecánica cuántica y a la teoría de la relatividad)

• Mecánico Relativista

• Mecánica cuántica (comportamiento a nivel atómico)

• Teoría de campo cuántico. / Teorías cuantificadas de campo.



$$V_{A/B} = \frac{V_A - V_B}{1 - \frac{V_A V_B}{C^2}}$$

QCD: curomodinámica cuántica (el estudio los fuerzas entre los quarks)

### Fuerzas fundamentales

1) FNF - fuerza nuclear fuerte

$1 \times 10^{-2}$

GUT

2) PEM - fuerza electromagnética

$1 \times 10^{-5}$

PED

3) FND - fuerza nuclear débil

$1 \times 10^{-5}$

fuerza electro débil

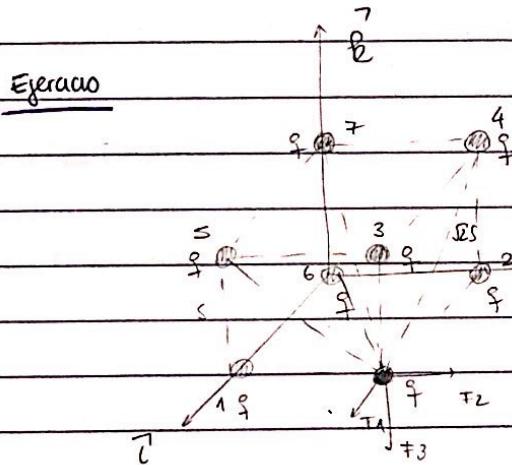
4) FG - fuerza gravitatoria

$1 \times 10^{-39}$

• No hay partículas que repelen por FG

Quarks, leptones, bólidos

fermiones



cubo de lados  $s$

Hallar el módulo de la  $\vec{F}_e$  que se ejerce sobre cada carga.

$$|\vec{F}_c| = \frac{k q_1 q_2}{d^2}$$

$$\sqrt{s^2 + s^2} = \sqrt{2}s$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = \frac{k q^2}{s^2} \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{k q^2}{s^2} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$|\vec{F}_4| = |\vec{F}_5| = |\vec{F}_6| = \frac{k q^2}{2s^2} \quad \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6 = \frac{k q^2}{2s^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{k}, \vec{i})$$

$$|\vec{F}_7| = \frac{k q^2}{3s^2} \quad + \frac{k q^2}{2s^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j}, -\vec{k}) + \frac{k q^2}{2s^2} (\vec{i}, \vec{j}) \\ = \frac{k q^2}{2s^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (2\vec{i}, 2\vec{j}, -2\vec{k})$$

$$\vec{F}_7 = \frac{k q^2}{3s^2} \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\vec{F}_8 = \left( \frac{k q^2}{s^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{k q^2}{s^2} + \frac{k q^2}{\sqrt{3} s^2} \right), \quad \frac{k q^2}{s^2} + \frac{k q^2 \sqrt{2}}{2s^2} + \frac{k q^2}{\sqrt{3} s^2},$$

$$- \frac{k q^2}{s^2} - \frac{k q^2 \sqrt{2}}{2s^2} - \frac{k q^2}{\sqrt{3} s^2} = \frac{k q^2}{s^2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) (\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$$

$$|\vec{F}_8| = \sqrt{3 \cdot \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{k^2 q^4}{s^4}} = \left[ \left( \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2} \right) \frac{k q^2}{s^2} \right]$$

## Sistemas de Coordenadas

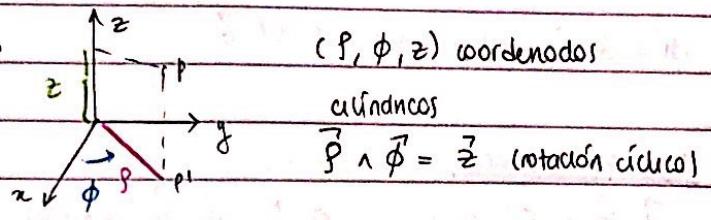
- sistema de coordenadas rectangulares

- sistema de coordenadas cilíndricas  $\rightarrow$

$$z \in (-\infty, +\infty)$$

$$r \in [0, +\infty)$$

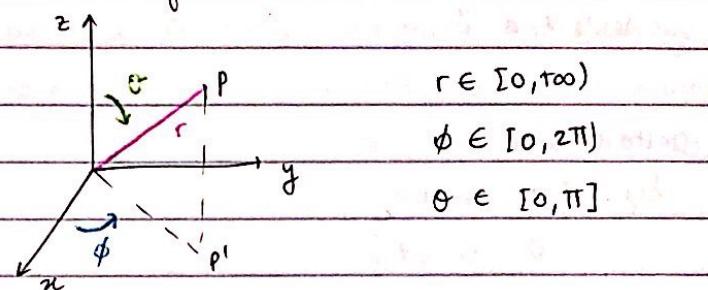
$$\phi \in [0, 2\pi)$$



con  $r$  cte tiempo cilíndricos coaxiales (conje  $z$ )

con  $\phi$  cte tiempo semiplanos

- sistema de coordenadas esféricos



En el tema cartesiano

$$\vec{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\vec{p} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$$

$$\vec{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

operador  $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

campos  $\begin{cases} \text{escalares} \\ \text{vectoriales} \end{cases}$

$$df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$$

$$= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

$\hookrightarrow$  Así definirnos noblo ahora  $\vec{\nabla}$

$$\bullet f = f(x, y, z) \text{ entonces } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\bullet f = f(r, \phi, z) \text{ entonces } df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\text{si estoy en estos coordenados } d\vec{r} = dr \hat{r} + (r + d\phi) d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

ignoro segundo orden (aprox de primer orden)

en estas coordenadas cambia el operador  $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla}f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

• coordenados esféricos

$$f = f(r, \theta, \phi)$$

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

13/03/2020

### Notación tensorial

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$$

- un índice repetido en una expresión se toma como que debe sumarse sobre él desde 1 a 3

### Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

### Tensor antisimétrico de Levi-Civita

campo magnético - pseudo vector

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ cíclico} \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ antícíclico} \\ 0 & \text{otro caso. (los índices se repiten)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para la} \\ \text{permutación} \\ \text{(cíclico o antícíclico)} \end{array}$$

27 elementos, 6 ≠ 0, 21 = 0

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  en este caso  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son vectores reales y  $\vec{c}$  es un pseudo-vector porque si cambio de dirección  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  tanto  $\vec{a}$  como  $\vec{b}$  cambian de dirección pero  $\vec{c}$  queda igual.

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\text{ejemplo: } c_1 = \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Tengo que tener  
cuidado de no repetir  
índices

Hay 5 sólidos platónicos

19/3/2020

programa Wolfram Mathematica - CDF Wolfram player para visualizar los archivos .nb que se suben en el moodle.

## Álgebra y cálculo vectorial

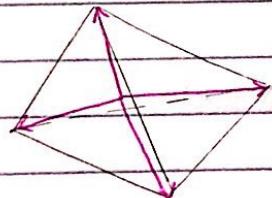
campo (magnitudes que dependen de la posición y del tiempo)

[ escalar (por ejemplo: temperatura, presión, humedad, densidad,...)  
vectorial

Cuando se avanzó en la comprensión de los fenómenos eléctricos se vio que algo similar era particularmente productivo para entender la naturaleza de las interacciones, pero se necesitaban 3 valores para un punto. Así nació la idea de campo eléctrico, y más tarde también el magnético.

Siempre tenemos que decidir qué sistema es el más apropiado (ver la simetría del problema)

tetraedro  
regular



calcular el ángulo entre dos radio vectores

que van desde el centro a dos vértices de un tetraedro regular.  $\Rightarrow 109,5^\circ$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 = 0 \text{ por ser un tetraedro regular (simetría)}$$

Hagamos el producto escalar

por ser regular el tetraedro

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 = 0) \cdot \vec{r}_1 = r^2 + 3r^2 \cos \gamma = 0 \Rightarrow \cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

módulo del radio-vector

## cálculo vectorial

Elemento diferencial de desplazamiento ( $d\vec{r}$ )

cartesianos

$$dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

cilindricos

$$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

esféricos

$$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

coeficiente métrico: coeficiente para multiplicar los diferenciales

cartesianos  $h_x = h_y = h_z = 1$

cilindricos  $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$

spherical  $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$

Múltiples  $\rightarrow$  tienen que tener algo de longitud para poder sumar (TIP práctico)

en este curso  $J = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$  (Jacobiano)

Elemento diferencial de volumen (necesario para toda integración -Jacobiano)

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3$$

ejemplo, en cilíndricos  $J = P$

Gradiente, divergencia y rotacional

$$\nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) = (\nabla T) \cdot (de)$$

gradiente paro  
de la función

El gradiente  $\nabla T$  apunta en la dirección de máximo crecimiento de  $T$

$|\nabla T|$  pendiente en esa dirección de máximo incremento.

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

(! solo en cartesianos)

operador náble

para que sea independiente del sistema de coordenadas, pero sistema ortogonal.

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \hat{u}_3$$

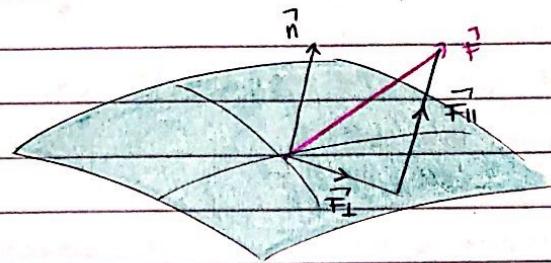
$\phi$  función escalar

$\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$  vectores en sistema ortonormal.

para los físicos

(\*)  $\operatorname{div} \vec{A} = D \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} \rightarrow$  Interpretación física de la divergencia

Flujo por unidad de volumen cuando el volumen tiende a cero.  
Qué tantas líneas de campo atraviesan unitario.



tantas líneas entran como salen  
la divergencia parece ser cero en todos los puntos  
menos en  $\star$   
no tiene por qué ser el centro.

Divergencia positiva

Largo de las flechas: magnitud del campo vectorial.

(\*)  $\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iiint_V \vec{A} \cdot d\vec{V}}{V}$

$= A_x(z dx dz) dy + A_y(y dy dz) dx + \dots$

$\frac{dx dy dz}{V}$

$\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \hat{z}$

Ejercicio  $\vec{V} = \frac{\hat{r}}{r^2}$  calcular la divergencia

usando coord esféricas.

$$\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d(1)}{dr} = 0 \quad \text{en coordenados esféricos.}$$

En coordenadas cartesianas

$$\vec{V} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow V_x = \frac{\vec{r} \cdot \hat{x}}{r^3} = \frac{x}{r^3}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right)$$
$$= \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Regla de la cadena

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z}$$
$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{3y}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{3z}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z}$$

Además  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad \text{Análogo } y, z$$
$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{x}{r} - \frac{3y}{r^4} \cdot \frac{y}{r} - \frac{3z}{r^4} \cdot \frac{z}{r}$$
$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} - \frac{3y^2}{r^5} - \frac{3z^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3 \cdot r^2}{r^5} = 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial (F_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial (F_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right)$$

curl - rotor

slope: pendiente

### Teorema de la divergencia

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

### Teorema del gradiente

$$\int_a^b (\nabla T) \cdot d\vec{l} = T(b) - T(a) \quad (\text{como Barrow})$$

corolario 1:  $\int_a^b (\nabla T) \cdot d\vec{l}$  es independiente del camino para ir de a hasta b

corolario 2:  $\oint (\nabla T) \cdot d\vec{l} = 0$  porque  $a = b$ .

### teorema del rotacional / de Stokes

$$\iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

de superficie (podría ser una s también)

Ver teorema de Helmholtz (cargas, campos e interacciones)

Relaciones importantes:

$$1. \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

$$2. \nabla \times \nabla f = 0$$

$$3. \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

$$4. \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

$$5. \nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + g \nabla^2 f$$

# CAMPO ELÉCTRICO

23/03/2020

## Definiciones importantes

1. Rotar de un gradiente es cero ( $\nabla \times \vec{D} = 0$ )
2. La divergencia de un rotacional es cero ( $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ )
- campo irrotacional  $\nabla \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla V$ 
  - gradiente de un c. escalar
  - totalmente arbitrario
- campo solenoideal  $\nabla \cdot \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla \times \vec{A}$ 
  - potencial vectorial magnético.

## Propiedades fundamentales de la carga eléctrica

1. conservación (da lugar a la ecuación de continuidad)

$$\text{ACUMULACIÓN} = \text{ENT} - \text{SAL}$$

2. neutralización

El campo eléctrico tiene existencia real.

Para medir el campo eléctrico necesito una carga de prueba

suficientemente pequeña para no afectar  
el campo. Tengo que conocer el valor de la  
carga

Si pongo una carga muy grande puedo estar modificando  
los campos eléctricos que producen el campo. Por eso  
conviene que la carga sea lo más chica posible.

Notión de campo eléctrico:  $E: E(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}$

conceptualmente así lo definición, pero en la  
práctica no lo vamos a calcular así.

• Objetivo (experimental) final: el campo eléctrico  $E$  obedece el principio de superposición

poner una sola carga  $\Rightarrow$  medir campo eléctrico

sacarla y colocar otra carga en otro lugar  $\Rightarrow$  medir campo eléctrico

colocar las 2 cargas  $\Rightarrow$  medir de nuevo.

$$E(\text{ambas cargas}) = E(\text{carga 1}) + E(\text{carga 2})$$

Es un hecho experimental, no lógico.

### Distribuciones de carga:

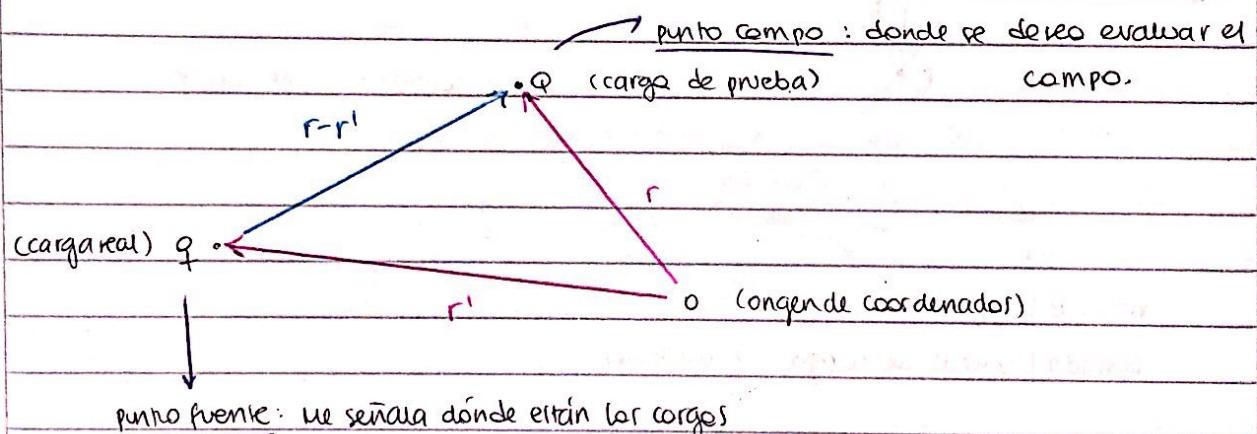
1. Puntuales ( $q$ )

2. Lineales ( $\lambda = \frac{dq}{dx}$ )

3. Superficiales ( $J = \frac{dq}{dA}$ )

4. Volumétricos ( $P_V = \frac{dq}{dV}$ )

Densidades de cargas



Ley de Coulomb para fuerza entre dos cargas puntuales en el vacío

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \hat{(\vec{r} - \vec{r'})} \quad \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{\text{N}}{\text{C}^2 \text{m}}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \hat{(\vec{r} - \vec{r'})}$$

problema

- 12 cargas ( $q$ ) en un dodecágono regular

¿cuál es la carga neta sobre una carga de prueba que se lo coloche en el centro?

$$R: \text{por simetría } \vec{F} = 0$$

- suponer que ahora se saca una carga ¿ $\vec{F}$ ? solo vamos a tener el efecto de una carga

- si ahora tengo 13 cargas en un polígono regular ¿ $\vec{F}$ ?

también me va a dar cero

- Ahora una de esas cargas la sacamos ¿cuál es la fuerza hacia la carga  $Q$ ?

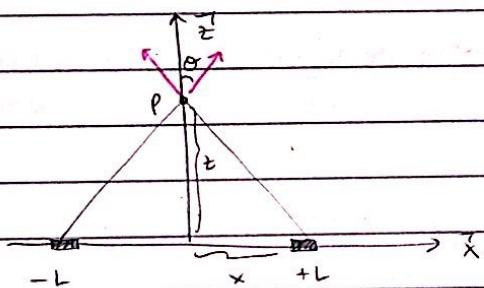
ya no las podemos emparejar

pero sabemos que la suma neta

$$\sum_{i=1}^{13} \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{12} \vec{F}_i = -\vec{F}_{13}$$

Ejercicio.



encontrar el campo en P

varilla de longitud  $2L$

densidad lineal de carga  $\lambda$  uniforme

Dividiendo la  $\vec{F}$  sobre  $q$  tengo  $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

para este tipo de problema es complicado aplicar esta fórmula

ya me do y cuenta que el campo va a estar en la dirección de  $\hat{z}$

$$\frac{dq}{dx} = \lambda \Rightarrow \frac{dq}{dx} = \lambda dx$$

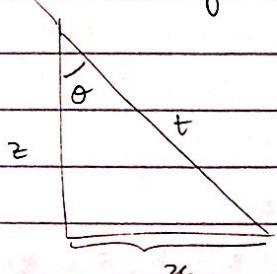
contribución de una  $dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\lambda \cos \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{z}$

en total  $dx = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx \cos \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{z}$

$$E(z) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda \cos \theta}{t^2} dx$$

$t$  va variando a medida que varía el  $dx$

$\theta$  y  $t$  van variando con  $x$ .



$$\cos \theta = \frac{z}{t} \quad t^2 = z^2 - x^2$$

$z$  es fijo

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

Entonces

$$E(z) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda}{(z^2 + x^2)^{1/2}} z dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$\text{en } x = z + q \alpha$$

$$dx = z \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$\cos^2 \alpha$$

$$= \frac{1}{z^3} \frac{z \lambda \int_0^{\arctan(\frac{L}{z})} \sec^3 \alpha d\alpha}{2\pi\epsilon_0} \quad z \sec^2 \alpha d\alpha = \frac{z}{2\pi\epsilon_0 z} \int_0^{\arctan(\frac{L}{z})} \cos \alpha d\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \sec \alpha \Big|_0^{\arctan(\frac{L}{z})} = \frac{\lambda \sec(\arctan(\frac{L}{z}))}{2\pi\epsilon_0 z}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{L^2 + z^2} \\ \text{L} \end{array} \quad L = z + q \alpha \approx +q \alpha = \frac{L}{z} = \text{op ady}$$

$$\sec \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}}$$

$$\text{entonces } = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}}$$

$$E(z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}}$$

Es interesante que probemos con casos particulares a ver si tiene sentido

- para  $z \gg L$  (el  $E$  debería ser el de una carga puntual)

Tenía  $\vec{E}(z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \frac{\hat{z}}{\sqrt{L^2+z^2}}$

si considero  $z \gg L$

Taylor:  $(1+x)^d = 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2} x^2 + \dots$

Tengo entonces:

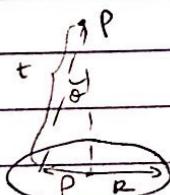
$$\frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 z} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2+z^2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 z^2} \cdot \frac{L}{\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}} \\ = \frac{2\lambda L}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left(1 + \frac{L^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2\lambda L}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{L^2}{2z^2}\right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Tiene sentido ( $E$  para carga puntual)

que no dé bien no quiere decir que la expresión final sea correcta pero no la descargamos porque tiene sentido. - deberíamos probar con otros casos extremos

problema

Plantar la integral que es necesario evaluar para determinar el campo eléctrico  $E$  sobre el eje de simetría de un disco uniformemente cargado ( $\sigma$ )



sistema de coordenadas cilíndricas (simetría de rotación)

$$dP = \sigma dA = \sigma \cdot P dP d\theta$$

El campo va a apuntar según la dirección de  $\hat{z}$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dP \cos\theta}{t^2} \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma P dP d\theta}{t^2} \cdot \hat{z}$$

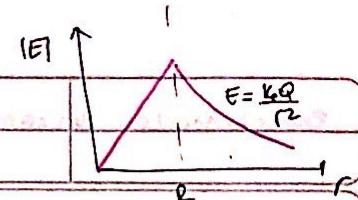
del coh θ

$$= \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{P dP d\theta}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z\pi z\sigma}{24\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$
$$u = \rho^2+z^2 \quad du = 2\rho d\rho \quad \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{d\rho}{\rho^{1/2}}$$
$$= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{u^{-\frac{1}{2}} du}{u^{3/2}} = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} u^{-\frac{3}{2}} du$$
$$= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{z^2}^{R^2+z^2} = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right) \hat{z}$$

$\frac{x^2}{3}$

Acabo de hacerlo de la forma que me favorezca  
porque el Jacobiano es complicado

Tengo que elegir un sistema de coordenadas que me favorezca  
en el Jacobiano (¡!)



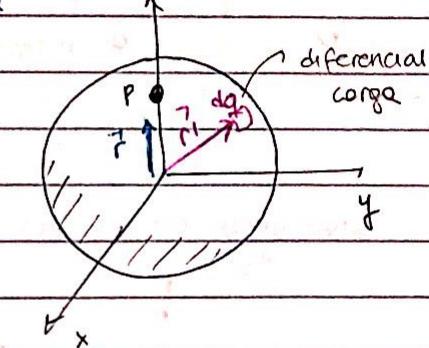
Cálculo de  $\vec{E}$  de una esfera sólida con  $\rho_v$  uniforme

$$\vec{r} = z\hat{z}; \vec{r}' = r\hat{r}; r \in [0, R]$$

radio vector a algún que me lleva a un  
punto donde hay carga

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta}$$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R \frac{\rho_v(r - r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} r^2 dr$$



$\vec{r}$  donde queremos evaluar el campo

$\vec{E}$  en P debe ser según  $\hat{z}$  por simetría

$$\Rightarrow E_z(z) = \vec{E} \cdot \hat{z}$$

$$= \frac{\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{r^2 \sin\theta (z - r\cos\theta) dr d\theta d\phi}{(r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta)^{3/2}}$$

considero  
en  $\theta$   
solamente

$$\left. \begin{array}{l} u = r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta \\ du = 2rz\sin\theta d\theta \end{array} \right\} E_z(z) = \frac{2\pi\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{r^2 dr du}{u^{3/2} 2rz} \left( z - \frac{r^2 + z^2 - u}{2z} \right)$$

$$E(z) = \frac{\rho_v \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4z^2} \int_0^R r dr \left[ \frac{du}{u^{3/2}} \left( 2z^2 - r^2 - z^2 + u \right) \right] \xrightarrow{\text{! cuando tomo raíz cuadrada cuidado}} \text{necesito tomar valor absoluto}$$

$$= \frac{2\pi\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4z^2} \int r dr \left[ \frac{(z^2 - r^2)u^{-1/2}}{(-1/2)} + \frac{u^{1/2}}{1/2} \right]$$

$$= \frac{2\pi\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4z^2} \int r dr \left[ -2(z^2 - r^2) \left( \frac{1}{r+z} - \frac{1}{r-z} \right) + 2(r+z - r-z) \right]$$

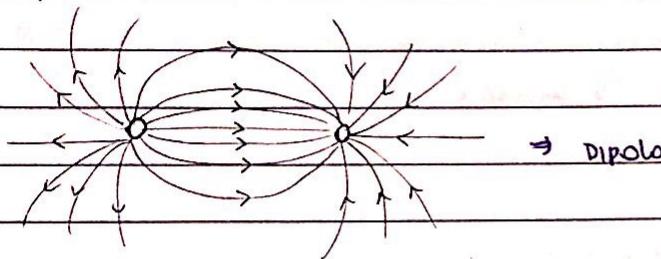
$$\text{si } z < R \Rightarrow E_z(z) = \frac{\pi\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \left\{ \int_0^z r dr \left[ -(z^2 - r^2) \left( \frac{1}{r+z} - \frac{1}{z-r} \right) + 2r \right] + \int_z^R r dr \left[ -(z^2 - r^2) \left( \frac{1}{r+z} - \frac{1}{r-z} \right) + 2z \right] \right\}$$

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{\rho_v z}{3\epsilon_0}; & \text{si } z < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}; & \text{si } z > R \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{cuando el campo es como si} \\ \text{el cargo estuviera en el origen} \end{array}$$

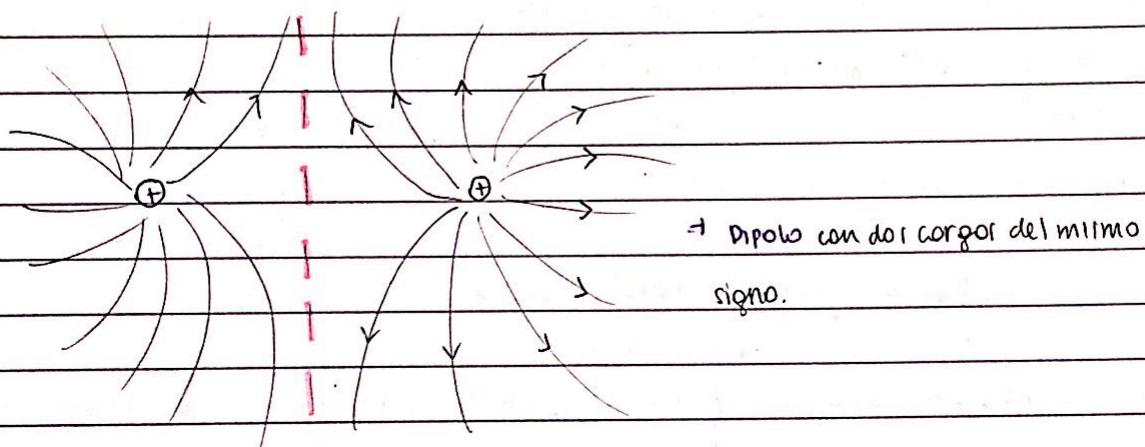
Reformular ley de Gauss

## Representación del campo eléctrico (líneas de campo)

26/3/2020



cargas iguales pero opuestas en signo



procedimiento general para hallar el campo eléctrico  $\vec{E}$  de una distribución de carga volumétrica:

- Elegir un sistema de coordenadas apropiado para el problema.
- Identificar el punto campo  $\vec{r}$
- Identificar la fuente  $\vec{r}'$
- Escribir  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}$
- plantear la integral  $E(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_v(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

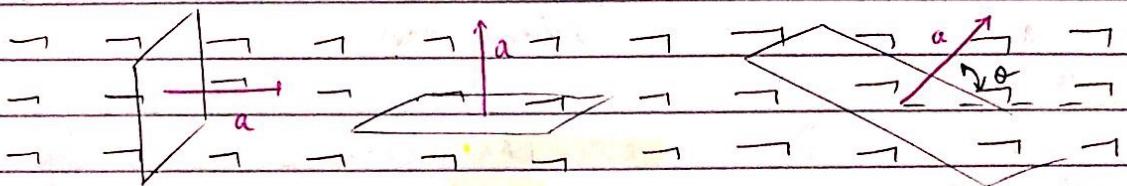
$\left. \begin{array}{l} \text{E tiene discontinuidades en aquellos lugares donde hay } \Sigma \text{ (hay densidad de carga)} \\ \text{y } r(r) \text{ es una función continua de la posición} \end{array} \right\}$

constante - no varía en el tiempo

uniforme - posición

### Fujo del Campo eléctrico

Nace del estudio de la mecánica de fluidos. Da una idea de qué es el caudal volumétrico de un fluido a través de una cierta área.



$$Fijo = v \cdot a$$

$$Fijo = 0$$

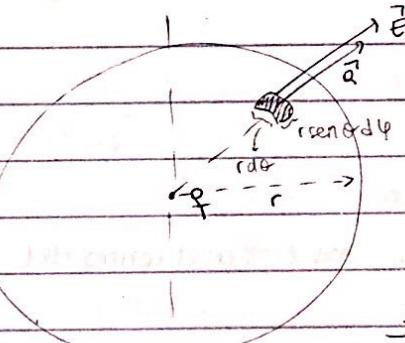
$$Fijo = v \cos \theta$$

para superficies curvas debemos dividir el dominio a integrar. Si la np el cerrada, anterior se toma como saliente: entonces  $\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dA$

$$\Phi = \int_{\text{ap}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$$

### Fujo eléctrico a través de un corcho (de una q punual)



$$dA = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\Phi_e = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} dA =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr d\theta d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \boxed{\frac{q}{\epsilon_0}}$$

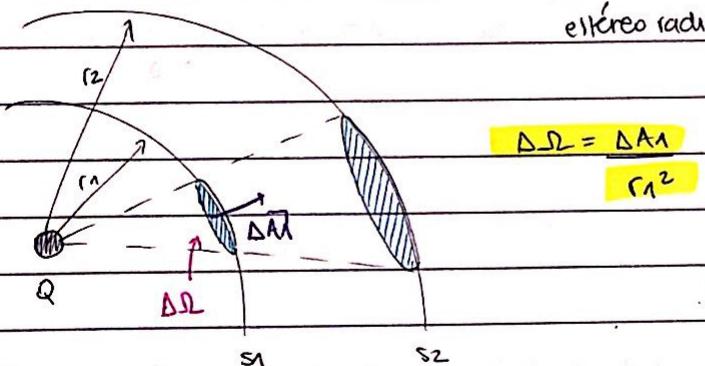
(llama la atención que no depende de r)

Para entender mejor el concepto de pujo de una carga puntual el convenientemente repasar el concepto de ángulo plano y sólido:

- Ángulo plano (medido en radianes). Ángulo completo es  $2\pi$  radianes.
- Ángulo sólido: Es la extensión natural a 3D del concepto anterior. Su medida no debería depender de  $r$  tampoco.

Ángulo completo es  $4\pi$  rad

estereoradianes



$$\Delta \Omega = \frac{dA}{r^2}$$

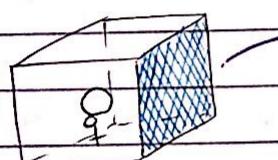
El pujo eléctrico de una carga puntual se puede expresar en términos del ángulo sólido abarcado.

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \perp}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = d\Phi$$

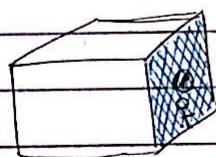
entonces  $\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$

problema

Hallar pujo eléctrico por elta cora

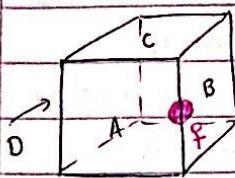


$$\Phi = \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{porque la cora está en el centro del abo})$$



$$\text{El pujo por los 5 coros restantes es } \frac{1}{2} \frac{q}{\epsilon_0}$$

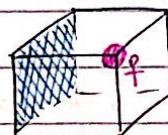
El pujo sobre la cara que está la cora es cero.



$$\Phi_B = 0$$

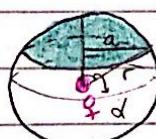
todo es  $\frac{1}{4} \frac{q}{\epsilon_0}$  } Hay flujo por 4 caras del cubo

por una de ellas, hay  $\frac{q}{16\epsilon_0}$



El flujo eléctrico por todo el cubo es  $\frac{q}{8\epsilon_0}$

Si lo dividio entre los 3 caras que tienen flujo, por una de ellas el flujo eléctrico por ~~es~~ es  $\frac{q}{24\epsilon_0}$



Hallar el flujo eléctrico a través del círculo

por toda la circunferencia es  $\frac{q}{2\epsilon_0}$

ángulo sólido

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dA}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\Omega}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int d\Omega \hat{r} \cdot \hat{n}$$

todo los pines del concreto están a distancia  $r$  de  $q$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \int \frac{1}{r^2} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \cos\alpha) 2\pi = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha)$$

$\theta$  va de 0 a  $\alpha$

$\phi$  va de 0 a  $2\pi$

! Probar los límites

[ verificar unidades ]

la ley de Gauss es más fundamental que la ley de Coulomb (de Gauss puedo llegar a Coulomb). Tiene validez incluso en situaciones donde los q puntales se están moviendo a velocidades relativistas y el campo  $\vec{E}$  deje de ser efectivamente simétrico alrededor de dicha carga (por lo cual Coulomb deje de ser cierta) cuando una partícula se mueve a velocidad cercana a la velocidad de la luz ( $c$ ) los líneas de campo se aglomeran (ya no hay simetría)

### Ley de Coulomb

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{solo sirve para una carga puntual, pero - por}$$

el principio de superposición - se tiene que también se cumple para un conjunto de cargas.

### Ley de Gauss (1<sup>ra</sup> ecuación de Maxwell)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot d\vec{v}$$

$$Q_{\text{enc}} = \int \rho dV$$

Las ecuaciones de Maxwell buscan conocer la divergencia y el rotacional de  $E$  y  $B$  (teorema de Helmholtz) en términos de sus fuentes  
una ec integral, en electromagnetismo, tiene su correspondiente ecuación diferencial.

$$1. \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$2. \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$3. \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$4. \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

Ecuaciones de Maxwell

para hallar  $E$  con ley de Gauss necesito mucha simetría.

$P_r, \sigma, \lambda$  son positivos

la forma diferencial de la ley de Gauss es:

$$\int (\vec{D} \cdot \vec{E}) dV = \int \left( \frac{P}{\epsilon_0} \right) dV \Rightarrow \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

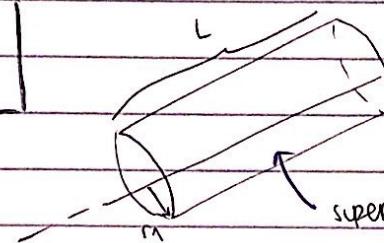
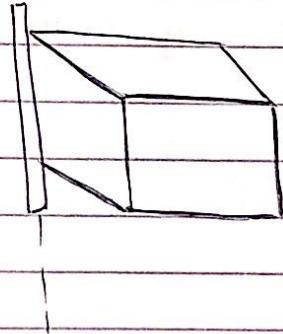
primera ecuación de Maxwell / ley de Gauss en su forma diferencial

Necesito un colo particular en que se cumple (más de uno) para que la igualdad sea pto a pto)

Ejercicio:

Hallar  $E$  de una linea de corriente recta e infinitamente

larga con  $\lambda$  uniforme



$\vec{E} \cdot \hat{n}$  por los tapas es cero

Me queda solo  $\vec{E} \cdot \hat{n}$  por lo lado lateral.

superficie Gaussiana - cilindro

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow \iint_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_{\text{lateral}} E(P) dS = E(P) \iint_{\text{lateral}} dS = E(P) 2\pi PL$$

$$\text{entonces } E(P) \cdot 2\pi PL = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (q_{in} = \lambda L)$$

$$E(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{L}{P}$$

superficies Gaussiana: superficies geométricas que nos permiten usar la ley de Gauss

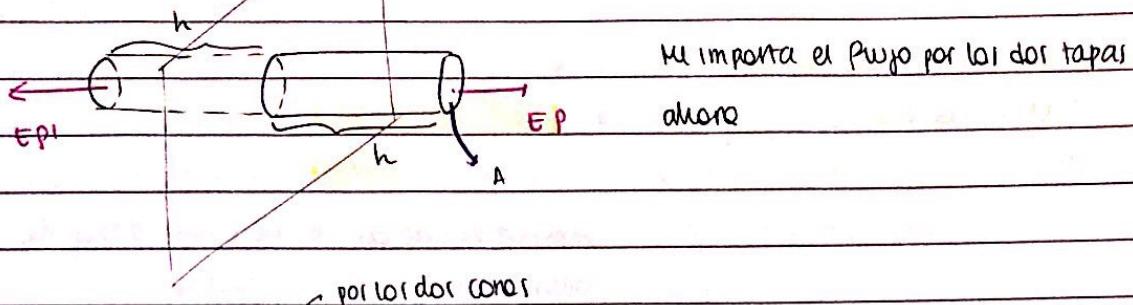
simetría esférica (sup gausiana: esfera concéntrica)

cilíndrica ( : cilindro coaxial)

plana ( : "caja de portillor")

2)

$$\sigma \text{ (C/m}^2\text{)} \rightarrow \text{Anota el tiempo de la densidad superficial}$$



$$\oint E \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad E(h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Hasta lo atenuación que el campo eléctrico no depende de la distancia, pero es porque el plato es  $\infty$ .

3)  $E$  para una esfera uniformemente cargada usando la ley de Gauss  
tomo como superficie Gaussiana una esfera concéntrica

$$\oint E \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(h) \cdot 4\pi h^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{si } h < R \quad E(h) \cdot 4\pi h^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Acá lo cargo encerrado

$$\text{no al todo, por eso } E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 4\pi h^2} \quad h^3 = \frac{h^3 P_V}{3\epsilon_0}$$

$$E(h) = \frac{P_V h}{3\epsilon_0}$$

$$\text{si } h > R \quad E(h) \cdot 4\pi h^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E(h) = \frac{Q}{h^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

un: rotor

27/3/2020

### Dipolo eléctrico

Es una configuración de dos cargos puntuales de carga opuestos ubicados a una cierta distancia  $d$ . El vector momento dipolar  $\vec{p}$  tiene módulo igual al producto  $q \cdot d$ , dirección a lo largo de la recta que une las cargas, y sentido (arbitrariamente elegido) de la carga negativa a positiva.

Un dipolo punitual (o ideal) es aquel en el cual los 2 cargos están infinitesimalmente separadas ( $d \rightarrow 0$ ), pero las cargas individuales son infinitamente grandes ( $q \rightarrow \infty$ ) de manera tal de mantener su producto de ( $p = qd$ )

### Potencial Eléctrico (cantidad escalar)

30/3/2020

Vemos que calcular  $\vec{E}$  en una dist de cargar puede ser bastante engorroso, más que nada porque  $\vec{E}$  es una cant vectorial, lo cual redonda en tener que hacer 3 integrales cuando uno no dispone de un problema con simetría evidente.

El potencial eléctrico  $V$  es el más fácil de calcular, ya que es una cantidad escalar. En forma u tanto llamarlo, el potencial  $V$  contiene igual cant de información que los 3 componentes de  $\vec{E}$ .

El potencial existe porque  $\vec{E}$  es un campo irrotacional  $\rightarrow$  (el campo grad)

con  $V \rightarrow$  conocer  $\vec{E}$

con  $\vec{E} \rightarrow$  conocer parte de  $V$ . Me falta una cte

para una carga puntual

$$\text{no importa que la carga no esté en el origen}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{r}}{|\vec{r}|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$D \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \hat{x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \dots \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \hat{x} \left( -\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{y}{r^4} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \dots \right]$$

$$\left. \frac{3y}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z} \right) + \dots \text{, pero } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

Entonces  $\nabla \times \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \hat{x} \left( -\frac{3xy}{r^3} + \frac{3yz}{r^3} \right) + \dots \right] = 0$

sin importar el  
origen de coordenadas

Si el rotor es cero, la circulación sobre una curva cerrada también es cero (Stokes)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

para cualquier  
configuración de  
carga estática

En general,

$\nabla \times \vec{F} = 1$	$h_1 u_1 \quad h_2 u_2 \quad h_3 u_3$
$h_1 h_2 h_3$	$\frac{\partial}{\partial u_1} \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \quad \frac{\partial}{\partial u_3}$
$h$ constante mónica	$h_1 f_1 \quad h_2 f_2 \quad h_3 f_3$

(solo para sist de coordenadas ortogonales)

Para coordenadas esféricas por ejemplo:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} 1 & \hat{r} & \hat{r}\theta & r^2 \sin\theta \hat{\varphi} \\ r^2 \sin\theta & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ & f_1 & f_2 & r^2 \sin\theta f_3 \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$\nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{r}\theta & r^2 \sin\theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El campo eléctrico cumple el pto de superposición  $E = E_1 + E_2 + \dots$

Nabla (operador) es lineal.

El campo eléctrico de un conjunto de cargas es la superposición (suma discreta o integral) del campo eléctrico de cargas individuales.

Y como el rotacional de una suma es la suma de los rotacionales, tenemos que siempre - en condiciones ESTÁTICAS - el campo eléctrico es rotacional.

Esto implica que  $\exists$  una función potencial ( $V$ ), de la cual se puede derivar dicho campo.

cero de referencia en el  $\infty \Rightarrow$  si el sistema de ref el confinado

no llegue al  $\infty$

(lo puedo rodear con una superficie)

se define entonces  $V \mid \vec{E} = -\vec{B}V$

signo de (-) puramente arbitrario

$$V(\vec{r}) = - \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Siempre y cuando el sistema sea confinado podemos elegir  $V(\infty) = 0$   
(elección por defecto)

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

porque el rotacional de  $\vec{E}$  es cero (tengo otras relaciones)

FEM: Fuerza eléctrica

por más de que no es una fuerza

equipotencial: Se refiere a potencial eléctrico y no a energía potencial

El potencial obedece el principio de superposición

En general, es conveniente integrar desde adentro hacia afuera, involucrando primero al punto de referencia.

$$V(\infty) - V(r) = - \int_r^\infty \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} =$$

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

! Tener presente que al potencial se le pue de sumar una cte arbitraria

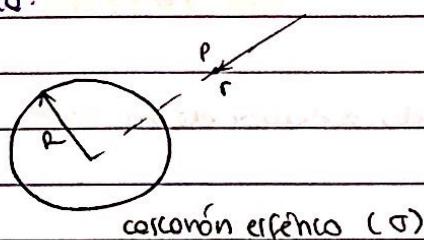
sino hay cargo neto encerrado, por Gauss la integral el cero. No quiere decir que  $E$  sea cero, sino que la integral da cero.

**Conductor:** Tiene carga libre. En condiciones estáticas, el  $E$  dentro de un conductor debe ser cero.

Nunca se puede lograr equilibrio estable solo con cargas eléctricas.

**Problema:**

i.



$$V(\infty) = 0$$

$$Q = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2}$$

cárcamo esférico ( $\sigma$ )

2. Hallar el potencial eléctrico  $V$  de una esfera de radio  $R$  cargada con  $P_V$  uniforme

$$V(\infty) - V(r) = - \int_{\infty}^{r} \vec{E}(r') \cdot dr' \Rightarrow \text{Necesito } \vec{E}(r) \text{ para cada una de las regiones.}$$

los pasos serían los siguientes:

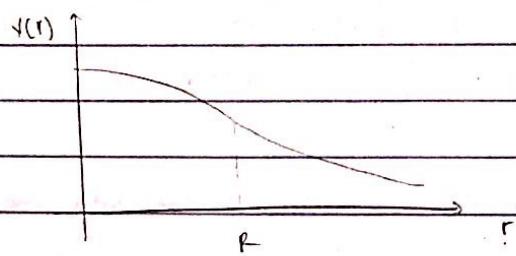
i) Hallar  $E$  aplicando Gauss

ii) Integrar  $E$  desde la superficie hasta infinito (tomando  $V(\infty) = 0$ )

iii) Integrar  $E$  desde un punto  $P$  (distancia al centro  $r < R$ ) hasta la superficie.

$P_V \neq 0$  el cuerpo es aislante. No puede ser conductor

Realizar un croquis de  $V(r)$  vs  $r$  para el aislante



$$E(r) \text{ afuera } \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow V(r) \text{ afuera } \propto \frac{1}{r}$$

$$E(r) \text{ adentro } \propto r \Rightarrow V(r) \text{ adentro } \propto \frac{r^2}{2}$$

$V$ : función continua

$E$ : puede ser discontinuo. En general el continuo salvo en superficies que contengan  $\sigma$

Afuera tiempo:

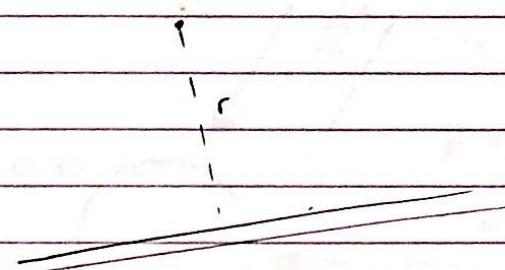
$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad Q = \rho V \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \quad r > R$$

• Dentro ( $r$ ) =  $\frac{\rho V \cdot r}{3\epsilon_0} \Rightarrow V(R) - V(r) = - \int_r^R \frac{\rho r \cdot r}{3\epsilon_0} dr$

3. Hallar el potencial lejos de una linea de cargo

Tú no puedes definir ( $V(\infty) = 0$ )

pues la linea "toca" el  $\infty$



$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + cte$$

Tengo que elegir una constante arbitraria a lo que le asigno un valor cero.

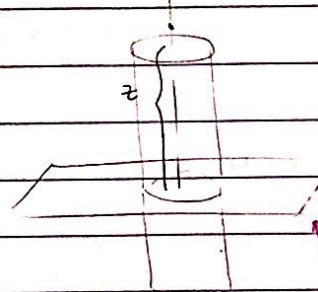
$$V(r_0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0) + cte = 0 \Rightarrow cte = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } V(r) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0) \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{aligned}$$

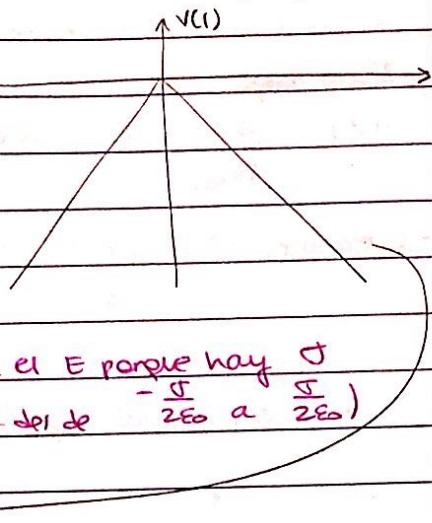
Quiero estar bien; necesito que en el logaritmo haya una cantidad sin unidades,

4. Potencial de un plano de uniformemente cargado. (suponer plano xy y graficar  $V(z)$ )

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



$$V(r) = \frac{\sigma r}{2\epsilon_0} + \text{cte}$$



en el plano hay un salto en el E porque hay  $\sigma$   
(el salto es  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  porque voy de  $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  a  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ )

El potencial

entonces para "arrancar" a los cargos polínicos tengo  
que ir "contra amba"

Definiciones principales de la electrotáctica

$$\nabla \cdot E = \frac{P_v}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\text{como } V / \nabla V = - E$$

sustituyendo en la ecuación anterior tengo:

lo planteo

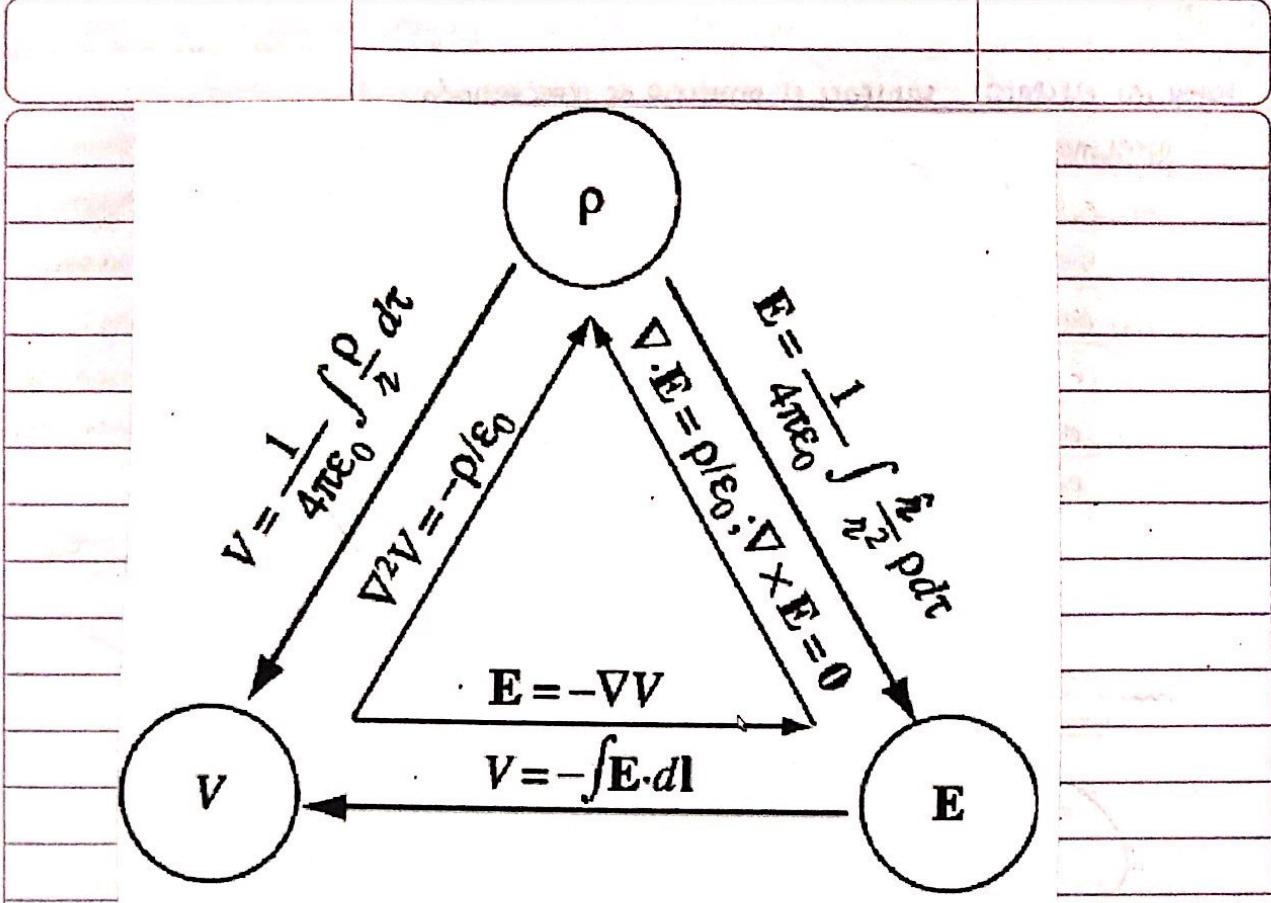
$$\nabla \cdot \nabla V = - \frac{P_v}{\epsilon_0}$$

ecuación diferencial de  
segundo orden

ecuación de poisson

$$\nabla^2 V = - \frac{P_v}{\epsilon_0}$$

como hallar el potencial en función de la  
distribución de cargas



21/4/2020.

### Electrotáctica

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{D} \cdot \vec{A} = 0$$

$$V / \nabla V = -E \rightarrow D \cdot \nabla V = -\frac{\rho_V}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

ecuación de poisson

Laplace para regiones donde no hay cargas

$$\nabla^2 V = 0$$

para pto compo (donde evaluo el potencial) →  $\vec{r}'$  para pto fuente

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

y satisface superposición

Potencial eléctrico satisface el principio de superposición

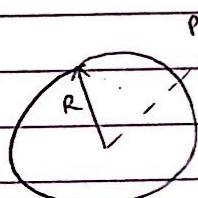
Por el momento tenemos que manejarlo:

- cuando hay una gran simetría, aplicamos Gauss, hallamos  $E$  y luego integramos. No es muy interesante esta vía porque en la mayor parte de los casos nuestro interés es el  $E$ .

- si conocemos la densidad de carga, podemos integrar la contribución de elementos diferenciales para tener el valor total. Es más general pero falla cuando uno tiene cuerpos conductorres

podrá depender de la posición

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_v dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



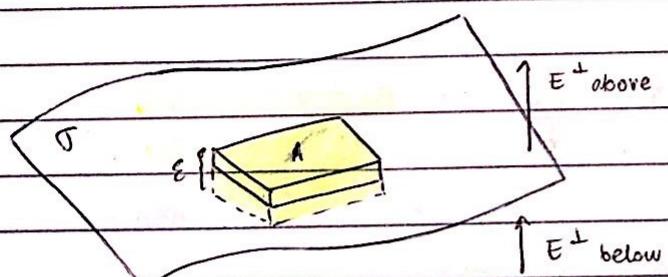
$$V(\infty) - V(r) = - \int_r^{\infty} \vec{E}_{\text{ext}}(r) \cdot dr$$

para afuera

$$V(r) - V(\infty) = - \int_r^{\infty} \vec{E}_{\text{int}}(r) \cdot dr$$

para adentro

condiciones de borde:



Aplico Gauss a lo "caja de pañuelos"

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_a^\perp \cdot A + \underbrace{\epsilon_b \sigma A}_{\text{el salto tenderá a cero}} - E_b^\perp \cdot A = \frac{q}{\epsilon_0} = \sigma A$$

( $\epsilon \rightarrow 0$ )

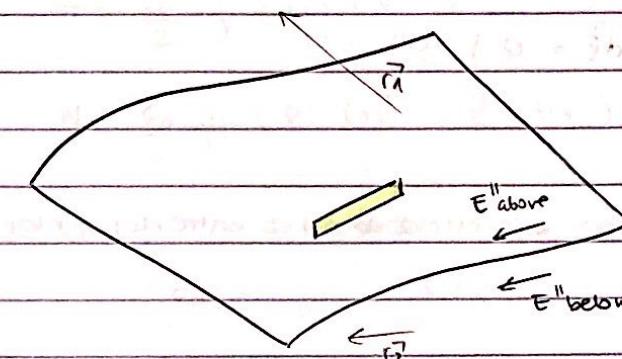
$$(E_a^\perp - E_b^\perp) \frac{A}{\epsilon_0} = \sigma A \Rightarrow E_a^\perp - E_b^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

los componentes normales de campo se conservan solo cuando hay un  $\sigma$  (y el salto sera proporcional a  $\sigma$ )

## Rotacional - circulación

Divergencia - salida (Peso por unidad de Volumen)

- posibles discontinuidades de los comp. normales del campo se deducen por la divergencia del campo. si la divergencia es nula, entonces los componentes normales son continuos
- Idear para comp tangencial pero con rotacional en vez de divergencia.



en electrodinámico

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$E''_{\text{above}} = E''_{\text{below}}$$

puedo pillar que tenga  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Importa que lo comp tangencial sea igual. si lo compuesto normal no es igual  $\Rightarrow$  Tengo un  $\mathcal{J}$ .

problema

Hallar el  $\vec{E}$  de un cilindro  $\infty$  largo

$$P_V = \frac{dQ}{dA}$$

• Si  $r < R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_{\text{enc}} \Rightarrow E(r) \cdot \frac{\pi dA}{\epsilon_0} = \frac{P_V \pi r^2 L}{2\pi r L}$$

$$E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{P_V \pi r^2 L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{P_V r}{2\epsilon_0}$$

• Si  $r > R$

$$E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{P_V \pi R^2 L}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{P_V R^2}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Tiene sentido que no haya salto en el  $\vec{E}$  porque no hay  $\mathcal{J}$  en la superficie.

## TRABAJO Y ENERGÍA

Energía electrostática de un sistema se define como el trabajo que tuvo que hacer un agente externo para "armar" dicho sistema convirtiéndolo a partir de todos sus cargas inicialmente a distancia  $\infty$  entre ellos.

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 \rightarrow \mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_{\text{eléctrica}}$$

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q [V(b) - V(a)]$$

$$W = q [V(b) - V(a)]$$

La diferencia de potencial es como una diferencia de altura entre dos puntos  
Q es como el análogo de la masa

De haber N cargas puntuales el trabajo total lleva la sumatoria de todas las parejas

$$B_{\text{tot}}(n,2) = \frac{n! \cdot 2!}{(n-2)!}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left( \sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(r_i)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(r_i)$$

para una distribución continua de cargas

$$W = \frac{1}{2} \int P V dV$$

diferencial volumen

lo integro donde haya cargo

$$P = \epsilon_0 D \cdot E$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (D \cdot E) V dV$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\underbrace{D \cdot (V \vec{E}) - \vec{E} \cdot DV}_{\text{para el r}}) dV$$

aplico teo de Gauss (divergencia)

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ - \iiint \vec{E} \cdot (DV) dV + \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \iiint_V E^2 dV + \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \right)$$

si integro en todo el espacio CERO

valor fijo

$$\text{Además } \iint r \vec{E}(r) \cdot \vec{n} dS \leq \iint r |\vec{E}| dS \leq \overbrace{\iint}^{V(r)} r \max |\vec{E}_{\max}(r)| dS$$

$$= V(r)_{\max} |\vec{E}_{\max}(r)| \cdot 4\pi r^2 \approx \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$$

carga contenida

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V E^2 dV$$

## Problema

Encuentra la energía de un corona esférica de carga total  $q$  y radio  $R$

Hoga de Nta: Hallar  $\vec{E}$  en todo el espacio e integrar

dada la simetría (alta) del sistema podemos hallar  $E$  mediante la

ley de Gauss

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (\text{densidad de energía})$$

03/04/2020

## CAPACITANCIA Y CAPACITORES

Capacitores: Por ahora suponemos que tienen únicamente dos cuerpos conductores, los cuales conforman un capacitor tradicional cuando  $\sigma_{neto} = 0$  sobre ellos.

$$\text{Capacitancia} = \frac{Q}{\Delta V}$$

entre una placa y otra

Tres geometrías comunes

1. placas planas paralelas
2. placas cilíndricos coaxiales
3. placas elípticas concéntricas

$$1. C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$2. C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(\frac{b}{a})}$$

$$3. C = \frac{ab}{b-a} 4\pi\epsilon_0$$

13/4/2020

## Conductores

Los cuerpos conductores tienen cargas libres que se moverán -acelerándose- en presencia de un  $\vec{E}$

$E = 0$  adentro de un conductor

En condiciones electrostáticas (no hay movimiento de cargas), el  $\vec{E}$  es cero dentro del conductor.

Por otro lado,  $\vec{E} = -\nabla V$ . Esto implica que  $\vec{E}$  es siempre  $\perp$  a las superficies equipotenciales

↳ El potencial no puede variar dentro del conductor.

Si no, tendría un gradiente de potencial y por lo tanto un  $\vec{E}$ .

$P = 0$  adentro de un conductor

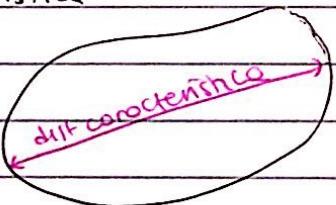
En el interior de un conductor -en condiciones electrostáticas- tiene un balance total de carga (no tiene carga neta)

Cualquier exceso de carga debe estar en la superficie (exterior o interior) -se deduce de la ley de Gauss.

Un conductor es un equipo potencial ( $E_{in} = 0$ )

No solo una superficie equipotencial, sino que también un volumen equipotencial.

Si yo quisiera saber la carga neta a partir de un experimento (carga neta de un conductor) me tengo que alejar 10 o más veces que la distancia característica



No me puedo alejar mucho más por la apreciación de los instrumentos

los conductores blindan el  $\vec{E}$ .

## Métodos de resolución de la ec de Laplace

- a) Análíticos (imágenes, separación de variables) - más exactos
- b) Numéricos (relajación, momentos, elementos finitos) - más populares, más costosos
- c) Gráficos (en desarrollo)

Cuando el radio de curvatura es grande, el  $\vec{E}$  se hace más débil  
No ayuda a entender el efecto pararrayos

Para hallar  $\vec{E}$  a partir de la distribución de carga solo tenemos que sumar (o integrar) la contribución de cada una.

El problema aparece cuando  $\exists$  cuerpos conductores. En ellos no conocemos la distribución de carga

primero determinamos  $V$  y luego  $\vec{E}$  y si queremos  $\vec{J}$

## Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Para determinar la solución a la ec de Laplace necesitamos saber cuánto vale el potencial (o su derivada normal) en la frontera del dominio

$V$  conocido en la frontera  $\rightarrow$  problema de Dirichlet

Derivada de  $V$  conocida en la frontera  $\rightarrow$  Neumann

## Teorema de unicidad (muy importante)

si dos funciones  $V_1$  y  $V_2$  satisfacen la ecuación de Laplace en una cierta región del espacio, y también las mismas condiciones de frontera, entonces

- o son la misma función
- o difieren de una constante  $\rightarrow$  tienen el mismo  $\vec{E}$

## Método de imágenes (para resolución de ecuación de Laplace)

Hace uso extensivo del teorema de unicidad. Se basa en que - en algunas situaciones simples - se puede dar satisfacer las condiciones de frontera impuestas por el problema mediante la localización apropiada de otros cargas (llamadas imágenes)

La ecuación de Laplace es una función lineal.

$$\nabla^2(f_1 + f_2) = \nabla^2 f_1 + \nabla^2 f_2$$

Para una carga puntual tengo:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

potencial de una carga puntual.  
potencial real tiene que satisfacer la ecuación de Laplace, por lo tanto debe ser cero.

Lo puedo demostrar por la vía cartesiana

o deduciéndolo

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

como no da cero  $\left( \frac{1}{r} \right)$  es una función armónica

• función armónica

↳ satisface ecuación de Laplace.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + x \cdot \frac{3}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \cdot 2x \\ &= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + x^2 \cdot \frac{3}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= -\frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

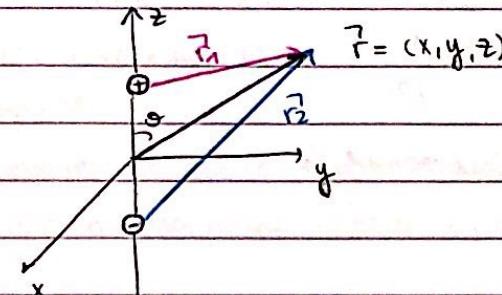
entonces

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \cdot 3 + \frac{3}{r^5} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = -\frac{3}{r^2} + \frac{3}{r^3} = 0 \quad \#$$

## Dipolo eléctrico y desarrollo multipolar

cuando lejos de cargas positivas hay como un "viento" que las separa  
(la líneas de campo)

Dipolo eléctrico implica  $q_{\text{neto}} = 0$



$$\vec{E}(r) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 \hat{r}_1}{r_1^3} - \frac{q_2 \hat{r}_2}{r_2^3} \right)$$

No es fácil tomar el límite (aunque puede hacerse)

$$q \rightarrow \infty, d \rightarrow 0$$

con  $qd = p(\text{cte})$  momento dipolar (en C.m)

Es preferible nollar  $V$  en ese límite y luego derivar (porque es un escalar y luego tendría que tomar el gradiente)

$$V(r) = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Trato de hacer cambios  
para que me quede algo de la  
forma  $(1+x)^{-a}$  con  $x \ll 1$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (\frac{d}{2})^2 - 2(\frac{d}{2})r \cos\theta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (\frac{d}{2})^2 + 2(\frac{d}{2})r \cos\theta}$$

$$\frac{1}{r_1} = \left( r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{2}\right)r \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d}{r} \cos\theta + \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

puedo despreciarlo (algo  
muy chico al cuadrado)

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{2r} \right)$$

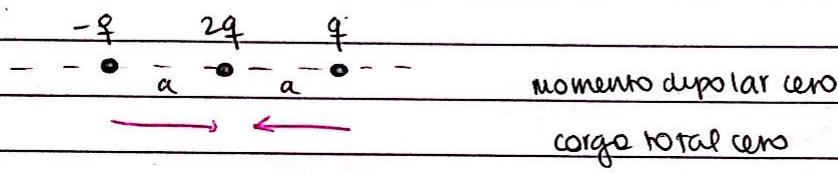
$$V(r) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1 + d \cos \theta}{2r} - \left( \frac{1 - d \cos \theta}{2r} \right) \right)$$

$$= \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

El potencial de un dipolo puntual "cae" como  $\frac{1}{r^2}$

Entonces, el E de un dipolo puntual "cae" como  $\frac{1}{r^3}$



pero la distribución de carga no es cero

Quadripolo - su potencial cae como  $\frac{1}{r^3}$  a grandes distancias

Para un dipolo ideal

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \cdot \vec{V}$$

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

$$= \left( \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \quad \left( \frac{1}{r^2} \right)' = (r^{-2})' = -2r^{-3}$$

$$= \left( -\frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \frac{1}{r} \cdot \frac{-p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, 0 \right)$$

$$\vec{E} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r} + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\theta}$$

Plano (adentro  $E=0$ )

Ecación de Laplace

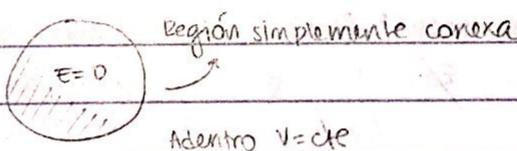
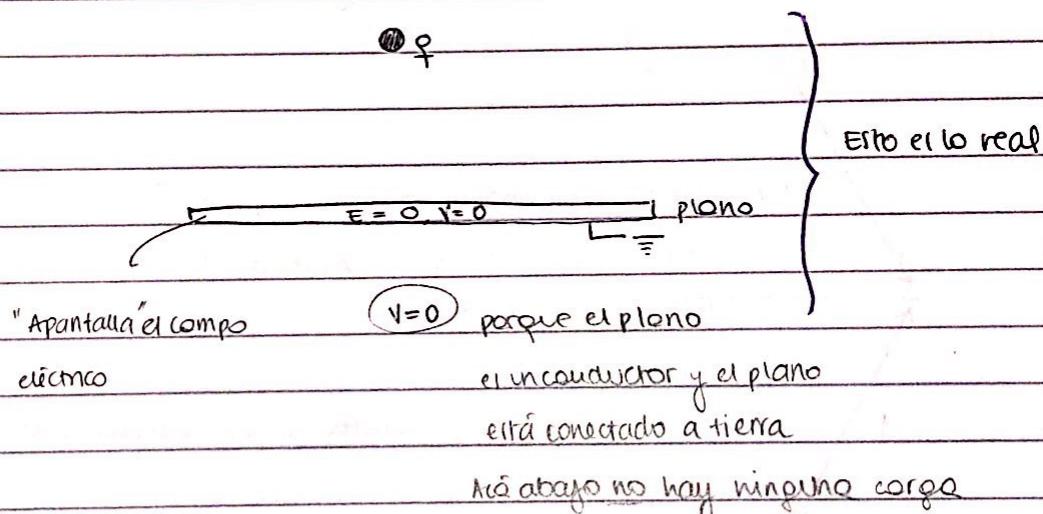
$$\nabla^2 V = 0$$

Lo difícil es que la solución satisfaga las condiciones de borde.

Método de los imágenes

La carga real q no puede distinguir entre la situación real (está a una distancia a de un plano infinito conductor puesto a tierra) y la "virtual" donde no hay plano, pero hay otra carga imagen de valor -q a una distancia 2a de la original.

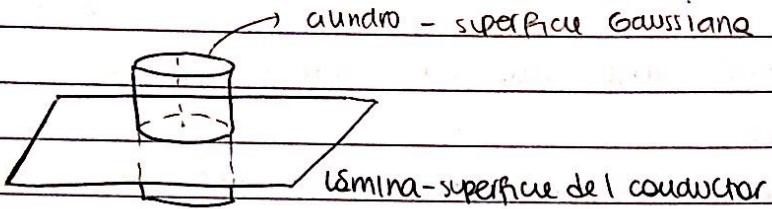
Esto implica que la  $\vec{r}$  entre el plano y la carga debe ser simplemente la que habría entre dos cargas puntuales a distancia 2a (carración)



sobre la superficie de un conductor  $J = \epsilon_0 E^\perp$

La carga puede tener q distinguir el color del plono y de la nueva q corge si lo real se muere (pensarlo como nosotros mirandonos al espejo)

Cargas nulas de los cuerpos cargados - hay cargas inducidas

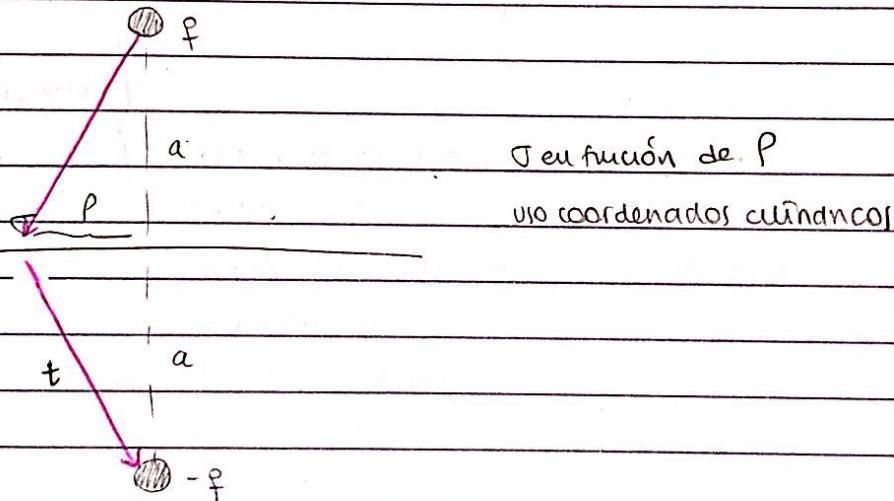


$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{neto}}$$

$$E_{\text{out}} \cdot dA = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot J dA \Rightarrow E_{\text{out}} = \frac{J}{\epsilon_0} \Rightarrow J = \epsilon_0 E_{\text{out}}$$

Si entra al conductor el  $E$

Te negarás



el signo lo removí al final

$$\sigma(P) = \epsilon_0 E^+ = \frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{t^2} \frac{1 - 2 \frac{q}{\epsilon_0 t}}{\frac{q}{t}}$$

$$= \frac{q}{2\pi} \frac{1}{t^2} \frac{a}{t} = \frac{qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\sigma(P) = - \frac{qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\iint_{\text{plano}} J dA = -q$$

Tiene sentido porque el plano es infinito

17/4/2020

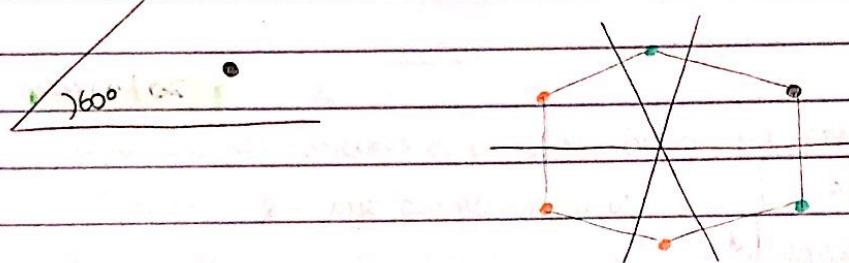
para desarrollo multipolar tengo que anular los momentos y tensiones de antes.

Hay cierto patrón (ver monopolo, duplo, cuadrupolo, octupolo ...)

para el uso el desarrollo de Taylor.

### Ejercicio 6 - Práctico 2

para aplicar método de las imágenes



lo normal es que queremos poner elas

pero si miro el plano horizontal tengo dos cargas  
una arriba y una abajo

Tengo que agregar

Todo depende de a cuantos grados esté el plano.

Para hallar los coordenadas de los cargas imágenes podremos ser conveniente utilizar números complejos. Recordar que la multiplicación de  $z$  por  $e^{i\theta}$  gira a  $z$  en el plano complejo por un ángulo  $\theta$ .

### Teorema de Earnshaw

No es posible conseguir un sistema de cargas eléctricas que se encuentre en equilibrio estable bajo la acción únicamente de  $F$  eléctricos entre ellos.

• Equilibrio estable:  $F_{net} = 0$  para lo particular (equilibrio) y si se desplaza ligeramente de su posición inicial debe haber una fuerza que tiende a restituir dicha posición (fuerza reactiva)

Tiene que haber otras fuentes, porque si no fuera así seríamos inestables y esto no sucede.

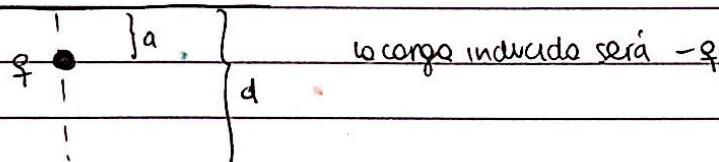
\* Equilibrio indiferente: si mover la carga igual no tengo fuentes sobre ese entorno no te va a mover cuando la desplace.

En la práctica, en 3D no puedo generar equilibrio estable.

La materia debe tener también otras fuentes (además de la eléctrica) entre sus cargas.

Poner algo a tierra no quiere decir descargarlo ni igualar el potencial en el infinito.

20/4/2020



Esto es lo que buscamos resolver

\* Problemas con valores en la frontera (BVP) en presencia de conductores: en las regiones libres de carga se cumple la ecuación de Laplace.

Solución

- analítica (imágenes, separación de variables)
- numéricos
- gráficas

### Método de imágenes

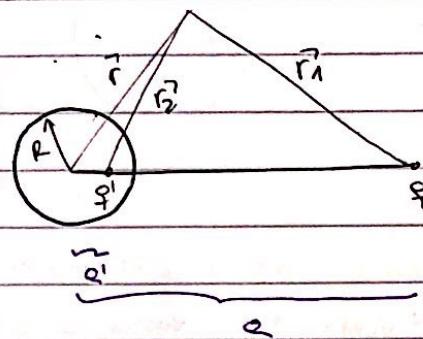
{ Planos       $\rightarrow$  la forma del conductor  
círculos  
Esferas

- Planos: simetrizar recordando cambiar el signo de la carga
- Esferas: "simetrizar" recordando las relaciones  $a \cdot a' = R^2$  y  $\rho_{in} = -\frac{R \rho_{out}}{a}$

la carga interior siempre tiene el signo opuesto a la exterior y su módulo siempre es menor -  $|q_{int}| < |q_{ext}|$

la posición de las cargas es tal que obedece la "inversión en el plano".

$$p(r_1, \theta_1, \phi)$$



$$qa' = p^2$$

El problema del principio es lo q' de afuera. Me tomo lo q' por el método de imágenes.

Podría tener q' como problema original y mi carga imagen sería q.

→ ya conozco la esfera con  $V=0$

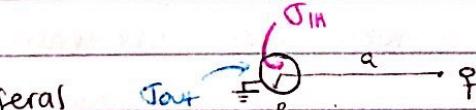
Ecuaciones

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{q}{r_1} = -\frac{q'}{r_2} \Rightarrow r_1 = cte$$

Esfere

Tenemos que elegir dónde colocar q' para que el potencial en la esfera sea cero.

Tres problemas con esferas



$$\rightarrow \text{① } \sigma = \epsilon_0 E \cdot \hat{n}$$

normal saliente

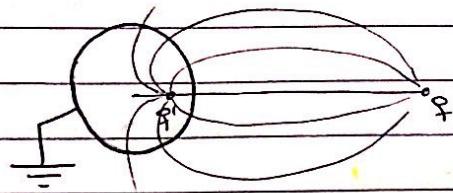
•  $\sigma_{in} = 0$  porque adentro no hay cargas reales ( $q'$  es magnética) entonces

$$V=0 \text{ y } E=0$$

•  $E$  coincide con  $\hat{n}$  porque salen del conductor

para hallar  $J_{out}$  necesito  $\vec{E}$  por cada una de las cargas

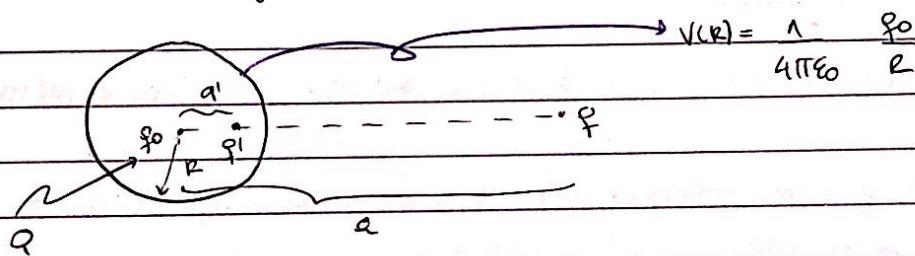
①



$\oint \text{Ext. } dA = q'$  por Gausis  $\rightarrow$  si encuentro el punto en todo la superficie exterior

Hay dos variantes de este problema

② corona con carga Q



A qué distancia hay que poner  $q$  para que  $F_N=0$ ?

Para resolverlo, primero sustituyo el corona por una carga imagen para que me quede un equipotencial, pero si tengo  $Q$ ,  $q$  y  $q'$  no tengo carga neta sea  $Q+q'$

Necesito ver dónde colocar otra carga imagen para que lo esté sea un equipotencial y que el problema sea equivalente (con una misma carga  $Q$ )

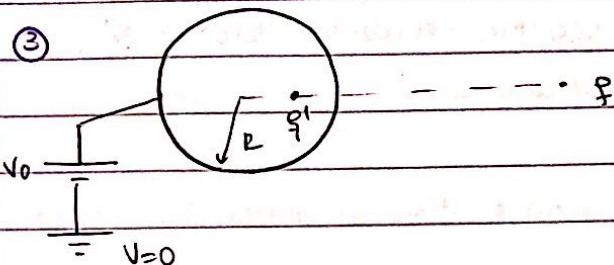
Coloco  $q_0$  en el centro de la esfera

No rompe la condición de equipotencial porque todos sus equipotenciales son esferas. Además el equipotencial de  $q$  y  $q'$  también toma forma de esfera. Su suma también lo hará.

$$Q = q_0 + q'$$

$$q_0 = Q + \frac{R}{a} q$$

entre  $q$  y  $q'$  hay atracción } Esto si  $q$  y  $q'$  tienen igual signo  
entre  $q$  y  $q_0$  hay repulsión }



No está conectada a tierra. Le pongo un potencial fijo conectado a tierra.  
coloque la carga virtual  $q$

También tendré dos cargas imágenes  $q'$  lo coloco en el mismo lugar de siempre

El potencial en la superficie ( $V(1)$ ) es dado solamente por  $q_0$  (porque  $q$  y  $q'$  me hacen potencial cero en la esfera)

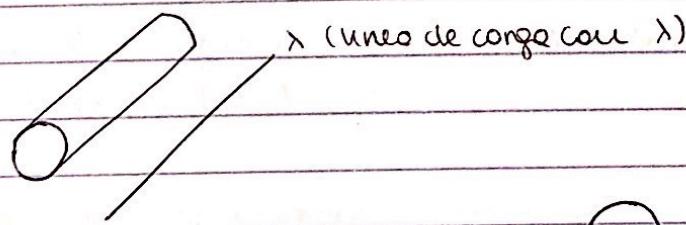
Ahora, en vez de imponer que la suma de los cargos sea  $q$ , necesito imponer ( $V(1) = V_0$ )

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{R} \quad q_0 = R V_0 \cdot 4\pi\epsilon_0$$

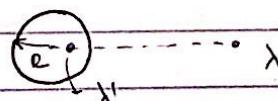
- cilindros: Igual que con esferas, pero lo que lleva  $\lambda' = -\lambda$

El cilindro el líneos de carga

aún no conductor de radio  $r$



comiendo con un plano tengo



$\lambda'$  no es más chico que  $\lambda$

$\lambda'$  el mi líneos de carga imágenes

$$\lambda' = -\lambda$$

recordar que  $P$  es distancia a un eje

$$V(P) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln P \quad \vec{E}_\lambda(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{P} \hat{P}$$

longitud  $2\pi r_0$

$P_0$

para el potencial integral elto.

El cilindro es  $\infty$

No puedo asumir que el potencial en el  $\infty$  es cero. Tengo que elegir otro lugar en el espacio donde el potencial sea cero. (el cilindro "toca" el  $\infty$ )

Sea  $P_0$  una distancia arbitraria

$$Qa' = R^2 \quad \lambda' = -\lambda$$

### Método de separación de variables

De nuevo, nuestro objetivo es resolver la ecuación de Laplace

El método de imágenes es útil pero limitado (a planos, cilindros, esferas)

$$\nabla^2 V = 0 \quad (\text{Laplace})$$

La solución de Laplace es una ecuación lineal

Teo: Si  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  son soluciones de Laplace entonces:

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n$$

donde  $C$  son constantes arbitrarias, también es una solución

Teo: Teorema de unicidad

Si soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen las condiciones

de la frontera, entonces son la misma función o difieren de una

constante aditiva

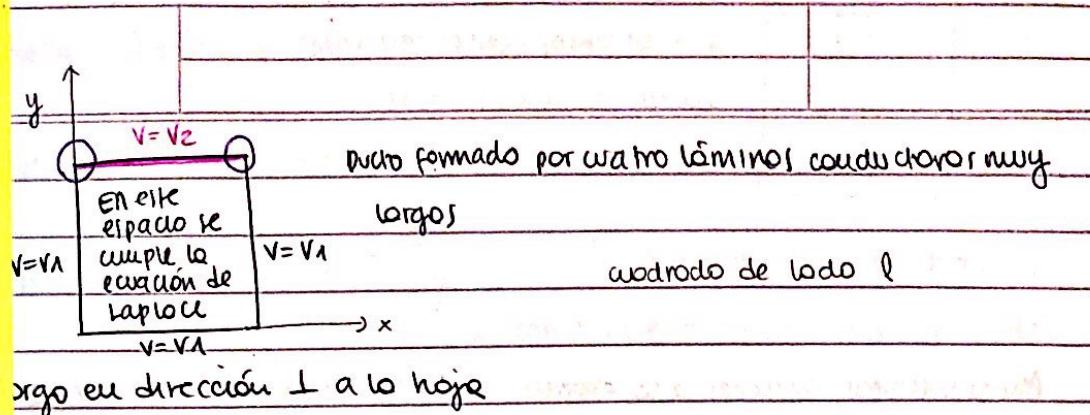
En ambos casos  $\vec{E}$  será el mismo.

## Ducto infinito (suposición)

comportamiento independiente de la variable  $z$  ( $\uparrow$  a la página)

Decimos que estamos "lejos" de los bordes

el problema será de dos variables -más fácil.



! El potencial adentro no puede superar los valores del potencial en la frontera.

Necesitamos encontrar una solución a la ecuación de Laplace que satisface las 4 condiciones de frontera

- i)  $V(x, y=0) = V_1$  (abajo) si  $V_2$  hubiera sido  $V_1$  entonces la solución sería  $V_1$  en todo el espacio (solución a la ecuación de Laplace)
- ii)  $V(x=0, y) = V_1$  (izquierda)
- iii)  $V(x=L, y) = V_1$  (derecha)
- iv)  $V(x, y=L) = V_2$  (arriba)

Lo primero que debemos hacer es normalizar el potencial

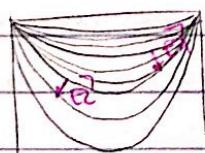
$$V(x, y) = \frac{V(x, y) - V_1}{V_2 - V_1} \quad (\text{adimensionarlo}) \Rightarrow \text{sigue satisfaciendo la ecuación de Laplace.}$$

Esta ecuación sigue satisfaciendo la ecuación de Laplace

esto deja mis condiciones de frontera más convenientes

- i)  $\varphi(x, y=0) = 0$  normalizamos tratando de definir la mayor parte de la frontera con valor cero.
- ii)  $\varphi(x=0, y) = 0$
- iii)  $\varphi(x=L, y) = 0$
- iv)  $\varphi(x, y=L) = 1$

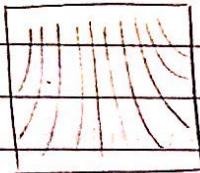
Esbozar los líneas equipotenciales en la región dentro del ducto.



Líneas equipotenciales

$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$  (atravesando más equipotenciales)

Puedo pensarla como que lo topo de ambos es una equipotencial y que los 3 líneas son también son un equipotencial



Los límites equipotenciales y también tienen que entrar a los paredes

unión de campo eléctrico  $\vec{E}$ .

Ahora buscamos soluciones a la ecuación de Laplace que sean factonables.

Debo satisfacer la mayor cantidad de condiciones de borde y buscar soluciones que pertenezcan al conjunto de soluciones factonables.

No decimos que la solución vaya a ser factonable.

Si yo sumo dos soluciones factonables no me da factonable

$$\varphi(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \text{PDE (ec en el interior paralela)}$$

↳ Esto es lo que buscamos  $X$  depende solo de  $x$

$Y$  depende solo de  $y$

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0 \quad (\text{Laplace})$$

Dindiendo todo entre  $X(x) \cdot Y(y)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \rightarrow f(x) = g(y) + x, \forall y$$

la única forma que dos funciones de variables distintas sean iguales para todo valor de sus variables es que cada una de ellas sea igual a una cte.

Todo esto depende de que  $\varphi(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$  sea una solución

Es heurística - todavía no sé si funciona pero intento aplicarlo porque sé que funciona.

A esta constante le llamamos  $m^2$

$$X''(x) = -m^2 X(x) \quad Y''(y) = m^2 Y(y)$$

conviene para que más adelante no me quede uno.

Reduzco una PDE (ec de Laplace) a dos ODE - problema mucho más sencillo.

Me limito a encontrar las soluciones factonables

$$x(x) = A \sin(mx) + B \cos(mx)$$

$$y(y) = C \sinh(my) + D \cosh(my)$$

$$\text{recordar } \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

$$\cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

me conviene ello poner condiciones de frontera

Al tomar los derivados no hay cambio de signo cuando uno los funciones hiperbólicas

$\{\cosh$  es una función par  
 $\{\senh$  es una función impar

$$\varphi(x,y) = (A \sin(mx) + B \cos(mx)) (C \sinh(my) + D \cosh(my))$$

Ahora hay que satisfacer las condiciones de borde

$$\circ \varphi(0,y) = 0 \quad \forall y, \text{ por hipótesis tenemos que } B=0$$

$$\circ \varphi(x,0) = 0, \forall x, \quad D=0$$

$$\circ \varphi(L,y) = 0, \forall y, \quad mL = n\pi \quad \text{con } n \text{ natural}$$

para que  $\sin(mL) = 0$  (por ello necesito que el argumento sea un múltiplo de  $\pi$ )

$$\text{por ahora tenemos } \varphi(x,y) = F \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \text{ dependiendo de } n \text{ (natural)}$$

pero la ecuación de Laplace es lineal, puedo sumar todos ellos con un factor de ponderación genérico, de manera tal que el resultado - no factornizable - sea el de todos los condiciones de borde

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$F_n$  coeficientes a determinar

son nuestros incógnitos

les llamamos coeficientes de mezcla

Tengo  $\infty$  incógnitas para satisfacer  $\underbrace{\varphi(x, L) = 1}_{\text{también son } \infty \text{ restricciones}} \quad \forall x$   
 porque se tiene que cumplir  $\forall x$

Me conviene sacar los coeficientes (para lo sencillo factorable que  
 después voy a poner en la  $\Sigma$ ) usando las ecuaciones homogéneas - igualadas  
 a cero - porque cuando sume todos los resultados igual va a cumplir las  
 ecuaciones homogéneas.

Lo más difícil es solucionar / resolver la ecuación no homogénea.

23/14/2020

$$\text{Yo quiero que } \Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$$\text{cumple que } \varphi(x, L) = 1 \quad \forall x$$

$$\varphi(x, L) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{senh}(n\pi) = 1 \quad ; \quad \forall x$$

$$\text{Le llamo } g_n = f_n \operatorname{senh}(n\pi) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 1 \quad ; \quad \forall x$$

porque dependen

sólo de  $n$

series de Fourier

( $\operatorname{senh}$  se anula solo para  $n=0$ )

Tenemos  $\infty$  incógnitas (todos los  $g_n$ ) y aparentemente una sola ecuación  
 (pero tenemos  $\infty$   $x$  para los cuales tiene que cumplirse esta igualdad)

Tenemos en una situación similar:

$$\vec{r} = c_1 \hat{x} + c_2 \hat{y} + c_3 \hat{z} \quad (\vec{r} = c_1 \hat{x} + c_2 \hat{y} + c_3 \hat{z}), \hat{x} \Rightarrow c_1 = \vec{r} \cdot \hat{x}$$

$$c_2 = \vec{r} \cdot \hat{y}$$

$$c_3 = \vec{r} \cdot \hat{z}$$

{ las funciones pueden concebirse como vectores de  $\infty$  componentes (sus  
 valores en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) }

Las funciones  $\sin(nx)$  y  $\cos(mx)$  forman un conjunto ortogonal en el intervalo  $[0, 2\pi]$

En particular Tenemos  $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = \pi \delta_{m,n}$

Delta de Kronecker

Si  $m, n$  son iguales  $\delta = 1$

Probando con  $n$  colos -evidentemente

Si  $m, n$  son diferentes  $\delta = 0$

"conclusión": el conjunto formado por las funciones  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}$  es ortogonal.

La notación habitual para esto es  $\langle f_n | f_m \rangle = \delta_{mn}$

Volvendo al problema original  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 1$

Ara que sea cierta  $\forall x$  multiplicaremos ambos miembros por  $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

Integrando entre 0 y L

$$\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

convergencia uniforme

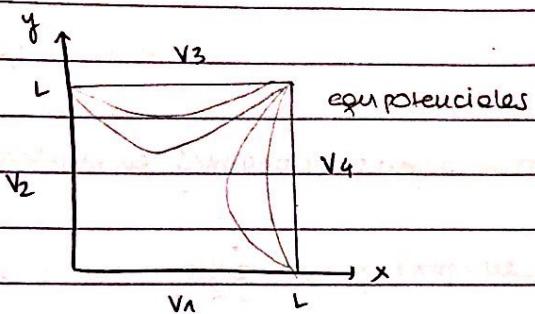
$$= \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Integrandos  $g_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \Rightarrow f_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \operatorname{senh}(n\pi)$

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$$v(x, y) = (v_2 - v_1) \varphi(x, y) + v_1$$

El potencial es discontinuo (por eso el "gap" entre  $v_1$  y  $v_2$ )



$$V(x,y) = V_3 \varphi(x,y) + V_4 \varphi(y,x) + V_1 \varphi(x,L-y) + V_2 \varphi(y,L-x)$$

ramos intercambiando argumentos y posiciones para usar la de duración que hicimos antes y satisfacer ec de Laplace  
[ ecs de borde ]

Solución de la ecuación de Laplace en coordenados esféricos

Para cuando la frontera no es rectangular.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

consideraremos problemas con simetría azimutal ( $V$  sólo depende de  $r$  y  $\theta$ )  
Hay un eje de simetría

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

Aplicando el método de separación de variable

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

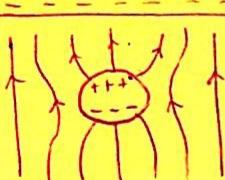
polinomio de Legendre

solución genral para todos los problemas con simetría azimutal (en coordenados esféricos) que satisface la ec. de Laplace.

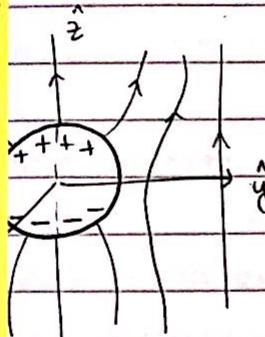
Tomo eje  $\hat{z}$  como eje de simetría para aplicar las ecuaciones que tengo

sobre los polinomios de Legendre

Aquí me puedo imaginar que tengo dos polos (una positiva y otra negativa) que me generan el campo eléctrico uniforme



+ + + + + + + +



$$\vec{E}_{\text{externo}} = \epsilon_0 \hat{z} \quad (\text{estaba en un campo eléctrico uniforme})$$

$$V(\vec{r}) = -\epsilon_0 z$$

=  $-\epsilon_0 r \cos \theta$  (potencial premio a la inserción de la esfera - en coordenadas esféricas)

La esfera el potencial es una constante. ( $E_{\text{int}} = 0$ )

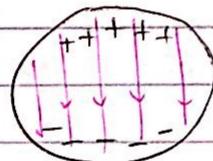
Nuestro punto nulo del  $\vec{E}$  (el original y uno por la aportación de cargas individuales sobre la superficie de la esfera)

↳ Esto es por cómo se acomodan los cargas eléctricas en la superficie de la esfera

El campo eléctrico creado por la esfera depende de  $\epsilon_0$  (los polos serán más o menos intensos según el  $\epsilon_0$  en el que está la esfera)

Adentro la superficie está blindada por el conductor (si resuelvo la ecuación de Laplace - me transface la ecuación (de Laplace) con un  $V$  cte adentro de la esfera - unicidad -  $V \text{ cte} \Rightarrow E = 0$ )

Si lo planteo físicamente, adentro de la esfera al formarse los dos polos es como si tuviera un campo eléctrico uniforme con  $\epsilon_0$  de valor



El campo ahí adentro se anula con el  $E$  externo que tenía

$$V(x, y, z) = \left( A_0 r^0 + \frac{B_0}{r} \right) P_0 \cos \theta + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) P_1 \cos \theta$$
$$= A_0 + \frac{B_0}{r} + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta$$

Nota el segundo polinomio de Legendre (consejo)

me fijo si alcance para las condiciones de borde

Así arbitrario (elegimos valor cero) y de lo esencialmente la carga total de la esfera (cero)

Entonces:

$$V(x_1, y_1, z) = \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta + \text{cte} \quad V_{\text{in}}(x_1, y_1, z) = \text{cte}$$

(4)

cuando tengamos una esfera dielectrica vamos a tener que resolver la ecuación de laplace afuera y adentro de la esfera)

anexo que el potencial sea continuo

! si en lugar de una esfera hubieramos puesto un cubo conductor en el centro, tendríamos que mantener más términos en el desarrollo.

$$\text{para que el } \cos \theta \text{ no me afecte} \quad A_1 r + \frac{B_1}{r^2} = 0$$

condiciones de borde:

i)  $V(r=R, \theta) = \text{cte}$   $\forall \theta$  (en la superficie del conductor)

ii)  $V(r \rightarrow \infty, \theta) \approx V_0 = -E_0 r \cos \theta$

para no tener la influencia de la esfera (vuelvo a las condiciones iniciales)

de (i)  $B_1 = -A_1 R^3$

si el radio fijo de la esfera

de (ii)  $A_1 = -E_0$

Por unicidad (al cumplir Laplace y las condiciones de borde) ésta es la única solución.

la solución entonces es:  $V(r, \theta) = \left( -E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2} \right) \cos \theta = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta$   
 $= -E_0 z + V_{\text{frente}}$

Vfrente ( $r, \theta$ ) =  $\frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta$

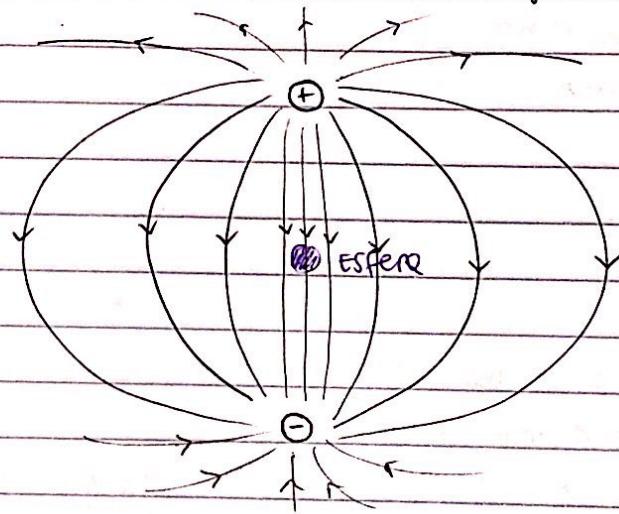
$$\text{recordar que } V_{\text{dipolo ideal}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}$$

$$\text{entonces perf} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_0 R^3$$

$$\epsilon_0 R^3 \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \Rightarrow \text{perf} = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_0 R^2$$

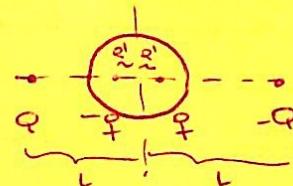
Aquí el que se demuestra que se pueden considerar cargas (dipolo) - ejercicio 9 del práctico 2 - tengo un momento dipolar equivalente

La aproximación que hacemos en el ejercicio 9 es la siguiente



la aleja y aumenta el valor de la carga

La esfera se comporta como un dipolo para un observador que está afuera.



en la "recindad" de la esfera simula un campo eléctrico constante

$$E_0 = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L^2}$$

el dipolo es formado por  $q$  y  $-q$  (que dependen de  $Q$  y de  $L$ )

El campo eléctrico uniforme generado por  $q$  y  $-q$  por el 10 lo considero para el  $p$ .

tomamos el límite  $L \rightarrow \infty$  con  $Q$  también  $\rightarrow \infty$  pero con el

$$\text{cociente } \frac{Q}{L^2} = \text{cte} \text{ para que haga un } E_0$$

(campo eléctrico uniforme)

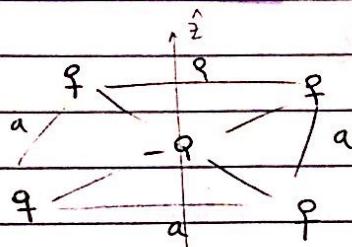
$$\text{Para el problema de la esfera } p_{\text{ef}} = 2q \cdot \frac{L}{a} = 2qR \frac{R}{L} = 2R^3 2\pi\epsilon_0 E_0$$

y obtengo lo mismo que antes.

24/4/2020

### Problemas de parcial

2019 (1)



- Q originalmente en reposo en el centro
- Si se le añade cargo se desplaza ligeramente fuera del plano del cuadrado recorriendo un MAS. Hallar w

Ignoramos el peso (gravedad)

Desplazo -Q y considero 4 fueros eléctricos (recordar que es una suma vectorial)

proyectamos según  $\hat{z}$

El desplazamiento de -Q ( $f$ ) tiene que ser mucho menor que  $a$

Ecuación del movimiento

Dentro del plano es inestable el equilibrio

Si lo llevamos al plano estable.

Funciones armónicas  $\Rightarrow$  satisfacen la ecuación de Laplace.

27/4/2020

## MÉTODOS NUMÉRICOS

Método de relajación (diferencias finitas)

Método de los momentos

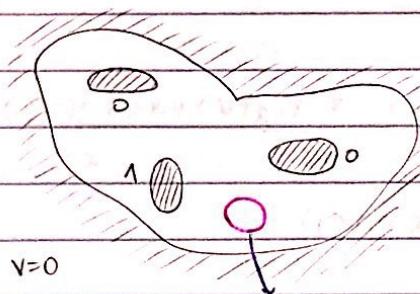
Método de elementos finitos

### Método de relajación

Consiste en discretizar el dominio (típicamente en forma cuadrulado)

y usar el teorema de valor medio

Teorema de valor medio para funciones armónicas ( $\nabla^2 V = 0$ )



Si tomo una esfera

se satisface si no toca la rupa de un conductor

A priori tomo que depende del radio que tome

conceptualmente el promedio de los valores en la frontera de la esfera que me tomo el igual al valor en su centro.

$$V_{\text{prom}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint v(r_{\text{sup}}) dS = \frac{1}{4\pi r^2} \iint v(r_{\text{sup}}) r^2 d\Omega$$

$d\Omega$ : ángulo sólido.

$$= \frac{1}{4\pi} \iint v(r_{\text{sup}}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint v(r, \theta, \phi) d\Omega$$

La dependencia en  $r$  todavía está (porque el potencial depende de  $r$ )

Dervando:

$$\frac{dV_{\text{prom}}}{dr} = \frac{1}{4\pi} \iint \vec{\nabla} V \cdot \hat{r} d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2} \iint \vec{\nabla} V \cdot \hat{r} (r^2 d\Omega)$$
$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iint \vec{\nabla} V \cdot \hat{r} d\Omega \stackrel{\text{teo Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \iint \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\Omega = 0$$

$\hat{r}$  en este caso

Como la derivada en  $r$  no da cero  $V_{\text{prom}}$  no depende de  $r$

$[V_{\text{prom}} = V(\text{centro}) \text{ en una región libre de carga}]$

Recordamos el teorema de Taylor para funciones derivables:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \underbrace{h^2 f''(x)}_{2!} + o(h^3)$$

error (pongo el orden correspondiente  
a los términos que estoy ignorando)

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + o(h^4)$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

error insignificante

entonces:

$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{V(x+h, y)}{h} + V(x-h, y) - 2V(x, y) + \frac{V(x, y+k) + V(x, y-k) - 2V(x, y)}{k^2} \approx 0$$

por la  
aproximación

(tomo la aproximación de Taylor de arriba)

Si  $h=k$

$$V(x, y) = \frac{V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+k) + V(x, y-k)}{4}$$

En el archivo de Mathematica tomo el ejemplo del Nro infinito  
normalizado, por lo que queda  $\begin{matrix} & & & V_1 \\ & & & V_2 \\ & & & V_2 \\ 0 & \square & 0 & \end{matrix}$

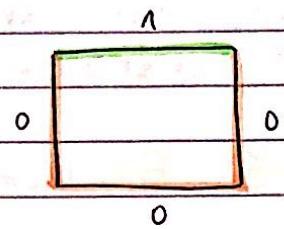
y voy haciendo este proceso para ir calculando las potencias

(promedio entre los valores que "rodean" a ese centro)

campo eléctrico apunta en la CAÍDA de potencial

campo eléctrico	caída de potencial	capacidad

con diferencia de potencial y distancia  $\Rightarrow \vec{E} \rightarrow$  con  $E^2$  saco  $\sigma$   
 $\rightarrow$  con  $\sigma$  (integrandos) calculo q



la carga en la parte naranja es igual (en valor absoluto) a la carga en la parte verde.

las líneas de campo eléctrico no se "fugan". Es como una función biunívoca

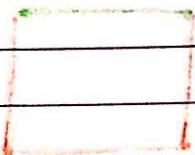
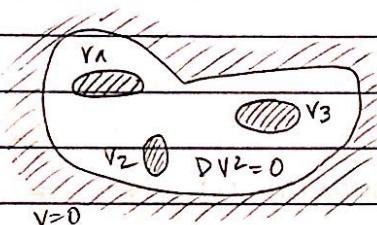
las líneas de campo salen de - hay una caída de potencial desde allí. Allí estará cargado positivamente.

Apartir de esto podemos hallar capacidades también

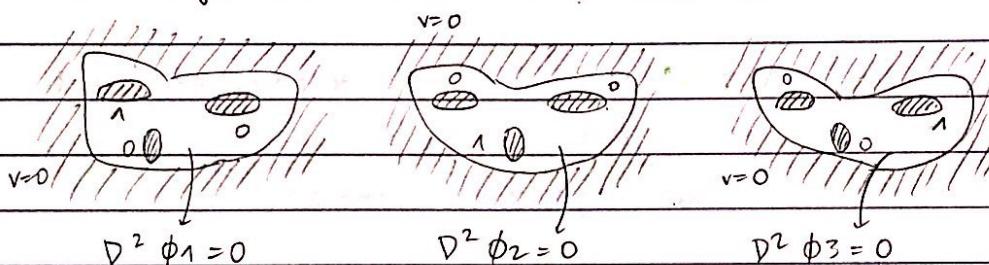
## COEFICIENTES DE POTENCIAL Y CAPACITANCIA

cantidad - no tiene por qué ser el interior de un conductor.

problema original



TOMO LOS SIGUIENTES COLORES



$$V(r) = V_1 \phi_1(r) + V_2 \phi_2(r) + V_3 \phi_3(r)$$

$$\mathfrak{J}_1 = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}_1 \Big|_{S_1} = -\epsilon_0 V_1 \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \hat{n}_1 \Big|_{S_1} - \epsilon_0 V_2 \vec{\nabla} \phi_2 \cdot \hat{n}_1 \Big|_{S_1} \\ - \epsilon_0 V_3 \vec{\nabla} \phi_3 \cdot \hat{n}_1 \Big|_{S_1}$$

$$Q_1 = -\epsilon_0 V_1 \oint_{S_1} \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \hat{n}_1 dS_1 - \epsilon_0 V_2 \oint_{S_1} \vec{\nabla} \phi_2 \cdot \hat{n}_1 dS_1 \\ - \epsilon_0 V_3 \oint_{S_1} \vec{\nabla} \phi_3 \cdot \hat{n}_1 dS_1$$

los coeficientes de capacitancia

los  $C$  son coeficientes de potencial - dependen únicamente de la geometría - no de los potenciales ni de los cargas

Entonces

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 \\ Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3 \end{cases}$$

en forma matricial  $\vec{Q} = \tilde{C} \vec{V}$

$C_{ij}$  = coeficientes de potencial

se puede demostrar

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dependen de la geometría y no de} \\ Q_i \text{ ni de } V_i \end{array} \right.$

$C_{ii} > 0$

$C_{ij} \leq 0$

$(i \neq j)$

$C_{ij} = C_{ji}$

(simetría)

$$\vec{Q} = \tilde{C} \vec{V} \rightarrow \vec{V} = \tilde{P} \vec{Q}$$

simétrica - invertible

coeficientes de potencial

$$V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3$$

$P_{ij} > 0$

$$V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3$$

$P_{ij} = P_{ji}$

$$V_3 = P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3$$

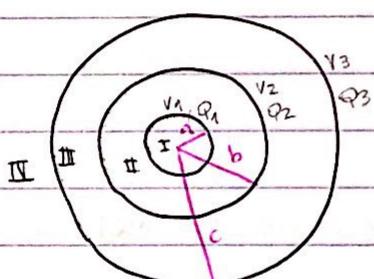
relación de reciprocidad.

Ejemplo

Cascorro de esferas

hallar matriz  $\tilde{C}$  y  $\tilde{P}$

no necesitamos saber potencial ni carga - dependen únicamente de la geometría  
( $\tilde{C}$  y  $\tilde{P}$ )



puedo usar Gauss por la geometría que tengo.

Los resultados al final no van a tener ni  $Q_1$ , ni  $Q_2$ , ni  $Q_3$

Aparecerán solo propiedades geométricas.

Tengo 4 regiones para encontrar el campo eléctrico

$$\vec{E}_{\text{I}} = 0 \quad \forall r < a \Rightarrow \text{potencial cte} \quad (\text{No cero necesariamente})$$

$$\vec{E}_{\text{II}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} \quad (\text{por Gauss}) \quad a < r < b$$

$$\vec{E}_{\text{III}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1+Q_2}{r^2} \hat{r}; \quad b < r < c$$

$$\vec{E}_{\text{IV}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{r^2} \hat{r}; \quad r > c$$

$$\frac{a-b}{ab}$$

$$\textcircled{1} \quad V_2 - V_1 = - \int_a^b \vec{E}_{\text{II}} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad V_3 - V_2 = - \int_b^c \vec{E}_{\text{III}} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\textcircled{3} \quad 0 - V_3 = - \int_c^{\infty} \vec{E}_{\text{IV}} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{c} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0}{a-b} ab (V_2 - V_1) = \underbrace{4\pi\epsilon_0 ab}_{C_{11}} \underbrace{V_1}_{b-a} + \underbrace{4\pi\epsilon_0}_{a-b} V_2$$

$$C_{12} = 0 = C_{31}$$

por simetría.

Teórica que despejar los demás  $Q_i$ .

Entonces se puede ver como un problema matemático

$$Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$C_{ij}$  con  $i \neq j$  es cero si los únicos

no nulos de un cuerpo a otro

Ejemplo si pusiera un cuerpo 4

$$V = (V_1, V_2, V_3)$$

$$\text{afuera } C_{14} = C_{41} = C_{24} = \dots = 0$$

$$\vec{Q} = \tilde{C} \vec{V}$$

(no ve "ven")

## Cold Fusion

30/14/2020

potos

para  
un problema  
en general

En este caso (concoronel esférico) supusimos  $Q \rightarrow E \rightarrow V$  (acá hay simetría)

En general, se suponen  $V \rightarrow$  se resuelve la placa  $\rightarrow$  se halla  $E \rightarrow J \rightarrow Q$

Con el la expresión de  $Q_1$  cuando  $V_1 = 1$

$$V_2 = V_3 = 0$$

$C_{31} = C_{13} = 0$  los esferos 1 y 3 no se "ven"

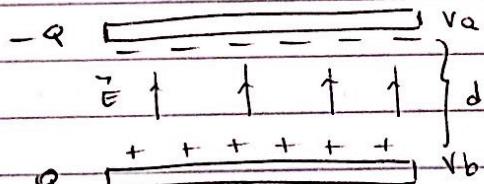
están "blindados" entre ellos

Capacitancia de un capacitor tradicional de dos placas

dieléctrico - sostén mecánico para que no se toquen las dos placas

{ En C.A introducen un desfasaje entre el  $V$  y la corriente

Almacenamiento de carga - para una descarga muy grande en un momento dado (pequeño tiempo)



$$E_{in} = \frac{J}{\epsilon_0}$$

piano conductor

$$E_{plano} = \frac{J}{2\epsilon_0}$$

Tengo tamba y abajo

$$E_{out} = 0$$

$$J_{ext} = 0$$

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot d = \frac{J}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{A\epsilon_0} \cdot d$$

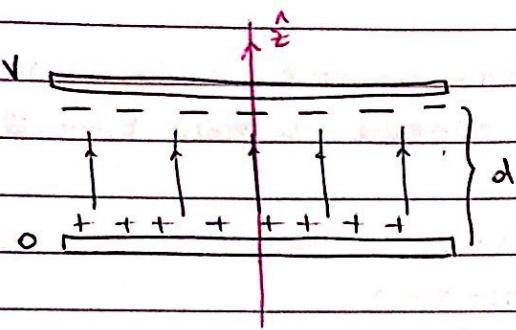
por ser una forma

$$\text{Entonces } C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{J \cdot A \epsilon_0}{d} = \frac{A \epsilon_0}{d}$$

$$C = \frac{A \epsilon_0}{d}$$

$$[C] = F \quad \text{normalmente entre micro y picofaradios}$$

Para usar el método típico para hallar la capacitancia



Necesito una solución a la ecuación de Laplace en la región entre los placos

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} i) V(0) = 0 \\ ii) V(d) = V \end{array} \right\} \text{condiciones de borde}$$

$$\frac{dV}{dz^2} = 0 \rightarrow V(z) = C_1 z + C_2$$

$$V(0) = 0 = C_2$$

$$V(d) = V = C_1 = \frac{V}{d}$$

$$V(z) = \frac{V}{d} z \quad (\text{satisface Laplace y las condiciones de borde})$$

$$E(z) = -\frac{V}{d} \quad (\text{desvuelto})$$

$$\sigma = \epsilon_0 E^\perp = -\frac{\epsilon_0 V}{d}$$

$$\frac{Q}{A} = \sigma \Rightarrow Q = \sigma A = -\frac{\epsilon_0 V A}{d}$$

$$C = \frac{|Q|}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$D^2V=0$

simetría de rotación

$\left. \begin{array}{l} V(r\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) \cos \theta + \left( A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} \right) \frac{\cos 2\theta - 1}{2} \end{array} \right\}$  para cuando tengo cargo neto

sólo cuando tengo carga neta

momento dipolar

sólo infinita de términos

capacitancia de un único cuerpo conductor

En este caso tomamos como medida el radio a infinito

¿ C de una esfera conductora de radio R?

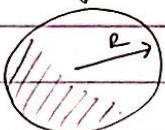
potencial  $V_0$  de la esfera que tengo

potencial  $V=0$  de la esfera a infinito

$V = A + \frac{B}{r}$  (solución de la ecuación de Laplace con simetría esférica)

Me quedo solamente con el primer término

$$V(r) = A_0 + \frac{B_0}{r}$$



condición de borde

$$\text{i)} V(\infty) = 0 \Rightarrow A_0 = 0$$

$$\text{ii)} V(R) = V = \frac{B_0}{R} \Rightarrow B_0 = RV$$

$$V = \frac{RV}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{VR}{r^2}$$

$$\Rightarrow J = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 \cdot \frac{VR}{r^2} \Big|_{\text{sup}} = \frac{\epsilon_0 VR}{R^2} = \frac{\epsilon_0 V}{R}$$

$$\frac{Q}{A} = \frac{\epsilon_0 V}{R} \Rightarrow Q = \epsilon_0 V A = \epsilon_0 V \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \epsilon_0 V R$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi \epsilon_0 R}{1} = 4\pi \epsilon_0 R$$

$$C = 4\pi \epsilon_0 R$$

sería la capacitancia más grande

de lo tiene tengo (si fuera conductor)

$$C = \frac{1}{9 \times 10^9} (6,4 \times 10^6) \approx 0,6 \times 10^{-3} F$$

No sé la idea de lo grande que es un faradio

En un capacitor normal  $Q_2 = -Q_1$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}$$

para cuando se tienen dos conductores

en la práctica conocemos la capacitancia

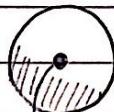
## DIELECTRICOS

Los podemos llamar aislantes

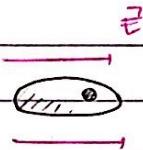
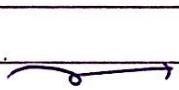
No tienen cargas libres

Frente a un  $\vec{E}$  se polarizan (como mucho)

"nube  
eléctrica"



núcleo



la molécula se comporta

como un pequeño  
dipolo ideal

Modelo de Rutherford (1911)

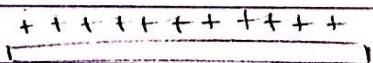
Polarización :  $\vec{p}(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}}{dV} \Rightarrow$  Lo caracterizamos con ello

Momento dipolar por

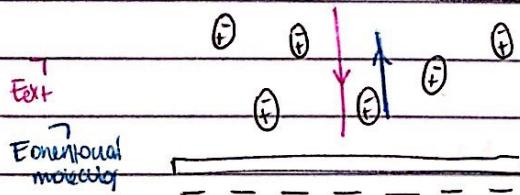
unidad de volumen

( $C/m^3$ )

porque  $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$



Tengo un campo eléctrico externo



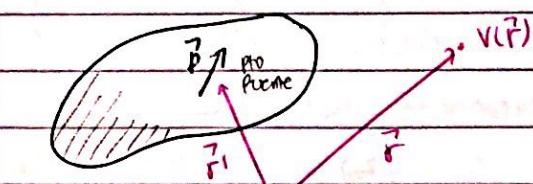
(por los polos) y uno por la  
polarización

cargas de polarización → típicamente aparecen en la superficie

↳ cargas ligadas (también llamo dor así)

¿cómo es el  $\vec{E}$  creado por un dielectrico polarizado?

pto compo



Recordar:

$$V_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}$$

bloque de dielectrico  
polarizado

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{p}$  puede variar de un punto

a otro.

la polarización en  $\vec{r}'$

$$V(\vec{r}) = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|r - r'|^3} dV'$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = -\frac{1}{r^2} \vec{r} = -\frac{1}{r^3} \vec{r} = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \vec{r}'}{|r - r'|^3} dV' = \vec{D}' \left( \frac{1}{|r - r'|} \right)$$

$$\vec{D}' \frac{1}{|r - r'|} = -\frac{1}{|r - r'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint \vec{D}' \left( \frac{1}{|r - r'|} \right) dV' - \iiint \frac{\vec{D}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|r - r'|} dV' \right]$$

Aquí aplico Gauss

$$\vec{B} \cdot (\vec{f} \vec{g}) = \vec{D} \vec{f} \cdot \vec{g} + \vec{f} \vec{D} \cdot \vec{g}$$

$$\vec{D}' \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|r - r'|} = \vec{D}' \frac{1}{|r - r'|} \cdot \vec{P}(\vec{r}') +$$

$$\vec{D}' \frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{|r - r'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \frac{1}{|r - r'|} \vec{D}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')$$

carga de polarización en la sup

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}'}{|r - r'|} dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(\vec{D}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'))}{|r - r'|} dV'$$

carga de polarización en el volumen

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$P_{vp} = -\vec{D} \cdot \vec{P}$$

cargas de polarización

Podemos sustituir el dielectro polarizado por ~~cargas de polarización~~  
equivalentes

análogo al método de imágenes

El problema es que no conocemos  $\vec{P}$

En general  $\vec{P} \propto \vec{E} \rightarrow \vec{P} = (\chi_e) \epsilon_0 \vec{E}$

↑ susceptibilidad eléctrica

(sin unidades y > 0)

Depende de cada sustancia

L → idealmente es un número

orientación de los dipolos (-) a (+)

Desplazamiento eléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad | \quad \downarrow \quad \text{permitividad eléctrica (F/m)}$$

$$= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{permitividad eléctrica}$$

relativa (sin unidades)

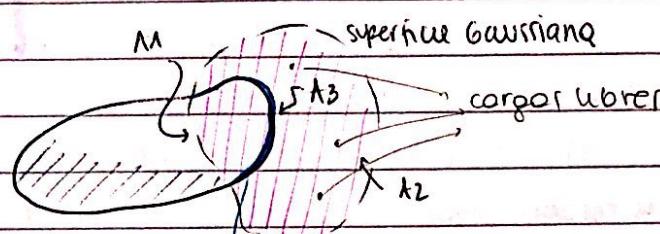
Nota

- { si  $\epsilon$  depende de la posición → material no homogéneo
- si  $\epsilon$  depende del  $\vec{E}$  aplicado → material no lineal
- si  $\vec{P}$  no es lineal con  $\vec{E}$  → material no isotropo

Materiales **IHL** (isotropo - homogéneo - lineal)

$\epsilon$  es simplemente un número

Ley de Gauss en presencia de dielectricos



Aquí hay carga de polarización en la rcp

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Lambda}{\epsilon_0} q_{\text{neto}} = \Lambda \left( q_p + q_f \right) \quad \text{(*)}$$

carga polarizada + carga libre

$$q_p = \iint_{A_3} \vec{P}_p \cdot d\vec{s} + \iiint_{V_p} P_{pp} dV$$

$$= \iint_{A_3} \vec{P} \cdot \hat{n} dS - \iiint_{V_p} \vec{D} \cdot \vec{P} dV = \iint_{A_3} \vec{P} \cdot \hat{n} dS - \oint_{A_1+A_3} \vec{P} \cdot \hat{n} dS$$

$$= - \iint_{A_1} \vec{P} \cdot \hat{n} dS = - \oint_{A_1+A_2} \vec{P} \cdot \hat{n} dS$$

vector polarización afuera del dielectrico es cero.

$$\oint_{A_1+A_2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} dS = q_f - \oint_{A_1+A_2} \vec{P} \cdot \hat{n} dS \quad (*)$$

$$q_f = \oint \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{B} \text{ (media rcp de la densidad de dipolo)}} \cdot \hat{n} dS$$

$$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{\text{libre}} \quad \text{in} \quad \rightarrow \text{no se tienen en cuenta los cargas de polarización}$$

Nueva expresión de la ley de Gauss

Carga total de polarización de un dielectrico es cero.

para capacidades condutóricas

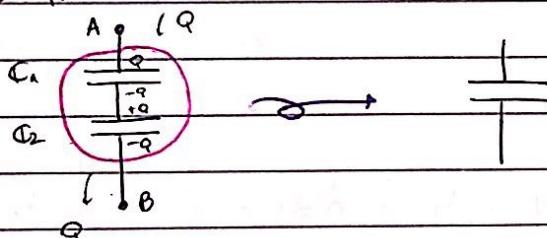
uso Gauss → saco  $\vec{D}$  → como  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  saco  $\vec{E}$  → integrando obtengo

$$\Delta V \rightarrow \text{como } C = \frac{Q}{\Delta V} \text{ obtengo la capacitancia}$$

la nueva expresión de Gauss  $\oint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{\text{entre}}$

Dielectros ideales no aceptan ni ceden carga

De física 2



para capacitor en serie

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$\text{pero como } C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\Delta V_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \text{y como } C_{\text{eq}} = \frac{Q}{\Delta V_{AB}}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

recordar que los componentes tangenciales se mantienen (de  $\vec{E}$ )

por las condiciones de borde

$$\text{Esto se demuestra con } \vec{D} \times \vec{E} = 0 \quad E_{t1} = E_{t2} \quad (\text{siempre el cero})$$

$$\text{En cuanto a los componentes normales } \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{P_{vL} + P_{vp}}{\epsilon_0}$$

$$E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma_e + \sigma_p}{\epsilon_0}$$

$$\vec{D} \cdot \vec{D} = P_{ve} \quad \text{las otras de } \vec{D} \text{ ignoran los corpos de polarización}$$

$$\text{De esto obtengo } D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_L$$

por la ley de Gauss

Si tengo un sistema ideal no hay carga libre  $\mathcal{J}_L = 0$

y entonces i)  $E''_1 = E''_2$  (esto siempre)

ii)  $D_{1\perp} = D_{2\perp}$

### Principio de los trabajos virtuales (PTV)

7/5/2020

Permite calcular la fuerza que actúa sobre algún elemento de un sistema considerando desplazamientos virtuales (sin evolución temporal) de la configuración inicial.

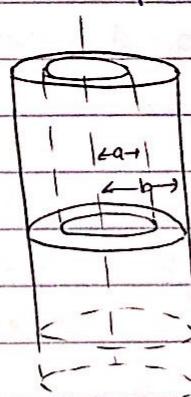
$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta s_i = 0$$

En nuestro caso simplemente vamos a tener que considerar la siguiente expresión:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

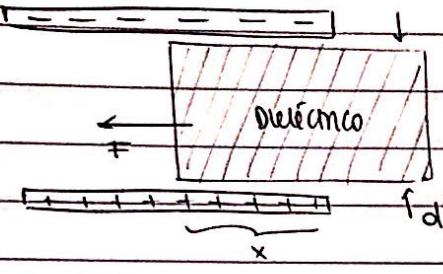
sistema aislado

### Problema de aplicación de PTV



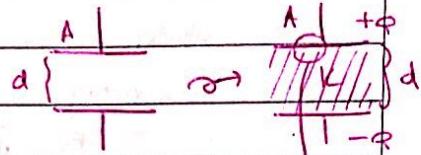
problema resuelto más adelante

(\*)



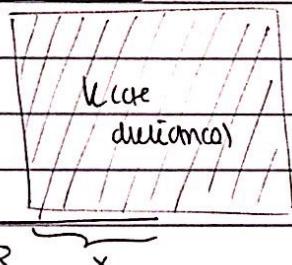
Esta fuerza generalmente es muy chica.  
Si consideraras que no hay fricción el dielectrico se ve atraido y una vez que llega al medio lo fuerza eléctrica neta es cero.

Es de esperar que haya una oscilación capacitor aislado  $\rightarrow$  se mantiene la carga



Capacitor aislado (no conectado a una batería)

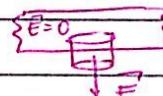
$+Q$



$$C = \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}{d} A$$

$\left\{ E = 0 \right\}$  placa conductora

Aplicando Gauss (con la cofia de pastillito)



$$U_e = \frac{1}{2} C V^2 \quad (\text{energía almacenada})$$

recordar que

$$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_L$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$= \epsilon \vec{E}$$

$$I H L$$

④

como el campo eléctrico siempre es  $\perp$  a cada uno de los lados del conductor

$$\textcircled{*} \quad D A = Q_L$$

$$\vec{D} = J_L \hat{n}$$

$$\vec{E} = \underline{\vec{B}}$$

$E \rightarrow$  suponiendo medio  $I H L$

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa\epsilon_0} \sigma L \hat{n}$$

como el campo eléctrico es uniforme  $|\Delta V| = d \sigma L = \frac{dQ}{\kappa\epsilon_0 A}$

entonces  $C = \frac{Q}{\Delta V} = \kappa\epsilon_0 \frac{A}{d}$

Beneficios de poner un dieléctrico entre placas

i) Aumenta  $C$

si en todo el lugar donde había  $\vec{E}$  coloco un dieléctrico de constante dieléctrica  $\kappa$ , entonces la capacitancia aumenta en un factor de  $\kappa$  (es como tener un "balde más ancho" - almaceno más agua haciendo menor trabajo)

ii) Es un resorte mecánico

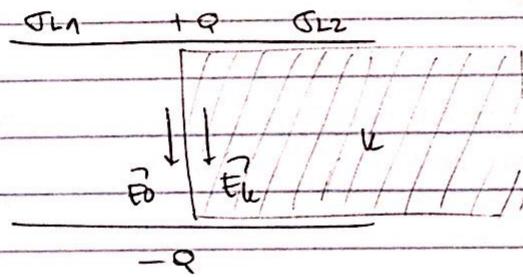
cuando el capacitor esté cargado las placas se atraen

iii) Fuerza  $\Delta V_{\text{ruptura}}$

$$C \propto \kappa \epsilon_0$$

sólo vale cuando el dieléctrico esté en todos lados

viviendo al problema de antes:



$$\vec{E}_0 = \vec{E}_L$$

componentes tangenciales  
siempre igual

(hasta segundo por los corpos de polarización)

$$D_2 = \sigma L_2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{\kappa\epsilon_0} \sigma L_2$$

$$P_1 = \sigma L_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{\kappa\epsilon_0} \sigma L_1$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{\kappa_2 \kappa_1}{\kappa_0 \kappa} \frac{1}{\sigma L_1} = \frac{1}{\sigma L_2}$$

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = k$$

$$\frac{L_2}{L_1}$$

Supongo que los placas del capacitor son cuadradas  $A = L^2$

con el PTV:  $\vec{F} = -\vec{D} U \mid_{\text{aislado}}$

$$\vec{F}_e = -\vec{D} U_e \mid_{Q=cte}$$

$$F_x = -\frac{\partial U_e}{\partial x} \mid_Q$$

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2$$

sine como expresión de la energía

eléctrica pero a medida que introducimos

$$= -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial(1/C)}{\partial x}$$

el dielectrico  $C$  y  $V$  van cambiando

en este caso es preferible ponerlo como

podemos sacar

$$U_e = \frac{Q^2}{2C}$$

con regla de la cadena.

Tendremos que hallar  $C$  en función de  $x$ .

capacitores en paralelo

- sumo las capacidades

$$C(x) = C_0(x) + C_U(x)$$

$$= \frac{\epsilon_0 L(L-x)}{d} + \frac{U \epsilon_0 L x}{d} = \frac{\epsilon_0 L}{d} [(k-1)x + L]$$

por lo tanto:

$$F_x = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial(1/C)}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2} \left( -\frac{1}{C^2} \right) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$F(x) = \frac{V^2}{2} \frac{(k-1) \epsilon_0 L}{d}$$

como límite pre podría protor

\* si  $k=1$

en este caso el  $F$  es un equilibrio indiferente

(no me aporta nada el introducir un dielectrico)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l}$$

\* En el problema de los cilindros:

El polo final tiene menor energía electromecánica

Recordar que hay fuerzas viscoelásticas

Aquí se tiene que imponer  $\vec{F}_{\text{neto}} = 0$ , no que la energía sea igual  
Pero en el anillo = fuerza eléctrica

$$\vec{F}_g = m \vec{g} = P V \vec{g}$$

$$|F_g| = P \pi (b^2 - a^2) \text{ kg}$$

$$|F_g| = |F_e|$$

$$\vec{F}_e = - \nabla U_e |_Q = . + \nabla U_e |_V$$

en el equilibrio

(situación final)

$$F_e = - \frac{\partial U}{\partial x} |_Q = + \frac{\partial U}{\partial x} |_V = V^2 \frac{\partial C(x)}{\partial x}$$

Mora hay que calcular la capacitancia para cuando se levanta x

$$C = \frac{2\pi k \epsilon_0 L}{\ln b/a} \quad \begin{cases} \text{Máster capacitor en paralelo} \\ \text{para dos tubos} \end{cases}$$

$$C(x) = \left[ \frac{2\pi k \epsilon_0 (L-x)}{\ln b/a} + \frac{2\pi k \epsilon_0 x}{\ln b/a} \right]$$

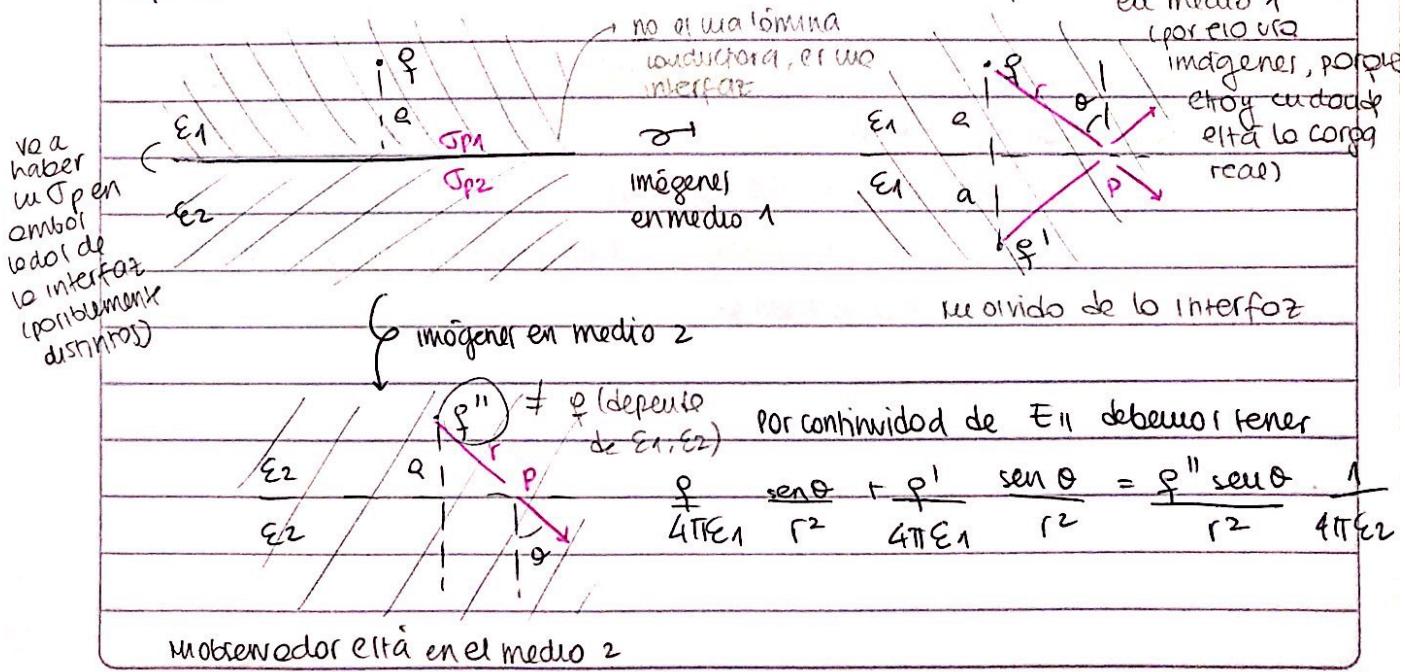
cilindros coaxiales

b de ambos que todavía

no tiene dielectrónico.

Tener presente también que  $U = A + \chi_e$

Problemas con condiciones de borde condutivos



Entonces

$$\textcircled{1} \quad \varphi + \varphi' = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \varphi''$$

Pero también  $D\perp 1 = D\perp 2$

$$\frac{\varphi}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} - \frac{\varphi'}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{\varphi''}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi - \varphi' = \varphi''$$

De \textcircled{1} y \textcircled{2} (considerando que ya conozco el valor de  $\varphi$ )

$$\varphi'' = \frac{2\varphi}{1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \quad \varphi' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \varphi$$

Analicemos los límites.

\* Si  $\epsilon_1 = \epsilon_2$

$$\varphi' = 0 \quad (\text{no hay necesidad de corregir imagen en medio 1})$$

$$\varphi'' = \varphi \quad (\text{ve lo mismo un observador arriba que abajo})$$

\*  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$

Moléculas muy polonizables - moléculas muy deformables frente al  $E$

Tratallan muy bien el campo eléctrico

Si  $\epsilon_2$  es muy grande, el medio 2 se comporta a parecer un conductor

$$\varphi' = -\varphi \quad (\text{tiene sentido - por imágenes en conductores})$$

$$\varphi'' = 2\varphi$$

Si quisiera sacar  $J_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$

$$\vec{P} = \chi \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

Electróláctico

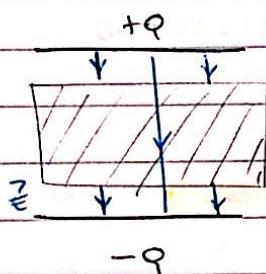
$$\vec{D} \cdot \vec{E} = P_{VL} + P_{VP} \rightarrow \vec{D} \cdot \vec{D} = P_{VL}$$

$\epsilon_0$

$$\vec{D} \times \vec{E} = 0 \text{ (eléctrico)}$$

nacen y mueren en corpos libres

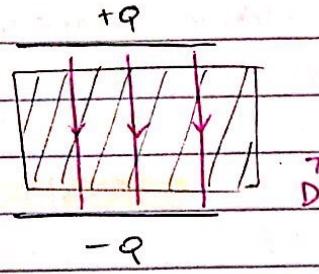
(los líneos de  $\vec{D}$ )



nacen por corpos de polarización

hay más corpos libres que de polarización

(algunas líneas de  $E$ , no encuentran su posible cargo de polarización)



mueren y salen solo en  
corpos libres (los líneos de  $\vec{D}$ )

\* Esta ecuación vale siempre

en particular, cuando estoy en un medio IHL  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\vec{D}(\epsilon \vec{E}) = P_{VL}$$

al ser un medio homogéneo

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{P_{VL}}{\epsilon}$$

$$\vec{D} \cdot \vec{D} V = - \frac{P_{VL}}{\epsilon}$$

$$D^2 V = - \frac{P_{VL}}{\epsilon}$$

pasan en IHL en condiciones elásticas

si no hay corpos libres en el medio  $D^2 V = 0$

se cumple la ecuación de Laplace

la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimuthal es:

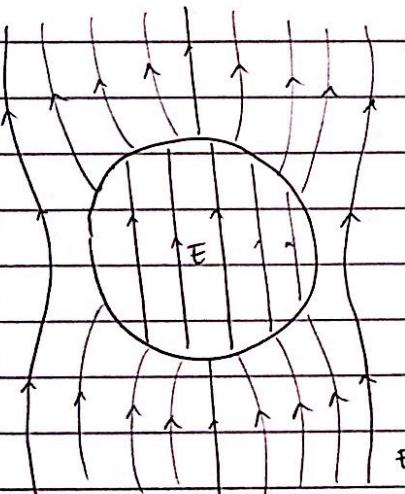
$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad P_0(u) = 1 \\ \text{evaluado en } \cos \theta \quad P_1(u) = u$$

la libertad de tomarlo como cero el trigo en una parte

$$V(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (\text{entonces tomo } A_0 = 0 \text{ en } V_{in})$$

propago un potencial así tanto para la parte interna como para la externa.

El problema que tengo es:



REVISAR ESTE PROBLEMA

Esférica de radio  $R$

en el origen no hay nada y  $\frac{1}{r^2}$  diverge en el origen

$$V_{in}(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \quad (\text{satisface Laplace})$$

$$V_{in}(r, \theta) = A_1 r \cos \theta = A_1 z$$

Hay una correspondencia entre  $V(r, \theta)$  y  $V_{out}(r, \theta)$

como se ve en  $V_{in}(r, \theta)$  solo algo en  $L=1$  aparece en  $V_{out}(r, \theta)$  también

$$V_{out}(r, \theta) = A'_1 r \cos \theta + \frac{B'_1}{r^2} \cos \theta$$

condiciones que tengo:

$$\begin{cases} E_{t1} = E_{t2} \rightarrow V_1 = V_2 \\ D_{n1} = D_{n2} \end{cases}$$

$$\text{Además } V_{terior}(\vec{r}) = -E_0 z \quad E_{\text{earth}} = E_0 \hat{z}$$

$$V_{out}(\infty) = -E_0 z$$

$$A'_1 = -E_0$$

condiciones de borde

$$\star V_1 = V_2 \rightarrow A_1 R \cos \theta = -\epsilon_0 R \cos \theta + \frac{B_1' \cos \theta}{R^2} + \phi$$

\*  $D_{in} = D_{out}$

$$B = \epsilon \vec{E} \quad D_n = \vec{D} \cdot \hat{r} \Big|_{r=R} = \epsilon \vec{E} \cdot \hat{r} \Big|_{r=R} = -\epsilon \vec{D} \cdot \hat{r} \Big|_{r=R}$$

$$= -\epsilon \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

para cuando tengo un medio

IHL, sino tengo que aplicar la

definición de  $\vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Por lo tanto ahora tengo:

$$-\epsilon \frac{\partial V_{in}}{\partial r} \Big|_R = -\epsilon_0 \frac{\partial V_{out}}{\partial r} \Big|_R + \phi$$

Ahora solo resta resolver un sistema 2x2

Anteriormente  $V_{out} = V_{ant} = A_1' r \cos \theta = -\epsilon_0 z$

Ahora tengo  $V_{out}(r, \theta) = A_1' r \cos \theta + \frac{B_1' \cos \theta}{r^2}$

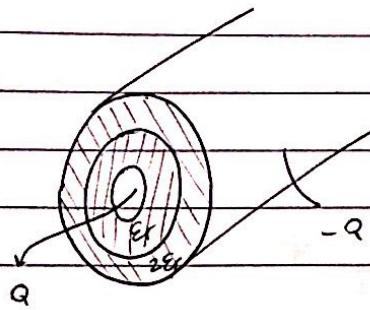
$V_{dipolar}$  de la esfera

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{es} \cos \theta}{r^2}$$

$$p_{es} = P_0 \frac{4}{3} \pi R^3$$

polariación volumen de la  
de la esfera esfera.

8/5/2020



$$\text{Gauss} \oint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q}{2\pi r L} \hat{P} \quad \text{expresión válida para } r_i < r < r_e$$

Lo que cambia con el  $\epsilon_r$  es la expresión del campo.

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi r \epsilon_r \epsilon_0 L} \hat{P}, & r_i < r < b \\ \frac{Q}{4\pi r \epsilon_r \epsilon_0 L} \hat{P}; & b < r < r_e \end{cases}$$

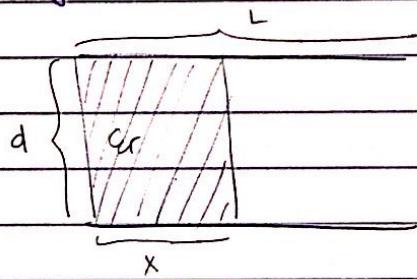
$$\Delta V = - \int \vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L} \ln \frac{b}{r_i} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 L} \ln \frac{r_e}{b}$$

$$\text{La capacidad se obtiene como } \frac{Q}{\Delta V} = C$$

También se puede ver como dos capacitores en serie

$$C_{eq} = C_1 + \frac{C_2}{\epsilon_r}$$

### Ejercicio 8 - Práctico 3



El campo eléctrico será igual en ambos regiones (por ser tangencial - esta componente se mantiene)

Dó lo mismo si hiciémos

$$\vec{F}(x) = D U e |v = \frac{V_0^2}{2} \frac{\partial C(x)}{\partial x} \quad \left. \right\} \quad \vec{F}(x) = -D U e |q = D U e |v$$

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r w(x)}{d} + \frac{\epsilon_0 (L-x)w}{d} \quad \left. \right\} \quad \vec{F}_x(x) = \frac{V_0^2 \epsilon_0 w}{2 d} \underbrace{(x - \frac{L}{2})}_{x_e} = \frac{V_0^2 \epsilon_0 w x_e}{2 d}$$

1 mirando como

2 capacitores

en paralelo

$$J_L = D \cdot A$$