Introducción a las matemáticas

Conjuntos numéricos

Manuel Carlevaro

Universidad de Navarra • 2024

Objetivos

- Definir conjuntos por extensión y comprensión. Realizar diagramas de Venn. Identificar elementos y subconjuntos a la vez que relaciones de pertenencia e inclusión.
- Realizar operaciones entre conjuntos (unión, intersección y diferencia).
- Identificar los conjuntos numéricos.
- Revisar la conformación de los números reales: números naturales, enteros, racionales e irracionales.
- Conocer la representación del conjunto de los números reales como recta real y los demás conjuntos numéricos.
- Revisar cómo se manipulan expresiones algebraicas usando las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas de las operaciones.
- Conocer el orden de las prioridades de las operaciones algebraicas y el rol de los paréntesis.
- Revisar identidades algebraicas importantes que involucran la suma, resta, multiplicación y división.

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves $\{\}$ para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves $\{\}$ para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Ejemplo : .

$$S = \{\text{domingo}, \text{martes}, \text{lunes}, \text{jueves}, \text{viernes}, \text{sábado}, \text{miércoles}\}$$

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves {} para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Ejemplo : .

$$S = \{\text{domingo}, \text{martes}, \text{lunes}, \text{jueves}, \text{viernes}, \text{sábado}, \text{miércoles}\}$$

Otros ejemplos:

$$A = \{\text{a}, \text{e}, \text{i}, \text{o}, \text{u}\} \quad B = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\} \quad C = \{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

Definición : Conjunto.

Es una colección o agrupamiento de objetos, cosas, etc. Usualmente se utilizan letras mayúsculas para nombrarlos y llaves $\{\}$ para **escribirlos encerrando sus elementos**.

Ejemplo : .

$$S = \{\text{domingo}, \text{martes}, \text{lunes}, \text{jueves}, \text{viernes}, \text{sábado}, \text{miércoles}\}$$

Otros ejemplos:

$$A = \{\text{a}, \text{e}, \text{i}, \text{o}, \text{u}\} \quad B = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\} \quad C = \{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

- No importa el orden en que escribimos los elementos de un conjunto.
- Tampoco es importante que aparezcan elementos repetidos. Por ejemplo, los siguientes conjuntos son iguales:

$$\{\text{a}, \text{b}, \text{c}\} = \{\text{a}, \text{c}, \text{b}, \text{b}, \text{b}\} = \{\text{b}, \text{a}, \text{c}, \text{a}\}$$

Se utiliza el símbolo "$\in$" para indicar que cierto elemento **pertenece** a un conjunto:

$$\text{lunes} \in S$$

Se puede leer como "lunes pertenece a "S".
Por otro lado, se utiliza el símbolo "$\notin$" para indicar que un elemento **no pertenece** a un conjunto, por ejemplos:

$$\text{enero} \notin S$$

Cuando el conjunto tiene **muchos elementos**, o una **cantidad infinita** de elementos, se utilizan los **tres puntos** "$\ldots$":

$$\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Conjuntos y operaciones entre conjuntos

Se utiliza el símbolo "$\in$" para indicar que cierto elemento **pertenece** a un conjunto:

$$\text{lunes} \in S$$

Se puede leer como "lunes pertenece a "S".
Por otro lado, se utiliza el símbolo "$\notin$" para indicar que un elemento **no pertenece** a un conjunto, por ejemplos:

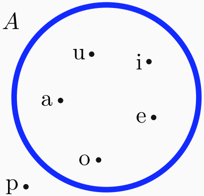
$$\text{enero} \notin S$$

Cuando el conjunto tiene **muchos elementos**, o una **cantidad infinita** de elementos, se utilizan los **tres puntos** "$\ldots$":

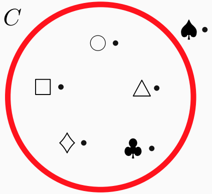
$$\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

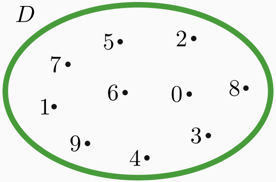
Diagramas de Venn:



$\{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$



$\{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\}$



$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$

Definición : Conjunto vacío.

El conjunto que **no tiene elementos** se llama “**conjunto vacío**” y se denota con el símbolo “$\varnothing$”:

$$\varnothing = \{\}$$

Con los elementos de un conjunto se pueden formar otros conjuntos “más pequeños” que se llaman **subconjuntos**. Por ejemplo, con $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$ se pueden formar varios subconjuntos:

$$\{\mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}\} \quad \{\mathrm{a}\} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}\} \quad \{\mathrm{i}, \mathrm{u}\}$$
$$\{\mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad \{\mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad \{\mathrm{u}, \mathrm{o}, \mathrm{a}, \mathrm{e}\} \quad \{\mathrm{o}\}$$

En palabras se dice, por ejemplo, que:

$$\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\} \quad \text{es un subconjunto de} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$$

o que

$$\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\} \quad \text{está incluido en} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$$

Definición : Conjunto vacío.

El conjunto que **no tiene elementos** se llama "**conjunto vacío**" y se denota con el símbolo "$\varnothing$":

$$\varnothing = \{\}$$

Con los elementos de un conjunto se pueden formar otros conjuntos "más pequeños" que se llaman **subconjuntos**. Por ejemplo, con $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$ se pueden formar varios subconjuntos:

$$\{\mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}\} \quad \{\mathrm{a}\} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}\} \quad \{\mathrm{i}, \mathrm{u}\}$$
$$\{\mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad \{\mathrm{o}, \mathrm{u}\} \quad \{\mathrm{u}, \mathrm{o}, \mathrm{a}, \mathrm{e}\} \quad \{\mathrm{o}\}$$

En palabras se dice, por ejemplo, que:

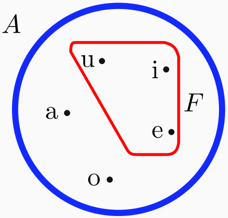
$$\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\} \quad \text{es un subconjunto de} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$$

o que

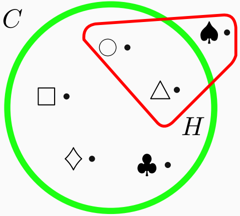
$$\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\} \quad \text{está incluido en} \quad \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}\}$$

Definición : $A \subseteq B$.

Se escribe $A \subseteq B$ cuando **todos los elementos** del conjunto A también son elementos del conjunto B. En cambio, se escribe $A \nsubseteq B$ cuando **algún elemento** de A no es un elemento del conjunto B



$F \subseteq A$



$H \nsubseteq C$

Se puede describir a los conjuntos **por extensión** o **por comprensión**. Se dice que un conjunto está descripto por extensión cuando hacemos una lista de sus elementos, como en los ejemplos anteriores:

$$A = \{\text{a}, \text{e}, \text{i}, \text{o}, \text{u}\} \quad B = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\} \quad C = \{\square, \bigcirc, \triangle, \diamondsuit, \clubsuit\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

Por otro lado, se dice que un conjunto está descripto por comprensión cuando se utiliza alguna propiedad característica de sus elementos, por ejemplo:

$$A = \underbrace{\{\text{el conjunto de las vocales}\}}_{\text{definición por comprensión}} = \underbrace{\{\text{a}, \text{e}, \text{i}, \text{o}, \text{u}\}}_{\text{definición por extensión}}$$

De manera más formal, se utiliza la siguiente notación para definir conjuntos por comprensión:

$$A = \{ \underbrace{x \text{ es una letra}}_{\text{conjunto con el que trabajamos}} : \underbrace{x \text{ es una vocal}}_{\text{propiedad que debe cumplirse}} \}$$

Se lee: "A es el conjunto de las letras x **tal que** x es una vocal".

Ejemplos:

Definición por comprensión	Definición por extensión
$\{x : x$ es una letra de la palabra "matemática"$\}$	{m, a, t, e, i , c}
$\{x : x$ es una vocal de la palabra "matemática"$\}$	{a, e, i}
$\{x : x$ es un Estado miembro de la Unión Europea que empieza con "F"$\}$	{Francia, Finlandia}
$\{x : x$ es un dígito decimal par$\}$	$\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Actividad 1

Definición : Intersección de conjuntos.

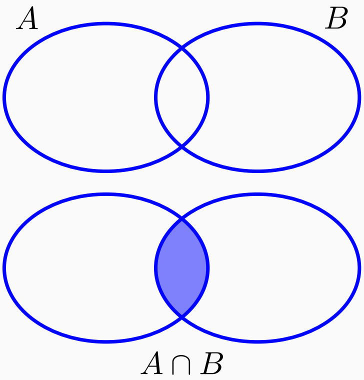
La **intersección** de dos conjuntos es un nuevo conjunto formado por los elementos que están en ambos conjuntos simultáneamente. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la intersección de A y B de la siguiente forma:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{\text{a, b, c, g}\}$ y $B = \{\text{r, g}\}$, entonces:

$$A \cap B = \{\text{g}\}$$



Definición : Unión de conjuntos.

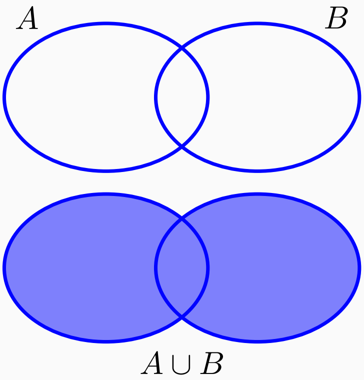
La **unión** de dos conjuntos es un nuevo conjunto formado por los elementos que están en uno u otro conjunto. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la unión de A y B de la siguiente forma:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{\text{a, b, c, g}\}$ y $B = \{\text{r, g}\}$, entonces:

$$A \cup B = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{r}, \mathrm{g}\}$$



Definición : Diferencia de conjuntos.

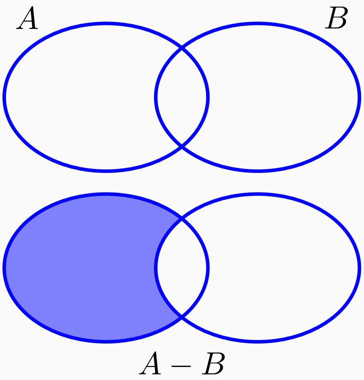
La **diferencia** del conjunto A con el conjunto B es un nuevo conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B. Considerando A y B dos conjuntos, escribimos la diferencia de A con B de la siguiente forma:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo : .

Si $A = \{\text{a, b, c, g}\}$ y $B = \{\text{r, g}\}$, entonces:

$$A - B = \{\text{a}, \text{b}, \text{c}\}$$



Ejemplo:

23 estudiantes de un curso practican alguno de los siguientes deportes: tenis, fútbol y voley. Cuatro de ellas juegan regularmente los tres deportes; cinco juegan solamente voley y fútbol; dos juegan solamente tenis y fútbol; y tres juegan solamente tenis y voley. Además, tres personas juegan únicamente tenis y una persona juega únicamente fútbol. ¿Cuantas personas juegan únicamente voley?

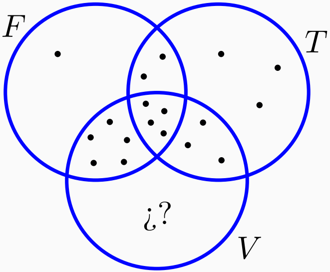
$$T = \{\text{estudiantes que juegan tenis}\}; V = \{\text{estudiantes que juegan voley}\}; F = \{\text{estudiantes que juegan fútbol}\}$$

Ejemplo:

23 estudiantes de un curso practican alguno de los siguientes deportes: tenis, fútbol y voley. Cuatro de ellas juegan regularmente los tres deportes; cinco juegan solamente voley y fútbol; dos juegan solamente tenis y fútbol; y tres juegan solamente tenis y voley. Además, tres personas juegan únicamente tenis y una persona juega únicamente fútbol. ¿Cuantas personas juegan únicamente voley?

$$T = \{\text{estudiantes que juegan tenis}\}; V = \{\text{estudiantes que juegan voley}\}; F = \{\text{estudiantes que juegan fútbol}\}$$

Enunciado	Conjunto	# elementos
Total de alumnos	$V \cup F \cup T$	23
Alumnos que juegan 3 deportes	$V \cap F \cap T$	4
Alumnos que juegan únicamente voley y fútbol	$(V \cap F) - T$	5
Alumnos que juegan únicamente tenis y fútbol	$(T \cap F) - V$	2
Alumnos que juegan únicamente tenis y voley	$(T \cap V) - F$	3
Alumnos que juegan únicamente tenis	$T - (V \cup F)$	3
Alumnos que juegan únicamente fútbol	$F - (T \cup V)$	1
Alumnos que juegan únicamente voley	$V - (T \cup F)$	¿?

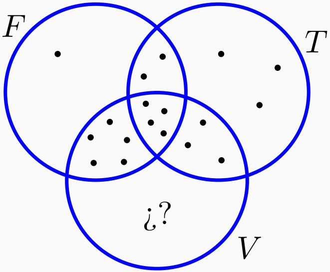


Ejemplo:

23 estudiantes de un curso practican alguno de los siguientes deportes: tenis, fútbol y voley. Cuatro de ellas juegan regularmente los tres deportes; cinco juegan solamente voley y fútbol; dos juegan solamente tenis y fútbol; y tres juegan solamente tenis y voley. Además, tres personas juegan únicamente tenis y una persona juega únicamente fútbol. ¿Cuantas personas juegan únicamente voley?

$$T = \{\text{estudiantes que juegan tenis}\}; V = \{\text{estudiantes que juegan voley}\}; F = \{\text{estudiantes que juegan fútbol}\}$$

Enunciado	Conjunto	# elementos
Total de alumnos	$V \cup F \cup T$	23
Alumnos que juegan 3 deportes	$V \cap F \cap T$	4
Alumnos que juegan únicamente voley y fútbol	$(V \cap F) - T$	5
Alumnos que juegan únicamente tenis y fútbol	$(T \cap F) - V$	2
Alumnos que juegan únicamente tenis y voley	$(T \cap V) - F$	3
Alumnos que juegan únicamente tenis	$T - (V \cup F)$	3
Alumnos que juegan únicamente fútbol	$F - (T \cup V)$	1
Alumnos que juegan únicamente voley	$V - (T \cup F)$	¿?



Actividad 2

Definición : Números naturales.

Utilizamos los **números naturales** para contar cosas. Denotamos este conjunto con el símbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

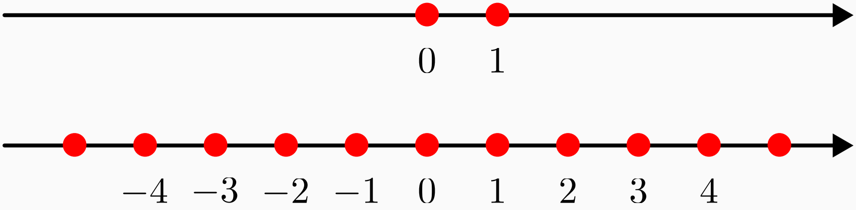
Consideramos al 0 como número natural, aunque algunos libros no lo hacen.

Definición : Números enteros.

Los **números enteros** están comprendidos por los naturales y sus opuestos. Utilizamos el símbolo $\mathbb{Z}$ para este conjuntos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Representación gráfica:



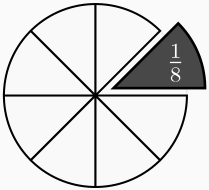
Definición : Números racionales o fraccionarios.

Son aquellos números que pueden escribirse como **cociente** entre dos números enteros:

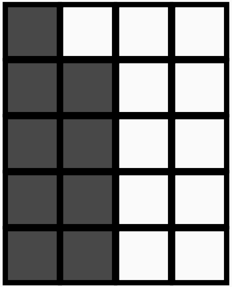
$$\frac{p}{q} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} = \frac{\text{número entero}}{\text{número entero} \neq 0}$$

Utilizamos el símbolo $\mathbb{Q}$ para denotar este conjunto:

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -3, \frac{1}{3}, \frac{5}{2}, \ldots, -4, 0.3, \ldots, \}$$



$$\frac{\text{1 porción sombreada}}{\text{8 porciones totales}} = \frac{1}{8}$$



$$\frac{9}{20}$$

La razón entre el área total y el área sombreada es 9 a 20.

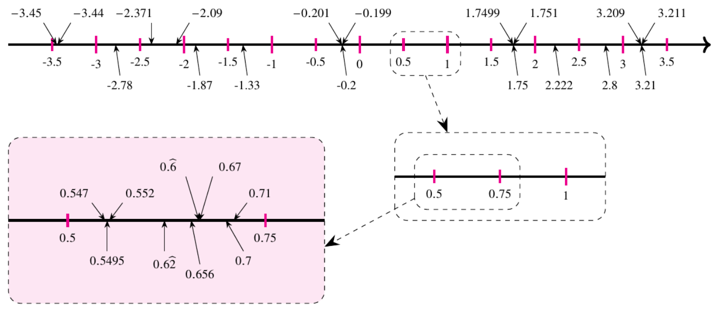
Los números fraccionarios también tienen su representación en **forma decimal**. En este caso podemos obtener decimales exactos o decimales periódicos (que se van repitiendo indefinidamente):

$$\frac{1}{2} = \underbrace{0.5}_{\text{decimales exactos}} \qquad \frac{2}{3} = \underbrace{0.\hat{6} = 0.66666\ldots}_{\text{decimales periódicos}}$$

Los números fraccionarios también tienen su representación en **forma decimal**. En este caso podemos obtener decimales exactos o decimales periódicos (que se van repitiendo indefinidamente):

$$\frac{1}{2} = \underbrace{0.5}_{\text{decimales exactos}} \qquad \frac{2}{3} = \underbrace{0.\hat{6} = 0.66666\ldots}_{\text{decimales periódicos}}$$

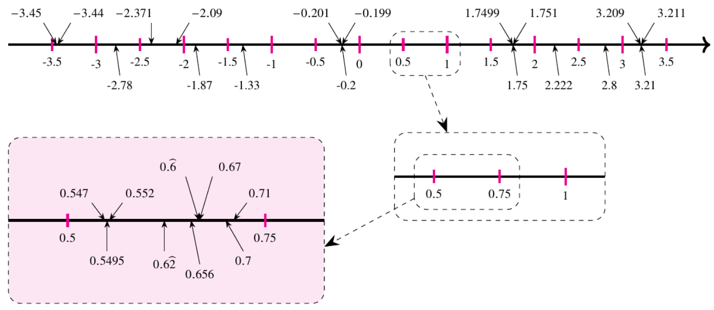
Representación gráfica: En la representación lineal, en cualquier segmento (sin importar su tamaño) se pueden encontrar números fraccionarios. Entre dos números fraccionarios existen una infinidad de otros números racionales:



Los números fraccionarios también tienen su representación en **forma decimal**. En este caso podemos obtener decimales exactos o decimales periódicos (que se van repitiendo indefinidamente):

$$\frac{1}{2} = \underbrace{0.5}_{\text{decimales exactos}} \qquad \frac{2}{3} = \underbrace{0.\hat{6} = 0.66666\ldots}_{\text{decimales periódicos}}$$

Representación gráfica: En la representación lineal, en cualquier segmento (sin importar su tamaño) se pueden encontrar números fraccionarios. Entre dos números fraccionarios existen una infinidad de otros números racionales:



¿Se puede completar toda la línea numérica con números racionales? La respuesta es **negativa**, y se debe a que algunas longitudes o magnitudes no son números racionales, sino **irracionales**.

Definición : Números irracionales.

Son aquellos números que **no pueden escribirse** como cociente de dos números enteros. Usamos el símbolo $\mathbb{I}$ para denotar a este conjunto:

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{5}, \pi, e, \ldots\}$$

Al escribir los números racionales en **forma decimal** siempre obtenemos una expresión con infinitas cifras no periódicas:

$$\pi = \underbrace{3.141592654\ldots}_{\text{decimales no periódicos}} \qquad \sqrt{2} = \underbrace{1.414213562\ldots}_{\text{decimales no periódicos}}$$

Definición : Números irracionales.

Son aquellos números que **no pueden escribirse** como cociente de dos números enteros. Usamos el símbolo $\mathbb{I}$ para denotar a este conjunto:

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{5}, \pi, e, \ldots\}$$

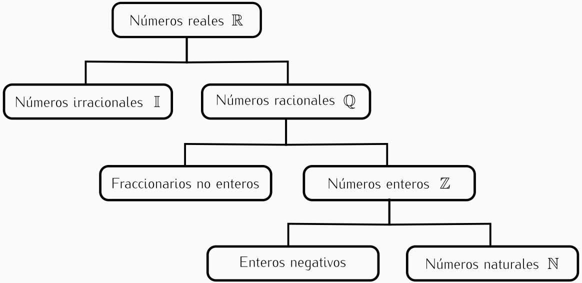
Al escribir los números racionales en **forma decimal** siempre obtenemos una expresión con infinitas cifras no periódicas:

$$\pi = \underbrace{3.141592654\ldots}_{\text{decimales no periódicos}} \qquad \sqrt{2} = \underbrace{1.414213562\ldots}_{\text{decimales no periódicos}}$$

Definición : Números reales.

Es la unión de los números racionales y los irracionales, conformando la totalidad de los **números reales** que permiten calcular cualquier longitud posible. Utilizamos el símbolo $\mathbb{R}$ para llamar a este conjunto:

$$\mathbb{R} = \{0, -1, \frac{1}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}, \pi, \frac{7}{3}, \ldots\}$$



Definición : Números pares.

Son los **números enteros divisibles por 2**. En forma simbólica:

$$n = 2\,p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

Cualquier entero que termine en 0, 2, 4, 6 u 8 es un número par:

$$\{\ldots, -1240, -238, -156, -2, 0, 2, 4, 16, 88, 12340, \ldots\}$$

$$\{n \in \mathbb{Z} : n = 2\,p \quad \text{para algún} \quad p \in \mathbb{Z}\}$$

Definición : Números pares.

Son los **números enteros divisibles por 2**. En forma simbólica:

$$n = 2\,p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

Cualquier entero que termine en 0, 2, 4, 6 u 8 es un número par:

$$\{\dots, -1240, -238, -156, -2, 0, 2, 4, 16, 88, 12340, \dots\}$$

$$\{n \in \mathbb{Z} : n = 2\,p \quad \text{para algún} \quad p \in \mathbb{Z}\}$$

Definición : Números impares.

Son los **números enteros que no divisibles por 2**. En forma simbólica:

$$n = 2\,p + 1, \quad p \in \mathbb{Z}$$

Cualquier entero que termine en 1, 3, 5, 7 u 9 es un número impar:

$$\{\dots, -12345, 99, -1, 1, 317, 23, \dots\}$$

$$\{n \in \mathbb{Z} : n = 2\,p + 1 \quad \text{para algún} \quad p \in \mathbb{Z}\}$$

Definición : Números primos.

Son los **números naturales mayores que 1 divisibles solo por sí mismos y la unidad**.

Los primeros 5 números primos son 2, 3, 5, 7, y 11.

Los números primos pueden ser muy útiles para factorizar números enteros y facilitar las operaciones entre fracciones.

Definición : Números primos.

Son los **números naturales mayores que 1 divisibles solo por sí mismos y la unidad**.

Los primeros 5 números primos son 2, 3, 5, 7, y 11.
Los números primos pueden ser muy útiles para factorizar números enteros y facilitar las operaciones entre fracciones.

Definición : Números compuestos.

Son los **números naturales mayores que 1 que tienen algún divisor natural aparte de sí mismos y el 1**.

Los primeros 5 números compuestos son 4, 6, 8, 9, 10.

Actividad 3

Propiedades de la **suma** y de la **multiplicación**: a, b y c son números reales.

	Suma	**Multiplicación**
Propiedad de cierre	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \times b \in \mathbb{R}$
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Propiedad asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
Números opuestos/inversos	$a + (-a) = 0$	$a \times a^{-1} = 1, a \neq 0$
Propiedad distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	

Notación para el producto

La forma más usual es usando un **punto en el medio del renglón**, pero también se usa el símbolo $\times$ y paréntesis:

$$15 = \underbrace{3\times 5}_{\text{usando } \times} = \overbrace{3\cdot 5}^{\text{usando } \cdot} = \underbrace{(3)(5) = 3(5) = (3)5}_{\text{usando } ()}$$

Cuando se utilizan letras o variables está permitido no usar símbolos o paréntesis entre medio:

$$3a = 3\cdot a \qquad ab = a\cdot b$$

Sin embargo, **se evita** usar la escritura anterior cuando se trata de números propiamente dichos para evitar confusión:

$$35 = \text{treinta y cinco} \qquad 35 \overset{\text{NO ES}}{=} 3\cdot 5$$

Cambio de precedencia en las operaciones aritméticas

La **regla principal** cuando usamos **paréntesis** y/o **corchetes** es que debe respetarse el orden de las operaciones indicadas siempre desde los más internos y luego avanzando hacia **afuera**:

$$3[\underbrace{(3+4)}_{①} - \underbrace{(2+2)}_{①}] = 3\,\overbrace{[7-4]}^{②} = \underbrace{3 \cdot 3}_{③} = 9$$

Resta y división

Resta: para $a, b \in \mathbb{R}$

$$a - b = a + (-b)$$

División: para $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

Notación

Para la división se utilizan varios símbolos o notaciones:

$$a \div b \qquad a : b \qquad a/b \qquad \frac{a}{b}$$

Los símbolos de las operaciones **nunca se escriben juntos**, se deben usar paréntesis o corchetes:

Formas correctas	Formas incorrectas
$3 + (-2) \quad 3 \cdot (-12) \quad -9 \div (-2)$	$3 + -2 \quad 3 \cdot -12 \quad -9 \div -2$

Propiedades de la resta (o de los números opuestos):

- Calcular el opuesto es lo mismo que multiplicar por -1: $-a = (-1) \cdot a$
- El **doble** opuesto: $-(-a) = (-1) \cdot (-1) \cdot a = a$
- Números opuestos y multiplicación: $-a \cdot b = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$
- Números opuestos y fracciones: para $b \neq 0$,

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \text{y} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

- **Distributiva** de negativo: $-(a+b) = -a - b \quad \text{y} \quad -(a-b) = -a + b$

Propiedades de la división (o de los números inversos): a, b, c y d son números reales aclarando que cuando corresponda el numerador es diferente de cero.

- **Suma** de fracciones con **igual denominador**: es la forma más simple de sumar fracciones porque se considera que se están sumando cantidades de una misma fracción de la unidad (se suman directamente los numeradores):

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=a\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{b}=(a+c)\cdot\frac{1}{b}=\frac{a+c}{b}$$

- **Suma** de fracciones en general: se buscan **fracciones equivalentes** que tengan el mismo denominador:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\overset{\text{equivalentes}}{=}\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}\overset{\text{igual denominador}}{=}\frac{ad+cb}{bd}$$

- **Multiplicación** de fracciones: se calculan multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

- **División** de fracciones: la segunda función **se da vuelta** y luego se multiplica:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Suma de fracciones usando mínimo común múltiplo: ejemplos:

- $1/6 + 2/3 + 4/9$. Los denominadores son 6, 3 y 9 cuyo mínimo común múltiplo es 18. Las fracciones equivalentes son:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{18} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{6} = \frac{12}{18} \qquad \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{2} = \frac{8}{18}$$

  Entonces:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{3}{18} + \frac{12}{18} + \frac{8}{18} = \frac{3+12+8}{18} = \frac{23}{18}$$

- $2 + 5/8 - 5/6$. Los denominadores son 1, 8 y 6, con mínimo común múltiplo 24:

$$2 + \frac{5}{8} - \frac{5}{6} = \frac{48}{24} + \frac{15}{24} - \frac{20}{24} = \frac{48+15-20}{24} = \frac{43}{24}$$

Definición : Potenciación.

- Exponente $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

- Caso particular $n = 0$, $a \neq 0$: $a^0 = 1$
- $n = 0$ y $a = 0$ no está definida matemáticamente: 0^0 expresión **no definida**.
- Para $a \neq 0$ se calculan potencias con números enteros **negativos**:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
- $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$
- $$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{9}{49}$$
- $x^3 = x \cdot x \cdot x$
- $a^1 = a$
- $$\left(\frac{234}{1354}\right)^0 = 1$$
- $$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
- $$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

Propiedades de las potencias con exponentes enteros: a y b son números reales diferentes de cero, $n, m \in \mathbb{Z}$:

- **Regla del producto**: producto de potencias de **igual base**, se **suman** los exponentes: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}} = a^{n+m}$$

- **Distributiva respecto de la multiplicación:** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ veces}} = a^n \cdot b^n$$

- **Regla del cociente:** en una división de potencias de **igual base** se **restan** los exponentes: $a^n / a^m = a^{n-m}$. Para el caso de $n > m$:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ veces}} = a^{n-m}$$

Propiedades de las potencias con exponentes enteros: (continuación)

- **Distributiva respecto de la división:** $(a/b)^n = a^n/b^n$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\text{ veces}} = \frac{\overbrace{a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ veces}}}{\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ veces}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- **Regla de la potencia:** en una potencia dentro de otra potencia, los exponentes se **multiplican**: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ veces}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ veces}}}_{m\text{ veces}} = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\cdot n\text{ veces}} = a^{n\cdot m}$$

- **Regla de la potencia opuesta:** Si la potencia es negativa, la fracción se invierte y se cambia de signo el exponente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

¡Cuidado! $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9 \neq -3^2 = -(3^2) = -3\cdot 3 = -9$

Definición : Radicación.

Es el proceso de hallar las raíces de orden n de un número a. Para números reales:

$$\sqrt[n]{a} = x$$

donde:

- n es el **índice** u **orden**, a es el **radicando**.
- Según n sea impar o par:
  - n impar $\mapsto$ $\sqrt[n]{a} = x$ **raíz enésima**.
  - n par $\mapsto$ $\sqrt[n]{a} = \pm x$ **raíces enésimas**.
- Si $a < 0$ solo existe la raíz real si n es impar.

Definición : Radicación.

Es el proceso de hallar las raíces de orden n de un número a. Para números reales:

$$\sqrt[n]{a} = x$$

donde:

- n es el **índice** u **orden**, a es el **radicando**.
- Según n sea impar o par:
  - n impar $\mapsto$ $\sqrt[n]{a} = x$ **raíz enésima**.
  - n par $\mapsto$ $\sqrt[n]{a} = \pm x$ **raíces enésimas**.
- Si $a < 0$ solo existe la raíz real si n es impar.

⚠

La raíz cuadrada de los números enteros, si estos no son cuadrados perfectos, son siempre números irracionales.

Definición : Radicación.

Es el proceso de hallar las raíces de orden n de un número a. Para números reales:

$$\sqrt[n]{a} = x$$

donde:

- n es el **índice** u **orden**, a es el **radicando**.
- Según n sea impar o par:
  - n impar $\mapsto$ $\sqrt[n]{a} = x$ **raíz enésima**.
  - n par $\mapsto$ $\sqrt[n]{a} = \pm x$ **raíces enésimas**.
- Si $a < 0$ solo existe la raíz real si n es impar.

⚠

La raíz cuadrada de los números enteros, si estos no son cuadrados perfectos, son siempre números irracionales.

Propiedades:

- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$

Nota: la raíz enésima de un número se puede poner en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

ya que

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{y} \quad (a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$$

Actividad 4