Serie y Transformada de Fourier

Funciones ortogonales. Series de Fourier. Integral de Fourier. Transformada seno y coseno. Transformada de Fourier. Ejemplos.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2025

Funciones ortogonales

Secuencia infinita $\{\phi_n(x)\}$
integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = 0, \quad i \neq j$$

Funciones ortogonales

Secuencia infinita $\{\phi_n(x)\}$ integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = 0, \quad i \neq j$$

familia ortogonal de funciones en $[a, b]$. Supongamos que existe

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$c_3 = ?$$

$$f(x)\phi_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\phi_3(x)$$

Funciones ortogonales

Secuencia infinita $\{\phi_n(x)\}$ integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = 0, \quad i \neq j$$

familia ortogonal de funciones en $[a,b]$. Supongamos que existe

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$c_3 = ?$$

$$f(x)\phi_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\phi_3(x)$$

$$\int_a^b f(x)\phi_3(x)\,dx =$$

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\phi_3(x)\,dx =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b c_n \phi_n(x)\phi_3(x)\,dx =$$

$$c_3 \int_a^b \phi_3^2(x)\,dx$$

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k^2(x)\,dx} \qquad (1)$$

Secuencia infinita $\{\phi_n(x)\}$ integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = 0, \quad i \neq j$$

familia ortogonal de funciones en $[a,b]$. Supongamos que existe

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$c_3 = ?$$

$$f(x)\phi_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\phi_3(x)$$

$$\int_a^b f(x)\phi_3(x)\,dx =$$

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\phi_3(x)\,dx =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b c_n \phi_n(x)\phi_3(x)\,dx =$$

$$c_3 \int_a^b \phi_3^2(x)\,dx$$

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k^2(x)\,dx} \qquad (1)$$

Definición : .

Producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

Con c_k definida por (1):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = F(x)$$

$F(x)$ es la **representación de Fourier** de $f(x)$ con respecto de $\{\phi_n(x)\}$.

Se puede demostrar:

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x) \right]^2 dx \leq$$

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} d_k \phi_k(x) \right]^2 dx$$

Caso especial:

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots,$$
$$\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \cdots\}$$

$\mapsto$ conjunto ortogonal en $[-\pi, \pi]$.
Por ejemplo, si $m \neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \; \cos nx \, dx =$$
$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx =$$
$$\frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} \right]_{x=-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

Caso especial:

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots, \\ \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \cdots\}$$

$\mapsto$ conjunto ortogonal en $[-\pi, \pi]$.

Por ejemplo, si $m \neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx = \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx = \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} \right]_{x=-\pi}^{\pi} \\ = 0$$

Resultado clave:

Supongamos que $f(x)$ sea suave a tramos en $[-\pi, \pi]$, y que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

es la representación de Fourier de $f(x)$. Entonces, para $x_0 \in [-\pi, \pi]$:

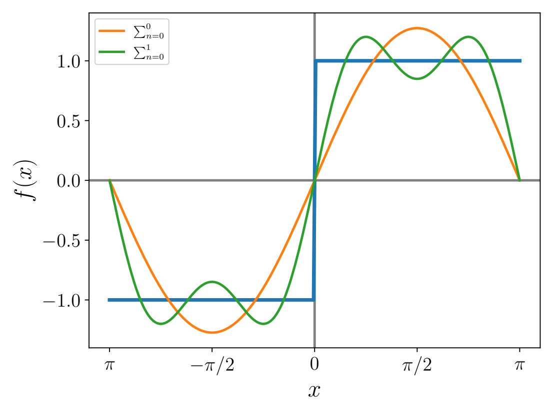
$$F(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$
$$= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\right)$$

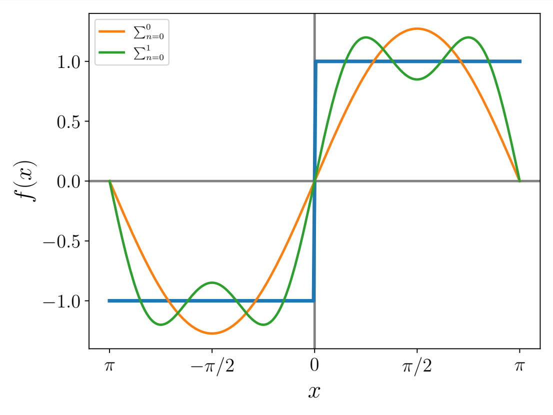
Primeros dos términos:



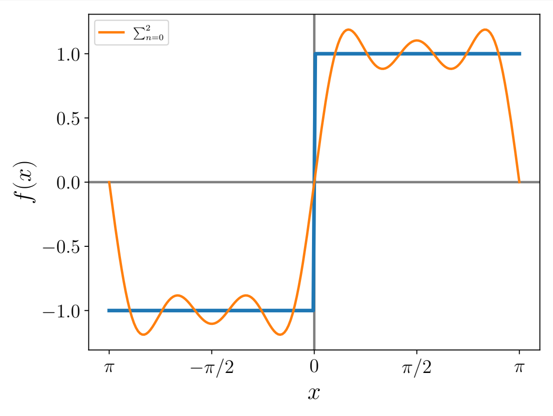
$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots \right)$$

Primeros dos términos:



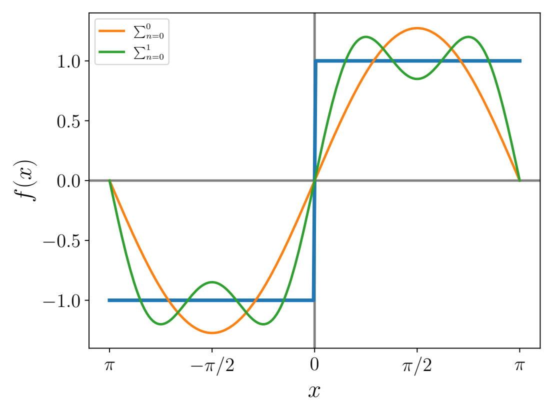
Agregando más términos:



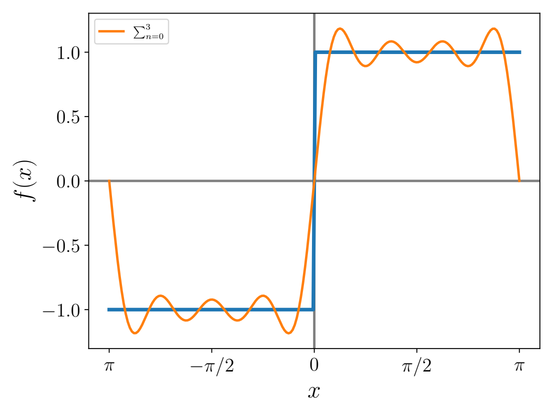
$$F_2(x) = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right)$$

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$
$$= \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots \right)$$

Primeros dos términos:



Agregando más términos:

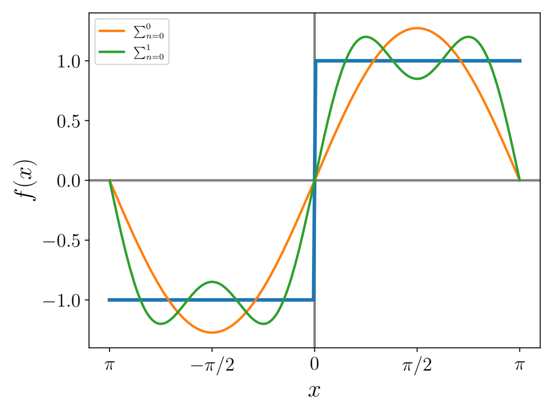


$$F_3(x) = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} \right)$$

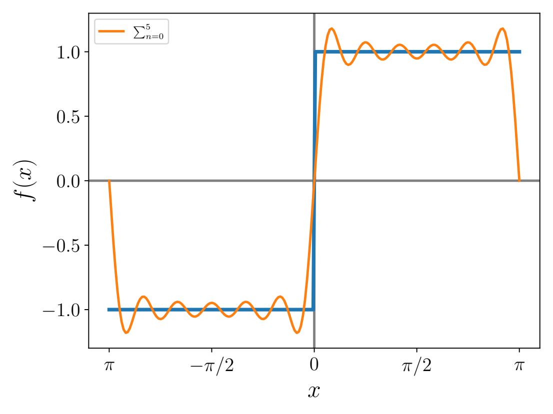
$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots \right)$$

Primeros dos términos:



Agregando más términos:

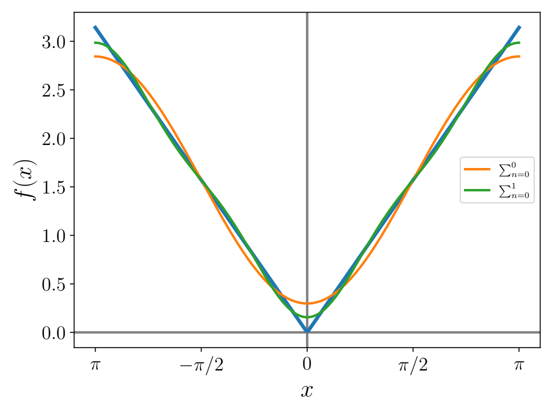


$$F_5(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cdots + \frac{\operatorname{sen} 9x}{9} + \frac{\operatorname{sen} 11x}{11} + \frac{\operatorname{sen} 13x}{13} \right)$$

Otro ejemplo:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

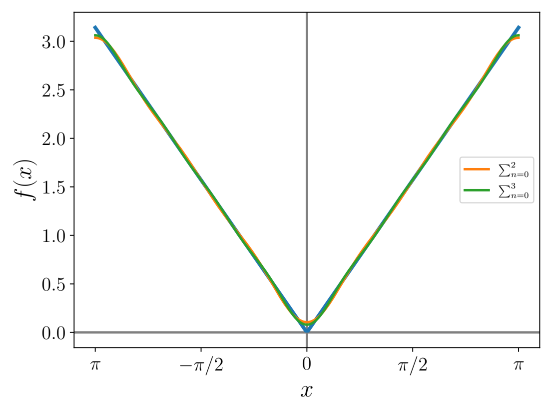
$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$



Otro ejemplo:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$



Comparación con serie de potencias:

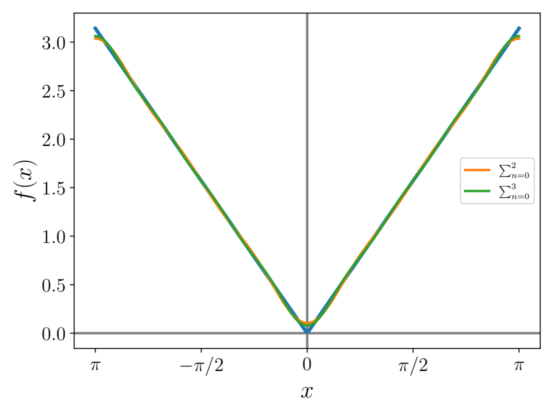
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

Otro ejemplo:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

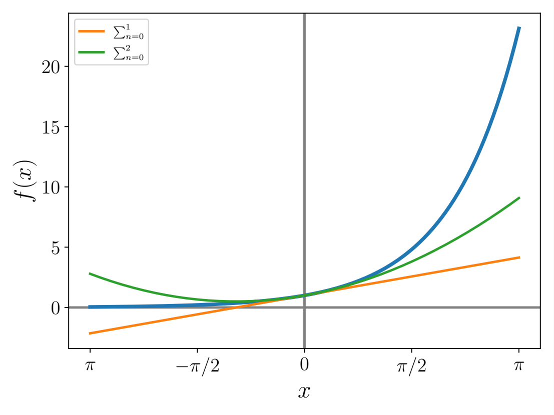
$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$



Comparación con serie de potencias:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

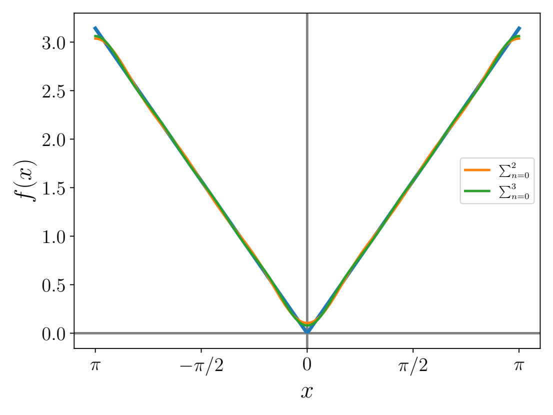
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$



Otro ejemplo:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

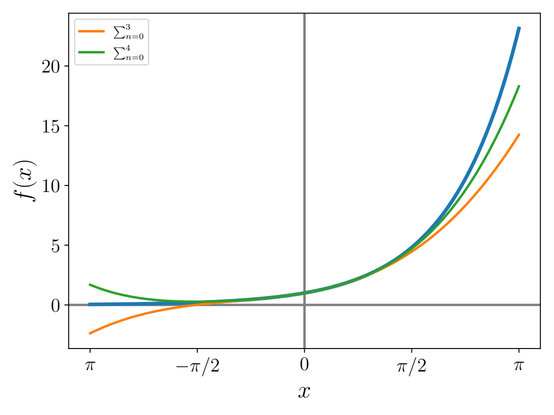
$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$



Comparación con serie de potencias:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$



Del ejercicio 6 (Práctica 2):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Del ejercicio 6 (Práctica 2):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$

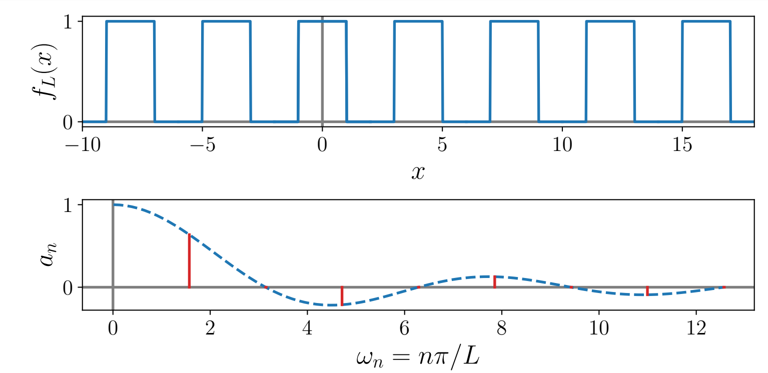
Del ejercicio 6 (Práctica 2):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^{1} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{1} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$2L = 4$

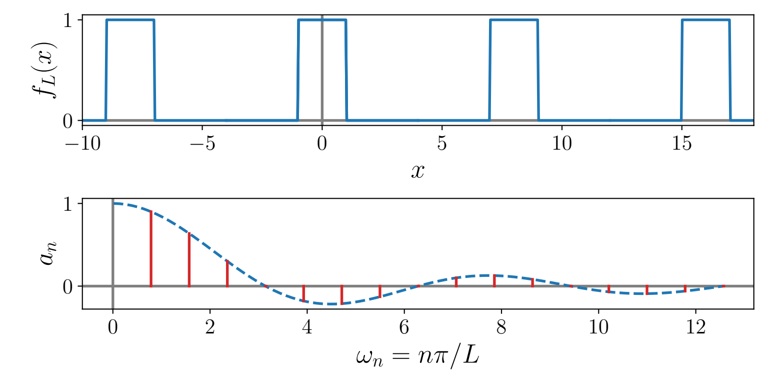
Del ejercicio 6 (Práctica 2):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 8$$

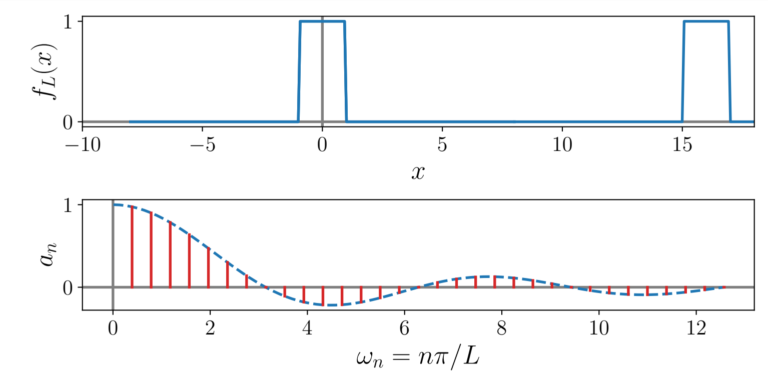
Del ejercicio 6 (Práctica 2):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\frac{\mathrm{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 16$$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \operatorname{sen} \omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \cos \omega_n \, dx$$
$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \operatorname{sen} \omega_n \, dx$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = {} & \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi \\ & + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi \, d\xi \right. \\ & \qquad \left. + \operatorname{sen} \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi \, d\xi \right] \end{aligned}$$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \operatorname{sen} \omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \cos \omega_n \, dx$$
$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \operatorname{sen} \omega_n \, dx$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi \, d\xi + \operatorname{sen} \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi \, d\xi \right]$$

Ahora hacemos:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos \omega_n x) \Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi \, d\xi + (\operatorname{sen} \omega_n x) \Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi \, d\xi \right]$$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n x + b_n \operatorname{sen}\omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\omega_n\, dx$$
$$b_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\operatorname{sen}\omega_n\, dx$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\omega_n x\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\cos\omega_n\xi\, d\xi + \operatorname{sen}\omega_n x\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\operatorname{sen}\omega_n\xi\, d\xi\right]$$

Ahora hacemos:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos\omega_n x)\Delta\omega\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\cos\omega_n\xi\, d\xi + (\operatorname{sen}\omega_n x)\Delta\omega\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\operatorname{sen}\omega_n\xi\, d\xi\right]$$

Tomamos $L \to \infty$, y asumimos que

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

es absolutamente integrable en el eje x:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|\, dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|\, dx \mapsto \text{ existe}$$

La representación de $f(x)$ por una **integral de Fourier**:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\operatorname{sen}\omega x]\, d\omega \qquad (2)$$

donde:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi$$
$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\omega\xi\, d\xi \qquad (3)$$

Teorema : Integral de Fourier.

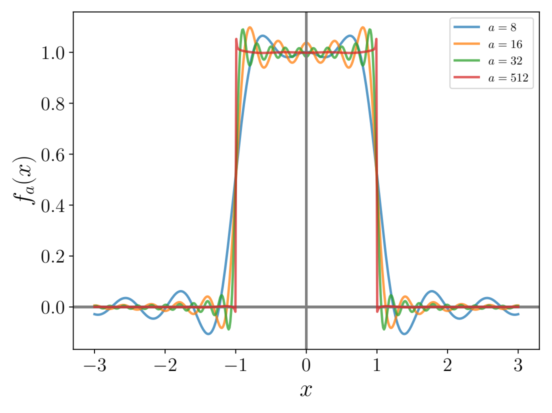
Si $f(x)$ es suave a tramos en cada intervalo finito y tiene derivadas por derecha y por izquierda en cada punto, y si es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$, entonces $f(x)$ puede representarse como una integral de Fourier (2) con A y B dados por (3). En los puntos en que $f(x)$ es discontinua, el valor de la integral de Fourier es el promedio de los valores laterales de $f(x)$ en esos puntos.

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega\xi \, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \cos \omega\xi \, d\xi = \left. \frac{\operatorname{sen} \omega\xi}{\pi\omega} \right|_{-1}^{1} = \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\pi\omega} \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \omega\xi \, d\xi = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \omega x \operatorname{sen} \omega}{w} \, d\omega}$$



Transformaciones seno y coseno de Fourier

Transformada coseno: Si $f(x)$ es par, de (3):

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega$$

$$\text{con } A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi d\xi$$

Llamamos $A(\omega) = \sqrt{2/\pi}\hat{f}_c(\omega)$:

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx \qquad (4.\text{a})$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega \qquad (4.\text{b})$$

Transformada seno: Si $f(x)$ es impar, de (3):

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega x\, d\omega$$

$$\text{con } B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\omega\xi d\xi$$

Llamamos $B(\omega) = \sqrt{2/\pi}\hat{f}_s(\omega)$:

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}\,\omega x\, dx \qquad (5.\text{a})$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega x\, d\omega \qquad (5.\text{b})$$

De las ecuaciones (2) y (3):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \left[\cos \omega\xi \cos \omega x \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} \omega\xi \operatorname{sen} \omega x\right] \, d\xi \, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos(\omega x - \omega\xi) d\xi \right] d\omega$$

$[\cdot]$ es una función par de ω:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\infty^\infty \left[\int_0^\infty f(\xi) \cos(\omega x - \omega\xi) d\xi \right] d\omega \quad (6)$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar en ω y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi) \operatorname{sen}(\omega x - \omega\xi) d\xi \right] d\omega = 0 \quad (7)$$

Transformada de Fourier

De las ecuaciones (2) y (3):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\left[\cos\omega\xi\cos\omega x \right.$$
$$\left. +\operatorname{sen}\omega\xi\operatorname{sen}\omega x\right]\, d\xi\, d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x-\omega\xi)d\xi\right] d\omega$$

$[\cdot]$ es una función par de ω:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\infty^\infty \left[\int_0^\infty f(\xi)\cos(\omega x-\omega\xi)d\xi\right] d\omega \qquad (6)$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar en ω y

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega x-\omega\xi)d\xi\right] d\omega = 0 \qquad (7)$$

Tomamos el integrando de (6) y le sumamos i multiplicado por el integrando de (7), usando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$$

obtenemos la **integral de Fourier compleja**:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{i\omega(x-\xi)}d\xi\, d\omega$$

Escribiendo la exponencial de la suma como producto de exponenciales:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right] e^{i\omega x}\, d\omega \qquad (8)$$

Transformada de Fourier de f:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \qquad (9)$$

Transformada inversa de Fourier de $\hat{f}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega \qquad (10)$$

Otra nomenclatura:

$$\hat{f} = \mathscr{F}(f), \qquad f = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f})$$

Teorema : Existencia de $\hat{f}$.

Si $f(x)$ es absolutamente convergente en $(-\infty, \infty)$ y continua a tramos en intervalos finitos, entonces existe la transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ de $f(x)$ dada por la ecuación (9).

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega} - e^{i\omega} \right)\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senc} \omega$$

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega} - e^{i\omega} \right)$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senc}\omega$$

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = e^{-ax}$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x}\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)} \right|_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$$

Interpretación física: espectro de energía

Representación **espectral**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega) \mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega, \omega + d\omega)$.

$$mx'' + kx = 0$$

$\times x' :\ mx'x'' + kx'x = 0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 = \text{constante}$$

Solución general:

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t = \underbrace{c_1 e^{i\omega_0 t}}_{A} + \underbrace{c_{-1} e^{-i\omega_0 t}}_{B}$$

donde $\omega_0^2 = k/m$, $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$.

Representación **espectral**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega) \mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega, \omega + d\omega)$.

$$mx'' + kx = 0$$

$\times x' : \ mx'x'' + kx'x = 0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 = \text{constante}$$

Solución general:

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t = \underbrace{c_1 e^{i\omega_0 t}}_{A} + \underbrace{c_{-1} e^{-i\omega_0 t}}_{B}$$

donde $\omega_0^2 = k/m$, $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$.

$x = A + B$, $x' = v = A' + B' = i\omega_0(A - B)$:

$$E_0 = \frac{1}{2}m(i\omega_0)^2(A - B)^2 + \frac{1}{2}k(A + B)^2$$

$$\begin{aligned} E_0 = \frac{1}{2}k\left[-(A - B)^2 + (A + B)^2\right] \\ = 2kAB = 2kc_1 e^{i\omega_0 t} c_{-1} e^{-i\omega_0 t} \\ = 2kc_1 c_{-1} = 2k|c_1|^2 \end{aligned}$$

Sistema más complejo: $x = f(t) \mapsto$ periódica:
Espectro discreto: $|c_1|^2 \mapsto |c_n|^2$ (conjunto contable de frecuencias aisladas).
Sistema más complejo: $x = f(t) \mapsto$ no periódica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \, d\omega$$

es la **energía total** del sistema.

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

La transformada de Fourier es una ***operación lineal****, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

La transformada de Fourier es una ***operación lineal****, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af+bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af+bg)=a\mathscr{F}(f)+b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty,\infty)$ y $f(x)\to 0$ cuando $|x|\to\infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)]=i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

La transformada de Fourier es una ***operación lineal****, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

*La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af+bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af+bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty,\infty)$ y $f(x)\to 0$ cuando $|x|\to\infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f*g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$h(x) = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

Teorema : Convolución.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones acotadas, continuas por tramos, y absolutamente integrables en $(-\infty,\infty)$, entonces

$$\mathscr{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$$

Lecturas recomendadas

- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. ***Advanced Engineering Mathematics.*** Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 11 (11.7 – 11.9).
- Peter V O'Neil. ***Matemáticas avanzadas para ingeniería.*** 7.ª ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 3.
- K A Stroud y Dexter J Booth. ***Advanced Engineering Mathematics.*** 6.ª ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Capítulos 9.