Introducción a las matemáticas

Conjuntos numéricos

Manuel Carlevaro

Universidad de Navarra • 2024

Objetivos

- Definir conjuntos por extensión y comprensión. Realizar diagramas de Venn. Identificar elementos y subconjuntos a la vez que relaciones de pertenencia e inclusión.
- Realizar operaciones entre conjuntos (unión, intersección y diferencia).
- Identificar los conjuntos numéricos.
- Revisar la conformación de los números reales: números naturales, enteros, racionales e irracionales.
- Conocer la representación del conjunto de los números reales como recta real y los demás conjuntos numéricos.
- Revisar cómo se manipulan expresiones algebraicas usando las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas de las operaciones.
- Conocer el orden de las prioridades de las operaciones algebraicas y el rol de los paréntesis.
- Revisar identidades algebraicas importantes que involucran la suma, resta, multiplicación y división.

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves $\{\}$ para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves $\{\}$ para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Ejemplo : .

$$S = \{\text{domingo}, \text{martes}, \text{lunes}, \text{jueves}, \text{viernes}, \text{sábado}, \text{miércoles}\}$$

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves {} para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Ejemplo : .

$$S = \{\text{domingo}, \text{martes}, \text{lunes}, \text{jueves}, \text{viernes}, \text{sábado}, \text{miércoles}\}$$

Otros ejemplos:

$$A = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad B = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\} \quad C = \{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves $\{\}$ para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Ejemplo : .

$$S = \{\text{domingo}, \text{martes}, \text{lunes}, \text{jueves}, \text{viernes}, \text{sábado}, \text{miércoles}\}$$

Otros ejemplos:

$$A = \{\text{a}, \text{e}, \text{i}, \text{o}, \text{u}\} \quad B = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\} \quad C = \{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

- No importa el orden en que escribimos los elementos de un conjunto.
- Tampoco es importante que aparezcan elementos repetidos. Por ejemplo, los siguientes conjuntos son iguales:

$$\{\text{a}, \text{b}, \text{c}\} = \{\text{a}, \text{c}, \text{b}, \text{b}, \text{b}\} = \{\text{b}, \text{a}, \text{c}, \text{a}\}$$

Se utiliza el símbolo "$\in$" para indicar que cierto elemento **pertenece** a un conjunto:

$$\text{lunes} \in S$$

Se puede leer como "lunes pertenece a "S".
Por otro lado, se utiliza el símbolo "$\notin$" para indicar que un elemento **no pertenece** a un conjunto, por ejemplos:

$$\text{enero} \notin S$$

Cuando el conjunto tiene **muchos elementos**, o una **cantidad infinita** de elementos, se utilizan los **tres puntos** "$\ldots$":

$$\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Se utiliza el símbolo "$\in$" para indicar que cierto elemento **pertenece** a un conjunto:

$$\text{lunes} \in S$$

Se puede leer como "lunes pertenece a "S".
Por otro lado, se utiliza el símbolo "$\notin$" para indicar que un elemento **no pertenece** a un conjunto, por ejemplos:

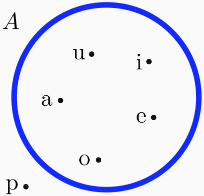
$$\text{enero} \notin S$$

Cuando el conjunto tiene **muchos elementos**, o una **cantidad infinita** de elementos, se utilizan los **tres puntos** "$\ldots$":

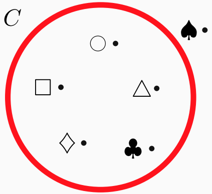
$$\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

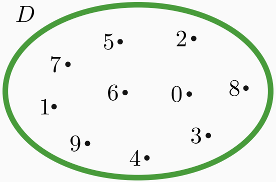
Diagramas de Venn:



$$\{a, e, i, o, u\}$$



$$\{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\}$$



$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

Definición : Conjunto vacío.

El conjunto que **no tiene elementos** se llama "**conjunto vacío**" y se denota con el símbolo "$\varnothing$":

$$\varnothing = \{\}$$

Con los elementos de un conjunto se pueden formar otros conjuntos "más pequeños" que se llaman **subconjuntos**. Por ejemplo, con $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$ se pueden formar varios subconjuntos:

$$\{\mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}\} \quad \{\mathrm{a}\} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}\} \quad \{\mathrm{i}, \mathrm{u}\}$$

$$\{\mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad \{\mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad \{\mathrm{u}, \mathrm{o}, \mathrm{a}, \mathrm{e}\} \quad \{\mathrm{o}\}$$

En palabras se dice, por ejemplo, que:

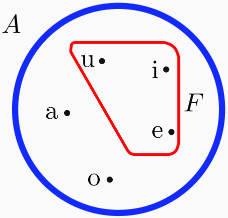
$$\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\} \quad \text{es un subconjunto de} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$$

o que

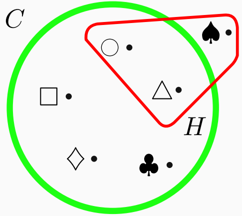
$$\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\} \quad \text{está incluido en} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$$

Definición : $A \subseteq B$.

Se escribe $A \subseteq B$ cuando **todos los elementos** del conjunto A también son elementos del conjunto B. En cambio, se escribe $A \nsubseteq B$ cuando **algún elemento** de A no es un elemento del conjunto B



$F \subseteq A$



$H \nsubseteq C$

Se puede describir a los conjuntos **por extensión** o **por comprensión**. Se dice que un conjunto está descripto por extensión cuando hacemos una lista de sus elementos, como en los ejemplos anteriores:

$$A = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad B = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\} \quad C = \{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

Por otro lado, se dice que un conjunto está descripto por comprensión cuando se utiliza alguna propiedad característica de sus elementos, por ejemplo:

$$A = \underbrace{\{\text{el conjunto de las vocales}\}}_{\text{definición por comprensión}} = \underbrace{\{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}}_{\text{definición por extensión}}$$

De manera más formal, se utiliza la siguiente notación para definir conjuntos por comprensión:

$$A = \{ \underbrace{x \text{ es una letra}}_{\text{conjunto con el que trabajamos}} : \underbrace{x \text{ es una vocal}}_{\text{propiedad que debe cumplirse}} \}$$

Se lee: "A es el conjunto de las letras x **tal que** x es una vocal".

Ejemplos:

Definición por comprensión	Definición por extensión
$\{x : x$ es una letra de la palabra "matemática"$\}$	{m, a, t, e, i , c}
$\{x : x$ es una vocal de la palabra "matemática"$\}$	{a, e, i}
$\{x : x$ es un Estado miembro de la Unión Europea que empieza con "F"$\}$	{Francia, Finlandia}
$\{x : x$ es un dígito decimal par$\}$	$\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Actividad 1

Definición : Intersección de conjuntos.

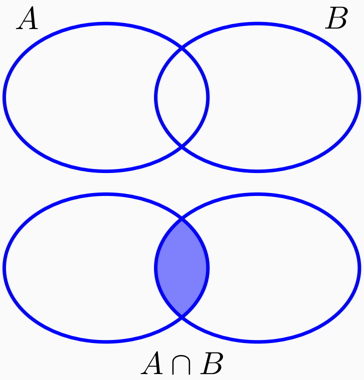
La **intersección** de dos conjuntos es un nuevo conjunto formado por los elementos que están en ambos conjuntos simultáneamente. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la intersección de A y B de la siguiente forma:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{\text{a, b, c, g}\}$ y $B = \{\text{r, g}\}$, entonces:

$$A \cap B = \{\text{g}\}$$



Definición : Unión de conjuntos.

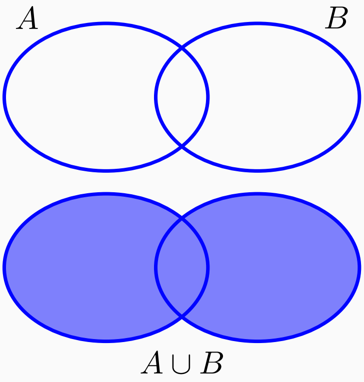
La **unión** de dos conjuntos es un nuevo conjunto formado por los elementos que están en uno u otro conjunto. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la unión de A y B de la siguiente forma:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{\text{a, b, c, g}\}$ y $B = \{\text{r, g}\}$, entonces:

$$A \cup B = \{\text{a}, \text{b}, \text{c}, \text{r}, \text{g}\}$$



Operaciones entre conjuntos: diferencia

Definición : Diferencia de conjuntos.

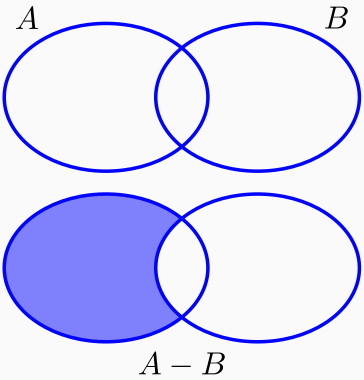
La **diferencia** del conjunto A con el conjunto B es un nuevo conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la diferencia de A con B de la siguiente forma:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{\text{a, b, c, g}\}$ y $B = \{\text{r, g}\}$, entonces:

$$A - B = \{\text{a}, \text{b}, \text{c}\}$$



Ejemplo:

23 estudiantes de un curso practican alguno de los siguientes deportes: tenis, fútbol y voley. Cuatro de ellas juegan regularmente los tres deportes; 5 juegan solamente voley y fútbol; dos juegan solamente tenis y fútbol; y tres juegan solamente tenis y voley. Además, tres personas juegan únicamente tenis y una persona juega únicamente fútbol. ¿Cuantas personas juegan únicamente voley?

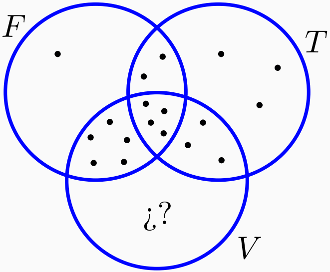
$$T = \{\text{estudiantes que juegan tenis}\}; V = \{\text{estudiantes que juegan voley}\}; F = \{\text{estudiantes que juegan fútbol}\}$$

Ejemplo:

23 estudiantes de un curso practican alguno de los siguientes deportes: tenis, fútbol y voley. Cuatro de ellas juegan regularmente los tres deportes; 5 juegan solamente voley y fútbol; dos juegan solamente tenis y fútbol; y tres juegan solamente tenis y voley. Además, tres personas juegan únicamente tenis y una persona juega únicamente fútbol. ¿Cuantas personas juegan únicamente voley?

$$T = \{\text{estudiantes que juegan tenis}\}; V = \{\text{estudiantes que juegan voley}\}; F = \{\text{estudiantes que juegan fútbol}\}$$

Enunciado	Conjunto	# elementos
Total de alumnos	$V \cup F \cup T$	23
Alumnos que juegan 3 deportes	$V \cap F \cap T$	4
Alumnos que juegan únicamente voley y fútbol	$(V \cap F) - T$	5
Alumnos que juegan únicamente tenis y fútbol	$(T \cap F) - V$	2
Alumnos que juegan únicamente tenis y voley	$(T \cap V) - F$	3
Alumnos que juegan únicamente tenis	$T - (V \cup F)$	3
Alumnos que juegan únicamente fútbol	$F - (T \cup V)$	1
Alumnos que juegan únicamente voley	$V - (T \cup F)$	¿?

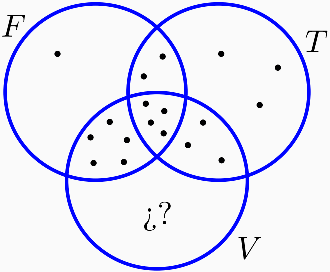


Ejemplo:

23 estudiantes de un curso practican alguno de los siguientes deportes: tenis, fútbol y voley. Cuatro de ellas juegan regularmente los tres deportes; 5 juegan solamente voley y fútbol; dos juegan solamente tenis y fútbol; y tres juegan solamente tenis y voley. Además, tres personas juegan únicamente tenis y una persona juega únicamente fútbol. ¿Cuantas personas juegan únicamente voley?

$T = \{\text{estudiantes que juegan tenis}\}; V = \{\text{estudiantes que juegan voley}\}; F = \{\text{estudiantes que juegan fútbol}\}$

Enunciado	Conjunto	# elementos
Total de alumnos	$V \cup F \cup T$	23
Alumnos que juegan 3 deportes	$V \cap F \cap T$	4
Alumnos que juegan únicamente voley y fútbol	$(V \cap F) - T$	5
Alumnos que juegan únicamente tenis y fútbol	$(T \cap F) - V$	2
Alumnos que juegan únicamente tenis y voley	$(T \cap V) - F$	3
Alumnos que juegan únicamente tenis	$T - (V \cup F)$	3
Alumnos que juegan únicamente fútbol	$F - (T \cup V)$	1
Alumnos que juegan únicamente voley	$V - (T \cup F)$	¿?



Actividad 2

Conjuntos numéricos

Definición : Números naturales.

Utilizamos los **números naturales** para contar cosas. Denotamos este conjunto con el símbolo $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

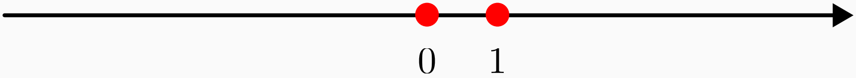
Consideramos al 0 como número natural, aunque algunos libros no lo hacen.

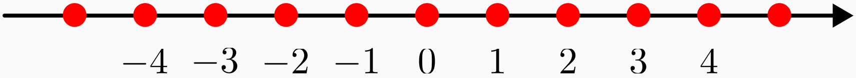
Definición : Números enteros.

Los **números enteros** están comprendidos por los naturales y sus opuestos. Utilizamos el símbolo $\mathbf{Z}$ para este conjuntos:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Representación gráfica:





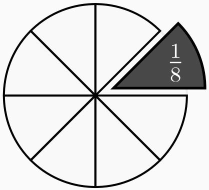
Definición : Números racionales o fraccionarios.

Son aquellos números que pueden escribirse como **cociente** entre dos números enteros:

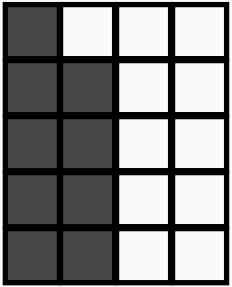
$$\frac{p}{q} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} = \frac{\text{número entero}}{\text{número entero } \neq 0}$$

Utilizamos el símbolo $\mathbf{Q}$ para denotar este conjunto:

$$\mathbf{Q} = \{0, 1, -3, \frac{1}{3}, \frac{5}{2}, \ldots, -4, 0.3, \ldots, \}$$



$$\frac{1 \text{ porción sombreada}}{8 \text{ porciones totales}} = \frac{1}{8}$$



$$\frac{9}{20}$$

La razón entre el área total y el área sombreada es 9 a 20: