Cálculo Avanzado

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad Regional La Plata
Universidad Tecnológica Nacional

Práctica: Unidad 1.
Tema: Introducción a la variable compleja.
Profesor Titular: Manuel Carlevaro.
Jefe de Trabajos Prácticos: Christian Molina.

Ejercicio 1.

Mostrar que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, y $1/i = -i$, $1/i^2 = -1$, $1/i^3 = i$ y $1/i^4 = 1$.

Ejercicio 2.

Multiplicar por i equivale geométricamente a rotar en sentido antihorario por $\pi/2$ (90°). Verificar graficando z y zi, y el ángulo de rotación, para $z = 1 + i$, $z = -1 + 2i$, $z = 4 - 3i$.

Ejercicio 3.

Verificar las siguientes propiedades de los números complejos conjugados:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

para $z_1 = -11 + 10i$ y $z_2 = -1 + 4i$.

Ejercicio 4.

Expresar $\dfrac{3 + 5i}{7 + 9i}$ en la forma $a + bi$, donde a y b son reales.

Ejercicio 5.

En términos del diagrama de Argand, describir la región de puntos definida por:

$$\begin{cases} |z - (1 + i)| < 2 \\ |z - 2i| > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 6.

a) En términos del diagrama de Argand, describir el conjunto:

$$S = \{z : z = \cos t + i \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq \pi\}$$

.

b) Describir $f(S)$ si f se define como $f(z) = z^2$.

Ejercicio 7.

Determinar el valor principal del argumento de $(1+i)^{20}$.

Ejercicio 8.

Encontrar y graficar en el plano complejo todas las raíces de $\sqrt[3]{i+i}$.

Ejercicio 9.

Determinar $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ para

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

en $z = 1 - i$.

Ejercicio 10.

Del mismo modo que para las funciones de variable real, una función compleja de variable compleja es *continua* en $z = z_0$ si $f(z_0)$ está definida y

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Determinar si $f(z)$ es continua en $z = 0$, si $f(0) = 0$ y para $z \neq 0$ la función se define como

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(z)}{1-|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 11.

Si $f(z) = z^3$, escribir f en la forma $u(x,y) + iv(x,y)$ y mostrar que u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Ejercicio 12.

Determinar si las funciones

a)

$$f(z) = e^{-2x}(\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y)$$

b)

$$f(z) = \mathrm{Re}(z^2) - i\,\mathrm{Im}(z^2)$$

son analíticas.

Ejercicio 13.

Si $u(x,y) = 3x - 2y + 5$, ¿cómo debe estar definida $v(x,y)$ si $u(x,y) + iv(x,y)$ debe ser analítica?

Ejercicio 14.

a) Calcular:

$$\int_0^{2i} z dz$$

b) Calcular:

$$\int_0^{2i} \bar{z} dz$$

primero a lo largo del segmento de línea C_1 que une 0 con $2i$, y luego a lo largo de la curva C_2, donde C_2 es la mitad derecha del círculo centrado en i con radio 1.

Ejercicio 15.

Explicar por qué la integral:

$$\int_1^i 2e^{2z}\, dz$$

no es ambigua, y encontrar el valor de esta integral.

Ejercicio 16.

Calcular:

$$\int_1^i \bar{z}^2\, dz$$

a lo largo de las siguientes curvas C:

a) C es el segmento de línea que une 1 con i.

b) $C = \{z : z = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, es decir, C es el primer cuadrante del círculo $|z| = 1$.

Ejercicio 17.

Sea $f(z) = (z - z_0)^m$, donde m es un entero y z_0 una constante. Integrar la función sobre una trayectoria circular C de radio ρ con centro en z_0 en sentido antihorario.

Ejercicio 18.

Suponga que $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$. Probar que $L_1 = L_2$.

Ejercicio 19.

Sea $f(z)$ definida por

$$f(z) = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$$

a) Encuentre el radio de convergencia de f.

b) Calcule $f(\frac{i}{12})$ con una precisión dada por un disco de radio 0.001.

c) Calcule $f'(\frac{i}{12})$ con una precisión de un dígito decimal.