

# CÁLCULO AVANZADO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA  
FACULTAD REGIONAL LA PLATA  
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

**Práctica:** 1

**Tema:** Introducción a la variable compleja.

**Profesor Titular:** Manuel Carlevaro

**Jefe de Trabajos Prácticos:** Diego Amiconi

## Ejercicio 1.

Mostrar que  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ , y  $1/i = -i$ ,  $1/i^2 = -1$ ,  $1/i^3 = i$  y  $1/i^4 = 1$ .

## Ejercicio 2.

Multiplicar por  $i$  equivale geoméricamente a rotar en sentido antihorario por  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ). Verificar graficando  $z$  y  $zi$ , y el ángulo de rotación, para  $z = 1 + i$ ,  $z = -1 + 2i$ ,  $z = 4 - 3i$ .

## Ejercicio 3.

Verificar las siguientes propiedades de los números complejos conjugados:

$$\begin{aligned}\overline{(z_1 + z_2)} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} & \overline{(z_1 - z_2)} &= \overline{z_1} - \overline{z_2} \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \overline{z_1} \overline{z_2} & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{aligned}$$

para  $z_1 = -11 + 10i$  y  $z_2 = -1 + 4i$ .

## Ejercicio 4.

Expresar  $\frac{3 + 5i}{7 + 9i}$  en la forma  $a + bi$ , donde  $a$  y  $b$  son reales.

## Ejercicio 5.

En términos del diagrama de Argand, describir la región de puntos definida por:

$$\begin{cases} |z - (1 + i)| < 2 \\ |z - 2i| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

## Ejercicio 6.

a) En términos del diagrama de Argand, describir el conjunto:

$$S = \{z : z = \cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq \pi\}$$

b) Describir  $f(S)$  si  $f$  se define como  $f(z) = z^2$ .

**Ejercicio 7.**

Determinar el valor principal del argumento de  $(1 + i)^{20}$ .

**Ejercicio 8.**

Encontrar y graficar en el plano complejo todas las raíces de  $\sqrt[3]{i + i}$ .

**Ejercicio 9.**

Determinar  $\operatorname{Re}(f)$  e  $\operatorname{Im}(f)$  para

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

en  $z = 1 - i$ .

**Ejercicio 10.**

Del mismo modo que para las funciones de variable real, una función compleja de variable compleja es *continua* en  $z = z_0$  si  $f(z_0)$  está definida y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Determinar si  $f(z)$  es continua en  $z = 0$ , si  $f(0) = 0$  y para  $z \neq 0$  la función se define como

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z)}{1 - |z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 11.**

Si  $f(z) = z^3$ , escribir  $f$  en la forma  $u(x, y) + iv(x, y)$  y mostrar que  $u$  y  $v$  satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

**Ejercicio 12.**

Determinar si las funciones

a)

$$f(z) = e^{-2x}(\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y)$$

b)

$$f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$$

son analíticas.

**Ejercicio 13.**

Si  $u(x, y) = 3x - 2y + 5$ , ¿cómo debe estar definida  $v(x, y)$  si  $u(x, y) + iv(x, y)$  debe ser analítica?

**Ejercicio 14.**

a) Calcular:

$$\int_0^{2i} z dz$$

b) Calcular:

$$\int_0^{2i} \bar{z} dz$$

primero a lo largo del segmento de línea  $C_1$  que une 0 con  $2i$ , y luego a lo largo de la curva  $C_2$ , donde  $C_2$  es la mitad derecha del círculo centrado en  $i$  con radio 1.

**Ejercicio 15.**

Explicar por qué la integral:

$$\int_1^i 2e^{2z} dz$$

no es ambigua, y encontrar el valor de esta integral.

**Ejercicio 16.**

Calcular:

$$\int_1^i \bar{z}^2 dz$$

a lo largo de las siguientes curvas  $C$ :

a)  $C$  es el segmento de línea que une 1 con  $i$ .

b)  $C = \{z : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ , es decir,  $C$  es el primer cuadrante del círculo  $|z| = 1$ .

**Ejercicio 17.**

Sea  $f(z) = (z - z_0)^m$ , donde  $m$  es un entero y  $z_0$  una constante. Integrar la función sobre una trayectoria circular  $C$  de radio  $\rho$  con centro en  $z_0$  en sentido antihorario.

**Ejercicio 18.**

Suponga que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2$ . Probar que  $L_1 = L_2$ .

**Ejercicio 19.**

Sea  $f(z)$  definida por

$$f(z) = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$$

a) Encuentre el radio de convergencia de  $f$ .

b) Calcule  $f(\frac{i}{12})$  con una precisión dada por un disco de radio 0.001.

c) Calcule  $f'(\frac{i}{12})$  con una precisión de un dígito decimal.