AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Definiciones. Interpretación geométrica. Círculos de Gerschgorin. Método de las potencias. Método de la potencia: código. Factorización QR. Código.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

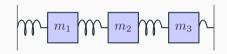
Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP
manuel.carlevaro@dmail.com

Motivación

¿Por qué estudiar autovalores/autovectores?

- Análisis modal: Frecuencias naturales y modos de vibración.
- ▶ Estabilidad: Análisis de estabilidad dinámica.
- Reducción de modelos: Simplificación conservando esencia dinámica.
- Elementos finitos: Solución de sistemas discretizados.
- Diseño y control: Ajuste de respuesta dinámica deseada.

Ejemplo: Vibraciones en un sistema masa-resorte



Ecuación dinámica:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

Autovalores:

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad A\phi = \lambda\phi$$

1

Definición: Autovalor y autovector.

Sea ${\pmb A} \in K^{n \times n}$ y ${\pmb v} \in K^n$. ${\pmb v}$ es un **autovector** de ${\pmb A}$ si

$$Av = \lambda v$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con ${m v}$.

Definición: Autovalor y autovector.

Sea ${m A} \in K^{n imes n}$ y ${m v} \in K^n$. ${m v}$ es un **autovector** de ${m A}$ si

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con ${\boldsymbol v}$.

En forma equivalente:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $oldsymbol{v}
eq oldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

Definición: Autovalor u autovector.

Sea ${m A} \in K^{n imes n}$ y ${m v} \in K^n$. ${m v}$ es un **autovector** de ${m A}$ si

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con ${m v}$.

En forma equivalente:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $oldsymbol{v}
eq oldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

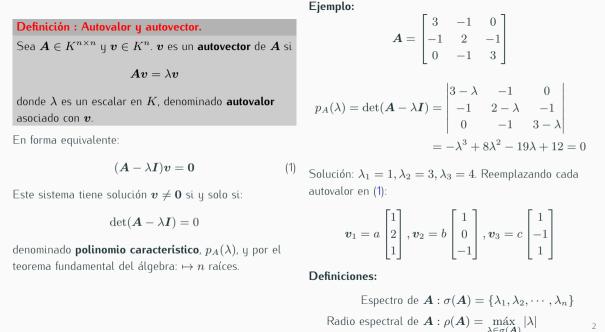
Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

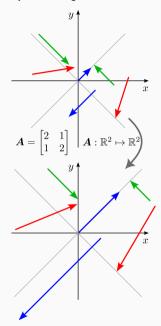
$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$$

Solución: $\lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=4$. Reemplazando cada autovalor en (1):

$$oldsymbol{v}_1 = aegin{bmatrix}1\2\1\end{bmatrix}, oldsymbol{v}_2 = begin{bmatrix}1\0\-1\end{bmatrix}, oldsymbol{v}_3 = cegin{bmatrix}1\-1\1\end{bmatrix}$$

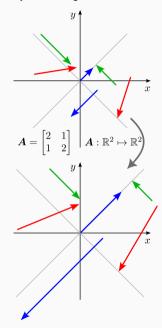


Intepretación gráfica



$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1\\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Intepretación gráfica



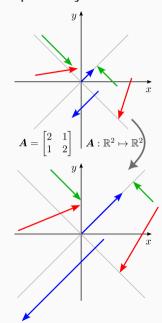
$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1\\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3

Intepretación gráfica



$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1\\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} (2-1)x + y &= 0 \\ x + (2-1)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nota: si consideramos la norma vectorial $l_2: \|\cdot\|$:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})^{1/2}$$

Si
$$oldsymbol{A}$$
 es simétrica, $\|oldsymbol{A}\|_2 =
ho(oldsymbol{A})$.

3

Métodos:

- Analítico: n < 5.
- Parciales: computan solo autovalores extremos (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de A, $\sigma(A)$. Método QR.

Métodos:

- ▶ Analítico: n < 5.
- Parciales: computan solo autovalores extremos (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de A, $\sigma(A)$. Método QR.

Teorema : Círculo de Gerschgorin.

$$m{A} \in K^{n \times n}$$
, $r_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea

$$C_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i \}$$

- 1. Si λ es un autovalor, está en uno de los C_i .
- 2. Si k círculos C_i forman una región conectada $R \in \mathbb{C}$, disjunta de los restantes n-k círculos, entonces R contiene exactamente k autovalores.

Métodos:

- Analítico: n < 5.
- Parciales: computan solo autovalores extremos (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de A, $\sigma(A)$. Método QR.

Teorema : Círculo de Gerschgorin.

 $m{A} \in K^{n \times n}$, $r_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea

$$C_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i \}$$

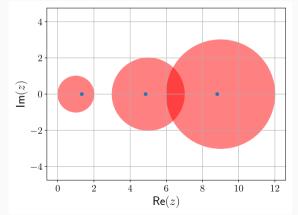
- 1. Si λ es un autovalor, está en uno de los C_i .
- 2. Si k círculos C_i forman una región conectada $R \in \mathbb{C}$, disjunta de los restantes n-k círculos, entonces R contiene exactamente k autovalores.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = |-1| + |0| = 1, r_2 = |1| + |1| = 2, r_3 = |-2| + |-1| = 3.$$

 $\lambda_1 = 1.33192769, \lambda_2 = 8.81113862, \lambda_3 = 4.85693369.$



Método de las potencias:

 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con elementos de $\sigma(A)$ que satisfacen: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$. λ_1 : autovalor dominante. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ forman una base en \mathbb{R}^n (linealmente independientes).

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$$

Multiplicando ambos miembros por $m{A}, m{A}^2, \cdots, m{A}^k, \cdots$:

$$oldsymbol{A}oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j oldsymbol{A}oldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j oldsymbol{v}_j$$

$$oldsymbol{A}^2oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j oldsymbol{A} oldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^2 oldsymbol{v}_j$$

:

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^k oldsymbol{v}_j$$

Factorizando λ_1 en la última ecuación:

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n eta_j \left(rac{\lambda_j}{\lambda_1}
ight)^k oldsymbol{v}_j$$

Dado que $\forall j, |\lambda_1| > |\lambda_j|; \lim_{k \to \infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$, y

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lim_{k \to \infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}_1 \tag{2}$$

Si
$$|\lambda_1| < 1$$
, (2) \mapsto **0**, si $|\lambda_1| > 1$, (2) diverge $(\beta_1 \neq 0)$.

Método de las potencias:

 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con elementos de $\sigma(A)$ que satisfacen: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$. λ_1 : autovalor dominante. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ forman una base en \mathbb{R}^n (linealmente independientes).

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$$

Multiplicando ambos miembros por $m{A}, m{A}^2, \cdots, m{A}^k, \cdots$:

$$oldsymbol{A}oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j oldsymbol{A}oldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j oldsymbol{v}_j$$

$$m{A}^2m{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j m{A} m{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^2 m{v}_j$$

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^k oldsymbol{v}_j$$

Factorizando λ_1 en la última ecuación:

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n eta_j \left(rac{\lambda_j}{\lambda_1}
ight)^k oldsymbol{v}_j$$

Dado que $\forall j, |\lambda_1| > |\lambda_j|; \lim_{k \to \infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$, y

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lim_{k \to \infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}_1 \tag{2}$$

Si $|\lambda_1| < 1$, (2) \mapsto **0**, si $|\lambda_1| > 1$, (2) diverge $(\beta_1 \neq 0)$.

Procedimiento:

- lacktriangle Iniciamos con $oldsymbol{x}=[1,1,\cdots,1]^{\intercal}$
- ▶ Generamos la secuencia

$$oldsymbol{y}_k = oldsymbol{A} oldsymbol{x}_k, \quad oldsymbol{x}_{k+1} = rac{1}{c_{k+1}} oldsymbol{y}_k$$

donde $c_{k+1} = \| \boldsymbol{y}_k \|_{\infty}$

Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{v}_1, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \lambda_1$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con
$$\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4,1\}$$
. Tomemos $\boldsymbol{x}_0 = [1,1]^\intercal$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -5\\13 \end{bmatrix} = 13[-0.38462,1]^{\mathsf{T}} = c_1\boldsymbol{x}_1$$

$$A x_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^{\mathsf{T}} = c_2 x_2$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{vmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{vmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^{\mathsf{T}} = c_3\mathbf{x}_3$$

$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186\\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^{\mathsf{T}} = c_4\mathbf{x}_4$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^{\mathsf{T}} = c_5\mathbf{x}_5$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} -2.00073 \\ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^{\mathsf{T}} = c_6\mathbf{x}_6$$

Resulta:

$$\lim_{k o \infty} oldsymbol{x}_k = egin{bmatrix} -rac{1}{2} \ 1 \end{bmatrix}, & \lim_{k o \infty} c_k = 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$m{A} = egin{bmatrix} -2 & -3 \ 6 & 7 \end{bmatrix}, m{v}_1 = egin{bmatrix} 1 \ -2 \end{bmatrix}, m{v}_2 = egin{bmatrix} 1 \ -1 \end{bmatrix}$$
 Con $\sigma(m{A}) = \{4,1\}$. Tomemos $m{x}_0 = [1,1]^\intercal$:

 $Ax_0 = \begin{vmatrix} -5 \\ 13 \end{vmatrix} = 13[-0.38462, 1]^{\mathsf{T}} = c_1x_1$

$$=\begin{bmatrix} 1\\-1 \end{bmatrix}$$
 $\mathsf{T}_{:}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186 \\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^{\mathsf{T}} = c_4\mathbf{x}_4$$

$$\begin{bmatrix} 557 \\ 294 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^{\mathsf{T}} = c_5\mathbf{x}_5$$

 $\lim_{k \to \infty} x_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lim_{k \to \infty} c_k = 4$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} -2.00073 \\ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^{\mathsf{T}} = c_6\mathbf{x}_6$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^{\mathsf{T}} = c_2\mathbf{x}_2$$

Resulta:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{bmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^{\mathsf{T}} = c_3\mathbf{x}_3$$

Desventajas:

- ▶ No se sabe al inicio si **A** tiene un autovalor dominante.
- lacktriangle No se conoce cómo debe elegirse $m{x}_0$ para que tenga una contribución no nula del autovector asociado al autovalor dominante, si existe.

Método de las potencias: código

```
1 #!/usr/bin/env pvthon3
 2 import numpy as np
 3
 4 def iter potencia(A, num iteraciones):
       n = A.shape[0]
       # Inicializar un vector unitario de tamaño n
       x = np.ones(n)
 8
       for in range(num iteraciones):
           # Multiplicar la matriz A por el vector x
1.0
           v = np.dot(A, x)
1.1
           # Obtener la norma máxima
13
           v abs = np.abs(v)
           c = v abs.max()
14
           # Normalizar el vector resultante
           x = v / c
16
17
18
       # Devolver el autovalor dominante y el autovector
       # correspondiente
19
       return c. x
20
```

```
22 # Eiemplo de uso
23 # Definir una matriz de eiemplo
24 A = np.array([[0, 11, -5],
                [-2, 17, -7],
25
                 \Gamma = 4.26. = 1011
26
27
28 # Especificar el número de iteraciones
29 \text{ num iteraciones} = 100
30
31 # Aplicar el algoritmo de las potencias
32 autovalor, autovector = iter potencia(A, num iteraciones)
33
34 print(f"Autovalor dominante: {autovalor}")
35 print("Autovector correspondiente:")
36 print(autovector)
```

```
$ ./potencias.py
Autovalor dominante: 3.99999999999876
Autovector correspondiente:
[0.4 0.6 1.]
```

Método QR

Teorema:.

Si A es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son autovalores distintos de A con autovectores asociados $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un conjunto **linealmente independiente**.

Método QR

Teorema:.

Si A es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son autovalores distintos de A con autovectores asociados $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un conjunto **linealmente independiente**.

Definición: Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{ m{v}_1, m{v}_2, \cdots, m{v}_k \}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle m{v}_i, m{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle m{v}_i, m{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\| {m v}_i \|_2 = 1$$
 para todo $i = 1, 2, \cdots, n$

Método QR

Teorema:.

Si A es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son autovalores distintos de A con autovectores asociados $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un conjunto **linealmente independiente**.

Definición: Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{ m{v}_1, m{v}_2, \cdots, m{v}_k \}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle m{v}_i, m{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle m{v}_i, m{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\| {m v}_i \|_2 = 1$$
 para todo $i = 1, 2, \cdots, n$

Teorema : Proceso de Gram-Schmidt.

Sea $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ un conjunto de k vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n . Entonces, $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ definido mediante:

$$egin{aligned} oldsymbol{v}_1 &= oldsymbol{x}_1 \ oldsymbol{v}_2 &= oldsymbol{x}_2 - rac{\langle oldsymbol{x}_2, oldsymbol{v}_1
angle}{\langle oldsymbol{v}_1, oldsymbol{v}_1
angle} oldsymbol{v}_1 \ oldsymbol{v}_3 &= oldsymbol{x}_3 - rac{\langle oldsymbol{x}_3, oldsymbol{v}_1
angle}{\langle oldsymbol{v}_1, oldsymbol{v}_1
angle} oldsymbol{v}_1 - rac{\langle oldsymbol{x}_3, oldsymbol{v}_2
angle}{\langle oldsymbol{v}_2, oldsymbol{v}_2
angle} \ oldsymbol{v}_k &= oldsymbol{x}_k - \sum^{k-1} rac{\langle oldsymbol{x}_k, oldsymbol{v}_i
angle}{\langle oldsymbol{v}_i, oldsymbol{v}_i
angle} oldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

es un conjunto de k vectores ortogonales en \mathbb{R}^n .

$$S = \left\{ oldsymbol{x}_1 = egin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, oldsymbol{x}_2 = egin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}
ight\}$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

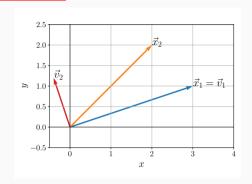
$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\langle {m v}_1, {m v}_2
angle = -rac{6}{5} + rac{6}{5} = 0$$



Vectores ortonormales:

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3\\1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{40}{25}}} \begin{bmatrix} -2/5\\6/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1\\3 \end{bmatrix}$$

Definición: Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas $\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ forman un conjunto ortonormal en \mathbb{R}^n .

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas $\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ forman un conjunto ortonormal en \mathbb{R}^n .

Propiedades:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$ es invertible con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $lackbox{} orall oldsymbol{x}, oldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle oldsymbol{Q} oldsymbol{x}, oldsymbol{Q} oldsymbol{y}
 angle = \langle oldsymbol{x}, oldsymbol{y}
 angle$
- $lacksquare orall oldsymbol{x}
 otag egin{aligned} lacksquare eta^n, \|oldsymbol{Q}oldsymbol{x}\|_2 = \|oldsymbol{x}\|_2 \end{aligned}$
- $lackbox{ }$ Cualquier matriz invertible $oldsymbol{Q}$ con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^{\intercal}$ es ortogonal.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ forman un conjunto ortonormal en \mathbb{R}^n .

Propiedades:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$ es invertible con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $lackbox{} orall oldsymbol{x}, oldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle oldsymbol{Q} oldsymbol{x}, oldsymbol{Q} oldsymbol{y}
 angle = \langle oldsymbol{x}, oldsymbol{y}
 angle$
- $\blacktriangleright \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- $lackbox{ }$ Cualquier matriz invertible $oldsymbol{Q}$ con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición: Matriz similar.

Dos matrices \boldsymbol{A} y \boldsymbol{B} son **similares** si existe una matriz no singular \boldsymbol{S} con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Definición: Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ forman un conjunto ortonormal en \mathbb{R}^n .

Propiedades:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$ es invertible con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $\blacktriangleright \ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x},\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$
- $\blacktriangleright \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- $lackbox{ }$ Cualquier matriz invertible $oldsymbol{Q}$ con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición: Matriz similar.

Dos matrices A y B son **similares** si existe una matriz no singular S con $A = S^{-1}BS$.

Teorema:.

Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices similares con $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$, y λ es un autovalor de \mathbf{A} con el autovector \mathbf{v} asociado, entonces λ es un autovalor de \mathbf{B} con autovector asociado $\mathbf{S}\mathbf{v}$.

Definición: Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ forman un conjunto ortonormal en \mathbb{R}^n .

Propiedades:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$ es invertible con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $\blacktriangleright \ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x},\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$
- $\blacktriangleright \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- $lackbox{ }$ Cualquier matriz invertible $oldsymbol{Q}$ con $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición: Matriz similar.

Dos matrices A y B son **similares** si existe una matriz no singular S con $A = S^{-1}BS$.

Teorema:.

Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices similares con $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$, y λ es un autovalor de \mathbf{A} con el autovector \mathbf{v} asociado, entonces λ es un autovalor de \mathbf{B} con autovector asociado $\mathbf{S}\mathbf{v}$.

Teorema:.

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es similar a una matriz diagonal \mathbf{D} si y sólo si \mathbf{A} tiene n autovectores linealmente independientes. En este caso $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, donde las columnas de \mathbf{S} son los autovectores y el i-ésimo elemento diagonal de \mathbf{D} es el autovalor que corresponde a la i-ésima columna de \mathbf{S} .

Teorema: Teorema de Schur.

Sea $m{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $m{U}$ con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde T es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de A.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \text{matrices unitarias}.$

Teorema: Teorema de Schur.

Sea $m{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $m{U}$ con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde $m{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $m{A}$.

Se cumple $\| \boldsymbol{U} \boldsymbol{x} \|_2 = \| \boldsymbol{x} \|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \mathsf{matrices}$ unitarias.

Factorización QR: $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$, donde:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $lackbox{ } oldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $m{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $m{U}$ con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde $m{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $m{A}$.

Se cumple $\| \boldsymbol{U} \boldsymbol{x} \|_2 = \| \boldsymbol{x} \|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \mathsf{matrices}$ unitarias.

Factorización QR: $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$, donde:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $lackbox{ } R$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- ▶ Ortogonalización de Gram-Schmidt
- ▶ Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$oldsymbol{A} = [oldsymbol{a}_1 | oldsymbol{a}_2 | \cdots | oldsymbol{a}_n]$$

$$oldsymbol{u}_1 = oldsymbol{a}_1, \quad \hat{oldsymbol{e}}_1 = rac{oldsymbol{u}_1}{\|oldsymbol{u}_1\|}$$

$$oldsymbol{u}_2 = oldsymbol{a}_2 - \langle \hat{oldsymbol{e}}_1, oldsymbol{a}_2
angle rac{oldsymbol{u}_2}{\|oldsymbol{u}_2\|}$$

$$m{u}_3 = m{a}_3 - \langle \hat{m{e}}_1, m{a}_3
angle \hat{m{e}}_1 - \langle \hat{m{e}}_2, m{a}_3
angle \hat{m{e}}_2, \quad \hat{m{e}}_3 = rac{m{u}_3}{\|m{u}_3\|}$$

$$oldsymbol{u}_k = oldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \hat{e}_j, oldsymbol{a}_k
angle, \quad \hat{e}_k = rac{oldsymbol{u}_k}{\|oldsymbol{u}_k\|}$$

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $m{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $m{U}$ con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde T es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de A.

Se cumple $\| \boldsymbol{U} \boldsymbol{x} \|_2 = \| \boldsymbol{x} \|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \mathsf{matrices}$ unitarias.

Factorización QR: A = QR, donde:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $lackbox{ } oldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- ▶ Ortogonalización de Gram-Schmidt
- ▶ Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$egin{align} oldsymbol{A} &= egin{bmatrix} oldsymbol{a}_1 oldsymbol{a}_2 ig| \cdots ig| oldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \ oldsymbol{u}_1 &= oldsymbol{a}_1, \quad \hat{e}_1 = rac{oldsymbol{u}_1}{\|oldsymbol{u}_1\|} \end{split}$$

$$egin{align} u_2 &= a_2 - \langle \hat{e}_1, a_2
angle \hat{e}_1, & \hat{e}_2 &= rac{u_2}{\|u_2\|} \ u_3 &= a_3 - \langle \hat{e}_1, a_3
angle \hat{e}_1 - \langle \hat{e}_2, a_3
angle \hat{e}_2, & \hat{e}_3 &= rac{u_3}{\|u_3\|} \ \end{pmatrix}$$

.

$$oldsymbol{u}_k = oldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \hat{oldsymbol{e}}_j, oldsymbol{a}_{oldsymbol{k}}
angle, \quad \hat{oldsymbol{e}}_k = rac{oldsymbol{u}_k}{\|oldsymbol{u}_k\|}$$

Ahora podemos expresar los a_i en la nueva base:

$$egin{aligned} m{a}_1 &= \langle \hat{e}_1, m{a}_1
angle \hat{e}_1 \ m{a}_2 &= \langle \hat{e}_1, m{a}_2
angle \hat{e}_1 + \langle \hat{e}_2, m{a}_2
angle \hat{e}_2 \ m{a}_3 &= \langle \hat{e}_1, m{a}_3
angle \hat{e}_1 + \langle \hat{e}_2, m{a}_3
angle \hat{e}_2 + \langle \hat{e}_3, m{a}_3
angle \hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$oldsymbol{a}_k = \sum_{j=1}^k \langle \hat{oldsymbol{e}}_j, oldsymbol{a}_k
angle \hat{oldsymbol{e}}_j$$

Resulta
$$oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$$
, con $oldsymbol{Q} = [oldsymbol{e}_1 | oldsymbol{e}_2 | \cdots | oldsymbol{e}_n]$, y

$$m{R} = egin{bmatrix} \langle m{e_1}m{a_1}
angle & \langle m{e_1}m{a_2}
angle & \langle m{e_1}m{a_3}
angle & \cdots & \langle m{e_1}m{a_n}
angle \ 0 & \langle m{e_2}m{a_2}
angle & \langle m{e_2}m{a_3}
angle & \cdots & \langle m{e_2}m{a_n}
angle \ 0 & 0 & \langle m{e_3}m{a_3}
angle & \cdots & \langle m{e_3}m{a_n}
angle \ dots & dots & dots & dots & \ddots & \ddots \ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle m{e_n},m{a_n}
angle \end{bmatrix}$$

Resulta $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$, con $oldsymbol{Q} = [oldsymbol{e}_1 | oldsymbol{e}_2 | \cdots | oldsymbol{e}_n]$, y

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \langle e_1 \mathbf{a}_1 \rangle & \langle e_1 \mathbf{a}_2 \rangle & \langle e_1 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle e_1 \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & \langle e_2 \mathbf{a}_2 \rangle & \langle e_2 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle e_2 \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle e_3 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle e_3 \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle e_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Código Python:

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import numpy as np
4
5 def gram_schmidt_qr(A):
6     m, n = A.shape
7     Q = np.zeros((m, n))
8     R = np.zeros((n, n))
```

```
for j in range(n):
10
           v = A[:, j]
11
12
           for i in range(i):
                R[i, j] = np.dot(0[:, i], A[:, j])
13
               v = v - R[i, i] * 0[:, i]
14
           R[j, j] = np.linalg.norm(v)
           0[:, i] = v / R[i, i]
16
17
       return Q, R
18
19
20 # Eiemplo de uso
21 # Definir una matriz de eiemplo
22 A = np.array([[1, 4, 3],
                [2, 5, 1],
23
                 [3, 6, 2]
24
25
26 # Aplicar la factorización OR usando el método
27 # de Gram-Schmidt
28 0, R = gram schmidt <math>gr(A)
29
30 print("Matriz 0:")
31 print(Q)
32 print("Matriz R:")
33 print(R)
34 print(0@R)
```

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

- 1. $A_0 = A$
- 2. Para $k = 0, 1, 2, ..., \, \text{dado } \boldsymbol{A}_k$:
 - 2.1 Calcular $oldsymbol{Q}_{k+1}oldsymbol{R}_{k+1}=oldsymbol{A}_k$
 - 2.2 Definir $oldsymbol{A}_{k+1} = oldsymbol{R}_{k+1} oldsymbol{Q}_{k+1}$

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

- 1. $A_0 = A$
- 2. Para $k = 0, 1, 2, ..., dado A_k$:
 - 2.1 Calcular $Q_{k+1}R_{k+1} = A_k$
 - 2.2 Definir $oldsymbol{A}_{k+1} = oldsymbol{R}_{k+1} oldsymbol{Q}_{k+1}$

Teorema: Convergencia.

Si los autovalores de una matriz $oldsymbol{A}$ verifican que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

entonces la sucesión de matrices equivalentes contruidas con el algoritmo QR converge a una matriz triangular superior.

Código Python:

```
1 #!/usr/bin/env pvthon3
 2 import numpy as np
 3
 4 def algoritmo gr(A, num iter):
       n = A.shape[0]
       autovalores = np.zeros(n, dtvpe=np.complex128)
       for i in range(num_iter):
           Q, R = np.linalg.gr(A)
           A = np.dot(R, 0)
       for i in range(n):
10
           autovalores[i] = A[i, i]
11
       return autovalores
12
13
14 A = np.array([[1, 2, 3],
                [4, 5, 6],
15
16
                 [7, 8, 9]])
17
18 \text{ num iter} = 100
19 autovalores = algoritmo_gr(A, num_iter)
20 print("Autovalores:")
21 print(autovalores)
```

LECTURAS RECOMENDADAS

- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 9.
- Carlos Moreno González. Introducción al cálculo numérico. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 3.
- ▶ B. Bradie. *A Friendly Introduction to Numerical Analysis*. New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 4.
- ▶ A.J. Salgado y S.M. Wise. *Classical Numerical Analysis*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108942607. Capítulo 8.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. *Numerical Mathematics*. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 5.