Cálculo Avanzado

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad Regional La Plata
Universidad Tecnológica Nacional

Práctica: Unidad 6.
Tema: Autovalores y autovectores.
Profesor Titular: Manuel Carlevaro.
Ayudante de Primera: Christian Molina.

Ejercicio 1.

Compruebe que

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

es un autovector de

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 53 & -70 \\ 35 & -46 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el autovalor asociado?

Ejercicio 2.

Para la matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 179 & -99 \\ 255 & -139 \end{bmatrix}$$

el vector $\boldsymbol{v} = [3, 5]^\intercal$ es un autovector. Compruebe esta afirmación y determine el autovalor asociado.

Ejercicio 3.

Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son dos autovectores de la matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$, ambos asociados al autovalor λ:

a) ¿Es $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ un autovector de $\boldsymbol{A}$?. En caso afirmativo, ¿cuál es su autovector?

b) ¿Es $\boldsymbol{v}$ un autovector de la matriz $3\boldsymbol{A}$?. En caso afirmativo, ¿cuál es el autovalor asociado?

Ejercicio 4.

Utilizando los círculos de Gerschgorin, localice el espectro de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.

Halle los autovalores y autovectores de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -13 & 20 \\ -12 & 18 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.

Halle los autovalores y autovectores de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7.

Utilice el método de las potencias para determinar el autovalor dominante y su autovector asociado de las matrices:

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8.

Muestre que se puede formar una base para $\mathbb{R}^3$ usando los autovalores de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9.

Muestre que ningún conjunto de autovectores de la matriz 3×3

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

puede formar una base en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 10.

a) Muestre que los vectores $\boldsymbol{v}_1 = [0, 4, 2]^\intercal$ $\boldsymbol{v}_2 = [-5, -1, 2]^\intercal$ y $\boldsymbol{v}_3 = [1, -1, 2]^\intercal$ forman un conjunto ortogonal.

b) Use el conjunto anterior para formar una base ortonormal.

Ejercicio 11.

Use el proceso de Gram-Schmidt para determinar un conjunto de vectores ortogonales a partir de los vectores linealmente independientes:

$$\boldsymbol{x}_1 = [1,0,0]^\intercal,\ \boldsymbol{x}_2 = [1,1,0]^\intercal,\ \boldsymbol{x}_3 = [1,1,1]^\intercal$$

Ejercicio 12.

Muestre que la matriz

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

formada a partir del conjunto ortonormal de vectores encontrado en el problema 3, es una matriz ortogonal.