Autovalores y autovectores

Definiciones. Interpretación geométrica. Círculos de Gerschgorin. Método de las potencias. Método de la potencia: código. Factorización QR. Código.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

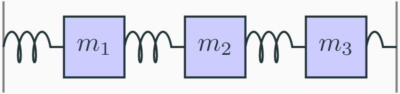
manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2025

¿Por qué estudiar autovalores/autovectores?

- **Análisis modal:** Frecuencias naturales y modos de vibración.
- **Estabilidad:** Análisis de estabilidad dinámica.
- **Reducción de modelos:** Simplificación conservando esencia dinámica.
- **Elementos finitos:** Solución de sistemas discretizados.
- **Diseño y control:** Ajuste de respuesta dinámica deseada.

Ejemplo: Vibraciones en un sistema masa-resorte



Ecuación dinámica:

$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$

Autovalores:

$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad A\phi = \lambda\phi$

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$$

Solución: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Reemplazando cada autovalor en (1):

$$\boldsymbol{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

Solución: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Reemplazando cada autovalor en (1):

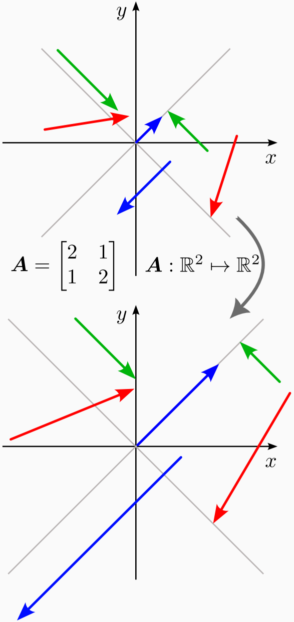
$$\boldsymbol{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definiciones:

$$\text{Espectro de } \boldsymbol{A} : \sigma(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

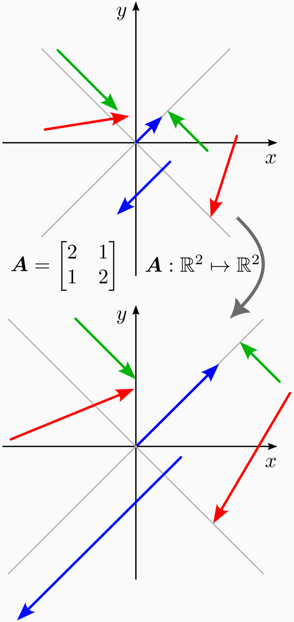
$$\text{Radio espectral de } \boldsymbol{A} : \rho(\boldsymbol{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A})} |\lambda|$$

Intepretación gráfica



$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0
\end{aligned}
$$

Intepretación gráfica



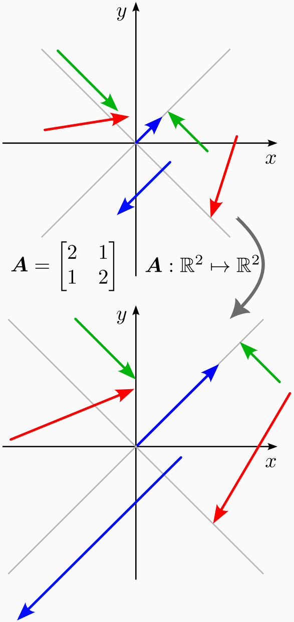
$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Intepretación gráfica



$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \implies \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} (2-1)x + y &= 0 \\ x + (2-1)y &= 0 \end{cases} \implies \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nota: si consideramos la norma vectorial $l_2 : \|\cdot\|$:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{A})^{1/2}$$

Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A})$.

Métodos:

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método QR.

Métodos:

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método QR.

Teorema : Círculo de Gerschgorin.

$\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $r_i = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ *para cada* $i = 1, 2, \cdots, n$. *Sea*

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

1. *Si* λ *es un autovalor, está en uno de los* C_i.
2. *Si* k *círculos* C_i *forman una región conectada* $R \in \mathbb{C}$, *disjunta de los restantes* $n - k$ *círculos, entonces* R *contiene exactamente* k *autovalores.*

Métodos:

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método QR.

Teorema : Círculo de Gerschgorin.

$\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $r_i = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea

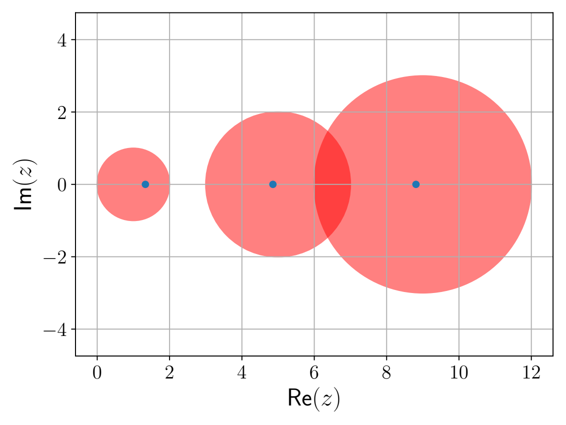
$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

1. *Si λ es un autovalor, está en uno de los C_i.*
2. *Si k círculos C_i forman una región conectada $R \in \mathbb{C}$, disjunta de los restantes $n-k$ círculos, entonces R contiene exactamente k autovalores.*

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$r_1 = |-1|+|0| = 1, r_2 = |1|+|1| = 2, r_3 = |-2|+|-1| = 3.$
$\lambda_1 = 1.33192769, \lambda_2 = 8.81113862, \lambda_3 = 4.85693369$.



Método de las potencias:

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con elementos de $\sigma(\boldsymbol{A})$ que satisfacen:$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. λ_1: **autovalor dominante**. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ forman una **base** en $\mathbb{R}^n$ (linealmente independientes).

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$$

Multiplicando ambos miembros por $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \cdots, \boldsymbol{A}^k, \cdots$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 \boldsymbol{v}_j$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k \boldsymbol{v}_j$$

Factorizando λ_1 en la última ecuación:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{v}_j$$

Dado que $\forall j$, $|\lambda_1| > |\lambda_j|$; $\lim_{k\to\infty}(\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$, y

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 \boldsymbol{v}_1 \tag{2}$$

Si $|\lambda_1| < 1$, (2) $\mapsto \mathbf{0}$, si $|\lambda_1| > 1$, (2) diverge ($\beta_1 \neq 0$).

Método de las potencias:

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con elementos de $\sigma(\boldsymbol{A})$ que satisfacen:$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. λ_1: **autovalor dominante**. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ forman una **base** en $\mathbb{R}^n$ (linealmente independientes).

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$$

Multiplicando ambos miembros por $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \cdots, \boldsymbol{A}^k, \cdots$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 \boldsymbol{v}_j$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k \boldsymbol{v}_j$$

Factorizando λ_1 en la última ecuación:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{v}_j$$

Dado que $\forall j$, $|\lambda_1| > |\lambda_j|$; $\lim_{k\to\infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$, y

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 \boldsymbol{v}_1 \tag{2}$$

Si $|\lambda_1| < 1$, (2) $\mapsto \boldsymbol{0}$, si $|\lambda_1| > 1$, (2) diverge ($\beta_1 \neq 0$).

Procedimiento:

- Iniciamos con $\boldsymbol{x} = [1, 1, \cdots, 1]^{\mathsf{T}}$
- Generamos la secuencia

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k, \quad \boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} \boldsymbol{y}_k$$

donde $c_{k+1} = \|\boldsymbol{y}_k\|_\infty$

Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{v}_1, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \lambda_1$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4, 1\}$. Tomemos $\boldsymbol{x}_0 = [1, 1]^\intercal$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix} = 13[-0.38462, 1]^\intercal = c_1\boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^\intercal = c_2\boldsymbol{x}_2$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{bmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^\intercal = c_3\boldsymbol{x}_3$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186 \\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^\intercal = c_4\boldsymbol{x}_4$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^\intercal = c_5\boldsymbol{x}_5$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_5 = \begin{bmatrix} -2.00073 \\ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^\intercal = c_6\boldsymbol{x}_6$$

Resulta:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = 4$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4, 1\}$. Tomemos $\boldsymbol{x}_0 = [1, 1]^\intercal$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix} = 13[-0.38462, 1]^\intercal = c_1\boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^\intercal = c_2\boldsymbol{x}_2$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{bmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^\intercal = c_3\boldsymbol{x}_3$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186 \\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^\intercal = c_4\boldsymbol{x}_4$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^\intercal = c_5\boldsymbol{x}_5$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_5 = \begin{bmatrix} -2.00073 \\ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^\intercal = c_6\boldsymbol{x}_6$$

Resulta:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = 4$$

Desventajas:

- No se sabe al inicio si $\boldsymbol{A}$ tiene un autovalor dominante.
- No se conoce cómo debe elegirse $\boldsymbol{x}_0$ para que tenga una contribución no nula del autovector asociado al autovalor dominante, si existe.

Método de las potencias: código

```python
#!/usr/bin/env python3
import numpy as np

def iter_potencia(A, num_iteraciones):
    n = A.shape[0]
    # Inicializar un vector unitario de tamaño n
    x = np.ones(n)

    for _ in range(num_iteraciones):
        # Multiplicar la matriz A por el vector x
        y = np.dot(A, x)
        # Obtener la norma máxima
        y_abs = np.abs(y)
        c = y_abs.max()
        # Normalizar el vector resultante
        x = y / c

    # Devolver el autovalor dominante y el autovector
    # correspondiente
    return c, x
```

```python
# Ejemplo de uso
# Definir una matriz de ejemplo
A = np.array([[0, 11, -5],
              [-2, 17, -7],
              [-4, 26, -10]])

# Especificar el número de iteraciones
num_iteraciones = 100

# Aplicar el algoritmo de las potencias
autovalor, autovector = iter_potencia(A, num_iteraciones)

print(f"Autovalor dominante: {autovalor}")
print("Autovector correspondiente:")
print(autovector)
```

```
$ ./potencias.py
Autovalor dominante: 3.9999999999999876
Autovector correspondiente:
[0.4 0.6 1. ]
```

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ *es una matriz y* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *son autovalores distintos de* $\boldsymbol{A}$ *con autovectores asociados* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$*, entonces* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ *es un conjunto* ***linealmente independiente****.*

Teorema : .

*Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son autovalores distintos de $\boldsymbol{A}$ con autovectores asociados $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto **linealmente independiente**.*

Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\|\boldsymbol{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son autovalores distintos de $\boldsymbol{A}$ con autovectores asociados $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto ***linealmente independiente****.*

Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\|\boldsymbol{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema : Proceso de Gram-Schmidt.

Sea $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ un conjunto de k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ definido mediante:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{x}_1 \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \boldsymbol{v}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle} \boldsymbol{v}_i
\end{aligned}$$

es un conjunto de k vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejemplo

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verificación:

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

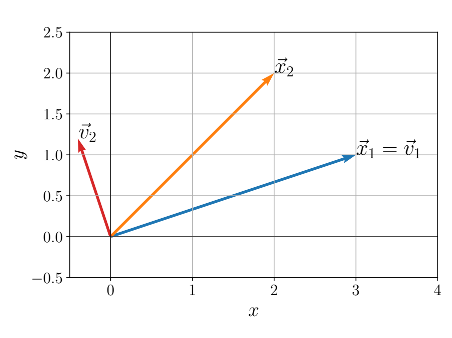
$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0$$



Vectores ortonormales:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{40}{25}}} \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices similares con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$, y λ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ con el autovector $\boldsymbol{v}$ asociado, entonces λ es un autovalor de $\boldsymbol{B}$ con autovector asociado $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{\intercal}$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{\intercal}$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices similares con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$, y λ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ con el autovector $\boldsymbol{v}$ asociado, entonces λ es un autovalor de $\boldsymbol{B}$ con autovector asociado $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$.

Teorema : .

Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es similar a una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ si y sólo si $\boldsymbol{A}$ tiene n autovectores linealmente independientes. En este caso $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, donde las columnas de $\boldsymbol{S}$ son los autovectores y el i-ésimo elemento diagonal de $\boldsymbol{D}$ es el autovalor que corresponde a la i-ésima columna de $\boldsymbol{S}$.

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n]$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \langle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1 - \langle \hat{\boldsymbol{e}}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle \hat{\boldsymbol{e}}_2, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \hat{\boldsymbol{e}}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n]$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \langle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{a}_3\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1 - \langle \hat{\boldsymbol{e}}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_2, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \hat{\boldsymbol{e}}_j, \boldsymbol{a}_k\rangle, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

Ahora podemos expresar los $\boldsymbol{a}_i$ en la nueva base:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \langle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{a}_1\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1 \\
\boldsymbol{a}_2 &= \langle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \langle \hat{\boldsymbol{e}}_2, \boldsymbol{a}_2\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_2 \\
\boldsymbol{a}_3 &= \langle \hat{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{a}_3\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \langle \hat{\boldsymbol{e}}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_2 + \langle \hat{\boldsymbol{e}}_3, \boldsymbol{a}_3\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{j=1}^{k} \langle \hat{\boldsymbol{e}}_j, \boldsymbol{a}_k\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_j$$

Resulta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$, con $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\cdots|\boldsymbol{e}_n]$, y

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Resulta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, con $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\cdots|\boldsymbol{e}_n]$, y

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Código Python:

```python
#!/usr/bin/env python3

import numpy as np

def gram_schmidt_qr(A):
    m, n = A.shape
    Q = np.zeros((m, n))
    R = np.zeros((n, n))
    for j in range(n):
        v = A[:, j]
        for i in range(j):
            R[i, j] = np.dot(Q[:, i], A[:, j])
            v = v - R[i, j] * Q[:, i]
        R[j, j] = np.linalg.norm(v)
        Q[:, j] = v / R[j, j]

    return Q, R

# Ejemplo de uso
# Definir una matriz de ejemplo
A = np.array([[1, 4, 3],
              [2, 5, 1],
              [3, 6, 2]])

# Aplicar la factorización QR usando el método
# de Gram-Schmidt
Q, R = gram_schmidt_qr(A)

print("Matriz Q:")
print(Q)
print("Matriz R:")
print(R)
print(Q@R)
```

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

1. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dado $\boldsymbol{A}_k$:
   2.1 Calcular $\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{A}_k$
   2.2 Definir $\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1}$

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

1. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dado $\boldsymbol{A}_k$:
   2.1 Calcular $\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{A}_k$
   2.2 Definir $\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1}$

Teorema : Convergencia.

Si los autovalores de una matriz $\boldsymbol{A}$ verifican que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$$

entonces la sucesión de matrices equivalentes contruidas con el algoritmo QR converge a una matriz triangular superior.

Código Python:

```python
#!/usr/bin/env python3
import numpy as np

def algoritmo_qr(A, num_iter):
    n = A.shape[0]
    autovalores = np.zeros(n, dtype=np.complex128)
    for i in range(num_iter):
        Q, R = np.linalg.qr(A)
        A = np.dot(R, Q)
    for i in range(n):
        autovalores[i] = A[i, i]
    return autovalores

A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 9]])

num_iter = 100
autovalores = algoritmo_qr(A, num_iter)
print("Autovalores:")
print(autovalores)
```

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. ***Análisis numérico.*** 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 9.
- Carlos Moreno González. ***Introducción al cálculo numérico.*** Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 3.
- B. Bradie. ***A Friendly Introduction to Numerical Analysis.*** New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 4.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. ***Classical Numerical Analysis.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. doi: 10.1017/9781108942607. Capítulo 8.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. ***Numerical Mathematics.*** New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 5.