Introducción a la física

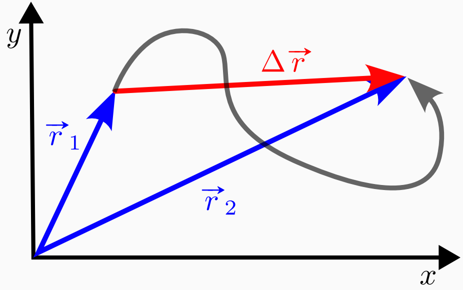
Cinemática

Manuel Carlevaro

Universidad de Navarra • 2024

Objetivos

- Repasar los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración.
- Reforzar la construcción e interpretación de gráficos de movimiento.
- Aprender a operar estas cantidades en forma vectorial.



Velocidad media:

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \mapsto \text{velocidad media}$$

$$v_m = \frac{\|\Delta \boldsymbol{r}\|}{\Delta t} \mapsto \text{rapidez media}$$

Ejemplo : .

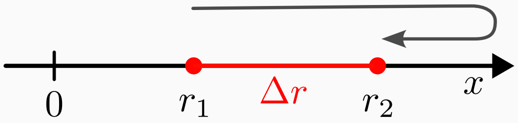
Adela viaja en bici $2.0\,\mathrm{h}$. Luego de muchas vueltas acaba a $10.0\,\mathrm{km}$ al este de su origen. ¿Cuál fue su velocidad media? Al día siguiente consigue la misma rapidez media pero acaba $3.0\,\mathrm{km}$ al norte y $4.0\,\mathrm{km}$ al oeste. ¿Cuál fue su velocidad y el tiempo de viaje?

$$\boldsymbol{v}_{m1} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}_1}{\Delta t_1} = \frac{(10.0\boldsymbol{i} + 0.0\boldsymbol{j})\mathrm{km}}{2.0\,\mathrm{h}}$$
$$= (5.0\boldsymbol{i} + 0.0\boldsymbol{j})\mathrm{km/h}$$
$$v_{m1} = 5.0\,\mathrm{km/h}$$

$$\|\Delta \boldsymbol{r}_2\| = \sqrt{(3.0\,\mathrm{km})^2 + (4.0\,\mathrm{km})^2} = 5.0\,\mathrm{km}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\|\Delta \boldsymbol{r}_2\|}{v_{m1}} = \frac{5.0\,\mathrm{km}}{5.0\,\mathrm{km/h}} = 1.0\,\mathrm{h}$$

$$\boldsymbol{v}_{m2} = (3.0\boldsymbol{i} - 4.0\boldsymbol{j})\mathrm{km/h}$$



- Velocidad media:

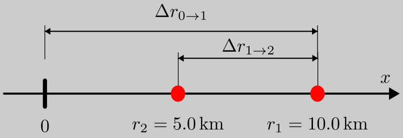
$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{\Delta t}$$

- Rapidez media:

$$|v_m| = \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \frac{|r_2 - r_1|}{\Delta t}$$

Ejemplo : .

Adela viaja en bici 2.0 h. Luego de muchas vueltas acaba a 10.0 km al este de su origen. ¿Cuál fue su velocidad media? Al día siguiente consigue la misma rapidez media pero acaba a 5.0 km al oeste. ¿Cual fue su velocidad media y el tiempo de viaje?

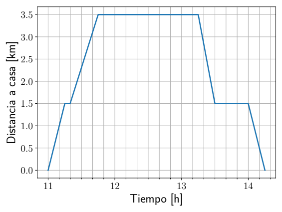


$$v_m = \frac{10.0\,\mathrm{km}}{2.0\,\mathrm{h}} = 5.0\,\mathrm{km/h} \quad |v_m| = 5.0\,\mathrm{km/h}$$

$$\Delta t_2 = \frac{|r_2 - r_1|}{|v_m|} = \frac{|5.0 - 10.0|\mathrm{km}}{5.0\,\mathrm{km/h}} = 1.0\,\mathrm{h}$$

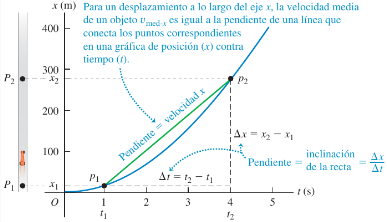
$$v_{m2} = \frac{(5.0 - 10.0)\mathrm{km}}{1.0\,\mathrm{h}} = -5\,\mathrm{km/h}$$

Representación gráfica



Los abuelos de Bruno lo invitaron a él y a sus primas a almorzar. La casa de Bruno, la de sus primas y la de sus abuelos quedan todas en la misma calle. Bruno sale caminando a las $11\,\mathrm{h}$, pasa a buscar a sus primas por su casa y se van a lo de sus abuelos. Al regreso, vuelven juntos. El gráfico representa la distancia de Bruno a su casa en cada momento.

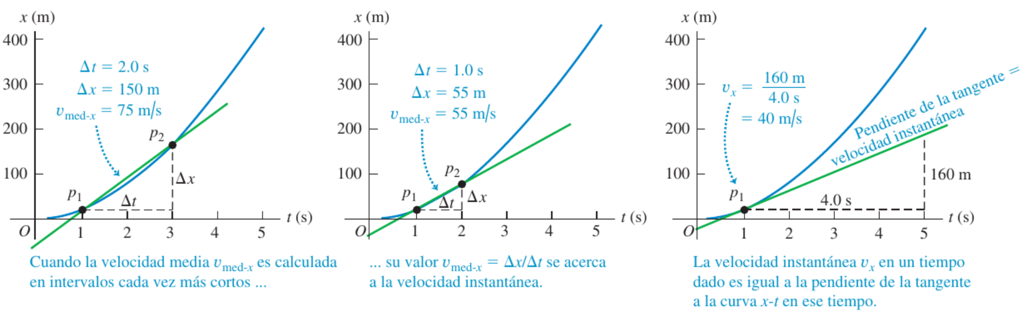
- ¿Cuándo estuvo a 1 km de su casa? ¿Y a 3 km de su casa?
- ¿A qué distancia de su casa se encontraba a la media hora de haber salido? ¿Y a las 11:50? ¿Y a las 13:10 y 13:20? ¿A qué hora volvió Bruno a su casa?
- ¿A qué distancia de la casa de Bruno está la casa de sus primas? ¿Y a qué distancia queda la casa de sus abuelos de la casa de sus primas?
- ¿Durante cuánto tiempo estuvieron en la casa de sus abuelos?
- Al regreso, se quedaron en la casa de sus primas. ¿Cuánto tiempo estuvieron?
- ¿La casa de Bruno se encuentra en el punto del eje en donde "regresa" a su casa?
- ¿Alas 11:20 Bruno dio la vuelta a la esquina?
- ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?
- ¿Con qué rapidez media se mueve Bruno en cada tramo de su viaje?
- ¿Con qué velocidad media se mueve Bruno en cada tramo de su viaje?

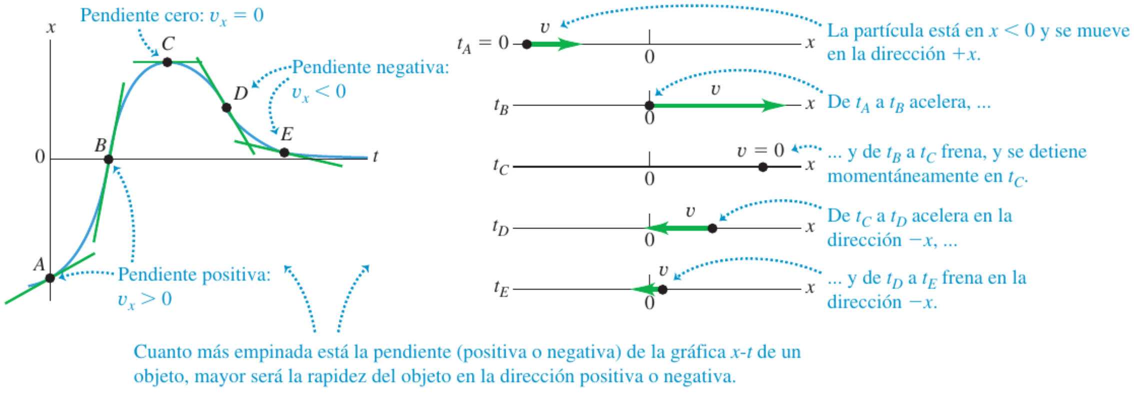


- La velocidad instantánea se obtiene como el límite al que se aproxima la velocidad media cuando el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\boldsymbol{i}, \quad v_x = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \mapsto \text{“derivada”}$$

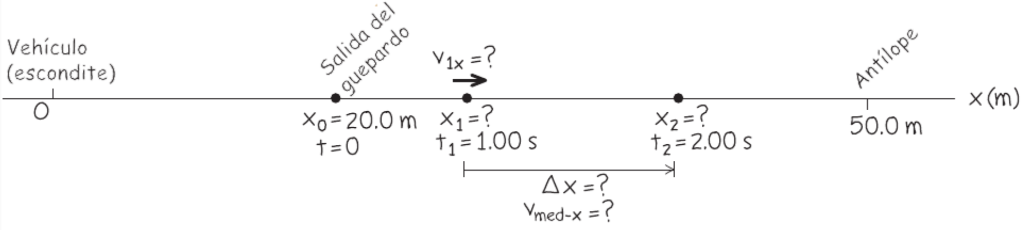
- En la representación gráfica de $\boldsymbol{r}(t)$ la velocidad instantánea corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de interés.

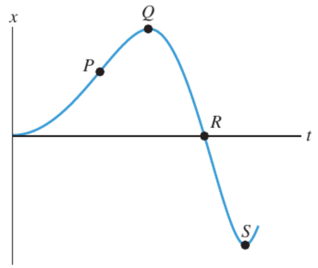




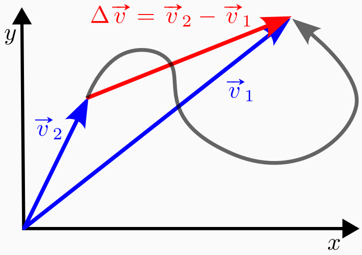
Pendiente cero: $v_x = 0$
x
C
Pendiente negativa:
$v_x < 0$
D
E
B
0
t
A
Pendiente positiva:
$v_x > 0$
$t_A = 0$
v
x
0
La partícula está en $x < 0$ y se mueve en la dirección $+x$.
t_B
De t_A a t_B acelera, ...
t_C
$v = 0$
... y de t_B a t_C frena, y se detiene momentáneamente en t_C.
t_D
De t_C a t_D acelera en la dirección $-x$, ...
t_E
... y de t_D a t_E frena en la dirección $-x$.
Cuanto más empinada está la pendiente (positiva o negativa) de la gráfica x-t de un objeto, mayor será la rapidez del objeto en la dirección positiva o negativa.

Un guepardo acecha $20\,\mathrm{m}$ al este del escondite de un observador. En el tiempo $t = 0\,\mathrm{s}$, el guepardo ataca a un antílope y empieza a correr en línea recta. Durante los primeros $2\,\mathrm{s}$ del ataque, la coordenada x del guepardo varía con el tiempo según la ecuación $x = 20\,\mathrm{m} + (5\,\mathrm{m/s^2})\,t^2$. a) Obtenga el desplazamiento del guepardo entre $t_1 = 1.0\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$. b) Calcule la velocidad media en dicho intervalo. c) Calcule la velocidad instantánea en $t_1 = 1.0\,\mathrm{s}$ tomando $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$, luego $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$, luego $\Delta t = 0.001\,\mathrm{s}$. d) Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea en función del tiempo y con ella calcule v_x en $t = 1.0\,\mathrm{s}$ y $t = 2\,\mathrm{s}$. (Derivada de $t^n = n\,t^{n-1}$.)





Ordene los valores de la velocidad v_x de la partícula en los puntos P, Q, R y S del más positivo al más negativo. b) ¿En qué puntos v_x es positiva? c) ¿En cuáles puntos v_x es negativa? d) ¿En cuáles es cero? e) Ordene los valores de la **rapidez** de la partícula en los puntos P, Q, R y S del más rápido al más lento.



Aceleración media

$$\boldsymbol{a}_m = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \mapsto \text{ aceleración media}$$

$$a_m = \frac{\|\Delta \boldsymbol{v}\|}{\Delta t} \mapsto \text{ norma o módulo}$$

Ejemplo : .

Adela viaja en bici $2.0\,\mathsf{h}$. Inicia rumbo al este a $10\,\mathsf{km/h}$. Luego de muchas vueltas se encuentra viajando al norte a $20\,\mathsf{km/h}$. ¿Cuál fue su aceleración media?

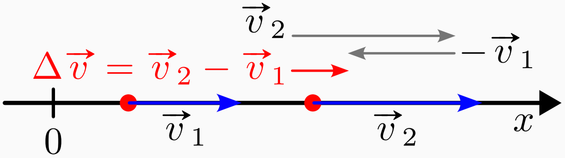
$$\boldsymbol{v}_1 = (10.0\boldsymbol{i} + 0.0\boldsymbol{j})\mathsf{km/h}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = (0.0\boldsymbol{i} + 20.0\boldsymbol{j})\mathsf{km/h}$$

$$\boldsymbol{a}_m = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{a}_m = \frac{(-10.0\boldsymbol{i} + 20.0\boldsymbol{j})\mathsf{km/h}}{2.0\,\mathsf{h}} = (-5.0\boldsymbol{i} + 10.0\boldsymbol{j})\mathsf{km/h}^2$$

$$a_m = \|\boldsymbol{a}_m\| = \sqrt{(-5.0)^2 + 10.0^2)\mathsf{km}^2/\mathsf{h}^4} = 11.18\,\mathsf{km/h}^2$$



- Aceleración media:

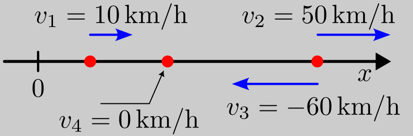
$$a_m = \frac{\Delta v}{|\delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

- Módulo (norma):

$$|a| = \frac{|\Delta v|}{|\Delta t} = \frac{|v_2 - v_1|}{\Delta t}$$

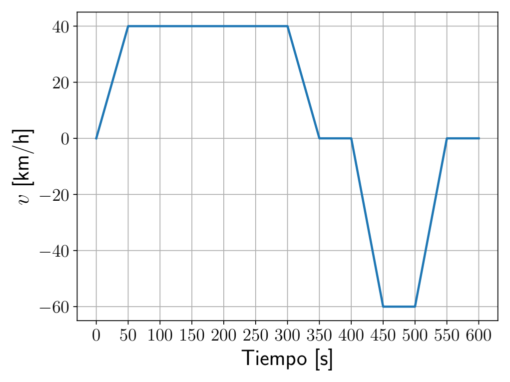
Ejemplo : .

Adela baja en bici por una pendiente recta hacia el este durante 0.1 h. Inicia a 10 km/h, acelera, aplica frenos varias veces y llega al final a 50 km/h. ¿Cuál fue su aceleración media? Al día siguiente sube la pendiente sin pedalear. Antes toma mucha velocidad (60 km/h) y luego de 0.2 h la bici se detiene por completo. ¿Cuál fue su aceleración media?



$$a_{1\to 2} = \frac{(50-10)\mathrm{km/h}}{0.1\,\mathrm{h}} = 400\,\mathrm{k/h}^2$$

$$a_{3\to 4} = \frac{(-60-0)\mathrm{km/h}}{0.2\,\mathrm{h}} = -300\,\mathrm{km/h}^2$$

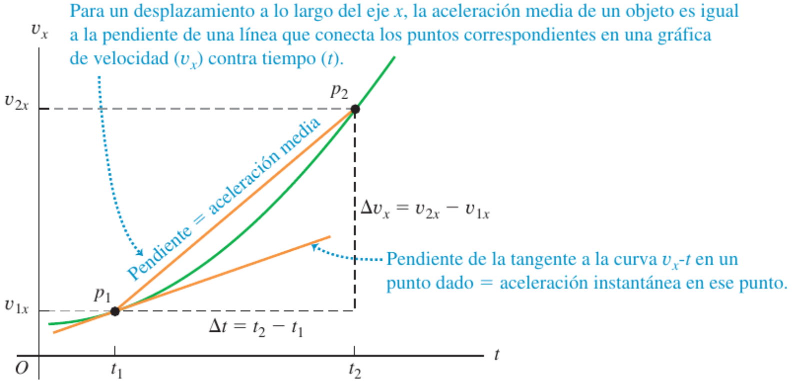


Bruno sale en coche por una calle recta de oeste a este. El gráfico representa la velocidad de Bruno en cada momento.

- ¿Cuándo la rapidez fue de $20\,\mathrm{km/h}$? ¿Y cuando la velocidad fue de $20\,\mathrm{km/h}$?
- ¿Cuál era su velocidad $200\,\mathrm{s}$ luego de partir? ¿Y a los $325\,\mathrm{s}$, y a los $400\,\mathrm{s}$?
- ¿En algún momento se detiene? ¿Cuándo? ¿Cuál es la máxima velocidad que alcanza? ¿Y la mínima? ¿Y la máxima rapidez?

- ¿En qué dirección viaja a los 25 s? ¿Y a los 325 s? ¿Y a los 450 s?
- ¿Cuánto dura el trayecto hacia el Este?
- ¿Al regreso hacia el oeste se detiene en el mismo lugar de donde partió el viaje?

- ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?
- ¿Con qué aceleración media se mueve Bruno en cada tramo de su viaje?
- ¿Cuál es el módulo de la aceleración en cada tramo?



$$\text{3D: } \boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}, \quad \text{1D: } a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

Ejemplo:

La velocidad v_x de un móvil en función del tiempo esta dada por

$$v_x = 60\,\mathrm{m/s} + (0.50\,\mathrm{m/s^3})t^2$$

a) Calcule el cambio de velocidad del móvil entre el intervalo $t_1 + 1.0\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 3.0\,\mathrm{s}$. b) Calcule la aceleración media en ese intervalo. c) Obtenga la aceleración instantánea en t_1 tomando Δt primero como $0.1\,\mathrm{s}$, después como $0.01\,\mathrm{s}$ y luego como $0.001\,\mathrm{s}$. d) Deduzca una expresión para la aceleración instantánea en cualquier instante y úsela para obtener la aceleración en t_1 y t_2.

a)

$$\begin{aligned}
v_{1x} &= 60\,\mathrm{m/s} + (0.50\,\mathrm{m/s^3})(1.0\,\mathrm{s})^2 = 60.5\,\mathrm{m/s} \\
v_{2x} &= 60\,\mathrm{m/s} + (0.50\,\mathrm{m/s^3})(3.0\,\mathrm{s})^2 = 64.5\,\mathrm{m/s} \\
\Delta v_x &= v_{2x} - v_{1x} = 4.0\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

b)

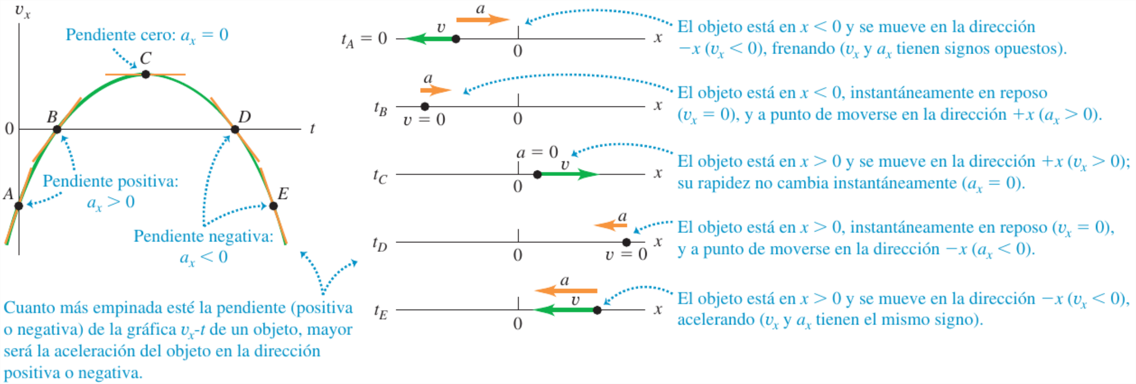
$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4.0\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = 2.0\,\mathrm{m/s^2}$$

c)

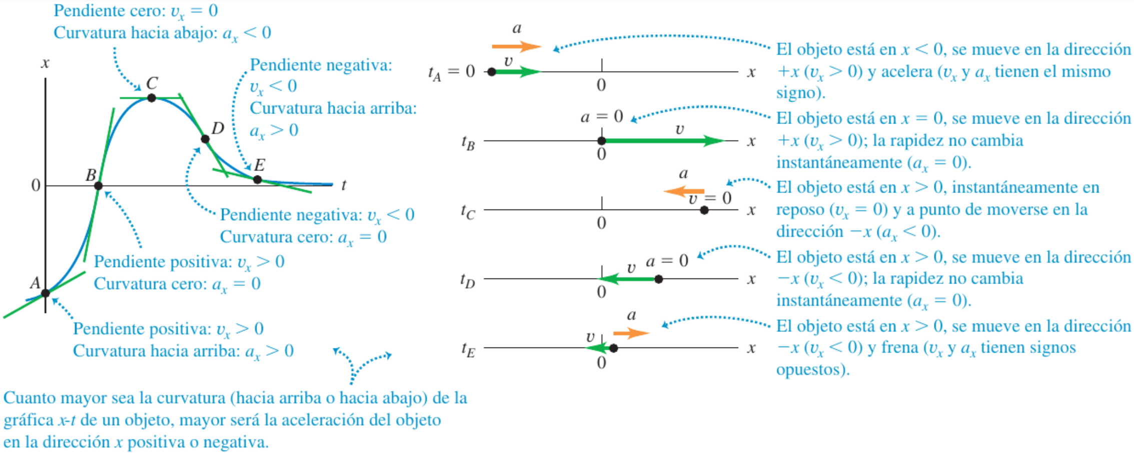
Δt (s)	0.1	0.01	0.001
a_{mx} ($\mathrm{m/s^2}$)	1.05	1.005	1.0005

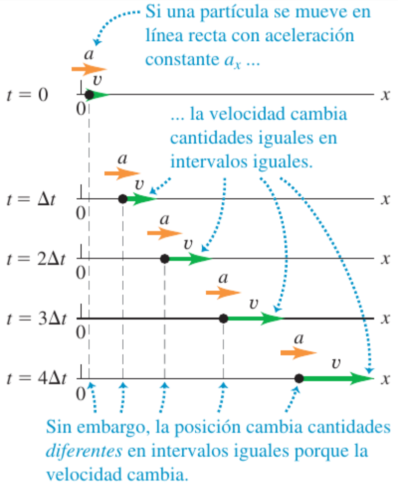
d) $a_x = dv_x/dt$, la derivada de una constante es cero y la de t^2 es $2t$:

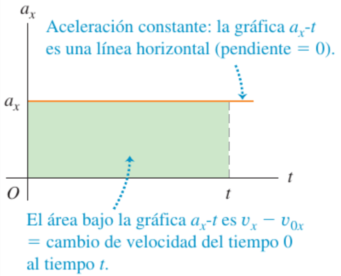
$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60\,\mathrm{m/s} + (0.50\,\mathrm{m/s^3})t^2] \\
&= (0.50\,\mathrm{m/s^3})(2t) = (1.0\,\mathrm{m/s^3})t \\
t = 1.0\,\mathrm{s} : a_x &= (1.0\,\mathrm{m/s^3})(1.0\,\mathrm{s}) = 1.0\,\mathrm{m/s^2} \\
t = 3.0\,\mathrm{s} : a_x &= (1.0\,\mathrm{m/s^3})(3.0\,\mathrm{s}) = 3.0\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}$$



v_x
Pendiente cero: $a_x = 0$
C
B
D
0
t
A
E
Pendiente positiva: $a_x > 0$
Pendiente negativa: $a_x < 0$
Cuanto más empinada esté la pendiente (positiva o negativa) de la gráfica v_x-t de un objeto, mayor será la aceleración del objeto en la dirección positiva o negativa.
$t_A = 0$
a
v
0
x
El objeto está en $x < 0$ y se mueve en la dirección $-x$ ($v_x < 0$), frenando (v_x y a_x tienen signos opuestos).
t_B
a
$v = 0$
0
x
El objeto está en $x < 0$, instantáneamente en reposo ($v_x = 0$), y a punto de moverse en la dirección $+x$ ($a_x > 0$).
t_C
$a = 0$
v
0
x
El objeto está en $x > 0$ y se mueve en la dirección $+x$ ($v_x > 0$); su rapidez no cambia instantáneamente ($a_x = 0$).
t_D
a
0
$v = 0$
x
El objeto está en $x > 0$, instantáneamente en reposo ($v_x = 0$), y a punto de moverse en la dirección $-x$ ($a_x < 0$).
t_E
a
v
0
x
El objeto está en $x > 0$ y se mueve en la dirección $-x$ ($v_x < 0$), acelerando (v_x y a_x tienen el mismo signo).


Pendiente cero: $v_x = 0$
Curvatura hacia abajo: $a_x < 0$
Pendiente negativa:
$v_x < 0$
Curvatura hacia arriba:
$a_x > 0$
Pendiente negativa: $v_x < 0$
Curvatura cero: $a_x = 0$
Pendiente positiva: $v_x > 0$
Curvatura cero: $a_x = 0$
Pendiente positiva: $v_x > 0$
Curvatura hacia arriba: $a_x > 0$
Cuanto mayor sea la curvatura (hacia arriba o hacia abajo) de la gráfica x-t de un objeto, mayor será la aceleración del objeto en la dirección x positiva o negativa.
x
t
0
A
B
C
D
E
$t_A = 0$
t_B
t_C
t_D
t_E
a
v
$a = 0$
$v = 0$
El objeto está en $x < 0$, se mueve en la dirección $+x$ ($v_x > 0$) y acelera (v_x y a_x tienen el mismo signo).
El objeto está en $x = 0$, se mueve en la dirección $+x$ ($v_x > 0$); la rapidez no cambia instantáneamente ($a_x = 0$).
El objeto está en $x > 0$, instantáneamente en reposo ($v_x = 0$) y a punto de moverse en la dirección $-x$ ($a_x < 0$).
El objeto está en $x > 0$, se mueve en la dirección $-x$ ($v_x < 0$); la rapidez no cambia instantáneamente ($a_x = 0$).
El objeto está en $x > 0$, se mueve en la dirección $-x$ ($v_x < 0$) y frena (v_x y a_x tienen signos opuestos).

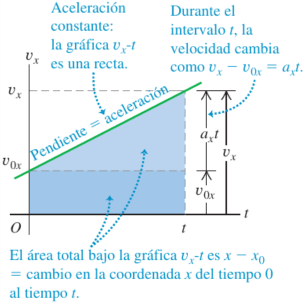




Con **aceleración constante:**

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \Rightarrow \boxed{v_x(t) = v_{0x} + a_x\, t} \tag{1}$$

Movimiento rectilíneo con aceleración constante



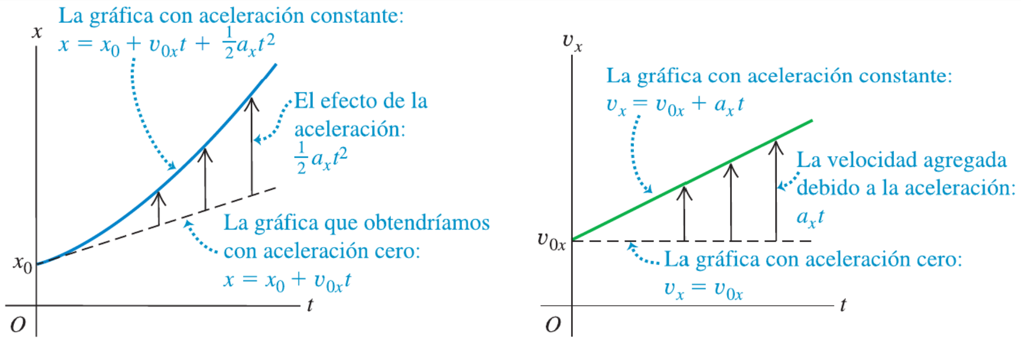
Con **aceleración constante:**

$$v_{mx} = \frac{x - x_0}{t}, \text{ y también}$$

$$v_{mx} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x\, t) = v_{0x} + \frac{1}{2} a_x\, t$$

Igualando y despejando x:

$$\boxed{x = x_0(t) + v_{0x}\, t + \frac{1}{2} a_x\, t^2} \qquad (2)$$



Despejando t de (1), reemplazando en (2) y simplificando:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Pasando x_0 al primer miembro y multiplicando por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \tag{3}$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \tag{4}$$