Introducción a la física

Vectores

Manuel Carlevaro

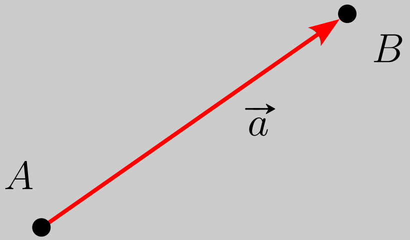
Universidad de Navarra • 2024

Objetivos

- Recordar el concepto de vectores.
- Repasar las diferentes operaciones vectoriales.

Definición : Vector.

Objeto geométrico que tiene magnitud, dirección y sentido.



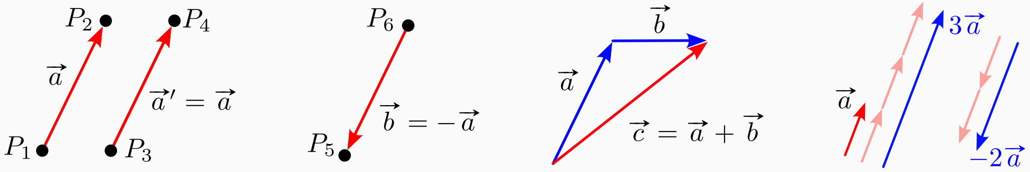
Notación: $\vec{a}$, $\boldsymbol{a}$, $\bar{a}$.

Magnitudes escalares:

- Longitud
- Masa
- Temperatura
- Densidad

Magnitudes vectoriales:

- Desplazamiento
- Velocidad
- Fuerza
- Campo eléctrico



- Vectores con igual dirección y sentido son **paralelos**, con sentidos opuestos son **antiparalelos**.
- Vectores con igual dirección, sentido y magnitud son **iguales**.
- $\vec{b}$ es el vector **opuesto** o **negativo** de $\vec{a}$ (igual magnitud y dirección, pero sentido opuesto).
- La magnitud o **norma** del vector $\vec{a}$ se denota con $\|\vec{a}\|$ o a. Siempre $0 \leq \|\vec{a}\|$.
- La suma geométrica de vectores se realiza concatenando uno tras otro. El resultado es el vector que va desde el origen del primer vector hasta el final del último.
- La suma de vectores es **conmutativa**: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ y **asociativa**: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Para **restar** un vector de otro, hay que sumar su **opuesto**: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- ¡Cuidado!: $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualdad triangular o de Minkowsky).

Una esquiadora de fondo viaja $1.00\,\mathsf{km}$ al norte y luego $2.00\,\mathsf{km}$ al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto de su punto de partida?

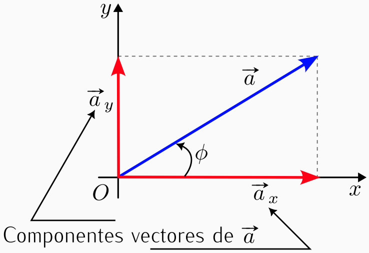
Teorema de Pitágoras:

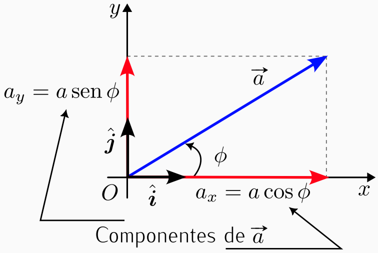
$$\sqrt{(1.00\,\mathsf{km})^2 + (2.00\,\mathsf{km})^2} = 2.24\,\mathsf{km}$$

Trigonometría simple:

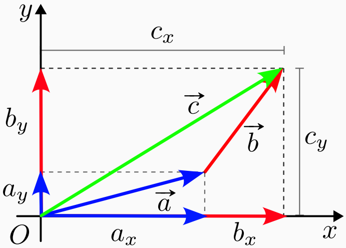
$$\tan\phi = \frac{2.00\,\mathsf{km}}{1.00\,\mathsf{km}}$$

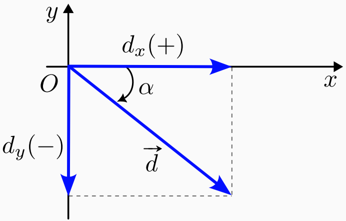
$$\phi = 63.4^\circ$$





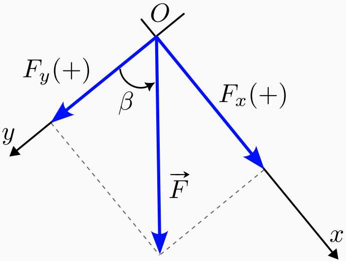
- $\hat{\boldsymbol{i}}$ es el vector unitario o **versor** en la dirección x, $\hat{\boldsymbol{j}}$ es el versor en la dirección y.
- $\vec{a}_x = a_x \hat{\boldsymbol{i}}$, $\vec{a}_y = a_y \hat{\boldsymbol{j}}$. a_x y a_y son las **componentes** (escalares) del vector $\vec{a}$.
- $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\hat{\boldsymbol{i}} + a_y\hat{\boldsymbol{j}}$
- $a_x = \|\vec{a}\| \cos\phi$; $a_y = \|\vec{a}\| \sin\phi \mapsto \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \phi = \arctan(a_y/a_x)$.
- **Suma:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{\boldsymbol{i}} + (a_y + b_y)\hat{\boldsymbol{j}}$





Ejemplo 1. ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{d}$? La magnitud del vector es $d = 3.00\,\mathrm{m}$ y el ángulo es $\alpha = 45°$.

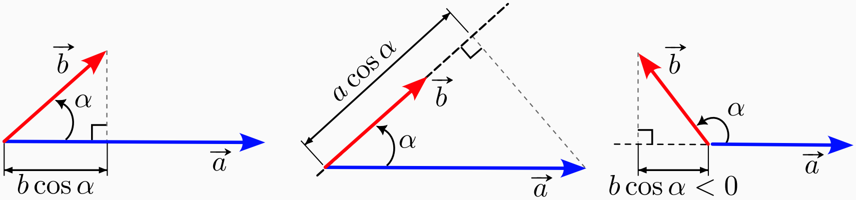
$$d_x = d\cos(\alpha) = (3.00\,\mathrm{m})[\cos(-45°)] = +2.1\,\mathrm{m}$$
$$d_y = d\,\mathrm{sen}(\alpha) = (3.00\,\mathrm{m})[\mathrm{sen}(-45°)] = -2.1\,\mathrm{m}$$



Ejemplo 2. ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{F}$? La magnitud del vector es $F = 4.50\,\mathrm{m}$ y el ángulo es $\beta = 37.0°$.

$$F_x = F\,\mathrm{sen}(\beta) = (4.50\,\mathrm{m})(\mathrm{sen}\,37.0°) = +2.71\,\mathrm{m}$$
$$F_y = F\cos(\beta) = (4.50\,\mathrm{m})(\cos 37.0°) = +3.59\,\mathrm{m}$$

Productos de vectores



Definición : Producto escalar.

El **producto escalar**, **producto interno** o **producto punto** es una operación algebraica que toma dos vectores y retorna un escalar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\,\cos\alpha$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

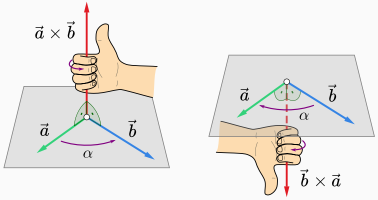
Nota 1:

$$\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} = (1)(1)\cos 0^\circ = 1$$

$$\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} = (1)(1)\cos 90^\circ = 0$$

Nota 2:

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$
- $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
- $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$



Definición : Producto vectorial.

El **producto vectorial** o **producto cruz** es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un vector **perpendicular** a los vectores que se multiplican. Si $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\mathrm{sen}\,\alpha)\hat{\boldsymbol{n}}$$

donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un versor perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyo sentido está dado por la regla de la mano derecha.

Cálculo con componentes:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Algunas propiedades:

- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ **No** es asociativo.
- $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ Anticonmutativo.
- Si $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
- $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$
- $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$