Transformada de Laplace

Transformada de Laplace. Transformada inversa. Solución de problemas con condiciones iniciales.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

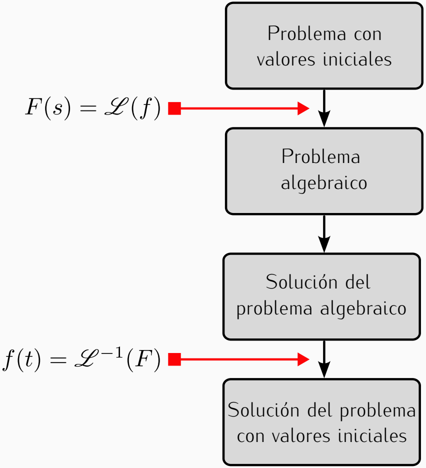
Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2025

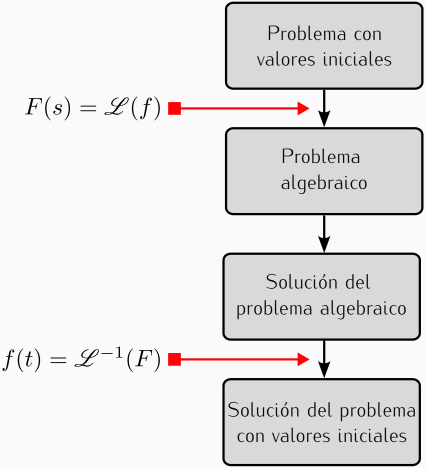
Transformada de Laplace

Motivación:



Transformada de Laplace

Motivación:

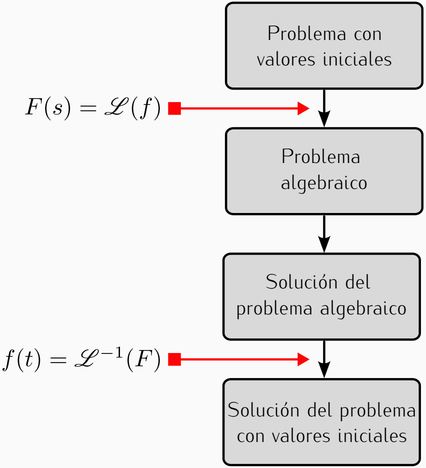


Definición : Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$. Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Motivación:



Definición : Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$. Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Teorema : Existencia.

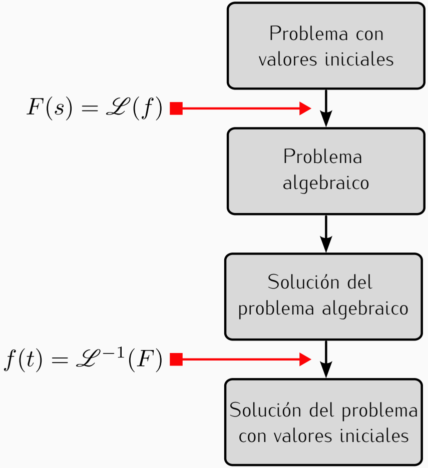
Si $f(t)$ está definida y es continua a tramos en cada intervalo finito de $\mathbb{R}^+$, y satisface la condición

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \text{ (restricción de crecimiento exponencial)}$$

para algunas constantes, M y k, entonces existe $\mathscr{L}(f)$, $\forall s > k$.

Transformada de Laplace

Motivación:



Definición : Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$. Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Teorema : Existencia.

Si $f(t)$ está definida y es continua a tramos en cada intervalo finito de $\mathbb{R}^+$, y satisface la condición

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \text{ (restricción de crecimiento exponencial)}$$

para algunas constantes, M y k, entonces existe $\mathscr{L}(f)$, $\forall s > k$.

Si $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, $f(t)$ es la **transformada inversa** de $F(s)$:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

Por lo tanto: $\mathscr{L}^{-1}[\mathscr{L}(f)] = f$ y $\mathscr{L}[\mathscr{L}^{-1}(F)] = F$.

Caso general:

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, K(t,u)\, dt = F(u)$$

donde $K(t,u)$ es la función **núcleo** o **kernel**.

Cuando K tiene asociado un *kernel inverso* $K^{-1}(u,t)$, se puede definir (más o menos) la transformación inversa:

$$f(t) = \int_{u_1}^{u_2} (Tf)(u)\, K^{-1}(u,t)\, dt$$

Si el kernel es **simétrico**: $K(t,u) = K(u,t) \mapsto$ operadores auto-adjuntos.

Caso general: ejemplos

Transformada	**Símbolo**	K	(t_1, t_2)	K^{-1}	(u_1, u_2)
Fourier	$\mathscr{F}$	$\frac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{e^{+iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty, \infty)$
Fourier seno	$\mathscr{F}_s$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}(ut)$	$(0, \infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}(ut)$	$(0, \infty)$
Fourier coseno	$\mathscr{F}_c$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ut)$	$(0, \infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ut)$	$(0, \infty)$
Laplace	$\mathscr{L}$	e^{-ut}	$(0, \infty)$	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Laplace bilateral	$\mathscr{B}$	e^{-ut}	$(-\infty, \infty)$	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Hilbert	$\mathcal{H}il$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$(-\infty, \infty)$
Legendre	$\mathcal{J}$	$P_n(t)$	$(-1, 1)$	(*)	$(0, \infty)$

$$(^*)\ \mathcal{J}[f(x)] = \tilde{f}(n) = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, f(x)\, dx$$

$$\mathcal{J}^{-1}[\tilde{f}(n)] = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\tilde{f}(n) P_n(x)$$

$f(t) = 1,\ t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(1) &= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^T 1 \cdot e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}e^{0}\right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}}$$

Ejemplos

$f(t) = 1,\, t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(1) &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} 1 \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{T} \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^{0} \right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}}$$

$f(t) = e^{at},\, t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(e^{at}) &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, e^{at}\, dt \\
&= \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}}$$

cuando $s - a > 0$.

Tabla de transformadas más comunes

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\delta(t-a)$	e^{-as}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$e^{at}t$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$\frac{\sin(at)}{t}$	$\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{1-e^{-at}}{t}$	$\ln\left(\frac{s+a}{s}\right)$	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$\frac{J_0(at)}{t}$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{L}$.

Para funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace existan, y para dos constantes arbitrarias a y b, se cumple que:

$$\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathscr{L}[f(t)] + b\mathscr{L}[g(t)]$$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{L}$.

Para funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace existan, y para dos constantes arbitrarias a y b, se cumple que:

$$\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathscr{L}[f(t)] + b\mathscr{L}[g(t)]$$

Ejemplo: Hallar las transformadas de $\cosh at$ y $\operatorname{senh} at$. Dado que:

$$\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$$
$$\operatorname{senh} at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$$

Por la linealidad:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\cosh at) &= \frac{1}{2}[\mathscr{L}(e^{at}) + \mathscr{L}(e^{-at})]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)\\ &= \frac{s}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\operatorname{senh} at) &= \frac{1}{2}[\mathscr{L}(e^{at}) - \mathscr{L}(e^{-at})]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)\\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

Teorema : Transformada de f'.

Sea f continua en $[0,\infty)$, con f' continua a tramos en $[0,k]$ para todo $k>0$, y $\lim_{k\to\infty} e^{-sk}f(k)=0$ si $s>0$. Entonces:

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

Demostración.

De la definición, integrando por partes:

$$\int_0^k e^{-st}f'(t)\,dt = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^k - \int_0^k -se^{-st}f(t)\,dt$$
$$= e^{-sk}f(k) - f(0) + s\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt$$

Tomando el límite $k\to\infty$:

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \lim_{k\to\infty}\left[e^{-sk}f(k) - f(0) + s\int_0^k e^{-st}f(t)\,dt\right]$$
$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = -f(0) + sF(s)$$

□

Si f y f' son continuas para $t \geq 0$, cumplen la restricción de crecimiento exponencial y f'' es continua por tramos en cada intervalo finito en $\mathbb{R}^+$:

$$\mathscr{L}(f'') = s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

Aplicamos el teorema anterior a f'':

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f'') &= s\mathscr{L}(f') - f'(0) \\ &= s[s\mathscr{L}(f) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathscr{L}(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Transformada de derivadas superiores

Si f y f' son continuas para $t \geq 0$, cumplen la restricción de crecimiento exponencial y f'' es continua por tramos en cada intervalo finito en $\mathbb{R}^+$:

$$\mathscr{L}(f'') = s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

Aplicamos el teorema anterior a f'':

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f'') &= s\mathscr{L}(f') - f'(0)\\ &= s[s\mathscr{L}(f) - f(0)] - f'(0)\\ &= s^2\mathscr{L}(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Transformada de derivada $n-$ésima:
Si f, $f', \cdots, f^{(n-1)}$ son continuas para todo $t \geq 0$ y satisfacen la restricción de crecimiento exponencial, y si $f^{(n)}$ es una función continua por tramos en cada intervalo finito en $\mathbb{R}^+$, entonces la transformada de $f^{(n)}$ satisface:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(n)}] = s^n\mathscr{L}(f) - s^{n-1}f(0)\\ - s^{n-2}f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

Transformada de $\cos \omega t$:

$f(t) = \cos \omega t$,

$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t$:

$$\mathscr{L}(f'') = s^2 \mathscr{L}(f) - s = -\omega^2 \mathscr{L}(f)$$

$$\boxed{\mathscr{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

Ejemplos

Transformada de $\cos \omega t$:

$f(t) = \cos \omega t$,
$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t$:

$$\mathscr{L}(f'') = s^2 \mathscr{L}(f) - s = -\omega^2 \mathscr{L}(f)$$

$$\boxed{\mathscr{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

Transformada de $\operatorname{sen} \omega t$:

$g(t) = \operatorname{sen} \omega t,\ g(0) = 0,\ g'(t) = \omega \cos \omega t$:

$$\mathscr{L}(g') = s\mathscr{L}(g) = \omega \mathscr{L}(\cos \omega t)$$

$$\boxed{\mathscr{L}(\operatorname{sen} \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

$$f'' + af' + bf = r(t),\ f(0) = K_0,\ f'(0) = K_1$$

$f'' + af' + bf = r(t),\ f(0) = K_0,\ f'(0) = K_1$

- **Paso 1:** $t \mapsto s$

$$[s^2 F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s + a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

$$f'' + af' + bf = r(t),\ f(0) = K_0,\ f'(0) = K_1$$

- **Paso 1:** $t \mapsto s$

$$[s^2 F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s+a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

- **Paso 2:** Resolver $F(s)$
  Función transferencia:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}a\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$

$$F(s) = [(s+a)f(0) + f'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

$f'' + af' + bf = r(t),\ f(0) = K_0,\ f'(0) = K_1$

- **Paso 1:** $t \mapsto s$

$$[s^2F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s + a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

- **Paso 2:** Resolver $F(s)$

Función transferencia:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}a\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$

$$F(s) = [(s + a)f(0) + f'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

Si $f(0) = f'(0) = 0$, $F = RQ$:

$$Q = \frac{F}{R} = \frac{\mathscr{L}(\text{salida})}{\mathscr{L}(\text{entrada})}$$

Q no depende de r ni de las condiciones iniciales (solo de a y b).

$f'' + af' + bf = r(t),\ f(0) = K_0,\ f'(0) = K_1$

- **Paso 1:** $t \mapsto s$

$$[s^2F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s + a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

- **Paso 2:** Resolver $F(s)$
  Función transferencia:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}a\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$

$$F(s) = [(s + a)f(0) + f'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

Si $f(0) = f'(0) = 0$, $F = RQ$:

$$Q = \frac{F}{R} = \frac{\mathscr{L}(\text{salida})}{\mathscr{L}(\text{entrada})}$$

Q no depende de r ni de las condiciones iniciales (solo de a y b).

- **Paso 3:** Inversión de F

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)$$

Resolver:

$$y'' - y = t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Solución:

Paso 1

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{s^2}$$
$$(s^2 - 1)Y = s + 1 + \frac{1}{s}$$

Paso 2

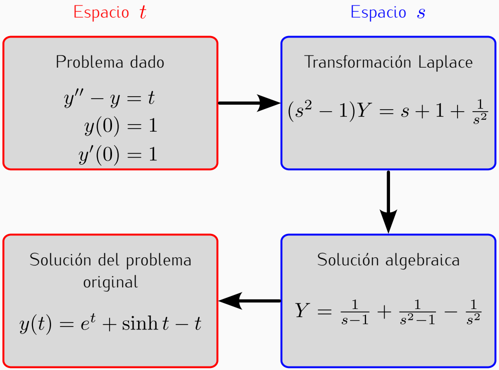
La función transferencia es $Q = 1/(s^2 - 1)$ y

$$Y = (s+1)Q + \frac{1}{s^2}Q = \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

$$Y = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\right)$$

Paso 3

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}(Y) \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= e^t + \operatorname{senh} t - t \end{aligned}$$



Teorema : Corrimiento s.

Si $f(t)$ tiene transformada $F(s)$ ($s > k$ para algún k), entonces:

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

o, antitransformando miembro a miembro:

$$e^{at}f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s-a)]$$

donde $s - a > k$.

Teorema : Corrimiento t.

Si $f(t)$ tiene transformada $F(s)$, entonces la ***función desplazada***

$$\tilde{f}(t) = f(t-a)H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ f(t-a) & \text{si } t > a \end{cases}$$

tiene transformada $e^{-as}F(s)$, es decir:

$$\mathscr{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

o, tomando antitransformadas:

$$f(t-a)H(t-a) = \mathscr{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]$$

La convolución de dos funciones f y g es un caso particular de **transformación integral**, y se define como:

$$c(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

o equivalentemente

$$c(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$$

Teorema : Convolución.

Si dos funciones f y g satisfacen la restricción de crecimiento exponencial, de modo que sus transformadas F y G existen, el producto $C = FG$ es la transformada de $(f * g)$.

Lecturas recomendadas

- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. ***Advanced Engineering Mathematics.*** Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 6.
- Peter V O'Neil. ***Matemáticas avanzadas para ingeniería.*** 7.ª ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 1.
- K A Stroud y Dexter J Booth. ***Advanced Engineering Mathematics.*** 6.ª ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Programas 2, 3 y 4.