

# APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

MOTIVACIÓN. AJUSTE DISCRETO LINEAL. AJUSTE POLINÓMICO. AJUSTES POTENCIAL Y EXPONENCIAL. EJEMPLOS CON PYTHON. AJUSTE CONTINUO POLINÓMICO, FUNCIONES ORTOGONALES. POLINOMIOS DE LEGENDRE. POLINOMIOS DE CHEBISHEV.

---

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

## Dos clases generales de problemas:

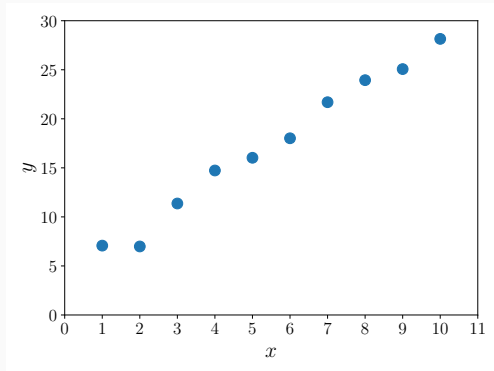
- ▶ Ajuste de funciones a un conjunto de datos  $\mapsto$  **aproximación discreta**.
- ▶ Representación de una función conocida por funciones más simples  $\mapsto$  **aproximación continua**.

# AJUSTE DISCRETO

Datos:

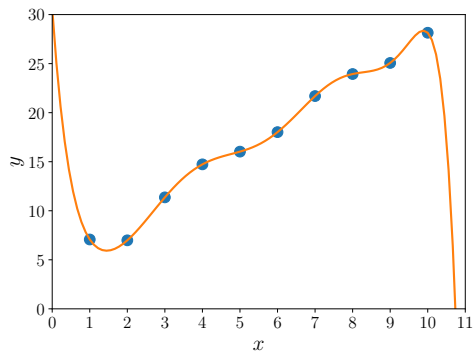
$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
1	7.07	6	18.02
2	6.99	7	21.69
3	11.37	8	23.94
4	14.73	9	25.07
5	16.03	10	28.15

Figura:



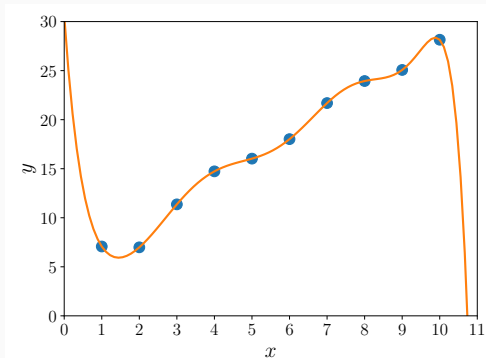
**Ajuste exacto:** polinomio de grado 9

$$\begin{aligned}P_9(x) = & 30.63 - 55.47x + 53.23x^2 \\& - 30.82x^3 + 12.24x^4 - 3.21x^5 \\& + 0.53x^6 - 0.053x^7 + 0.0029x^8 \\& - 6.4 \times 10^{-5}x^9\end{aligned}$$



**Ajuste exacto:** polinomio de grado 9

$$\begin{aligned}P_9(x) = & 30.63 - 55.47x + 53.23x^2 \\& - 30.82x^3 + 12.24x^4 - 3.21x^5 \\& + 0.53x^6 - 0.053x^7 + 0.0029x^8 \\& - 6.4 \times 10^{-5}x^9\end{aligned}$$



**Aproximación lineal:**

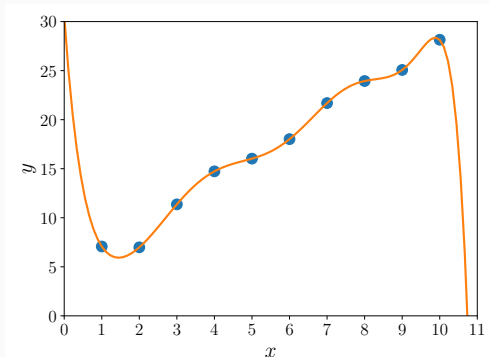
$$y = a_1 x + a_0$$

► Problema **minimax**:

$$E_\infty(a_0, a_1) = \max_{1 \leq i \leq 10} \{|y_i - (a_1 x_i + a_0)|\}$$

### Ajuste exacto: polinomio de grado 9

$$\begin{aligned}P_9(x) = & 30.63 - 55.47x + 53.23x^2 \\ & - 30.82x^3 + 12.24x^4 - 3.21x^5 \\ & + 0.53x^6 - 0.053x^7 + 0.0029x^8 \\ & - 6.4 \times 10^{-5}x^9\end{aligned}$$



### Aproximación lineal:

$$y = a_1 x + a_0$$

► Problema **minimax**:

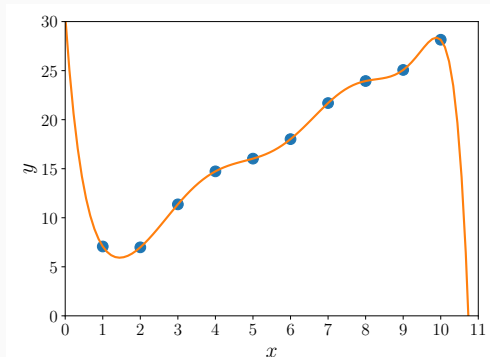
$$E_\infty(a_0, a_1) = \max_{1 \leq i \leq 10} \{|y_i - (a_1 x_i + a_0)|\}$$

► Desviación absoluta:

$$E_1(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i + a_0)|$$

## Ajuste exacto: polinomio de grado 9

$$\begin{aligned}P_9(x) = & 30.63 - 55.47x + 53.23x^2 \\ & - 30.82x^3 + 12.24x^4 - 3.21x^5 \\ & + 0.53x^6 - 0.053x^7 + 0.0029x^8 \\ & - 6.4 \times 10^{-5}x^9\end{aligned}$$



## Aproximación lineal:

$$y = a_1 x + a_0$$

► Problema **minimax**:

$$E_\infty(a_0, a_1) = \max_{1 \leq i \leq 10} \{|y_i - (a_1 x_i + a_0)|\}$$

► Desviación absoluta:

$$E_1(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1 x_i + a_0)|$$

► **Mínimos cuadrados**:

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2$$



Para el conjunto  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ , **minimizar** respecto de  $a_0, a_1$ :

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2$$

Para el conjunto  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ , **minimizar** respecto de  $a_0, a_1$ :

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

Esto es:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i)$$

Para el conjunto  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ , **minimizar** respecto de  $a_0, a_1$ :

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

Esto es:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i)$$

**Ecuaciones normales:**

$$a_0 \cdot m + a_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

Para el conjunto  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ , **minimizar** respecto de  $a_0, a_1$ :

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

Esto es:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i)$$

**Ecuaciones normales:**

$$a_0 \cdot m + a_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

**Solución:**

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i \sum_{i=1}^m x_i}{m \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^2}$$

$$a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^2}$$

**Ejemplo:** Encontrar la recta de mínimos cuadrados:

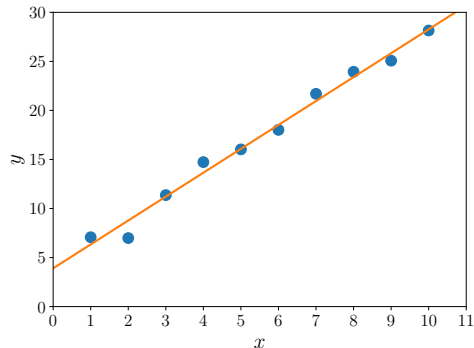
$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$P(x_i) = 2.437x_i + 3.903$
1	7.07	1	7.07	6.34
2	6.99	4	13.97	8.78
3	11.37	9	34.10	11.21
4	14.73	16	58.92	13.65
5	16.03	25	80.14	16.09
6	18.02	36	108.10	18.52
7	21.69	49	151.85	20.96
8	23.94	64	191.52	23.40
9	25.07	81	225.62	25.83
10	28.15	100	281.49	28.27
55	173.04	385	1152.77	$E \approx 6.62$

**Ejemplo:** Encontrar la recta de mínimos cuadrados:

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$P(x_i) = 2.437x_i + 3.903$
1	7.07	1	7.07	6.34
2	6.99	4	13.97	8.78
3	11.37	9	34.10	11.21
4	14.73	16	58.92	13.65
5	16.03	25	80.14	16.09
6	18.02	36	108.10	18.52
7	21.69	49	151.85	20.96
8	23.94	64	191.52	23.40
9	25.07	81	225.62	25.83
10	28.15	100	281.49	28.27
55	173.04	385	1152.77	$E \approx 6.62$

$$a_0 = \frac{385(173.04) - 55(1152.77)}{10(385) - 55^2} = 3.903$$

$$a_1 = \frac{10(1152.77) - 55(173.04)}{10(385) - 55^2} = 2.437$$



## Mínimos cuadrados polinomiales:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$\{(x_i, y_i)\}, i = 1, \dots, m, n < m - 1$ . Minimizar:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^m [y_i - P_n(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^m y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m P_n(x_i) y_i + \sum_{i=1}^m [P_n(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^m y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=0}^n a_j x_i^j \right) y_i + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=0}^n a_j x_i^j \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m y_i^2 - 2 \sum_{j=0}^n a_j \left( \sum_{i=1}^m y_i x_i^j \right) + \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j a_k \left( \sum_{i=1}^m x_i^{j+k} \right) \end{aligned}$$

## Mínimos cuadrados polinomiales:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$\{(x_i, y_i)\}, i = 1, \dots, m, n < m - 1$ . Minimizar:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^m [y_i - P_n(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^m y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m P_n(x_i) y_i + \sum_{i=1}^m [P_n(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^m y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=0}^n a_j x_i^j \right) y_i + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=0}^n a_j x_i^j \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m y_i^2 - 2 \sum_{j=0}^n a_j \left( \sum_{i=1}^m y_i x_i^j \right) + \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j a_k \left( \sum_{i=1}^m x_i^{j+k} \right) \end{aligned}$$

Minimización:  $\partial E / \partial a_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$ .

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^m y_i x_i^j + 2 \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^m x_i^{j+k}$$

$(n+1)$  **ecuaciones normales:**

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^m x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^m y_i x_i^j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$



$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^n = \sum_{i=1}^m y_i x_i^0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^3 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^m y_i x_i^1$$

⋮

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^{n+2} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{2n} = \sum_{i=1}^m y_i x_i^n$$

Solución única:  $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$ .

**Ejemplo:**

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

**Ejemplo:**

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

$$n = 2, m = 5$$

$$5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680$$

$$2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514$$

$$1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015$$

**Ejemplo:**

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

$$n = 2, m = 5$$

$$5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680$$

$$2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514$$

$$1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015$$

**Solución:**

$$a_0 = 1.005, a_1 = 0.8642, a_2 = 0.8437$$

$$P_2(x) = 1.005 + 0.8642x + 0.8437x^2$$

**Error total:**

$$E = \sum_{i=1}^5 [y_i - P_2(x_i)]^2 = 2.74 \times 10^{-4}$$

**Ejemplo:**

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

$$n = 2, m = 5$$

$$5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680$$

$$2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514$$

$$1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015$$

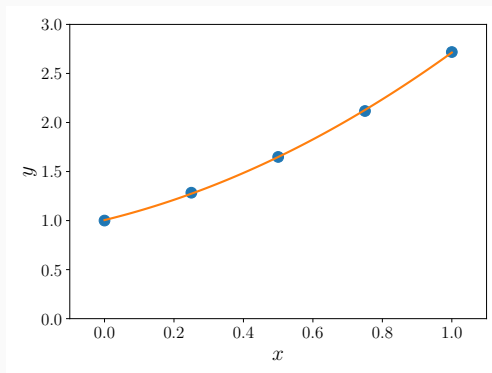
**Solución:**

$$a_0 = 1.005, a_1 = 0.8642, a_2 = 0.8437$$

$$P_2(x) = 1.005 + 0.8642x + 0.8437x^2$$

**Error total:**

$$E = \sum_{i=1}^5 [y_i - P_2(x_i)]^2 = 2.74 \times 10^{-4}$$



## Relación exponencial:

$$y = b e^{ax}$$

Minimizar:

$$E = \sum_{i=1}^m (y_i - b e^{ax_i})^2$$

Ecuaciones normales:

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - b e^{ax_i})(-e^{ax_i})$$
$$0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - b e^{ax_i})(-b x_i e^{ax_i})$$

Alternativa:

$$\ln y = \ln b + ax$$

## Relación potencial:

$$y = b x^a$$

Minimizar:

$$E = \sum_{i=1}^m (y_i - b x_i^a)^2$$

Ecuaciones normales:

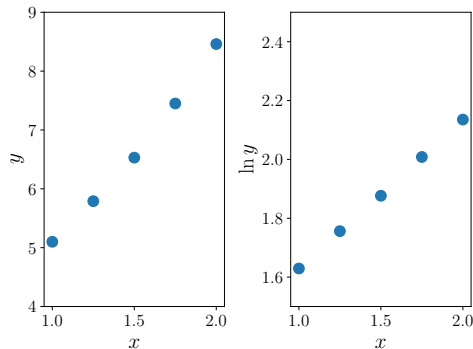
$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - b x_i^a)(-x_i^a)$$
$$0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - b x_i^a)[-b \ln(x_i) x_i^a]$$

Alternativa:

$$\ln y = \ln b + a \ln x$$

### Ejemplo:

$i$	$x_i$	$y_i$	$\ln y_i$	$x_i^2$	$x_i \ln y_i$
1	1.00	5.10	1.63	1.00	1.63
2	1.25	5.79	1.76	1.56	2.20
3	1.50	6.53	1.88	2.25	2.81
4	1.75	7.45	2.01	3.06	3.51
5	2.00	8.46	2.14	4.00	4.27
7.50			9.41	11.88	14.42



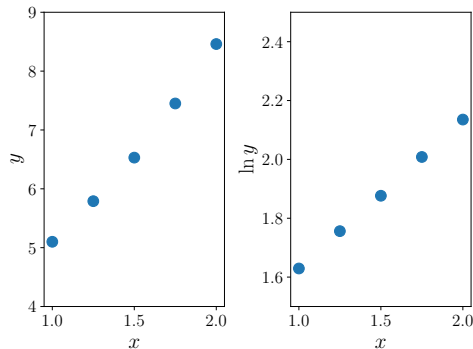
### Ejemplo:

$i$	$x_i$	$y_i$	$\ln y_i$	$x_i^2$	$x_i \ln y_i$
1	1.00	5.10	1.63	1.00	1.63
2	1.25	5.79	1.76	1.56	2.20
3	1.50	6.53	1.88	2.25	2.81
4	1.75	7.45	2.01	3.06	3.51
5	2.00	8.46	2.14	4.00	4.27
7.50			9.41	11.88	14.42

$$y = be^{ax} \Rightarrow \ln y = \ln b + ax$$

$$a = \frac{5(14.42) - (7.5)(9.41)}{5(11.88) - (7.5)^2} = 0.5057$$

$$\ln b = \frac{(11.88)(9.41) - (14.42)(7.5)}{5(11.88) - (7.5)^2} = 1.122$$



$$\ln b = 1.122 \rightarrow b = e^{1.122} = 3.071$$

$$y = 3.071e^{0.5056x}$$



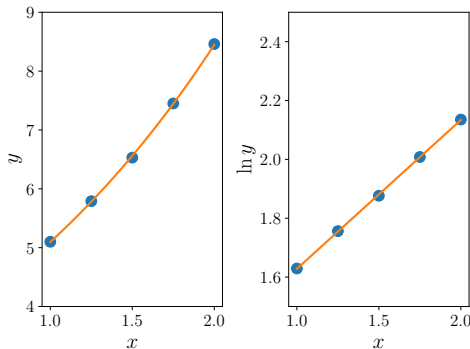
### Ejemplo:

$i$	$x_i$	$y_i$	$\ln y_i$	$x_i^2$	$x_i \ln y_i$
1	1.00	5.10	1.63	1.00	1.63
2	1.25	5.79	1.76	1.56	2.20
3	1.50	6.53	1.88	2.25	2.81
4	1.75	7.45	2.01	3.06	3.51
5	2.00	8.46	2.14	4.00	4.27
7.50			9.41	11.88	14.42

$$y = be^{ax} \Rightarrow \ln y = \ln b + ax$$

$$a = \frac{5(14.42) - (7.5)(9.41)}{5(11.88) - (7.5)^2} = 0.5057$$

$$\ln b = \frac{(11.88)(9.41) - (14.42)(7.5)}{5(11.88) - (7.5)^2} = 1.122$$



$$\ln b = 1.122 \rightarrow b = e^{1.122} = 3.071$$

$$y = 3.071e^{0.5056x}$$

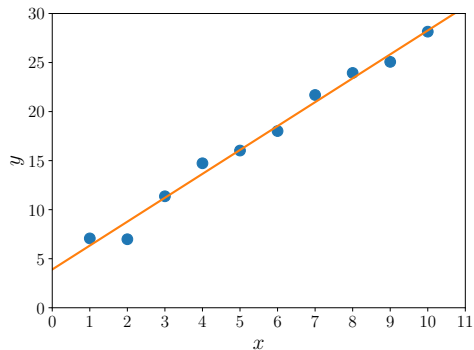
## Python: ejemplo 1

```
5 import numpy as np
6
7 rng = np.random.default_rng(14)
8
9 delta = 5.5
10 x = np.linspace(1, 10, 10)
11 y = 2.5 * x + delta * rng.random(x.size)
12 z = np.polyfit(x, y, 1)
13 p = np.poly1d(z)
14 print(p)
```

```
$ ./ejemplo-01.py
```

```
2.437 x + 3.903
```

```
a_0 = 3.90314, a_1 = 2.43661
```



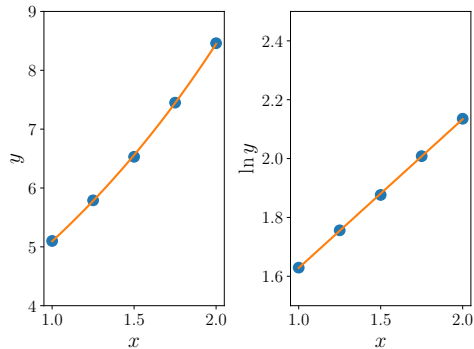
## Python: ejemplo 2

```
5 from math import exp
6 import numpy as np
7
8 x = np.array([1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00])
9 y = np.array([5.10, 5.79, 6.53, 7.45, 8.46])
10 ly = np.log(y)
11
12 z = np.polyfit(x, ly, 1)
13 p = np.polyld(z)
14 print(p)
15 print(f"ln(b) = {p[0]:.5f}, a = {p[1]:.5f}")
```

```
$ ./ejemplo-02.py
```

```
0.5057 x + 1.122
```

```
ln(b) = 1.12249, a = 0.50572
```



## Python: ejemplo 3

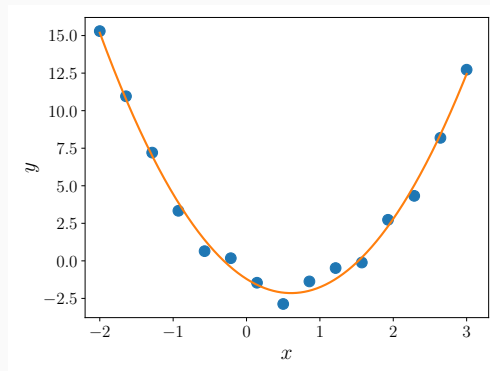
```
5 import numpy as np
6
7 rng = np.random.default_rng(13)
8
9 delta = 1.5
10 x_0, x_1, n = -2, 3, 15
11 x = np.linspace(x_0, x_1, n)
12 y = 2.5 * x**2 - 3 * x - 2 + delta * rng.random(x.size)
13 z = np.polyfit(x, y, 2)
14 p = np.polyld(z)
15 print(p)
16 print(f"a_0 = {p[0]:.5f}, a_1 = {p[1]:.5f}, a_2 = {p[2]:.5f}")
```

```
$ ./ejemplo-03.py
```

```
2
```

```
2.55 x - 3.099 x - 1.205
```

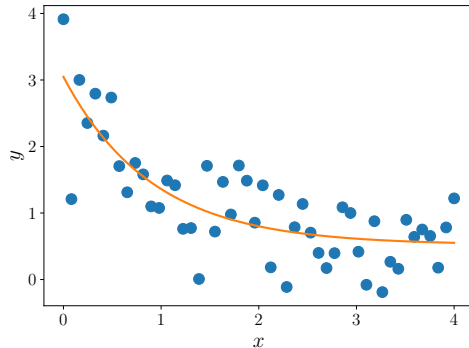
```
a_0 = -1.20479, a_1 = -3.09868, a_2 = 2.54970
```



## Python: ejemplo 4

```
5 import numpy as np
6 from scipy.optimize import curve_fit
7
8 def modelo(x, a, b, c):
9     return a * np.exp(-b * x) + c
10
11 rng = np.random.default_rng(13)
12 x_datos = np.linspace(0, 4, 50)
13 y = modelo(x_datos, 2.5, 1.3, 0.5)
14 y_ruido = 0.5 * rng.normal(size=x_datos.size)
15 y_datos = y + y_ruido
16
17 popt, pcov = curve_fit(modelo, x_datos, y_datos)
18 print(popt)
```

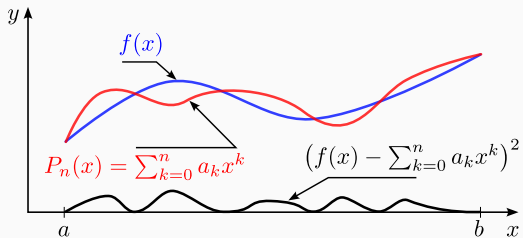
```
> ./ejemplo-04.py
[2.50685815 1.21831291 0.51137751]
```



# AJUSTE CONTINUO

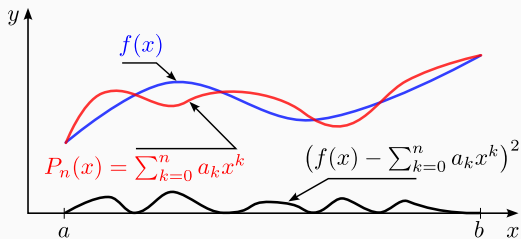
$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$ , hallar  $P_n(x)$  que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$



$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$ , hallar  $P_n(x)$  que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$



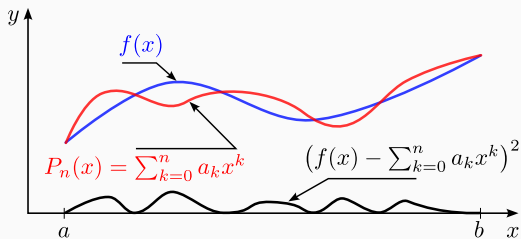
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$



$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$ , hallar  $P_n(x)$  que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$



$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n$$

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx$$

Ecuaciones normales lineales  $(n+1)$ :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ .

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

**Ejemplo:** aproximar  $f(x) = \sin \pi x$  por un polinomio de grado 2 en  $[0, 1]$ .

Ecuaciones normales:

$$a_0 \int_0^1 1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x \sin \pi x dx$$

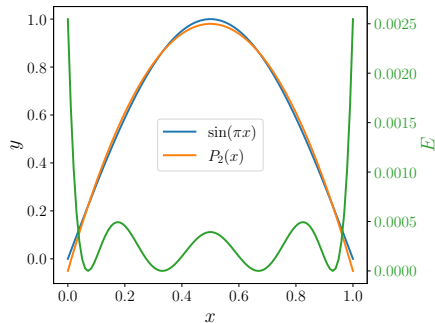
$$a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx$$

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 &= \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 &= \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{aligned}$$

Solución

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465$$

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251$$



## Problemas:

- ▶ matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

## Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

- No es fácil obtener  $P_{n+1}(x)$  si ya tenemos  $P_n(x)$

## Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

- No es fácil obtener  $P_{n+1}(x)$  si ya tenemos  $P_n(x)$

### Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $[a, b]$  si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

entonces  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

## Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

- No es fácil obtener  $P_{n+1}(x)$  si ya tenemos  $P_n(x)$

### Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $[a, b]$  si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

entonces  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

### Teorema : Polinomios LI.

*Si para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\phi_j(x)$  es un polinomio de grado  $j$ , entonces el conjunto  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es LI en cualquier intervalo  $[a, b]$ .*

**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2$ ,  $\phi_1(x) = x - 3$ ,  $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2$ ,  $\phi_1(x) = x - 3$ ,  $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

Por el teorema anterior,  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$  es LI en cualquier  $[a, b]$ . Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$



**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2$ ,  $\phi_1(x) = x - 3$ ,  $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

Por el teorema anterior,  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$  es LI en cualquier

Entonces:

$[a, b]$ . Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\ &\quad + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\ &\quad + [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3, \phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

Por el teorema anterior,  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$  es LI en cualquier

Entonces:

$[a, b]$ . Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\ &+ a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\ &+ [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

### Teorema : .

Si  $\Pi_n$  denota el conjunto de todos los polinomios de grado a lo sumo  $n$ , y  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$  es un conjunto de polinomios LI en  $\Pi_n$ , entonces **cualquier** polinomio en  $\Pi_n$  se puede escribir como combinación lineal de  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ .

### Definición : Función de peso.

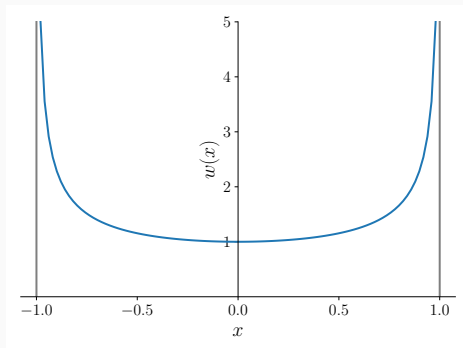
Una función integrable  $w$  se denomina **función de peso** en el intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0, \forall x \in I$ , pero  $w(x) \not\equiv 0$  en cualquier subintervalo de  $I$

### Definición : Función de peso.

Una función integrable  $w$  se denomina **función de peso** en el intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0, \forall x \in I$ , pero  $w(x) \not\equiv 0$  en cualquier subintervalo de  $I$

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

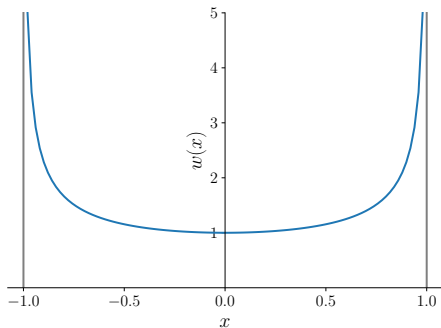


### Definición : Función de peso.

Una función integrable  $w$  se denomina **función de peso** en el intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0, \forall x \in I$ , pero  $w(x) \not\equiv 0$  en cualquier subintervalo de  $I$

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



### Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$  si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle_w = \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

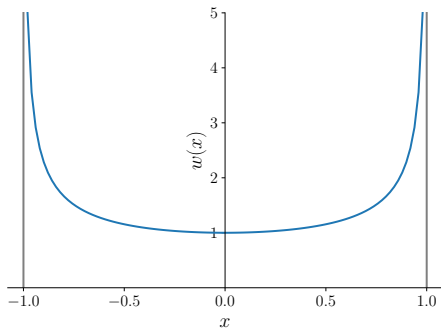
Si además  $\alpha_j = 1$  para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , se dice que el conjunto es **ortonormal**.

### Definición : Función de peso.

Una función integrable  $w$  se denomina **función de peso** en el intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0, \forall x \in I$ , pero  $w(x) \not\equiv 0$  en cualquier subintervalo de  $I$

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



### Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$  si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle_w = \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

Si además  $\alpha_j = 1$  para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Ejemplo:  $\{\cos nx, \sin mx\}$ ,  $n, m = 0, 1, \dots$  es ortogonal en  $[-\pi, \pi]$  con  $w(x) = 1$ :

$$\begin{array}{l|l} \langle \cos nx, \cos mx \rangle_w = 0 & \langle \cos nx, \cos nx \rangle_w = \pi \\ \langle \sin nx, \sin mx \rangle_w = 0 & \langle \sin nx, \sin nx \rangle_w = \pi \\ \langle \cos nx, \sin mx \rangle_w = 0 & n \neq m \end{array}$$

### Teorema : .

Si  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$ , entonces la aproximación por mínimos cuadrados para  $f$  en  $[a, b]$  respecto de  $w$  es:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x)$$

donde para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ :

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle_w$$

### Teorema : .

Si  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$ , entonces la aproximación por mínimos cuadrados para  $f$  en  $[a, b]$  respecto de  $w$  es:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x)$$

donde para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ :

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle_w$$

### Teorema : .

El conjunto de polinomios  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  definido de la siguiente forma es ortogonal en  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$ :

$$\phi_0(x) \equiv 1, \quad \phi_1(x) = x - B_1, \quad \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_1 = \frac{\langle x\phi_0, \phi_0 \rangle_w}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle_w}$$

y cuando  $k \geq 2$ :

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle_w}{\langle \phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle_w} \quad \Bigg| \quad C_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-2} \rangle_w}{\langle \phi_{k-2}, \phi_{k-2} \rangle_w}$$



**Polinomios de Legendre.**

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

### Polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}{\int_{-1}^1 x^2 \, dx} = 0, \quad C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## Polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}{\int_{-1}^1 x^2 \, dx} = 0, \quad C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \quad P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

## Polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

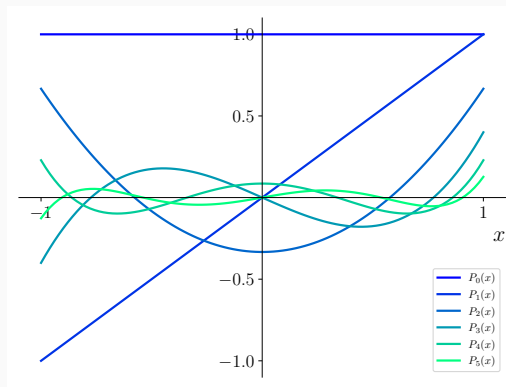
Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0, C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

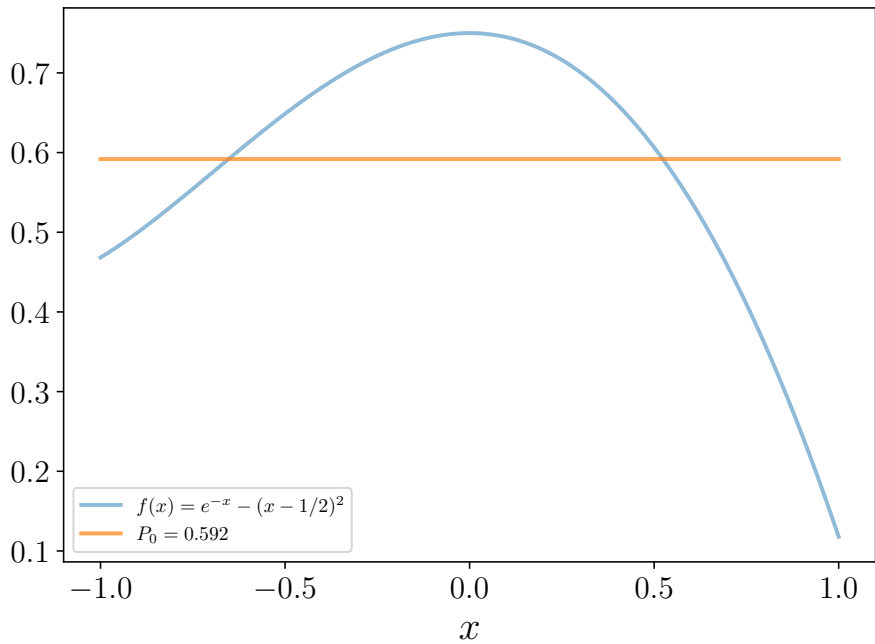
$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

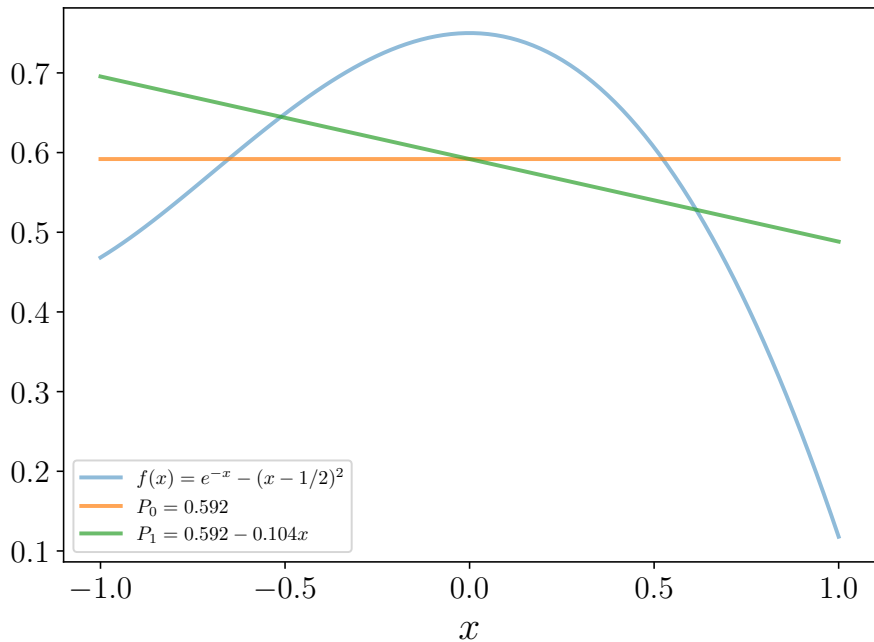


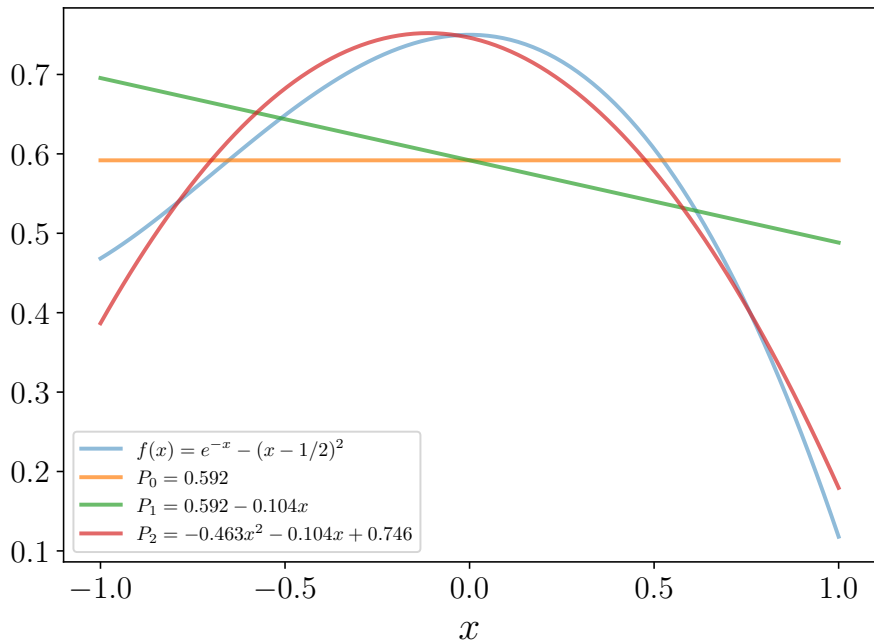
## Ejemplo: Python

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 from math import exp
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 plt.style.use('../utils/classes.mplstyle')
6 import numpy as np
7
8 x = np.array([1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00])
9 y = np.array([5.10, 5.79, 6.53, 7.45, 8.46])
10 ly = np.log(y)
11
12 for i in range(x.size):
13     s = f"{i+1:2d} & "
14     s += f"{x[i]:.2f} & "
15     s += f"{y[i]:.2f} & "
16     s += f"{ly[i]:.2f} & "
17     s += f"{(x[i]**2):.2f} & "
18     s += f"{(x[i]*ly[i]):.2f} & "
19     print(s)
20
21 xs = x.sum()
22 lys = ly.sum()
```

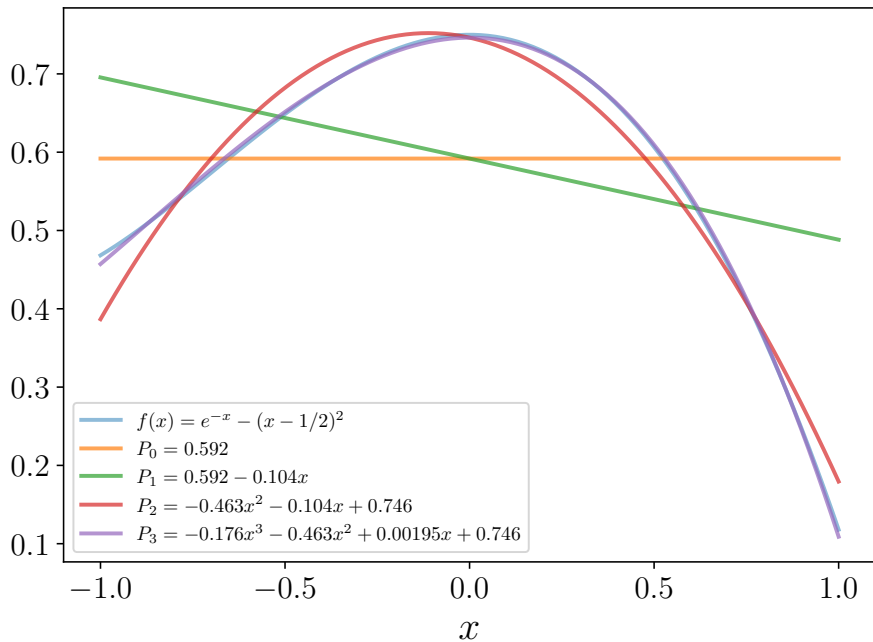
```
24 xlys = (x * ly).sum()
25
26 print(f" & {xs:.2f} & & {lys:.2f} & {x2s:.2f} & {xlys:.2f}")
27
28 xp = np.linspace(1, 2, 100)
29 z = np.polyfit(x, ly, 1)
30 p = np.poly1d(z)
31 print(p)
32 print(p[0], p[1])
33
34 ye = exp(p[0]) * np.exp(p[1] * xp)
35
36 fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
37 ax1.plot(x, y, 'o')
38 ax1.plot(xp, ye)
39 ax2.plot(x, ly, 'o')
40 ax2.plot(xp, p(xp))
41 ax1.set_ylim([4, 9])
42 ax2.set_ylim([1.5, 2.5])
43 ax1.set_xlabel(r"$x$")
44 ax2.set_xlabel(r"$x$")
45 ax1.set_ylabel(r"$y$")
46 ax2.set_ylabel(r"$\ln y$")
47 # plt.plot(xp, p(xp), '-')
48 # plt.xlabel(r'$x$')
49 # plt.ylabel(r'$y$')
```











### Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$  es ortogonal en  $(-1, 1)$  con función de peso

$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ . Para  $x \in [-1, 1]$ :

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad n \geq 0$$

### Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$  es ortogonal en  $(-1, 1)$  con función de peso

$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ . Para  $x \in [-1, 1]$ :

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

## Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$  es ortogonal en  $(-1, 1)$  con función de peso

$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ . Para  $x \in [-1, 1]$ :

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Para  $n \geq 1$ ,  $\theta = \arccos x$ :

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

Relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta = \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta)$$

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n-1)\theta = \cos \theta \cos(n\theta) + \sin \theta \sin(n\theta)$$

Sumando:

$$T_{n+1}(\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - T_{n-1}(\theta)$$

### Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$  es ortogonal en  $(-1, 1)$  con función de peso  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ . Para  $x \in [-1, 1]$ :

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Para  $n \geq 1$ ,  $\theta = \arccos x$ :

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

Relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta = \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta)$$

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n-1)\theta = \cos \theta \cos(n\theta) + \sin \theta \sin(n\theta)$$

Sumando:

$$T_{n+1}(\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - T_{n-1}(\theta)$$

Regresando a  $x = \cos \theta$ , para  $n \geq 1$ :

$$T_{n+1} = 2x \cos(n \arccos x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

## Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$  es ortogonal en  $(-1, 1)$  con función de peso  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ . Para  $x \in [-1, 1]$ :

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Para  $n \geq 1$ ,  $\theta = \arccos x$ :

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

Relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta = \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta)$$

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n-1)\theta = \cos \theta \cos(n\theta) + \sin \theta \sin(n\theta)$$

Sumando:

$$T_{n+1}(\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - T_{n-1}(\theta)$$

Regresando a  $x = \cos \theta$ , para  $n \geq 1$ :

$$T_{n+1} = 2x \cos(n \arccos x) - T_{n-1}(x)$$

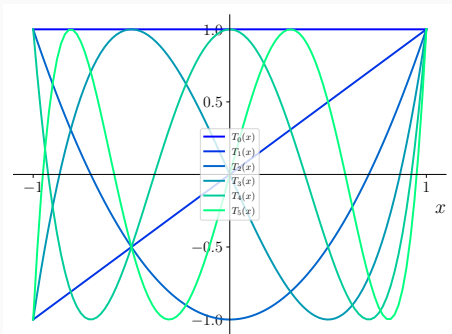
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Dado que  $T_0(x) = 1$  y  $T_1(x) = x$ :

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$



## Ortogonalidad de polinomios de Chebyshev

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Reintroducimos  $\theta = \arccos x$ :

$$\begin{aligned} d\theta &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\int_{\pi}^0 \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \end{aligned}$$

Para  $n \neq m$ :

$$\cos(n\theta) \cos(m\theta) = \frac{1}{2} [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle_w &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos[(n+m)\theta] d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos[(n-m)\theta] d\theta \\ &= \left[ \frac{\sin[(n+m)\theta]}{2(n+m)} + \frac{\sin[(n-m)\theta]}{2(n-m)} \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\langle T_n, T_n \rangle_w = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

### Reducción de grado de polinomio:

$$q(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 - x - 3$$

Aproximación por:

$$P_4(x) = c_0 + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + c_3T_3(x) + c_4T_4(x)$$

donde

$$c_j = \frac{\langle q, T_j \rangle_w}{\langle T_j, T_j \rangle_w}$$



## Reducción de grado de polinomio:

$$q(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 - x - 3$$

Aproximación por:

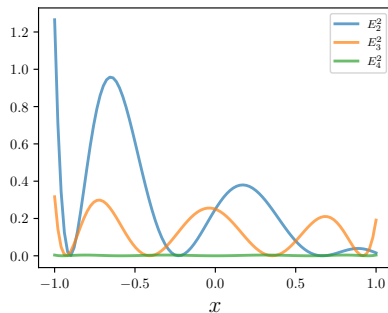
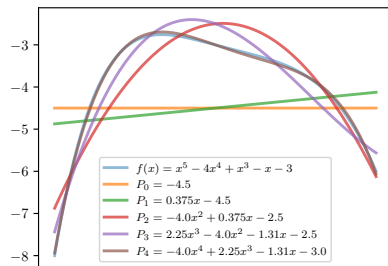
$$P_4(x) = c_0 + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + c_3T_3(x) + c_4T_4(x)$$

donde

$$c_j = \frac{\langle q, T_j \rangle_w}{\langle T_j, T_j \rangle_w}$$

**Resultado:** ver `code/plot-12.py`.

$$P(x) = -4.0x^4 + 2.25x^3 - 1.31x - 3.0$$



- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. **Análisis numérico**. 10.<sup>a</sup> ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 8.
- ▶ A.J. Salgado y S.M. Wise. **Classical Numerical Analysis**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. doi: [10.1017/9781108942607](https://doi.org/10.1017/9781108942607). Capítulo 11.
- ▶ A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. **Numerical Mathematics**. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 10.
- ▶ E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. **Advanced Engineering Mathematics**. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 25.9.