Introducción a las matemáticas

Ecuaciones e inecuaciones

Manuel Carlevaro

Universidad de Navarra • 2024

Objetivos

- Mejorar las destrezas en la manipulación de expresiones algebraicas.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones.

Una **igualdad** es un enunciado en el que se establece que dos expresiones matemáticas son iguales. Está compuesta por **dos miembros** (izquierdo y derecho) conectados por el símbolo **igual**. Algunas igualdades son verdaderas y otras no; en otros casos, la igualdad involucra una o más variables: este tipo de igualdades se llaman **ecuaciones** que podrán ser verdaderas o falsas según los valores que tomen las variables involucradas.

$$\underbrace{3\,x + 4(y-1)}_{\text{miembro izquierdo}} = \overbrace{7 - x^2}^{\text{miembro derecho}}$$

Una **igualdad** es un enunciado en el que se establece que dos expresiones matemáticas son iguales. Está compuesta por **dos miembros** (izquierdo y derecho) conectados por el símbolo **igual**. Algunas igualdades son verdaderas y otras no; en otros casos, la igualdad involucra una o más variables: este tipo de igualdades se llaman **ecuaciones** que podrán ser verdaderas o falsas según los valores que tomen las variables involucradas.

$$\underbrace{3\,x + 4(y-1)}_{\text{miembro izquierdo}} = \overbrace{7 - x^2}^{\text{miembro derecho}}$$

Ejemplos:

- $3 + 5 = 8$ es una igualdad verdadera.
- $2 + 2 = 5$ es una igualdad falsa.
- $4 \times 3 + 5$ no es una igualdad.
- $7x - 3 = 0$ es una ecuación con la variable x. Puede ser verdadera o falsa según el valor que se le asigne a la variable.
- $8x - 3y = 8$ Es una ecuación con dos variables, x y y. Puede ser verdadera o falsa según los valores de las variables.
- Una **identidad** es una igualdad que vale **siempre** para cualquier valor que tomen las variables: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Los posibles valores que pueden tomar las variables en una ecuación forman el **conjunto de validez** de la ecuación. Se las suele llamar **incógnitas**, por lo que el objetivo del planteo de una ecuación es determinar el o los valores de las incógnitas que hacen que la ecuación sea verdadera.

Ejemplos:

$$7x - 3 = 0$$

Conjunto de validez: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Con $x = 1$ la identidad es falsa:

$$\begin{aligned} 7x - 3 &= 3 \\ 7 \cdot 1 - 3 &= 0 \\ 4 &= 0 \longleftarrow \text{ falso} \end{aligned}$$

Los posibles valores que pueden tomar las variables en una ecuación forman el **conjunto de validez** de la ecuación. Se las suele llamar **incógnitas**, por lo que el objetivo del planteo de una ecuación es determinar el o los valores de las incógnitas que hacen que la ecuación sea verdadera.

Ejemplos:

$$7x - 3 = 0$$

Conjunto de validez: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Con $x = 1$ la identidad es falsa:

$$7x - 3 = 3$$

$$7 \cdot 1 - 3 = 0$$

$$4 = 0 \longleftarrow \text{ falso}$$

$$\frac{3}{x} + 1 = x - 1$$

Conjunto de validez: $\{x : x \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

Con $x = 3$ la igualdad es verdadera:

$$\frac{3}{x} + 1 = x - 1$$

$$\frac{3}{3} + 1 = 3 - 1$$

$$2 = 2 \longleftarrow \text{ verdadero}$$

Actividad 1 – Ecuaciones.

1. Determine si los siguientes valores de las variables son soluciones de la ecuación planteada en cada caso:
   a) $x = 1$, $x = 0$, $x = -2$ para la ecuación $x(x-3) = 2$.
   b) $y = 1$, $y = 0$, $y = -2$ para la ecuación $y^2 - 3y + 2 = 0$
2. Sin hacer ninguna cuenta en la hoja, computadora o tableta, determinar la única solución de las siguientes ecuaciones:
   a) $7 = b - 2$
   b) $12 = 3c$
   c) $t + 6 = 2$
   d) $4x = 2$

Dos ecuaciones que tienen **exactamente** las mismas soluciones se dicen que son **equivalentes**. El método más utilizado para la resolución de una ecuación consiste en encontrar soluciones equivalentes que sean más sencillas de resolver.

Propiedad 1 – Ecuaciones equivalentes:

Suma/resta:

$$A = B \quad \text{es equivalente a} \quad A + C = B + C$$
$$A = B \quad \text{es equivalente a} \quad A - C = B - C$$

Multiplicación/división:

$$A = B \quad \text{es equivalente a} \quad A \times C = B \times C$$
$$A = B \quad \text{es equivalente a} \quad \frac{A}{C} = \frac{B}{C},\ C \neq 0$$

Se utiliza el símbolo $\Longleftrightarrow$ para indicar que dos ecuaciones son equivalentes. Por ejemplo:

$$2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow 2x = 3$$

También es habitual escribir dos ecuaciones que son equivalentes una debajo de la otra, **respetando que esté alineado** el símbolo "=":

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones

Ejemplo: Si tomamos la edad actual de Juan y le sumamos el doble que la edad que tenía hace 5 años obtenemos el número 56. ¿Cuál es la edad actual de Juan?

- Incógnita: variable x
- Conjunto de validez: $\mathbb{N}$

Ecuación:

$$x + 2(x - 5) = 56$$

Separación en términos:

$$\overbrace{x} + \overbrace{2(\underbrace{x} - \underbrace{5})} = \overbrace{56}$$

$$\begin{aligned} x + 2x - 10 &= 56 \\ 3x - 10 + 10 &= 56 + 10 \\ 3x &= 66 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{66}{3} \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Conjunto solución: $\{22\}$.

Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales con una variable o **ecuaciones de primer orden** son aquellas que, con operaciones de suma, resta multiplicación o división, pueden llevarse a una ecuación equivalente de la forma

$$a\,x + b = 0$$

donde x es la incógnita y las letras a y b son números constantes. Las ecuaciones lineales pueden resolverse usando las propiedades de suma/resta y multiplicación/división de las ecuaciones equivalentes.

Las ecuaciones lineales con una variable o **ecuaciones de primer orden** son aquellas que, con operaciones de suma, resta multiplicación o división, pueden llevarse a una ecuación equivalente de la forma

$$a\,x + b = 0$$

donde x es la incógnita y las letras a y b son números constantes. Las ecuaciones lineales pueden resolverse usando las propiedades de suma/resta y multiplicación/división de las ecuaciones equivalentes.

Actividad 2 – Ecuaciones lineales.

1. Resolver las siguientes ecuaciones lineales (verificar la solución):

a) $5 + 4x = 3$

b) $3r - 9 = 18 - 6r$

c) $2(b - 5) = b + 2(1 + b)$

d) $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$

e) $7 - 4v + 6 = -3v + 29 - 5v$

f) $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} = \frac{y}{6} + 1$

g) $\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7$

h) $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

i) $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y + 1}{4}$

j) $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

k) $2x - \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{4} = 6x$

l) $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$

Actividad 2 – Ecuaciones lineales (continuación).

1. Resolver las siguientes ecuaciones lineales. ¿Qué diferencias aparecen en la cantidad de soluciones?

a) $7x + 2 = -x + 1$

b) $2(x + 1) + 1 = 2x + 3$

c) $3x = 2(x + 2) + x$

3. Los siguientes enunciados involucran un número desconocido, ¿cuál es ese número?

a) Si multiplico un número por 3 y luego le sumo 8 obtengo 23.

b) Si resto 7 a un número y al resultado lo multiplico por 2 entonces obtengo el mismo número.

c) Dentro de 20 años tendré el triple de la edad que tengo ahora.

d) Al aumentar la longitud de los lados de un cuadrado en $1\,\mathrm{cm}$ cada uno entonces su área aumenta en $2\,\mathrm{cm}$. ¿Cuánto mide el lado original del cuadrado?

Un **sistema de ecuaciones** se refiere a dos o más ecuaciones que involucran a las mismas incógnitas. Se suelen agrupar con una llave a la izquierda para indicar/recordar que se trabaja con ecuaciones de manera simultánea.

Ejemplos:

Dos ecuaciones con **dos** incógnitas:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + 4y = x \end{cases}$$

Tres ecuaciones con **dos** incógnitas:

$$\begin{cases} AB + 7A = 1 \\ B^2 + 3A = 3 \\ 5A + A^2 = 1 \end{cases}$$

Dos ecuaciones con **tres** incógnitas:

$$\begin{cases} 3x^2 + y + z + 2 = xy \\ -x + 8zy = y^3 \end{cases}$$

Un **sistema de ecuaciones** se refiere a dos o más ecuaciones que involucran a las mismas incógnitas. Se suelen agrupar con una llave a la izquierda para indicar/recordar que se trabaja con ecuaciones de manera simultánea.

Ejemplos:

Dos ecuaciones con **dos** incógnitas:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + 4y = x \end{cases}$$

Tres ecuaciones con **dos** incógnitas:

$$\begin{cases} AB + 7A = 1 \\ B^2 + 3A = 3 \\ 5A + A^2 = 1 \end{cases}$$

Dos ecuaciones con **tres** incógnitas:

$$\begin{cases} 3x^2 + y + z + 2 = xy \\ -x + 8zy = y^3 \end{cases}$$

Solución $\mapsto$ asignar valor a **todas** las incógnitas de modo que todas las ecuaciones sean verdaderas.

$x = 4, y = -1$ no es solución:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + 4y = x \end{cases} \mapsto \begin{cases} 4 + 3(-1) = 3 \\ 2(4) + 4(-1) = 4 \end{cases} \mapsto \begin{cases} 1 = 3 & \text{✗} \\ 4 = 4 & \checkmark \end{cases}$$

$x = 12, y = -3$ si es solución:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + 4y = x \end{cases} \mapsto \begin{cases} 3 = 3 & \checkmark \\ 4 = 4 & \checkmark \end{cases}$$

- **Sustitución:** consiste en despejar una variable en una ecuación y reemplazar en la otra. Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

De la primera ecuacion despejamos x: $x = 3 - y$, y reemplazamos en la segunda: $(3 - y) - y = 1$. De aquí resulta $y = 1$, y $x = 3 - y = 2$.

- **Sustitución:** consiste en despejar una variable en una ecuación y reemplazar en la otra. Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

  De la primera ecuacion despejamos x: $x = 3 - y$, y reemplazamos en la segunda: $(3 - y) - y = 1$. De aquí resulta $y = 1$, y $x = 3 - y = 2$.

- **Eliminación:** involucra sumar múltiplos de las ecuaciones (miembro a miembro) de modo de cancelar una de las variables. Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

  Sumamos miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$(x + y) + (x - y) = 3 + 1$$

  que resulta en $2x = 4$. Entonces $x = 2$ y podemos sustituir este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtener $y = 1$.

Actividad 3 – Sistemas de ecuaciones lineales.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} z + 2r = 1 \\ 2z + 4 = 3(z + r) \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3m + n = 3t \\ t + n = m \\ 4t = n + 4 \end{cases}$$

2. Los siguientes enunciados involucran números desconocidos. ¿Cuáles son esos números?

a) Juan tiene cinco años más que su hermana y juntos suman cuarenta y siete años.
b) La suma de dos números es 13 y su diferencia es 5.
c) En una canasta hay peras, manzanas y bananas; son un total de 37 frutas. Hay 7 manzanas mas que bananas y el doble de peras que manzanas.
d) En un bar, tres cafés y tres muffins cuestan € 16.5. Con un descuento del 10 % en el café y del 15 % en los muffins, una compra de 5 cafés y 10 muffins cuesta € 37.75. ¿Cuál es el precio de un café y de un muffin?

Las **ecuaciones cuadráticas** son ecuaciones de **de segundo grado** de la forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

donde x es la incógnita y a, b y c son números fijos constantes, y a es diferente de cero.

Ejemplos:

- $x^2 - 3x - 4 = 0$ es una ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = -3$ y $c = -4$.
- $x^2 - 2 = 0$ es una ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -2$.
- $2x + 3 = 0$ no es una ecuación cuadrática.
- $\dfrac{x^2}{3} + x = 0$ es una ecuación cuadrática con $a = 1/3$, $b = 1$ y $c = 0$.

Ejemplos de casos particulares:

- Ecuación cuadrática con una única solución: $x^2 = 0$. Solución: $\{0\}$
- Ecuación cuadrática con dos soluciones: $x^2 = 9$. Solución: $\{-3, 3\}$
- Ecuación cuadrática sin soluciones: $x^2 = -4$. Solución: $\{\varnothing\}$
- Ecuación cuadrática $(x+2)^2 = 9$. Solución: $\{-5, 1\}$.

Ejemplos de casos particulares:

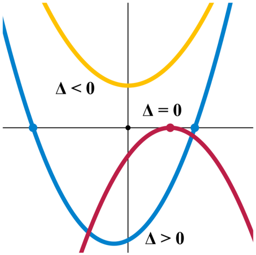
- Ecuación cuadrática con una única solución: $x^2 = 0$. Solución: $\{0\}$
- Ecuación cuadrática con dos soluciones: $x^2 = 9$. Solución: $\{-3, 3\}$
- Ecuación cuadrática sin soluciones: $x^2 = -4$. Solución: $\{\varnothing\}$
- Ecuación cuadrática $(x+2)^2 = 9$. Solución: $\{-5, 1\}$.

Solución general: fórmula de Bhaskara:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$. Tres casos:

- $\Delta > 0$: **dos soluciones** distintas que son $x_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$ y $x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$.
- $\Delta = 0$: **solución única** que será $x_1 = -b/2a$.
- $\Delta < 0$: **no hay solución**.



Fuente: Wikimedia.

Ejemplo: La ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 1 = x + 9$ es equivalente a la ecuación

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

De modo que los coeficientes son $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$. El discriminante vale:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

Como el $\Delta > 0$, habrá **dos soluciones** diferentes que serán:

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

El conjunto solución es $\{-4, 2\}$.

Ejemplo: La ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 1 = x + 9$ es equivalente a la ecuación

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

De modo que los coeficientes son $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$. El discriminante vale:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

Como el $\Delta > 0$, habrá **dos soluciones** diferentes que serán:

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

El conjunto solución es $\{-4, 2\}$.

Las expresiones cuadráticas se pueden **factorizar**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

siempre y cuando $\Delta \geq 0$.

Del ejemplo anterior:

$$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

Ejemplo: La ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 1 = x + 9$ es equivalente a la ecuación

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

De modo que los coeficientes son $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$. El discriminante vale:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

Como el $\Delta > 0$, habrá **dos soluciones** diferentes que serán:

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

El conjunto solución es $\{-4, 2\}$.

Las expresiones cuadráticas se pueden **factorizar**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

siempre y cuando $\Delta \geq 0$.
Del ejemplo anterior:

$$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

Una ecuación puede escribirse como $f(x) = 0$ donde f es una **función**. A las soluciones de la ecuación se las denomina **raíces** o **ceros** de la función f.

Actividad 4 – Ecuaciones cuadráticas.

1. Reescriba estos ejemplos en la forma general de una ecuación cuadrática. Indique cuáles son los coeficientes.

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$

b) $3y^2 = -27$

c) $x^2 = 2$

d) $3z^2 + 9(z+3) = 9z$

e) $x^2 - 1 = x - 2x^2$

f) $-\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{2}{3}x^2 = 3x - 1$

2. Determine el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 81 = 0$

b) $9(y+1)^2 = 4$

c) $a^2 + 2 = 6a$

d) $2x^2 + 4 = 0$

e) $x(x-3) + 2 = 0$

f) $-2x^2 - \dfrac{x}{7} + 1 = 0$

3. Encuentre los valores de k para que las siguientes ecuaciones tengan una única solución.

a) $x^2 - 2kx + 4 = 0$

b) $x^2 + 2kx = 3$

Actividad 4 – Ecuaciones cuadráticas (continuación).

4. Factorice las siguientes expresiones cuadráticas:

a) $x^2 - 81$
b) $9(y+1)^2 - 4$
c) $x(x-3)+2$
d) $2x^2 + 4$
e) $x^2 - 6x + 2$

5. Resuelva los siguientes problemas

a) Se realiza una reunión y todas las personas se saludan entre sí con un apretón de manos; en total se producen 66 apretones. ¿Cuántas personas hay en la reunión?
b) Mi edad actual multiplicada por mi edad hace 6 años da como resultado 216. ¿Cuál es mi edad?
c) Al aumentar la longitud de las aristas de un cubo en $1\,\text{cm}$ cada una, su volumen aumenta en $7\,\text{cm}^3$. ¿Cuánto mide la arista original del cubo?
d) Los lados de un rectángulo miden $2\,\text{cm}$ y $3\,\text{cm}$. Si cada uno de ellos aumenta una cantidad x de centímetros entonces el área aumenta al doble. ¿Cuánto vale x?

Los sistemas mixtos pueden estar conformados por ecuaciones de cualquier tipo: aquí trabajaremos con sistemas que incluyen **ecuaciones lineales** y **ecuaciones cuadráticas**.

Ejemplo:

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + y = -3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Solución por sustitución: Despejamos y de la segunda ecuación:

$$y = 1 - 2x$$

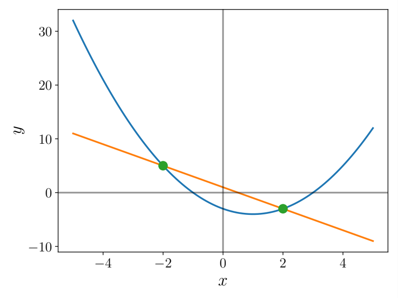
y sustituimos en la primera:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + (1 - 2x) &= -3 \\ x^2 - 2x - (1 - 2x) - 3 &= 0 \\ x^2 - 2x - 1 + 2x - 3 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando cada solución de x en la ecuación para y:

$$x_1 = -2 \mapsto y_1 = 1 - 2x_1 = 1 - 2(-2) = 5$$

$$x_2 = 2 \mapsto y_1 = 1 - 2x_2 = 1 - 2(2) = -3$$



Actividad 5 – Sistemas de ecuaciones mixtos.

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones mixtos.

a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} xy + 9 = 0 \\ 6 + y = x \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) ¿Existe algún rectángulo cuya área sea $12\,\mathrm{m}^2$ y su perímetro sea $8\,\mathrm{m}$?

b) Los lados de un rectangulo miden $7\,\mathrm{m}$ y $12\,\mathrm{m}$, ¿En cuánto se debe aumentar el ancho y en cuánto se debe disminuir el largo para que el perímetro aumente en $2\,\mathrm{m}$ y el área permanezca igual?

c) La suma de las áreas de dos cuadrados da $5\,\mathrm{cm}^2$ y la suma de sus perímetros da $12\,\mathrm{cm}$. ¿Cuánto valen las longitudes de los lados de cada cuadrado?

Definición : Desigualdad.

Una **desigualdad** es un enunciado que establece que una expresión numérica es más grande que otra. Al igual que las igualdades, están compuestas por dos miembros conectados con alguno de los cuatro símbolos siguientes:

- $<$: **menor que**.
- $>$: **mayor que**.
- $\leq$: **menor o igual que**.
- $\geq$: **mayor o igual que**.

Definición : Desigualdad.

Una **desigualdad** es un enunciado que establece que una expresión numérica es más grande que otra. Al igual que las igualdades, están compuestas por dos miembros conectados con alguno de los cuatro símbolos siguientes:

- $<$: **menor que**.
- $>$: **mayor que**.
- $\leq$: **menor o igual que**.
- $\geq$: **mayor o igual que**.

Ejemplos:

- $4 < 8$: verdadero
- $8 > 4$: verdadero
- $5 > 9$: falso
- $7 \leq 7$: verdadero
- $2 \leq 7$: verdadero
- $2x + 1 \geq 3$: inecuación con una variable
- $2 > 2$: desigualdad falsa
- $2 \geq 2$: desigualdad verdadera
- $-5 > -9$: verdadera

Las inecuaciones son desigualdades donde aparecen una o más incógnitas y pueden resolverse planteando inecuaciones equivalente que sean más sensillas. Se utilizan las siguientes propiedades:

Propiedad 2 – Desigualdades y operaciones

Suma/resta: Al sumar o restar el mismo número a ambos miembros de una desigualdad, se **mantiene** la desigualdad. Simbólicamente:

$$A < B \text{ es equivalente a } A + C < B + C \qquad A < B \text{ es equivalente a } A - C < B - C$$

Multiplicación/división:

Caso $C > 0$: al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número **positivo**, se **mantiene** la desigualdad:

$$A < B \text{ es equivalente a } A \times C < B \times C$$

$$A < B \text{ es equivalente a } \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$$

Caso $C < 0$: al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número **negativo**, se **invierte** la desigualdad:

$$A < B \text{ es equivalente a } A \times C > B \times C$$

$$A < B \text{ es equivalente a } \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$$

Actividad 6 – Desigualdades e inecuaciones.

1. Indique para cada caso qué signo, $>$, $<$, $\leq$ o $\geq$ correspondientes en los espacios para que la desigualdad sea verdadera:

a) $3 \_\_\_\_ \frac{7}{2}$

b) $-3 \_\_\_\_ -\frac{7}{2}$

c) $3.5 \_\_\_\_ \frac{7}{2}$

d) $\frac{2}{3} \_\_\_\_ 0.67$

e) $\frac{2}{3} \_\_\_\_ -0.67$

f) $-4 \_\_\_\_ -3$

g) $-33 \_\_\_\_ -4$

2. Indique cuáles de las siguientes desigualdades son verdaderas y cuáles falsas.

a) $-6 < -10$

b) $-\frac{1}{2} < -1$

c) $-2 \leq -2$

d) $10^4 > 31452$

3. Las expresiones de la Propiedad 2 – Desigualdades y operaciones (suma/resta y multiplicación/división) fueron presentadas con el símbolo $<$. Escriba los mismos enunciados con los símbolos $<$, $\leq$ y $\geq$.

4. Escriba los siguientes enunciados con símbolos de desigualdades:

a) x es positiva

b) b es menor a 4

c) t es mayor o igual a -2

d) y es negativa

e) y no es negativa

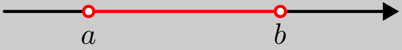
f) a no es mayor a 0

Intervalos numéricos:

Definición : Intervalo abierto.

Para dos números con $a < b$ se llama **intervalo abierto** a todos los números que están entre a y b **sin incluirlos** y lo escribimos (a, b)

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$



Definición : Intervalo cerrado.

Se llama **intervalo cerrado** a los números que están entre a y b **inlcuyendo a los bordes** y lo escribimos $[a, b]$

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

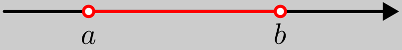
Desigualdades e inecuaciones

Intervalos numéricos:

Definición : Intervalo abierto.

Para dos números con $a < b$ se llama **intervalo abierto** a todos los números que están entre a y b **sin incluirlos** y lo escribimos (a, b)

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$



Definición : Intervalo cerrado.

Se llama **intervalo cerrado** a los números que están entre a y b **inlcuyendo a los bordes** y lo escribimos $[a, b]$

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

Se utilizan **corchetes** [ ] para los casos de intervalos cerrados, y **paréntesis** ( ) para los casos de intervalos abiertos o cuando el conjunto no tiene fin en alguna dirección, que indicamos con los símbolos ∞ o $-\infty$ que se leen **infinito** o **menos infinito**.

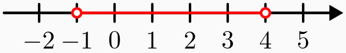
$$\begin{aligned} \{x : 3 < x\} &= \{x : x \quad \text{es un número mayor que} \quad 3\} \\ &= (3, \infty) \end{aligned}$$

Los símbolos ∞ y $-\infty$ **no son números**. Son solo símbolos que se utilizan para indicar que el intervalo comienza en un cierto número a y no tienen final hacia la derecha o hacia la izquierda.

Ejemplos:

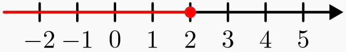
1. El conjunto de los números reales comprendidos entre -1 y 4:

$$\{x : -1 < x < 4\} = (-1, 4)$$



2. El conjunto de los números reales menores o iguales que 2:

$$\{x : x \leq 2\} = (-\infty, 2]$$



Actividad 7 – Intervalos numéricos.

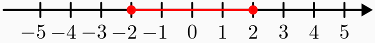
1. Completar la siguiente tabla:

	Conjunto	Intervalo	Representación gráfica
Intervalo abierto	$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
Intervalo cerrado		$[a, b]$	
Intervalo semi-abierto	$\{x : a < x \leq b\}$		
Intervalo semi-abierto	$\{x : a \leq x < b\}$		
Semirecta cerrada	$\{x : a \leq x\}$	$[a, \infty)$	
Semirecta abierta		$(-\infty, b)$	
Semirrecta abierta	$\{x : a < x\}$		
Semirrecta cerrada		$(-\infty, b]$	

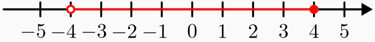
Actividad 7 – Intervalos numéricos (continuación).

2. Escriba en forma de intervalo y en forma de conjunto los siguientes intervalos:

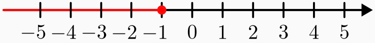
a)



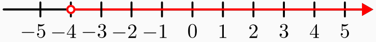
b)



c)



d)



3. Dibuje en una recta real los siguientes intervalos:

a) $\left[\frac{1}{2}, 5\right)$

b) $(-\infty, 0)$

c) $(0, 1)$

d) $\left(-3, \frac{1}{2}\right]$

e) $[25, \infty)$

4. Realice las siguientes operaciones entre intervalos. Las respuestas deben estar en forma de intervalo.

a) $(-2, 5) \cup (4, 6]$

b) $(-2, 5/3) \cap (1, 6]$

c) $(-\infty, 0] \cup (-2, 3)$

d) $[1, 4) \cup [4, 8)$

e) $[0, 3] - (2, 4)$

f) $[0, 3] - (4, 5)$

g) $\mathbb{R} - (2, +\infty)$

h) $(-\infty, 3) - \{0\}$

i) $(-2/3, 4/3) \cup \{5/4\}$

Resolución de inecuaciones lineales: se usa el mismo método que para la resolución de ecuaciones lineales, pasando por sucesivas inecuaciones equivalentes. Hay que tener en cuenta las propiedades de las desigualdades de la suma/resta y multiplicación/división.

Ejemplo: Una fábrica A le paga a sus vendedores € 100 por artículo más una cantidad fija de € 3.000. La competencia B le paga a sus vendedores € 150 por artículo más una cantidad fija de € 3.000. ¿Cuántos artículos tienen que vender los de la competencia B para ganar más que el de la fábrica A?

- Ganancia vendedor A: $100x + 5000$
- Ganancia vendedor B: $150x + 3000$

Resolver:

$$100x + 5000 < 150x + 3000$$

$$100x + 5000 - 5000 < 150x + 3000 - 5000 \iff 100x < 150x - 2000$$

$$100x - 150x < 150x - 2000 - 150x \iff -50x < -2000$$

(Multiplicar por un número negativo invierte la desigualdad)

$$\frac{-50x}{-50} > \frac{-2000}{-50} \iff x > 40$$

Actividad 8 – Resolución de desigualdades.

1. Resolver las siguientes inecuaciones. Escriba los conjuntos solución con la notación de intervalos.

a) $5 + 4x > 17$

b) $-1 - a \leq 2a - 3$

c) $2y > 2(y - 1)$

d) $-B \geq -(B - 5)$

e) $\dfrac{x}{2} + 3 < 2x - 6$

f) $\dfrac{2 + 3x}{3} \geq x + \dfrac{x + 1}{2}$

2. Resuelva la siguiente situación.

En un sistema de reparto a domicilio sólo se aceptan paquetes en forma de caja de zapatos que cumplan que el largo más dos veces el ancho más dos veces el alto no sea mayor a 275 **cm**.

a) ¿Se aceptará un paquete con 15 **cm** de ancho, 20 **cm** de alto y 13 **cm** de largo?

b) ¿Cuánto puede medir el alto de un paquete aceptable que tiene una base cuadrada de 23 **cm** de cada lado?

c) ¿Cuánto puede medir el ancho de un paquete aceptable que tiene 10 **cm** de alto y 20 **cm** de largo?

Desigualdades e inecuaciones

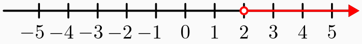
Resolución de sistemas de inecuaciones lineales. Para encontrar el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales, en primer lugar se resuelve cada inecuación, es decir, encontramos el conjunto solución de cada una de las inecuaciones del sistema. Luego, para que el sistema tenga solución, todas las inecuaciones tienen que satisfacerse simultáneamente, por lo que hay que encontrar los números que cumplen todas las condiciones a la vez.

Ejemplo: Resolver

$$\begin{cases} 4x+3>x+9 \\ -2x+6>-15+5x \end{cases}$$

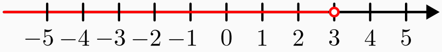
$$\begin{aligned} 4x+3>x+9 &\iff 4x-x>9-3 \\ &\iff 3x>6 \\ &\iff x>2 \end{aligned}$$

Solución: $P=(2,+\infty)$

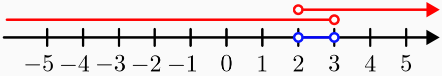


$$\begin{aligned} -2x+6>-15+5x &\iff -2x-5x>-15-6 \\ &\iff -7x>-21 \\ &\iff x<\frac{-21}{-7} \\ &\iff x<3 \end{aligned}$$

Solución: $S=(-\infty,3)$



Solución del sistema: $P\cap S=(2,3)$



Actividad 9 – Resolución de sistemas de inecuaciones

1. Encuentre los valores de x que cumplen cada par de desigualdades en forma simultánea. También escriba las soluciones con la notación de intervalo.

a)
$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+1<1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x-1\geq 3 \\ 2<2x+1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x+1\leq 2 \\ 4-3x\leq 0 \end{cases}$$