

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Manuel Carlevaro

Universidad de Navarra • 2024

- ▶ Definir conjuntos por extensión y comprensión. Realizar diagramas de Venn. Identificar elementos y subconjuntos a la vez que relaciones de pertenencia e inclusión.
- ▶ Realizar operaciones entre conjuntos (unión, intersección y diferencia).
- ▶ Identificar los conjuntos numéricos.
- ▶ Revisar la conformación de los números reales: números naturales, enteros, racionales e irracionales.
- ▶ Conocer la representación del conjunto de los números reales como recta real y los demás conjuntos numéricos.
- ▶ Revisar cómo se manipulan expresiones algebraicas usando las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas de las operaciones.
- ▶ Conocer el orden de las prioridades de las operaciones algebraicas y el rol de los paréntesis.
- ▶ Revisar identidades algebraicas importantes que involucran la suma, resta, multiplicación y división.

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves $\{\}$ para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Ejemplo : .

$$S = \{\text{domingo, martes, lunes, jueves, viernes, sábado, miércoles}\}$$

Otros ejemplos:

$$A = \{a, e, i, o, u\} \quad B = \{\text{rojo, verde, azul}\} \quad C = \{\square, \circ, \triangle, \diamond, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$



- ▶ **No importa** el orden en que escribimos los elementos de un conjunto.
- ▶ Tampoco es importante que aparezcan **elementos repetidos**. Por ejemplo, los siguientes conjuntos son iguales:

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b, b, b\} = \{b, a, c, a\}$$

CONJUNTOS Y OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Se utiliza el símbolo " \in " para indicar que cierto elemento **pertenece** a un conjunto:

$$\text{lunes} \in S$$

Se puede leer como "lunes pertenece a S ".

Por otro lado, se utiliza el símbolo " \notin " para indicar que un elemento **no pertenece** a un conjunto, por ejemplos:

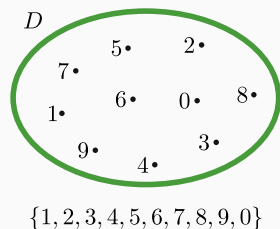
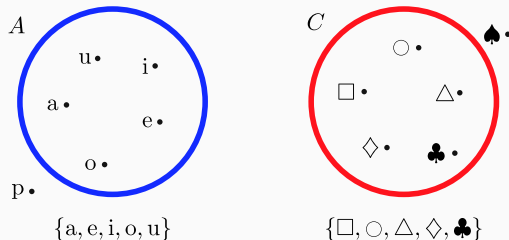
$$\text{enero} \notin S$$

Cuando el conjunto tiene **muchos elementos**, o una **cantidad infinita** de elementos, se utilizan los **tres puntos "..."**:

$$\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Diagramas de Venn:



Definición : Conjunto vacío.

El conjunto que **no tiene elementos** se llama “conjunto vacío” y se denota con el símbolo “ \emptyset ”:

$$\emptyset = \{\}$$

Con los elementos de un conjunto se pueden formar otros conjuntos “más pequeños” que se llaman **subconjuntos**.

Por ejemplo, con $A = \{a, e, i, o, u\}$ se pueden formar varios subconjuntos:

$\{e, i, o\}$ $\{a\}$ $\{a, e\}$ $\{i, u\}$

$\{i, o, u\}$ $\{o, u\}$ $\{u, o, a, e\}$ $\{o\}$

En palabras se dice, por ejemplo, que:

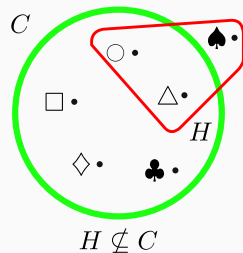
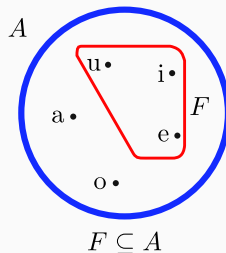
$\{a, i\}$ es un subconjunto de $\{a, e, i, o, u\}$

o que

$\{a, i\}$ está incluido en $\{a, e, i, o, u\}$

Definición : $A \subseteq B$.

Se escribe $A \subseteq B$ cuando **todos los elementos** del conjunto A también son elementos del conjunto B . En cambio, se escribe $A \not\subseteq B$ cuando **algún elemento** de A no es un elemento del conjunto B



Se puede describir a los conjuntos **por extensión** o **por comprensión**. Se dice que un conjunto está descripto por extensión cuando hacemos una lista de sus elementos, como en los ejemplos anteriores:

$$A = \{a, e, i, o, u\} \quad B = \{\text{rojo, verde, azul}\} \quad C = \{\square, \bigcirc, \triangle, \diamond, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

Por otro lado, se dice que un conjunto está descripto por comprensión cuando se utiliza alguna propiedad característica de sus elementos, por ejemplo:

$$A = \underbrace{\{\text{el conjunto de las vocales}\}}_{\text{definición por comprensión}} = \underbrace{\{a, e, i, o, u\}}_{\text{definición por extensión}}$$

De manera más formal, se utiliza la siguiente notación para definir conjuntos por comprensión:

$$A = \{ \underbrace{x \text{ es una letra}}_{\text{conjunto con el que trabajamos}} : \underbrace{x \text{ es una vocal}}_{\text{propiedad que debe cumplirse}} \}$$

Se lee: “ A es el conjunto de las letras x **tal que** x es una vocal”.

Ejemplos:

Definición por comprensión	Definición por extensión
$\{x : x \text{ es una letra de la palabra "matemática"}\}$	$\{m, a, t, e, i, c\}$
$\{x : x \text{ es una vocal de la palabra "matemática"}\}$	$\{a, e, i\}$
$\{x : x \text{ es un Estado miembro de la Unión Europea que empieza con "F"}\}$	$\{\text{Francia, Finlandia}\}$
$\{x : x \text{ es un dígito decimal par}\}$	$\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Actividad 1

Definición : Intersección de conjuntos.

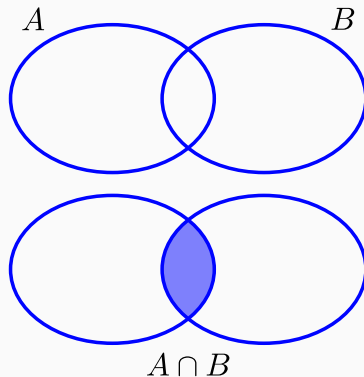
La **intersección** de dos conjuntos es un nuevo conjunto formado por los elementos que están en ambos conjuntos simultáneamente. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la intersección de A y B de la siguiente forma:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{a, b, c, g\}$ y $B = \{r, g\}$, entonces:

$$A \cap B = \{g\}$$



Definición : Unión de conjuntos.

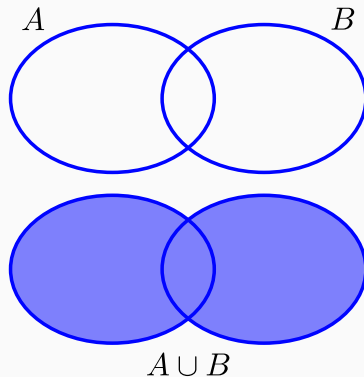
La **unión** de dos conjuntos es un nuevo conjunto formado por los elementos que están en uno u otro conjunto. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la unión de A y B de la siguiente forma:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{a, b, c, g\}$ y $B = \{r, g\}$, entonces:

$$A \cup B = \{a, b, c, r, g\}$$



Definición : Diferencia de conjuntos.

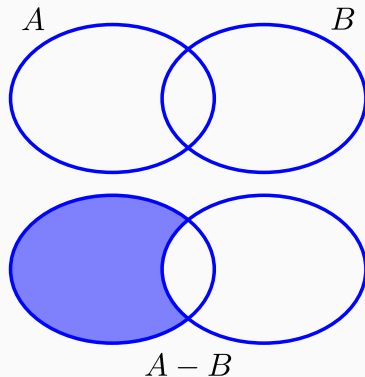
La **diferencia** del conjunto A con el conjunto B es un nuevo conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B . Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la diferencia de A con B de la siguiente forma:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{a, b, c, g\}$ y $B = \{r, g\}$, entonces:

$$A - B = \{a, b, c\}$$

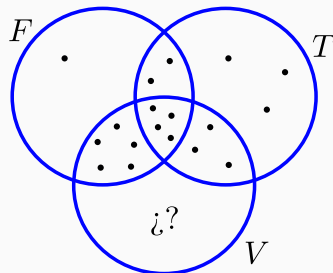


Ejemplo:

23 estudiantes de un curso practican alguno de los siguientes deportes: tenis, fútbol y voley. Cuatro de ellas juegan regularmente los tres deportes; cinco juegan solamente voley y fútbol; dos juegan solamente tenis y fútbol; y tres juegan solamente tenis y voley. Además, tres personas juegan únicamente tenis y una persona juega únicamente fútbol. ¿Cuántas personas juegan únicamente voley?

$T = \{\text{estudiantes que juegan tenis}\}$; $V = \{\text{estudiantes que juegan voley}\}$; $F = \{\text{estudiantes que juegan fútbol}\}$

Enunciado	Conjunto	# elementos
Total de alumnos	$V \cup F \cup T$	23
Alumnos que juegan 3 deportes	$V \cap F \cap T$	4
Alumnos que juegan únicamente voley y fútbol	$(V \cap F) - T$	5
Alumnos que juegan únicamente tenis y fútbol	$(T \cap F) - V$	2
Alumnos que juegan únicamente tenis y voley	$(T \cap V) - F$	3
Alumnos que juegan únicamente tenis	$T - (V \cup F)$	3
Alumnos que juegan únicamente fútbol	$F - (T \cup V)$	1
Alumnos que juegan únicamente voley	$V - (T \cup F)$?



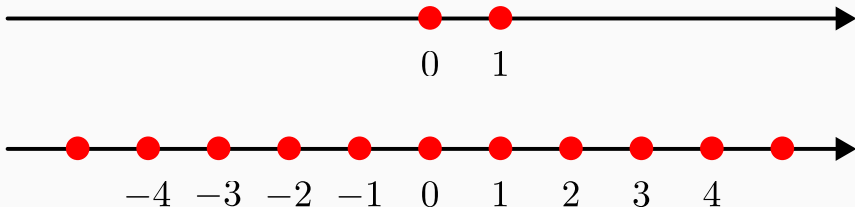
Definición : Números naturales.

Utilizamos los **números naturales** para contar cosas. Denotamos este conjunto con el símbolo \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Consideramos al 0 como número natural, aunque algunos libros no lo hacen.

Representación gráfica:



Definición : Números enteros.

Los **números enteros** están comprendidos por los naturales y sus opuestos. Utilizamos el símbolo \mathbb{Z} para este conjuntos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

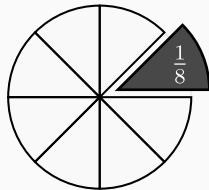
Definición : Números racionales o fraccionarios.

Son aquellos números que pueden escribirse como **cociente** entre dos números enteros:

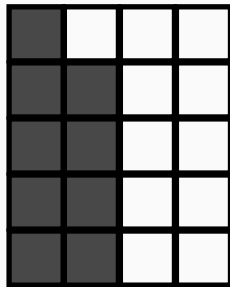
$$\frac{p}{q} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} = \frac{\text{número entero}}{\text{número entero} \neq 0}$$

Utilizamos el símbolo \mathbb{Q} para denotar este conjunto:

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -3, \frac{1}{3}, \frac{5}{2}, \dots, -4, 0.3, \dots, \}$$



$$\frac{1 \text{ porción sombreada}}{8 \text{ porciones totales}} = \frac{1}{8}$$



$$\frac{9}{20}$$

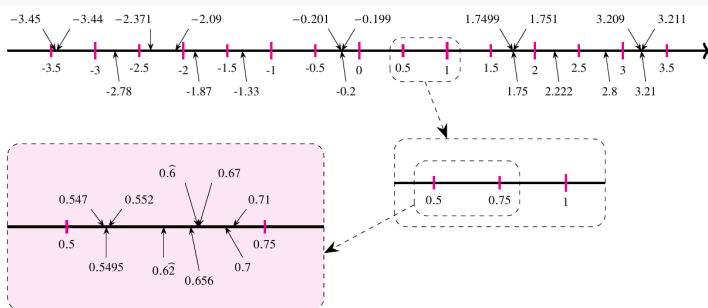
La razón entre el área total y el área sombreada es 9 a 20.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los números fraccionarios también tienen su representación en **forma decimal**. En este caso podemos obtener decimales exactos o decimales periódicos (que se van repitiendo indefinidamente):

$$\frac{1}{2} = \underbrace{0.5}_{\text{decimales exactos}} \qquad \frac{2}{3} = \underbrace{0.\hat{6} = 0.66666\dots}_{\text{decimales periódicos}}$$

Representación gráfica: En la representación lineal, en cualquier segmento (sin importar su tamaño) se pueden encontrar números fraccionarios. Entre dos números fraccionarios existen una infinidad de otros números racionales:



¿Se puede completar toda la línea numérica con números racionales?
La respuesta es **negativa**, y se debe a que algunas longitudes o magnitudes no son números racionales, sino **irracionales**.

Definición : Números irracionales.

Son aquellos números que **no pueden escribirse** como cociente de dos números enteros. Usamos el símbolo \mathbb{I} para denotar a este conjunto:

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{5}, \pi, e, \dots\}$$

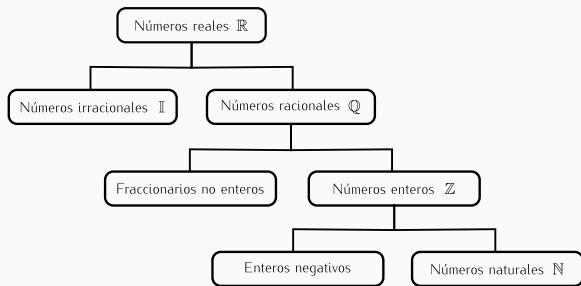
Al escribir los números racionales en **forma decimal** siempre obtenemos una expresión con infinitas cifras no periódicas:

$$\pi = \underbrace{3.141592654\dots}_{\text{decimales no periódicos}} \quad \sqrt{2} = \underbrace{1.414213562\dots}_{\text{decimales no periódicos}}$$

Definición : Números reales.

Es la unión de los números racionales y los irracionales, conformando la totalidad de los **números reales** que permiten calcular cualquier longitud posible. Utilizamos el símbolo \mathbb{R} para llamar a este conjunto:

$$\mathbb{R} = \{0, -1, \frac{1}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}, \pi, \frac{7}{3}, \dots\}$$



Definición : Números pares.

Son los **números enteros divisibles por 2**. En forma simbólica:

$$n = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

Cualquier entero que termine en 0, 2, 4, 6 u 8 es un número par:

$\{\dots, -1240, -238, -156, -2, 0, 2, 4, 16, 88, 12340, \dots\}$

$$\{n \in \mathbb{Z} : n = 2p \text{ para algún } p \in \mathbb{Z}\}$$

Definición : Números impares.

Son los **números enteros que no divisibles por 2**. En forma simbólica:

$$n = 2p + 1, \quad p \in \mathbb{Z}$$

Cualquier entero que termine en 1, 3, 5, 7 u 9 es un número impar:

$\{\dots, -12345, 99, -1, 1, 317, 23, \dots\}$

$$\{n \in \mathbb{Z} : n = 2p + 1 \text{ para algún } p \in \mathbb{Z}\}$$

Definición : Números primos.

Son los **números naturales** mayores que 1 divisibles solo por sí mismos y la unidad.

Los primeros 5 números primos son 2, 3, 5, 7, y 11.

Los números primos pueden ser muy útiles para factorizar números enteros y facilitar las operaciones entre fracciones.

Definición : Números compuestos.

Son los **números naturales** mayores que 1 que tienen algún divisor natural aparte de sí mismos y el 1.

Los primeros 5 números compuestos son 4, 6, 8, 9, 10.



Actividad 3

Propiedades de la **suma** y de la **multiplicación**: a , b y c son números reales.

	Suma	Multiplicación
Propiedad de cierre	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \times b \in \mathbb{R}$
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Propiedad asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
Números opuestos/inversos	$a + (-a) = 0$	$a \times a^{-1} = 1, a \neq 0$
Propiedad distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	

Notación para el producto

La forma más usual es usando un **punto en el medio del renglón**, pero también se usa el símbolo \times y paréntesis:

$$15 = \underbrace{3 \times 5}_{\text{usando } \times} = \overbrace{3 \cdot 5}^{\text{usando } \cdot} = \underbrace{(3)(5)}_{\text{usando } ()} = 3(5) = (3)5$$

Cuando se utilizan letras o variables está permitido no usar símbolos o paréntesis entre medio:

$$3a = 3 \cdot a \quad ab = a \cdot b$$

Sin embargo, **se evita** usar la escritura anterior cuando se trata de números propiamente dichos para evitar confusión:

$$35 = \text{treinta y cinco} \quad 35 \stackrel{\text{NO ES}}{=} 3 \cdot 5$$

Cambio de precedencia en las operaciones aritméticas

La **regla principal** cuando usamos **paréntesis** y/o **corchetes** es que debe respetarse el orden de las operaciones indicadas siempre desde los más internos y luego avanzando hacia **afuera**:

$$3[\underbrace{(3 + 4)}_{\textcircled{1}} - \underbrace{(2 + 2)}_{\textcircled{1}}] = 3[\overbrace{7 - 4}^{\textcircled{2}}] = \underbrace{3 \cdot 3}_{\textcircled{3}} = 9$$

Resta y división

Resta: para $a, b \in \mathbb{R}$

$$a - b = a + (-b)$$

División: para $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

Notación

Para la división se utilizan varios símbolos o notaciones:

$$a \div b \quad a : b \quad a/b \quad \frac{a}{b}$$

Los símbolos de las operaciones **nunca se escriben juntos**, se deben usar paréntesis o corchetes:

Formas correctas

$$3 + (-2) \quad 3 \cdot (-12) \quad -9 \div (-2)$$

Formas incorrectas

$$3 + -2 \quad 3 \cdot -12 \quad -9 \div -2$$

Propiedades de la resta (o de los números opuestos):

- ▶ Calcular el opuesto es lo mismo que multiplicar por -1 : $-a = (-1) \cdot a$
- ▶ El **doblo** opuesto: $-(-a) = (-1) \cdot (-1) \cdot a = a$
- ▶ Números opuestos y multiplicación: $-a \cdot b = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$
- ▶ Números opuestos y fracciones: para $b \neq 0$,

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \text{y} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

- ▶ **Distributiva** de negativo: $-(a + b) = -a - b$ y $-(a - b) = -a + b$

Propiedades de la división (o de los números inversos): a, b, c y d son números reales aclarando que cuando corresponda el denominador es diferente de cero.

- ▶ **Suma** de fracciones con **igual denominador**: es la forma más simple de sumar fracciones porque se considera que se están sumando cantidades de una misma fracción de la unidad (se suman directamente los numeradores):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{b} = (a + c) \cdot \frac{1}{b} = \frac{a + c}{b}$$

- ▶ **Suma** de fracciones en general: se buscan **fracciones equivalentes** que tengan el mismo denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{\text{equivalentes}}{=} \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} \stackrel{\text{igual denominador}}{=} \frac{ad + cb}{bd}$$

- ▶ **Multiplicación** de fracciones: se calculan multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

- ▶ **División** de fracciones: la segunda función **se da vuelta** y luego se multiplica:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Suma de fracciones usando mínimo común múltiplo: ejemplos:

- $1/6 + 2/3 + 4/9$. Los denominadores son 6, 3 y 9 cuyo mínimo común múltiplo es 18. Las fracciones equivalentes son:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{18} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{6} = \frac{12}{18} \quad \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{2} = \frac{8}{18}$$

Entonces:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{3}{18} + \frac{12}{18} + \frac{8}{18} = \frac{3 + 12 + 8}{18} = \frac{23}{18}$$

- $2 + 5/8 - 5/6$. Los denominadores son 1, 8 y 6, con mínimo común múltiplo 24:

$$2 + \frac{5}{8} - \frac{5}{6} = \frac{48}{24} + \frac{15}{24} - \frac{20}{24} = \frac{48 + 15 - 20}{24} = \frac{43}{24}$$

Definición : Potenciación.

- ▶ Exponente $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

- ▶ Caso particular $n = 0$, $a \neq 0$: $a^0 = 1$
- ▶ $n = 0$ y $a = 0$ **no está definida matemáticamente**: 0^0 expresión **no definida**.
- ▶ Para $a \neq 0$ se calculan potencias con números enteros **negativos**:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$$\blacktriangleright 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$\blacktriangleright (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$\blacktriangleright$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{9}{49}$$

$$\blacktriangleright x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$\blacktriangleright a^1 = a$$

$$\blacktriangleright$$

$$\left(\frac{234}{1354}\right)^0 = 1$$

$$\blacktriangleright$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\blacktriangleright$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

Propiedades de las potencias con exponentes enteros: a y b son números reales diferentes de cero, $n, m \in \mathbb{Z}$:

► **Regla del producto:** producto de potencias de **igual base**, se **suman** los exponentes: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ veces}} = a^{n+m}$$

► **Distributiva respecto de la multiplicación:** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ veces}} = a^n \cdot b^n$$

► **Regla del cociente:** en una división de potencias de **igual base** se **restan** los exponentes: $a^n / a^m = a^{n-m}$.

Para el caso de $n > m$:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ veces}}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-m \text{ veces}} = a^{n-m}$$

Propiedades de las potencias con exponentes enteros: (continuación)

- **Distributiva respecto de la división:** $(a/b)^n = a^n/b^n$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ veces}} = \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- **Regla de la potencia:** en una potencia dentro de otra potencia, los exponentes se **multiplican**: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ veces}} = a^{n \cdot m}$$

- **Regla de la potencia opuesta:** Si la potencia es negativa, la fracción se invierte y se cambia de signo el exponente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \text{¡Cuidado! } (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 \neq -3^2 = -(3^2) = -3 \cdot 3 = -9$$

Definición : Radicación.

Es el proceso de hallar las raíces de orden n de un número a . Para números reales:

$$\sqrt[n]{a} = x$$

donde:

- ▶ n es el **índice** u **orden**, a es el **radicando**.
- ▶ Según n sea impar o par:
 - n impar $\mapsto \sqrt[n]{a} = x$ **raíz enésima**.
 - n par $\mapsto \sqrt[n]{a} = \pm x$ **raíces enésimas**.
- ▶ Si $a < 0$ solo existe la raíz real si n es impar.



La raíz cuadrada de los números enteros, si estos no son cuadrados perfectos, son siempre números irracionales.

Propiedades:

- ▶ $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a}^p$
- ▶ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- ▶ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- ▶ $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
- ▶ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- ▶ $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$

Nota: la raíz enésima de un número se puede poner en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

ya que

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{y} \quad (a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$$



Actividad 4