

Trabajo práctico integrador – Métodos Numéricos

Guarnieri Victoria, Velloso Manuela, Zino Mailén

Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Favaloro

Resumen— El presente trabajo consiste en el desarrollo de siete ejercicios que integran los conocimientos adquiridos en la asignatura Métodos Numéricos. Se emplean algoritmos para la resolución numérica de sistemas lineales y ecuaciones diferenciales, algoritmos de interpolación, y algoritmos de derivación e integración numérica.

I. EJERCICIO 1

Este ejercicio plantea la resolución de una ecuación diferencial (ver ec. 1) que relaciona la diferencia de potencial de salida $v_o(t)$ con la diferencia de potencial de entrada $v_i(t)$, para el análisis del comportamiento eléctrico de una red circuital en configuración puente T (ver fig. 1). En particular, la señal de entrada era un escalón de 50 V, $v_i(t) = 50 u(t)$ V.

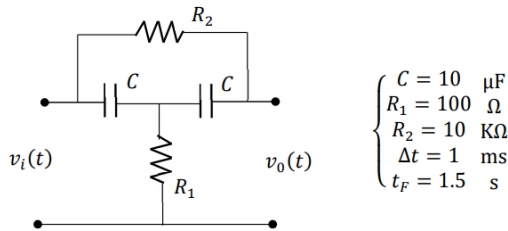


Fig. 1: circuito T utilizado en los primeros 4 ejercicios del Trabajo Práctico.

$$C^2 R_1 R_2 \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + C(2R_1 + R_2) \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = C^2 R_1 R_2 \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} + 2CR_1 \frac{dv_i(t)}{dt} + v_i(t). \quad (1)$$

En pos de encontrar la respuesta del sistema al escalón de 50 V, se empleó el algoritmo de Runge-Kutta para sistemas, visto en la unidad 2 de la materia. A partir de la ec. 1, se determinaron los coeficientes de las matrices A , B , C y D , que en este método numérico se utilizan, con los datos de las resistencias y capacitancias que se muestran en la fig. 1. Estas matrices fueron

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{C^2 R_1 R_2} & -\frac{2R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2R_1 - C^2(2R_1 + R_2)}{C^2 R_1 R_2} \end{bmatrix}, \quad D = [1].$$

Con ellas, se generó el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} V'_0(t) = AV_0(t) + Bv_i(t), \end{cases} \quad (2)$$

$$v_o(t) = CV_0(t) + Dv_i(t). \quad (3)$$

Una vez resuelta la ecuación (2) mediante el algoritmo de Runge-Kutta para sistemas, se obtuvo la salida $v_o(t)$, mediante (3), junto con el vector de tiempos t . Estas

variables se utilizaron para graficar la respuesta, tal como visualiza en la fig. 2.

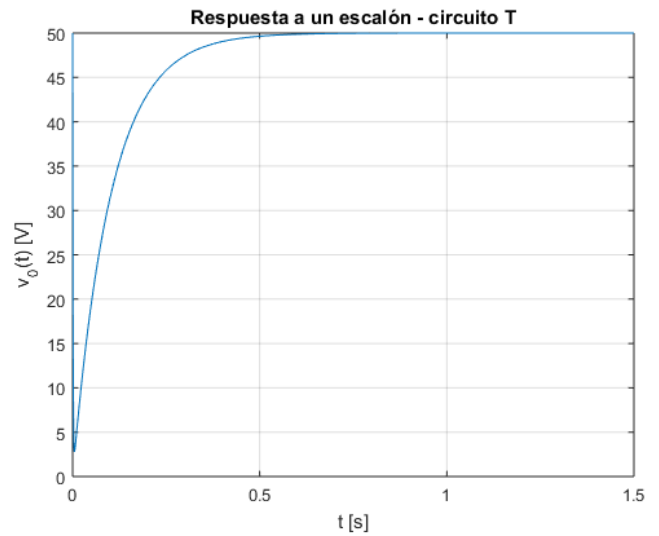


Fig. 2: respuesta a un escalón de 50 V de una red circuital en configuración puente T.

II. EJERCICIO 2

En este ejercicio se obtuvo la respuesta al impulso unitario del sistema del circuito T del ejercicio anterior (ver fig. 1). Al ser este un sistema SLIT (sistema lineal e invariante en el tiempo), utilizamos la respuesta obtenida para el escalón de 50 V (del ejercicio 1) y se la dividió por 50, obteniendo, así, la respuesta al escalón unitario. Teniendo en cuenta que la derivada es una operación lineal, y como el impulso (la delta de Dirac) es la derivada del escalón unitario, es decir $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$, se derivó la respuesta al mismo utilizando el algoritmo de la derivada central de error de orden cuadrático (ec. 4), visto en la unidad 6, que está dado por

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, \quad (4)$$

donde $f_1 = f(x_0 + h)$ y $f_{-1} = f(x_0 - h)$.

Uno de los problemas que surgió en esta instancia fue calcular la derivada en el primer punto y en el último, ya que la derivada central requiere del punto anterior y el punto siguiente, tal como indica la ec. 4.

Esto se resolvió haciendo la derivada en adelante y en retraso para el primer punto y la derivada en atraso para el último punto, dadas por las ecuaciones 5 y 6 respectivamente.

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h}, \quad (5)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}, \quad (6)$$

donde $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_0 + h)$ y $f_{-1} = f(x_0 - h)$.

Se puede observar que el tiempo de decaimiento es diferente (¡NO ESTOY SEGURA DE QUE SEAN DIFERENTES!) (LOS PODRIAMOS PONER ACÁ) entre los sistemas a pesar de que tengan los mismos polos, (en $s = 0$ donde s es la variable compleja de Laplace), porque el escalón tiene una discontinuidad finita mientras que el impulso tiene una discontinuidad infinita y esto tiene que ver con que el impulso es la derivada del escalón unitario. Asimismo, la duración de cada señal es diferente. Por un lado, el escalón arranca desde un tiempo inicial (t_0) hasta un tiempo final (t_f). Por el otro lado, la duración del impulso es infinitesimal, no dura nada. Es una patada que se le da al sistema en el tiempo t_0 .

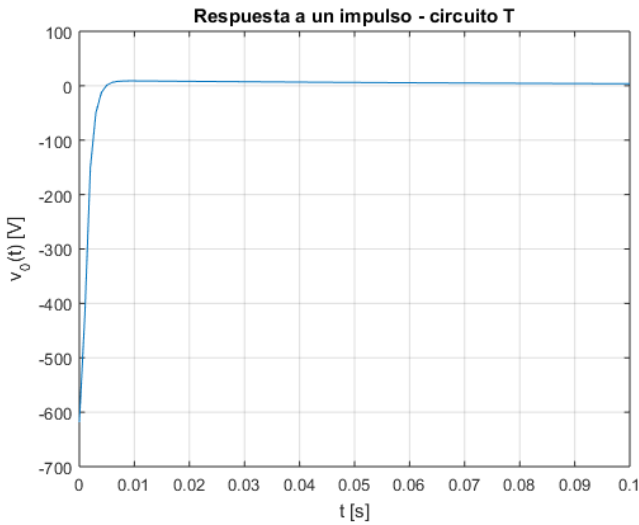


Fig. 3: respuesta al impulso de una red circuital en configuración puente T.

III. EJERCICIO 3

Nuevamente, en base al circuito del Ejercicio 1 (ver fig. 1) y la ecuación diferencial (ver ec. 1) ya presentada, se obtuvo la respuesta ante un tono senoidal puro con frecuencia de oscilación $\omega_0 = 100$ r/s y valor pico $V_p = 50$ V, $v_i(t) = V_p \sin(\omega_0 t + \pi)$, mediante el algoritmo de Runge-Kutta. Ésta se ve en la fig. 4.

Se calculó el porcentaje de eliminación del tono senoidal a la salida del circuito. Dejando de lado la respuesta transitoria y observando el régimen senoidal permanente de la ecuación diferencial, se puede emplear una regla de tres simples del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 50 V_p &\rightarrow 100\% \\ 1 V_p &\rightarrow x = 2\% \end{aligned}$$

Con lo cual, el porcentaje de decaimiento fue del 98%.

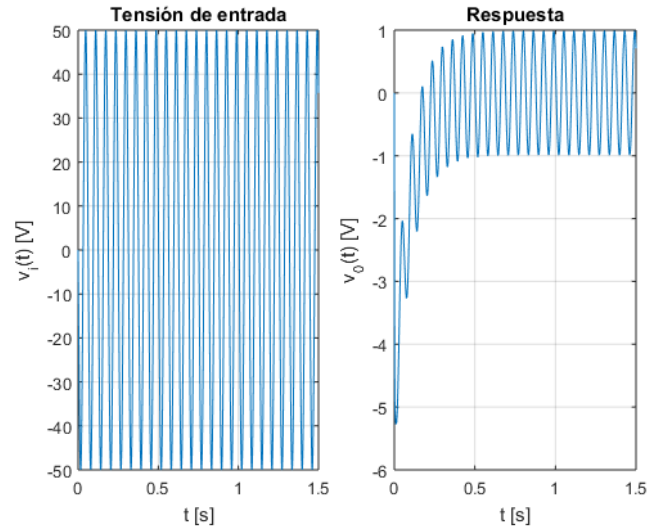


Fig. 4: respuesta ante una entrada senoidal de una red circuital en configuración puente T.

IV. EJERCICIO 4

En este ejercicio se analizó nuevamente el comportamiento eléctrico de la red de control de la fig. 1, teniendo en cuenta el Modelo de Estados del circuito T, caracterizado por

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{CR_2} \\ \frac{1}{CR_2} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \\ v_o(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} v_i(t). \end{cases} \quad (7)$$

Con este sistema de ecuaciones diferenciales, se calcularon: la respuesta ante un escalón de tensión de 50 V, la respuesta al impulso, y la respuesta al tono senoidal puro del ejercicio 3.

Todas las respuestas se obtuvieron con el algoritmo de Runge-Kutta. Al igual que como se hizo en el ejercicio 2, para poder obtener la respuesta al impulso, se calculó numéricamente la derivada de la respuesta al escalón unitario.

Se puede observar que lo obtenido en este ejercicio coincide con lo obtenido anteriormente para este mismo circuito con las tres tensiones de entrada distintas, y esto tiene que ver con que es una forma de resolución alternativa.

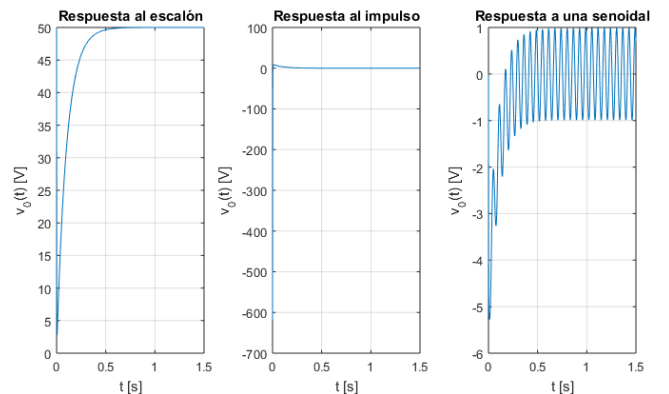


Fig. 5: (de izquierda a derecha) respuesta al escalón de 50 V, respuesta al impulso, respuesta al tono senoidal puro del ejercicio 3.

V. EJERCICIO 5

Se presentaron las ecuaciones de equilibrio estático del sistema físico traslacional de la fig. 6 de manera matricial para calcular las posiciones de cada una de las masas del sistema tras ser alcanzado el equilibrio estático.

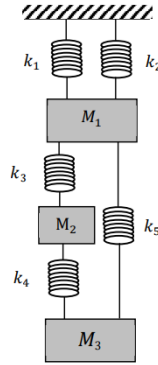


Fig. 6: modelo físico traslacional dado por el ejercicio.

A partir del modelo circuital del sistema físico (ver fig. 7) se obtienen las siguientes ecuaciones temporales:

$$\begin{cases} P_3 = M_3 v_3' + k_4 \int [v_3 - v_2] dt + k_5 \int [v_3 - v_1] dt \\ P_2 = M_2 v_2' + k_4 \int [v_2 - v_1] dt + k_3 \int [v_2 - v_1] dt \\ P_1 = M_1 v_1' + k_5 \int [v_1 - v_3] dt + k_3 \int [v_1 - v_2] dt + k_1 \int v_1 dt + k_2 \int v_1 dt \end{cases}$$

donde $P_i = M_i g$, g : aceleración de la gravedad, es el peso de la masa i y $v_i = v_i(t)$, su velocidad.

Recordando que $x_i = \int v_i dt$ se obtiene:

$$\begin{cases} P_3 = M_3 x_3'' + k_4 [x_3 - x_2] + k_5 [x_3 - x_1] \\ P_2 = M_2 x_2'' + k_4 [x_2 - x_3] + k_3 [x_2 - x_1] \\ P_1 = M_1 x_1'' + k_5 [x_1 - x_3] + k_3 [x_1 - x_2] + k_1 x_1 + k_2 x_1 \end{cases}$$

Como estamos trabajando en equilibrio estático, todas las derivadas segundas de la posición (las aceleraciones) se anulan, con lo que se obtiene

$$\begin{cases} P_3 = k_4 [x_3 - x_2] + k_5 [x_3 - x_1] \\ P_2 = k_4 [x_2 - x_3] + k_3 [x_2 - x_1] \\ P_1 = k_5 [x_1 - x_3] + k_3 [x_1 - x_2] + k_1 x_1 + k_2 x_1 \end{cases},$$

se puede escribir, acomodando los términos de forma conveniente,

$$\begin{cases} P_3 = -k_5 x_1 - k_4 x_2 + (k_4 + k_5) x_3 \\ P_2 = -k_3 x_1 + (k_3 + k_4) x_2 - k_4 x_3 \\ P_1 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_5) x_1 - k_3 x_2 - k_5 x_3 \end{cases}.$$

Esto, escrito en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} -k_5 & -k_4 & k_4 + k_5 \\ -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & -k_3 & -k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 \\ P_2 \\ P_1 \end{bmatrix},$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_5 & -k_3 & -k_5 \\ -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ -k_5 & -k_4 & k_4 + k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz fue utilizada posteriormente en el algoritmo de Triangulación gaussiana y Back Substitution, vistos en la unidad 1 de la asignatura.

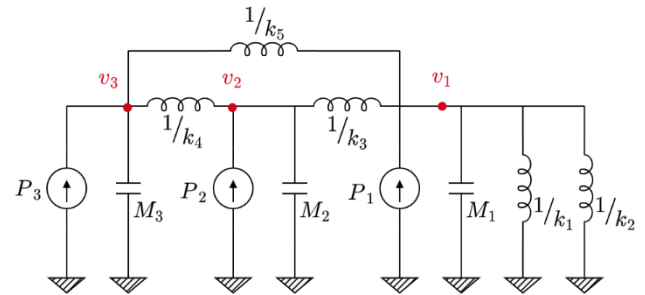


Fig. 7: modelo circuital del sistema físico.

Se obtuvieron las posiciones de equilibrio para distintos valores k y P . Para $k_1 = k_2 = k_3 = 10 \cdot 10^3$ N/m y $P_1 = P_2 = P_3 = 100$ N las posiciones de las masas resultaron ser:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.015 \text{ m} \\ x_2 &= 0.027 \text{ m} \\ x_3 &= 0.031 \text{ m}. \end{aligned}$$

Mientras que para $k_1 = k_3 = k_4 = 10 \cdot 10^3$ N/m $k_2 = k_5 = 5$ N/m, $P_1 = P_3 = 100$ N y $P_2 = 50$ N las posiciones de las masas resultaron ser

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.0083 \text{ m} \\ x_2 &= 0.0133 \text{ m} \\ x_3 &= 0.0133 \text{ m}. \end{aligned}$$

VI. EJERCICIO 6

Se realizó una interpolación sobre una tabla de valores **R-I** (ver tabla 1) para cuantificar la relación entre los parámetros y observar la caída de potencial eléctrico en una resistencia. Se presenta la resolución gráfica con la interpolación de Lagrange, Newton y Spline Cúbica en la fig. 8.

Tabla 1: corriente implementada y tensión de salida.

i [A]	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
v [V]	-637	-96.5	-20.5	20.5	96.5	637

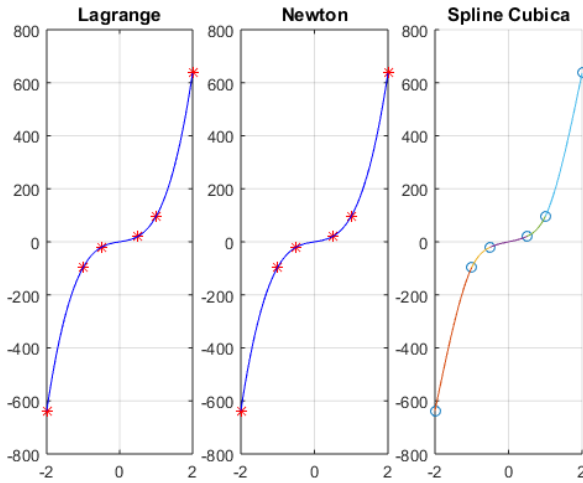


Fig. 8: gráficos de los distintos polinomios interpoladores.

Utilizando los algoritmos de evaluación de polinomios, se determinó la tensión v_1 y v_2 para $i = 0.1$ A y para $i = 2.5$ A respectivamente. Los resultados se pueden ver en la tabla 2.

Tabla 2: tensiones obtenidas para los distintos valores de corriente.

	Lagrange	Newton	Spline Cúbica
v_1 [V]	2.324	2.324	2.942
v_2 [kV]	1.213	1.213	-

Al intentar evaluar el polinomio de Spline en $i = 2.5$ A para obtener v_2 , se obtenía un valor erróneo, esto se debe a que no es posible calcular este punto utilizando el polinomio de Spline Cúbica, ya que el polinomio se construye con polinomios de tercer orden entre 2 puntos consecutivos y $i = 2.5$ A, no está incluido en el intervalo de los puntos dados por lo que no se puede analizar.

VII. EJERCICIO 7

La demostración de la ley de movimiento del sistema de la fig. 9 se realizó empleando los conocimientos adquiridos en la materia Física 1. En la fig. 10 se muestra el diagrama de cuerpo libre para la masa m .

La segunda ley de Newton está dada por

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

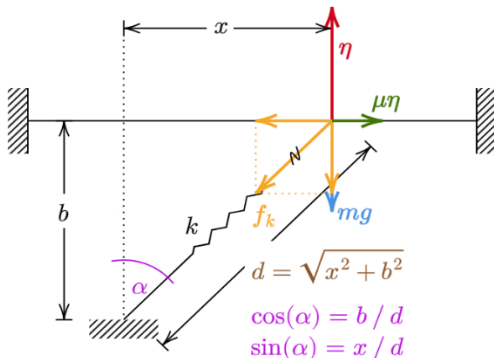


Fig. 10: figura de análisis del problema 7 y diagrama de cuerpo libre para la masa del sistema.

de donde se desprende que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = ma_x \end{array} \right. \quad (9) \quad (10)$$

Trabajando con (9) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= \eta - mg - f_k \cos(\alpha) = 0 \\ \Rightarrow \eta &= mg + k(d - b) \frac{b}{d}. \end{aligned}$$

Por otro lado, de (10)

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \mu\eta - f_k \sin(\alpha) = ma_x \\ \Rightarrow ma_x &= \mu \left(mg + k(d - b) \frac{b}{d} \right) - k(d - b) \frac{x}{d}, \end{aligned}$$

se puede reescribir esto como

$$ma_x = \mu mg + k(\mu b - x) \left(1 - \frac{b}{d} \right).$$

Con lo cual, renombrando $a_x = a(x)$ y $d = \sqrt{b^2 + x^2}$ se obtiene

$$a(x) = \mu g + \frac{k}{m} (\mu b - x) \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right)$$

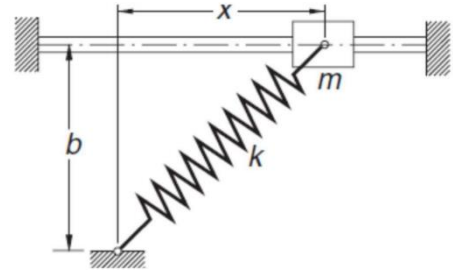


Fig. 9: Sistema mecánico del ejercicio 7.

Según la consigna, la ley de movimiento del sistema está dada por

$$a(x) = \mu g + \frac{k}{m} (\mu b - x) \left(1 - \frac{2b}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right),$$

podemos ver que difiere de lo obtenido analíticamente en un factor 2 que multiplica a b en el segundo paréntesis de la ecuación.

La velocidad de la masa en $x = 0$, de acuerdo con la consigna, viene dada por

$$v_0 = v(x = 0) = \sqrt{2 \int_0^b a(x) dx},$$

Para resolver numéricamente esta integral se empleó la regla trapezoidal compuesta y la regla de Simpson compuesta vistas en la unidad 6. Los resultados se muestran en la tabla 3 usando como datos que la masa $m = 0.8$ kg, $b = 0.4$ m, $\mu = 0.3$, $k = 40$ N/m y $g = 9.81$ m/s², se utilizó la regla

Tabla 3: velocidades obtenidas mediante algoritmos de integración numérica.

	Trapezoidal	Simpson
$v(x = 0)$ [m/s]	1.9914	1.9870

Analizando la fórmula para la velocidad en $x = 0$ donde $x''(t) = -a(x)$, al integrar la aceleración se obtiene $x'(t)$ que tiene unidades de m/s por lo que la raíz presente en la

formula resultaría en una supuesta velocidad con unidades de $\sqrt{\text{m/s}}$. Con lo cual, no se logró demostrar lo pedido.