Cálculo Avanzado

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad Regional La Plata
Universidad Tecnológica Nacional

Práctica: Unidad 2.
Tema: Funciones ortogonales. Series de Fourier. Integral y transformada de Fourier.
Profesor Titular: Manuel Carlevaro.
Ayudante de Primera: Christian Molina.

Ejercicio 1.

Mostrar que el conjunto de funciones

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \ldots\}$$

es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 2.

Suponga que $f(x)$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ y sea

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$$

la representación de Fourier de $f(x)$ relativa a $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \ldots\}$. Usar el método descripto en la clase para determinar a_n y b_n.

Ejercicio 3.

Definiendo $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Derive la representación de Fourier de $f(x)$.

b) Use la parte a) para evaluar la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Ejercicio 4.

a) Halle la representación de Fourier de $f(x) = |x|,\ -\pi \leq x \leq \pi$.

b) Use el resultado de la parte a) para computar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ejercicio 5.

a) Encuentre la expansión en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

b) Dibuje $y = F(x)$ donde F es la representación de Fourier de f.

c) Use a) para evaluar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ejercicio 6.

Sea f definida por $f(x) = x,\ -1 < x < 1$. Exprese f como una serie trigonométrica.

Ejercicio 7.

Halle la representación integral de Fourier de la función $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \pi e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 8.

Obtenga la transformada coseno de Fourier $\hat{f}_c(\omega)$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 9.

Obtenga la transformada seno de Fourier $\hat{f}_s(\omega)$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejercicio 10.

Demostrar que la transformada de Fourier es una operación lineal.

Ejercicio 11.

Demostrar que si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, y si $f'(x)$ es abolutamente integrable en el eje x, entonces:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

Ejercicio 12.

Encuentre la transformada de Fourier de

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

Ejercicio 13.

Halle la transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$