

JavaTM

CÓMO PROGRAMAR

Décima edición

Paul Deitel

Deitel & Associates, Inc.

Harvey Deitel

Deitel & Associates, Inc.

Traducción

Alfonso Vidal Romero Elizondo

Ingeniero en Sistemas Electrónicos

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey - Campus Monterrey

Revisión técnica

Sergio Fuenlabrada Velázquez

Edna Martha Miranda Chávez

Judith Sonck Ledezma

Mario Alberto Sesma Martínez

Mario Oviedo Galdeano

José Luis López Goytia

Departamento de Sistemas

*Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales
y Administrativas, Instituto Politécnico Nacional, México*



Pearson

18

Recursividad

Oh, maldita iteración, que eres capaz de corromper hasta a un santo.

—William Shakespeare

Es un pobre orden de memoria, que sólo funciona al revés.

—Lewis Carroll

La vida sólo puede comprenderse al revés; pero debe vivirse hacia delante.

—Soren Kierkegaard

Objetivos

En este capítulo aprenderá:

- El concepto de recursividad.
- A escribir y utilizar métodos recursivos.
- A determinar el caso base y el paso de recursividad en un algoritmo recursivo.
- Cómo el sistema maneja las llamadas a métodos recursivos.
- Las diferencias entre recursividad e iteración, y cuándo es apropiado utilizar cada una.
- Las figuras geométricas llamadas fractales, y cómo se dibujan mediante la recursividad.
- El concepto de “vuelta atrás” recursiva (*backtracking*), y por qué es una técnica efectiva para solucionar problemas.



18.1	Introducción	18.7	Comparación entre recursividad e iteración
18.2	Conceptos de recursividad	18.8	Las torres de Hanoi
18.3	Ejemplo de uso de recursividad: factoriales	18.9	Fractales
18.4	Reimplementación de la clase <code>CalculadoraFactorial</code> mediante la clase <code>BigInteger</code>	18.9.1	Fractal de la Curva de Koch
18.5	Ejemplo de uso de recursividad: serie de Fibonacci	18.9.2	(Opcional) Ejemplo práctico: fractal Lo Feather
18.6	La recursividad y la pila de llamadas a métodos	18.10	“Vuelta atrás” recursiva (<i>backtracking</i>)
		18.11	Conclusión

Resumen | Ejercicios de autoevaluación | Respuestas a los ejercicios de autoevaluación | Ejercicios

18.1 Introducción

Los programas que hemos visto hasta ahora están estructurados en general como métodos que se llaman entre sí de una manera jerárquica. Para algunos problemas es conveniente hacer que un método *se llame a sí mismo*. Dicho método se conoce como **método recursivo**; este método se puede llamar en forma *directa* o *indirecta a través de otro método*. La recursividad es un tema importante que puede tratarse de manera extensa en los cursos de ciencias computacionales de nivel superior. En este capítulo consideraremos la recursividad en forma conceptual y después presentaremos varios programas que contienen métodos recursivos. En la figura 18.1 se sintetizan los ejemplos y ejercicios de recursividad que se incluyen en este libro.

Capítulo	Ejemplos y ejercicios de recursividad en este libro
18	Método factorial (figuras 18.3 y 18.4) Método Fibonacci (figura 18.5) Torres de Hanoi (figura 18.11) Fractales (figuras 18.18 y 18.19) ¿Qué hace este código? (ejercicios 18.7, 18.12 y 18.13) Encuentre el error en el siguiente código (ejercicio 18.8) Elevar un entero a una potencia entera (ejercicio 18.9) Visualización de la recursividad (ejercicio 18.10) Máximo común divisor (ejercicio 18.11) Determinar si una cadena es un palíndromo (ejercicio 18.14) Ocho reinas (ejercicio 18.15) Impresión de un arreglo (ejercicio 18.16) Impresión de un arreglo en forma inversa (ejercicio 18.17) Mínimo valor en un arreglo (ejercicio 18.18) Fractal de estrella (ejercicio 18.19) Recorrido de laberinto usando la “vuelta atrás” recursiva (ejercicio 18.20) Generación de laberintos al azar (ejercicio 18.21) Laberintos de cualquier tamaño (ejercicio 18.22) Tiempo necesario para calcular un número de Fibonacci (ejercicio 18.23)

Fig. 18.1 | Resumen de los ejemplos y ejercicios de recursividad en este libro (parte 1 de 2).

Capítulo	Ejemplos y ejercicios de recursividad en este libro
19	Ordenamiento por combinación (figura 19.6) Búsqueda lineal (ejercicio 19.8) Búsqueda binaria (ejercicio 19.9) Quicksort (ejercicio 19.10)
21 (en inglés)	Inserción en árbol binario (figura 21.17) Recorrido preorden de un árbol binario (21.17) Recorrido inorden de un árbol binario (21.17) Recorrido postorden de un árbol binario (21.17) Impresión de una lista enlazada en forma inversa (ejercicio 21.20) Búsqueda en una lista enlazada (ejercicio 21.21)

Fig. 18.1 | Resumen de los ejemplos y ejercicios de recursividad en este libro (parte 2 de 2).

18.2 Conceptos de recursividad

Los métodos para solucionar problemas recursivos tienen varios elementos en común. Cuando se hace una llamada a un método recursivo para resolver un problema, el método en realidad es capaz de resolver sólo *los casos más simples*, o **casos base**. Si se hace la llamada al método con un *caso base*, el método devuelve un resultado. Si se hace la llamada al método con un problema más complejo, por lo general divide el problema en dos piezas conceptuales: una pieza que el método sabe cómo resolver y otra pieza que no sabe cómo resolver. Para que la recursividad sea factible, esta última pieza debe ser similar al problema original pero es una versión ligeramente más sencilla o simple del mismo. Puesto que este nuevo problema se parece al problema original, el método llama a una nueva *copia* de sí mismo para trabajar en el problema más pequeño; a esto se le conoce como **llamada recursiva**, y también como **paso recursivo**. Por lo general, el paso recursivo incluye una instrucción `return`, ya que su resultado se combina con la parte del problema que el método supo cómo resolver, para formar un resultado que se pasará de vuelta al método original que hizo la llamada. Este concepto de separar el problema en dos porciones más pequeñas es una forma del método *divide y vencerás* que presentamos en el capítulo 6.

El paso recursivo se ejecuta mientras siga activa la llamada original al método (es decir, que no haya terminado su ejecución). Se pueden producir muchas llamadas recursivas más, a medida que el método divide cada nuevo subproblema en dos piezas conceptuales. Para que la recursividad termine en un momento dado, cada vez que el método se llama a sí mismo con una versión más simple del problema original, la secuencia de problemas cada vez más pequeños debe *converger en un caso base*. Cuando el método reconoce el caso base devuelve un resultado a la copia anterior del método. Después se origina una secuencia de retornos hasta que la llamada al método original devuelve el resultado final al método que lo llamó. Ilustraremos este proceso con un ejemplo concreto en la sección 18.3.

Un método recursivo puede llamar a otro método, que a su vez puede hacer una llamada de vuelta al método recursivo. A dicho proceso se le conoce como **llamada recursiva indirecta** o **recursividad indirecta**. Por ejemplo, el método A llama al método B que hace una llamada de vuelta al método A. Esto se sigue considerando como recursividad debido a que la segunda llamada al método A se realiza mientras la primera sigue activa; es decir, la primera llamada al método A no ha terminado todavía de ejecutarse (debido a que está esperando que el método B le devuelva un resultado) y no ha regresado al método original que llamó al método A.

Para comprender mejor el concepto de recursividad, veamos un ejemplo que es bastante común para los usuarios de computadora: la definición recursiva de un directorio en una computadora. Por lo general, una computadora almacena los archivos relacionados en un directorio. Este directorio puede estar vacío, puede contener archivos o puede contener otros directorios (que por lo general se conocen como subdirectorios). A su vez, cada uno de estos directorios puede contener también archivos y directorios. Si queremos listar cada archivo en un directorio (incluyendo todos los archivos en los subdirectorios de ese directorio), necesitamos crear un método que lea primero los archivos del directorio inicial y que después haga llamadas recursivas para listar los archivos en cada uno de los subdirectorios de ese directorio. El caso base ocurre cuando se llega a un directorio que no contenga subdirectorios. En este punto se han listado todos los archivos en el directorio original y no se necesita más la recursividad.

18.3 Ejemplo de uso de recursividad: factoriales

Vamos a escribir un programa recursivo para realizar un popular cálculo matemático. Considere el *factorial* de un entero positivo n , escrito como $n!$ (y se pronuncia como “factorial de n ”), que viene siendo el producto

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

en donde $1!$ es igual a 1 y $0!$ se define como 1. Por ejemplo, $5!$ es el producto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, que es igual a 120.

El factorial del entero numero (en donde $\text{numero} \geq 0$) puede calcularse de manera *iterativa* (sin recursividad), usando una instrucción `for` de la siguiente manera:

```
factorial = 1;
for (int contador = numero; contador >= 1; contador--)
    factorial *= contador;
```

Podemos llegar a una declaración recursiva del cálculo del factorial para enteros mayores que 1 observando la siguiente relación:

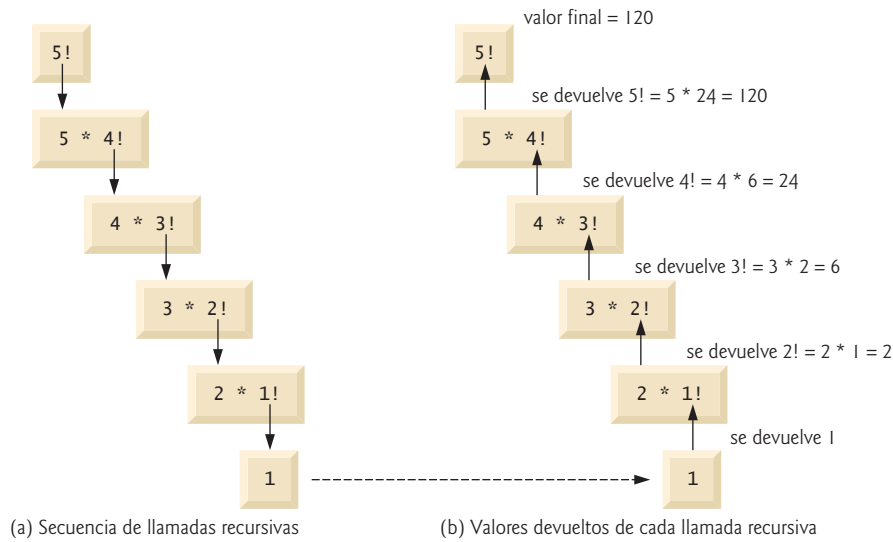
$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Por ejemplo, $5!$ es sin duda igual a $5 \cdot 4!$, como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 5! &= 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\ 5! &= 5 \cdot (4!) \end{aligned}$$

La evaluación de $5!$ procedería como se muestra en la figura 18.2. La figura 18.2(a) muestra cómo procede la sucesión de llamadas recursivas hasta que $1!$ (el caso base) se evalúa como 1, lo cual termina la recursividad. La figura 18.2(b) muestra los valores devueltos de cada llamada recursiva al método que hizo la llamada, hasta que se calcula y devuelve el valor final.

En la figura 18.3 se utiliza la recursividad para calcular e imprimir los factoriales de los enteros del 0 al 21. El método recursivo `factorial` (líneas 7 a 13) realiza primero una evaluación para determinar si una *condición de terminación* (línea 9) es `true`. Si `numero` es menor o igual que 1 (el caso base), `factorial` devuelve 1 y ya no es necesaria más recursividad por lo que el método regresa. (Una condición previa de llamar al método `factorial` en este ejemplo es que su argumento debe ser positivo o cero). Si `numero` es mayor que 1, en la línea 12 se expresa el problema como el producto de `numero` y una llamada recursiva a `factorial` en la que se evalúa el factorial de `numero - 1`, el cual es un problema un poco más pequeño que el cálculo original, `factorial(numero)`.

**Fig. 18.2** | Evaluación recursiva de 5!.

```

1  // Fig. 18.3: CalculadoraFactorial.java
2  // Método factorial recursivo.
3
4  public class CalculadoraFactorial
5  {
6      // método factorial recursivo (asume que su parámetro es >= 0)
7      public static long factorial(long numero)
8      {
9          if (numero <= 1) // evalúa el caso base
10             return 1; // casos base: 0! = 1 y 1! = 1
11         else // paso recursivo
12             return numero * factorial(numero - 1);
13     }
14
15     // imprime factoriales para los valores del 0 al 21
16     public static void main(String[] args)
17     {
18         // calcula los factoriales del 0 al 21
19         for (int contador = 0; contador <= 21; contador++)
20             System.out.printf("%d! = %d\n", contador, factorial(contador));
21     }
22 } // fin de la clase CalculadoraFactorial

```

```

0! = 1
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120

```

Fig. 18.3 | Cálculos de factoriales con un método recursivo (parte I de 2).

```

...
12! = 479001600 — 12! Produce desbordamiento para variables int
...
20! = 2432902008176640000
21! = -4249290049419214848 — 21! Produce desbordamiento para variables long

```

Fig. 18.3 | Cálculos de factoriales con un método recursivo (parte 2 de 2).



Error común de programación 18.1

*Si omitimos el caso base o escribimos el paso recursivo en forma incorrecta (de manera que no converja en el caso base) se puede producir un error lógico conocido como **recursividad infinita**, en donde se realizan llamadas recursivas en forma continua, hasta que se agota la memoria. Este error es similar al problema de un ciclo infinito en una solución iterativa (sin recursividad).*

El método `main` (líneas 16 a 21) muestra los factoriales del 0 al 21. La llamada al método `factorial` ocurre en la línea 20. Este método recibe un parámetro de tipo `long` y devuelve un resultado de tipo `long`. Los resultados del programa muestran que los valores de los factoriales crecen con rapidez. Utilizamos el tipo `long` (que puede representar enteros relativamente grandes) para que el programa pueda calcular factoriales mayores que 12!. Por desgracia, el método `factorial` produce valores grandes con tanta rapidez que exceden al valor `long` máximo cuando tratamos de calcular 21!, como puede ver en la última línea de salida del programa.

Debido a las limitaciones de los tipos integrales, podrían necesitarse variables `float` o `double` para calcular factoriales o números más grandes. Esto resalta una debilidad en algunos lenguajes de programación: que no es fácil que los lenguajes se *extiendan con nuevos tipos* para manejar los requerimientos únicos de una aplicación. Como vimos en el capítulo 9, Java es un lenguaje *extensible* que nos permite crear números arbitrariamente grandes, si lo deseamos. De hecho, el paquete `java.math` cuenta con las clases **`BigInteger`** y **`BigDecimal`**, que son específicas para los cálculos de precisión arbitraria que no pueden llevarse a cabo con los tipos primitivos. Aprenderá más sobre estas clases en.

docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/math/BigInteger.html
docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/math/BigDecimal.html

18.4 Reimplementación de la clase `CalculadoraFactorial` mediante la clase `BigInteger`

En la figura 18.4 se reimplementa la clase `CalculadoraFactorial` mediante el uso de variables `BigInteger`. Para demostrar valores más grandes de los que pueden guardar las variables `long`, calculamos los factoriales de los números 0 al 50. En la línea 3 se importa la clase `BigInteger` del paquete `java.math`. El nuevo método `factorial` (líneas 8 a 15) recibe un objeto `BigInteger` como argumento, y devuelve un `BigInteger`.

```

1 // Fig. 18.4: CalculadoraFactorial.java
2 // Método factorial recursivo.
3 import java.math.BigInteger;
4

```

Fig. 18.4 | Cálculos del factorial con un método recursivo (parte 1 de 2).

```

5 public class CalculadoraFactorial
6 {
7     // método factorial recursivo (asume que su parámetro es >= 0)
8     public static BigInteger factorial(BigInteger numero)
9     {
10         if (numero.compareTo(BigInteger.ONE) <= 0) // evalúa el caso base
11             return BigInteger.ONE; // casos base: 0! = 1 y 1! = 1
12         else // paso recursivo
13             return numero.multiply(
14                 factorial(numero.subtract(BigInteger.ONE)));
15     }
16
17     // imprime factoriales para los valores del 0 al 50
18     public static void main(String[] args)
19     {
20         // calcula los factoriales del 0 al 50
21         for (int contador = 0; contador <= 50; contador++)
22             System.out.printf("%d! = %d%n", counter,
23                 factorial(BigInteger.valueOf(contador)));
24     }
25 } // fin de la clase CalculadoraFactorial

```

```

0! = 1
1! = 1
2! = 2
3! = 6
...
21! = 51090942171709440000 — 21! y valores mayores ya no provocan desbordamiento
22! = 1124000727777607680000
...
47! = 258623241511168180642964355153611979969197632389120000000000
48! = 1241391559253607267086228904737337503852148635467760000000000
49! = 608281864034267560872252163321295376887552831379210240000000000
50! = 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000

```

Fig. 18.4 | Cálculos del factorial con un método recursivo (parte 2 de 2).

Como `BigInteger` *no* es un tipo primitivo, no podemos usar los operadores aritméticos, relacionales y de igualdad con objetos `BigInteger`; en vez de ello debemos usar métodos `BigInteger` para realizar estas tareas. En la línea 10 se prueba el caso base mediante el método `compareTo` de `BigInteger`. Este método compara el número `BigInteger` que llama al método con el argumento `BigInteger` del método. El método devuelve `-1` si el `BigInteger` que llama al método es menor que el argumento, `0` si son iguales o `1` si el `BigInteger` que llama al método es mayor que el argumento. En la línea 10 se compara el número `BigInteger` con la constante `BigInteger ONE` que representa el valor entero 1. Si `compareTo` devuelve `-1` o `0`, entonces número es menor o igual a 1 (el caso base) y el método devuelve la constante `BigInteger.ONE`. De lo contrario, las líneas 13 y 14 ejecutan el paso de recursividad mediante los métodos `multiply` y `subtract` de `BigInteger` para implementar los cálculos requeridos para multiplicar número por el factorial de número $- 1$. La salida del programa muestra que `BigInteger` maneja los valores grandes producidos por el cálculo del factorial.

18.5 Ejemplo de uso de recursividad: serie de Fibonacci

La **serie de Fibonacci**,

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

empieza con 0 y 1, y tiene la propiedad de que cada número subsiguiente de Fibonacci es la suma de los dos números anteriores. Esta serie ocurre en la naturaleza y describe una forma de espiral. La proporción de números de Fibonacci sucesivos converge en un valor constante de 1.618..., un número denominado **proporción dorada**, o **media dorada**. Los humanos tienden a descubrir que la media dorada es estéticamente placentera. A menudo los arquitectos diseñan ventanas, cuartos y edificios con una proporción de longitud y anchura en la que se utiliza la media dorada. A menudo, las tarjetas postales se diseñan con una proporción de longitud y anchura de la media dorada.

La serie de Fibonacci se puede definir de manera recursiva como:

```
fibonacci(0) = 0
fibonacci(1) = 1
fibonacci(n) = fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)
```

Hay *dos casos base* para el cálculo de Fibonacci: fibonacci(0) se define como 0, y fibonacci(1) se define como 1. El programa de la figura 18.5 calcula el *i*-ésimo número de Fibonacci en forma recursiva, usando el método fibonacci (líneas 10 a 18). El método main (líneas 21 a 26) prueba a fibonacci, mostrando los valores de Fibonacci del 0 al 40. La variable contador creada en el encabezado de la instrucción for (línea 23) indica cuál número de Fibonacci se debe calcular para cada iteración del ciclo. Los números de Fibonacci tienden a aumentar con rapidez (aunque no tanto como los factoriales). Por lo tanto, utilizamos el tipo BigInteger como el tipo del parámetro y el tipo de valor de retorno del método fibonacci.

```
1 // Fig. 18.5: CalculadoraFibonacci.java
2 // Método fibonacci recursivo.
3 import java.math.BigInteger;
4
5 public class CalculadoraFibonacci
6 {
7     private static BigInteger DOS = BigInteger.valueOf(2);
8
9     // declaración recursiva del método fibonacci
10    public static BigInteger fibonacci(BigInteger numero)
11    {
12        if (numero.equals(BigInteger.ZERO) ||
13            numero.equals(BigInteger.ONE)) // casos base
14            return numero;
15        else // paso recursivo
16            return fibonacci(numero.subtract(BigInteger.ONE)).add(
17                fibonacci(numero.subtract(DOS)));
18    }
19
20    // muestra los valores de fibonacci del 0 al 40
21    public static void main(String[] args)
22    {
```

Fig. 18.5 | Método fibonacci recursivo (parte I de 2).

```

23     for (int contador = 0; contador <= 40; contador++)
24         System.out.printf("Fibonacci de %d es: %d%n", contador,
25             fibonacci(BigInteger.valueOf(contador)));
26     }
27 } // fin de la clase CalculadoraFibonacci

```

```

Fibonacci de 0 es: 0
Fibonacci de 1 es: 1
Fibonacci de 2 es: 1
Fibonacci de 3 es: 2
Fibonacci de 4 es: 3
Fibonacci de 5 es: 5
Fibonacci de 6 es: 8
Fibonacci de 7 es: 13
Fibonacci de 8 es: 21
Fibonacci de 9 es: 34
Fibonacci de 10 es: 55
...
Fibonacci de 37 es: 24157817
Fibonacci de 38 es: 39088169
Fibonacci de 39 es: 63245986
Fibonacci de 40 es: 102334155

```

Fig. 18.5 | Método fibonacci recursivo (parte 2 de 2).

La llamada al método `fibonacci` (línea 25) desde `main` *no* es una llamada recursiva, pero todas las llamadas subsiguientes a `fibonacci` que se llevan a cabo a partir de las líneas 16 y 17 de la figura 18.5 son recursivas, ya que en ese punto es el mismo método `fibonacci` el que inicia las llamadas. Cada vez que se hace una llamada a `fibonacci`, se evalúan inmediatamente los *casos base*: número igual a 0 o número igual a 1 (líneas 12 y 13). Utilizamos las constantes `ZERO` y `ONE` de `BigInteger` para representar los valores 0 y 1, respectivamente. Si la condición en las líneas 12 y 13 es `true`, `fibonacci` sólo devuelve número, ya que `fibonacci(0)` es 0 y `fibonacci(1)` es 1. Lo interesante es que si `numero` es mayor que 1, el paso recursivo genera *dos* llamadas recursivas (líneas 16 y 17), cada una de ellas para un problema un poco más pequeño que el de la llamada original a `fibonacci`. Las líneas 16 y 17 utilizan los métodos `add` y `subtract` de `BigInteger` para ayudar a implementar el paso recursivo. También usamos una constante de tipo `BigInteger` llamada `DOS`, que definimos en la línea 7.

Análisis de las llamadas al método `fibonacci`

La figura 18.6 muestra cómo el método `fibonacci` evalúa `fibonacci(3)`. En la parte inferior de la figura, nos quedamos con los valores 1, 0 y 1; los resultados de evaluar los *casos base*. Los primeros dos valores de retorno (de izquierda a derecha), 1 y 0, se devuelven como los valores para las llamadas `fibonacci(1)` y `fibonacci(0)`. La suma 1 más 0 se devuelve como el valor de `fibonacci(2)`. Esto se suma al resultado (1) de la llamada a `fibonacci(1)`, para producir el valor 2. Después, este valor final se devuelve como el valor de `fibonacci(3)`.

La figura 18.6 genera ciertas preguntas interesantes en cuanto al *orden en el que los compiladores de Java evalúan los operandos de los operadores*. Este orden es distinto del orden en el que se aplican los operadores a sus operandos; digamos, el orden que dictan las reglas de la precedencia de operadores. De la figura 18.6, parece ser que mientras se evalúa `fibonacci(3)`, se harán dos llamadas recursivas: `fibonacci(2)` y `fibonacci(1)`. Pero ¿en qué orden se harán estas llamadas? *El lenguaje Java especifica que el orden de evalua-*

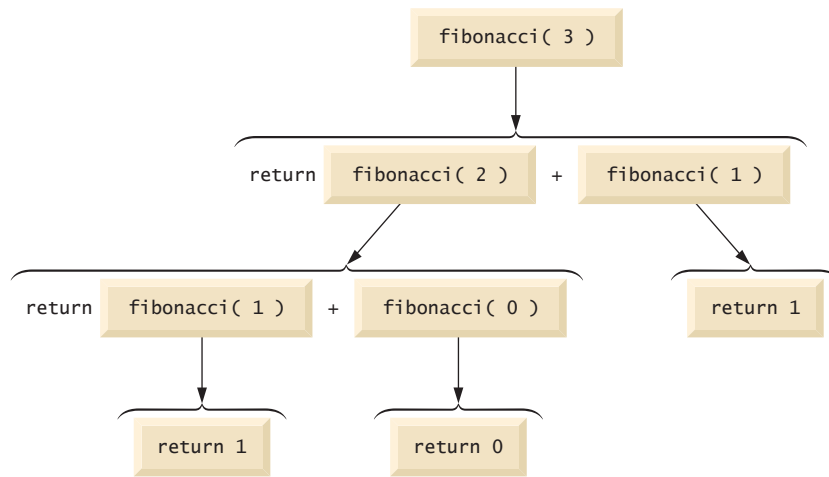


Fig. 18.6 | Conjunto de llamadas recursivas para fibonacci(3).

ción de los operandos es de izquierda a derecha. Por ende, la llamada a fibonacci(2) se realiza primero y después la llamada a fibonacci(1).

Hay que tener cuidado con los programas recursivos como el que utilizamos aquí para generar números de Fibonacci. Cada invocación del método fibonacci que no coincide con uno de los *casos base* (0 o 1) produce *dos llamadas recursivas más* al método fibonacci. Por lo tanto, este conjunto de llamadas recursivas se sale rápidamente de control. Para calcular el valor 20 de Fibonacci con el programa de la figura 18.5, se requieren 21,891 llamadas al método fibonacci; ¡para calcular el valor 30 de Fibonacci se requieren 2,692,537 llamadas! A medida que trate de calcular valores más grandes de Fibonacci, observará que cada número de Fibonacci consecutivo que calcule con la aplicación requiere un aumento considerable en tiempo de cálculo y en el número de llamadas al método fibonacci. Por ejemplo, el valor 31 de Fibonacci requiere 4,356,617 llamadas, y ¡el valor 32 de Fibonacci requiere 7,049,155 llamadas! Como puede ver, el número de llamadas al método fibonacci se incrementa con rapidez; 1,664,080 llamadas adicionales entre los valores 30 y 31 de Fibonacci, y ¡2,692,538 llamadas adicionales entre los valores 31 y 32 de Fibonacci! La diferencia en el número de llamadas realizadas entre los valores 31 y 32 de Fibonacci es de más de 1.5 veces la diferencia en el número de llamadas para los valores entre 30 y 31 de Fibonacci. Los problemas de esta naturaleza pueden humillar incluso hasta a las computadoras más poderosas del mundo. [Nota: en el campo de la teoría de la complejidad, los científicos de computadoras estudian qué tanto tienen que trabajar los algoritmos para completar sus tareas. Las cuestiones relacionadas con la complejidad se discuten con detalle en un curso del plan de estudios de ciencias computacionales de nivel superior, al que por lo general se le llama “Algoritmos”. En el capítulo 19, Búsqueda, ordenamiento y Big O, presentamos varias cuestiones acerca de la complejidad]. En los ejercicios de este capítulo le pediremos que mejore el programa de Fibonacci de la figura 18.5, de tal forma que calcule el tiempo aproximado requerido para realizar el cálculo. Para este fin, invocará al método static de System llamado `currentTimeMillis`, el cual no recibe argumentos y devuelve el tiempo actual de la computadora en milisegundos.



Tip de rendimiento 18.1

Evite los programas recursivos al estilo de Fibonacci, ya que producen una “explosión” exponencial de llamadas a métodos.

18.6 La recursividad y la pila de llamadas a métodos

En el capítulo 6 se presentó la estructura de datos tipo *pila*, para comprender cómo Java realiza las llamadas a los métodos. Hablamos sobre la *pila de llamadas a métodos* y sobre los *marcos de pila*. En esta sección, utilizaremos estos conceptos para demostrar la forma en que la pila de ejecución del programa maneja las llamadas a los métodos *recursivos*.

Para empezar, regresemos al ejemplo de Fibonacci; en específico, a la llamada al método `fibonacci` con el valor 3, como en la figura 18.6. Para mostrar el *orden* en el que se colocan los registros de activación de las llamadas a los métodos en la pila, hemos clasificado las llamadas a los métodos con letras en la figura 18.7.

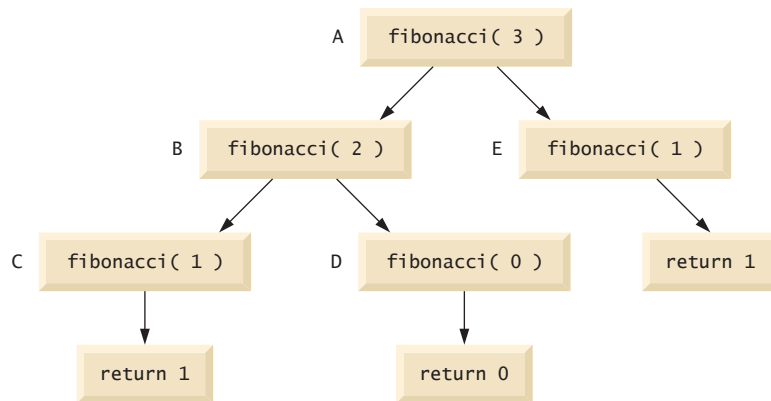


Fig. 18.7 | Llamadas al método realizadas dentro de la llamada `fibonacci(3)`.

Cuando se hace la primera llamada al método (A), un *marco de pila* se *mete* en la *pila de ejecución del programa*, la cual contiene el valor de la variable local `numero` (3 en este caso). Esta pila, que incluye el marco de pila para la llamada A al método, se ilustra en la parte (a) de la figura 18.8. [Nota: aquí utilizamos una pila simplificada. Una pila de ejecución del programa real y sus marcos de pila serían más complejos que en la figura 18.8, ya que contienen información como la ubicación a la que va a *regresar* la llamada al método cuando haya terminado de ejecutarse].

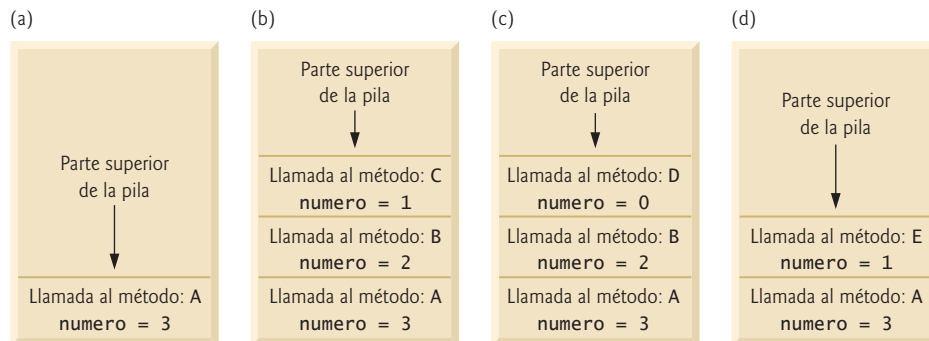


Fig. 18.8 | Llamadas al método en la pila de ejecución del programa.

Dentro de la llamada al método A se realizan las llamadas B y E. La llamada original al método no se ha completado, por lo que su marco de pila permanece en la pila. La primera llamada que se realiza desde el interior de A es la llamada B al método, por lo que se mete el marco de pila para la llamada B al método en la pila, encima del marco de pila para la llamada A al método. La llamada B al método debe ejecutarse y completarse antes de realizar la llamada E. Dentro de la llamada B al método se harán las llamadas C y D al método. La llamada C se realiza primero, y su marco de pila se mete en la pila [parte (b) de la figura 18.8]. La llamada B al método todavía no ha terminado, y su marco de pila sigue en la pila de llamadas a métodos. Cuando se ejecuta la llamada C, no realiza ninguna otra llamada al método, sino que simplemente devuelve el valor 1. Cuando este método regresa, su marco de pila se saca de la parte superior de la pila. La llamada al método en la parte superior de la pila es ahora B, que continúa ejecutándose y realiza la llamada D al método. El marco de pila para la llamada D se mete en la pila [parte (c) de la figura 18.8]. La llamada D al método se completa sin realizar ninguna otra llamada, y devuelve el valor 0. Después, se saca el marco de pila para esta llamada de la pila. Ahora, ambas llamadas al método que se realizaron desde el interior de la llamada B al método han regresado. La llamada B continúa ejecutándose, y devuelve el valor 1. La llamada B al método se completa y su marco de pila se saca de la pila. En este punto, el marco de pila para la llamada A al método se encuentra en la parte superior de la pila, y el método continúa su ejecución. Este método realiza la llamada E al método, cuyo marco de pila se mete ahora en la pila [parte (d) de la figura 18.8]. La llamada E al método se completa y devuelve el valor 1. El marco de pila para esta llamada al método se saca de la pila, y una vez más la llamada A al método continúa su ejecución. En este punto, la llamada A no realizará ninguna otra llamada al método y puede terminar su ejecución, para lo cual devuelve el valor 2 al método que llamó a A ($\text{fibonacci}(3) = 2$). El marco de pila de A se saca de la pila. El método en ejecución es siempre el que tiene su marco de pila en la parte superior de la pila, y el marco de pila para ese método contiene los valores de sus variables locales.

18.7 Comparación entre recursividad e iteración

En las secciones anteriores estudiamos los métodos `factorial` y `fibonacci`, que pueden implementarse fácilmente, ya sea en forma recursiva o iterativa. En esta sección compararemos los dos métodos, y veremos por qué le convendría elegir un método en vez del otro, en una situación específica.

Tanto la iteración como la recursividad *se basan en una instrucción de control*: la iteración utiliza una instrucción de repetición (`for`, `while` o `do...while`), mientras que la recursividad utiliza una instrucción de selección (`if`, `if...else` o `switch`). Tanto la iteración como la recursividad implican la *repetición*: la iteración utiliza de manera explícita una instrucción de repetición, mientras que la recursividad logra la repetición a través de llamadas reiteradas al método. La iteración y la recursividad implican una *prueba de terminación*: la iteración termina cuando falla la condición de continuación de ciclo, mientras que la recursividad termina cuando se llega a un caso base. La iteración con repetición controlada por contador y la recursividad *llegan en forma gradual a la terminación*: la iteración sigue modificando un contador hasta que éste asume un valor que hace que falle la condición de continuación de ciclo, mientras que la recursividad sigue produciendo versiones cada vez más pequeñas del problema original hasta que se llega a un caso base. Tanto la iteración como la recursividad *pueden ocurrir infinitamente*: un ciclo infinito ocurre con la iteración si la prueba de continuación de ciclo nunca se vuelve falsa, mientras que la recursividad infinita ocurre si el paso recursivo no reduce el problema cada vez de forma tal que llegue a converger en el caso base, o si el caso base no se evalúa.

Para ilustrar las diferencias entre la iteración y la recursividad, examinaremos una solución iterativa para el problema del factorial (figura 18.9). Se utiliza una instrucción de repetición (líneas 12 y 13) en vez de la instrucción de selección de la solución recursiva (líneas 9 a 12 de la figura 18.3). Ambas solu-

ciones usan una prueba de terminación. En la línea 9 de la solución recursiva (figura 18.3) se evalúa el *caso base*. En la línea 12 de la solución iterativa (figura 18.9) se evalúa la condición de continuación de ciclo; si la prueba falla, el ciclo termina. Por último, en vez de producir versiones cada vez más pequeñas del problema original, la solución iterativa utiliza un contador que se modifica hasta que la condición de continuación de ciclo se vuelve falsa.

```

1 // Fig. 18.9: CalculadoraFactorial.java
2 // Método factorial iterativo.
3
4 public class CalculadoraFactorial
5 {
6     // declaración recursiva del método factorial
7     public long factorial(long numero)
8     {
9         long resultado = 1;
10
11         // declaración iterativa del método factorial
12         for (long i = numero; i >= 1; i--)
13             resultado *= i;
14
15         return resultado;
16     }
17
18     // muestra los factoriales para los valores del 0 al 10
19     public static void main(String[] args)
20     {
21         // calcula los factoriales del 0 al 10
22         for (int contador = 0; contador <= 10; contador++)
23             System.out.printf("%d! = %d\n", contador, factorial(contador));
24     }
25 } // fin de la clase CalculadoraFactorial

```

```

0! = 1
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5040
8! = 40320
9! = 362880
10! = 3628800

```

Fig. 18.9 | Método factorial iterativo.

La recursividad tiene muchas *desventajas*. Invoca al mecanismo en forma repetida y en consecuencia se produce una *sobrecarga de las llamadas al método*. Esta repetición puede ser *perjudicial* en términos de tiempo del procesador y espacio de la memoria. Cada llamada recursiva crea otra *copia* del método (en realidad, sólo las variables del mismo que se almacenan en el marco de pila); este conjunto de copias *puede consumir una cantidad considerable de espacio en memoria*. Como la iteración ocurre dentro de un método, se evitan las llamadas repetidas al método y la asignación adicional de memoria.



Observación de ingeniería de software 18.1

Cualquier problema que se pueda resolver mediante la recursividad, se puede resolver también mediante la iteración. Por lo general se prefiere un método recursivo a uno iterativo cuando el primero refleja con más naturalidad el problema, y se produce un programa más fácil de entender y de depurar. A menudo puede implementarse un método recursivo con menos líneas de código. Otra razón por la que es preferible elegir un método recursivo es que uno iterativo podría no ser aparente.



Tip de rendimiento 18.2

Evite usar la recursividad en situaciones en las que se requiera un alto rendimiento. Las llamadas recursivas requieren tiempo y consumen memoria adicional.



Error común de programación 18.2

Hacer que un método no recursivo se llame a sí mismo por accidente, ya sea en forma directa o indirecta a través de otro método, puede provocar recursividad infinita.

18.8 Las torres de Hanoi

En las secciones anteriores de este capítulo, estudiamos métodos que pueden implementarse con facilidad, tanto en forma recursiva como iterativa. En esta sección presentamos un problema cuya solución recursiva demuestra la elegancia de la recursividad, y cuya solución iterativa tal vez no sea tan aparente.

Las **torres de Hanoi** es uno de los problemas clásicos con el que todo científico computacional en formación tiene que lidiar. Cuenta la leyenda que en un templo del Lejano Oriente los sacerdotes intentaban mover una pila de discos dorados de una aguja de diamante a otra (figura 18.10). La pila inicial tiene 64 discos insertados en una aguja y se ordenan de abajo hacia arriba, de mayor a menor tamaño. Los sacerdotes intentan mover la pila de una aguja a otra, con las restricciones de que sólo se puede mover un disco a la vez, y en ningún momento se puede colocar un disco más grande encima de uno más pequeño. Se cuenta con tres agujas, una de las cuales se utiliza para almacenar discos en forma temporal. Se supone que el mundo acabará cuando los sacerdotes completen su tarea, por lo que hay pocos incentivos para que nosotros podamos facilitar sus esfuerzos.

Supongamos que los sacerdotes intentan mover los discos de la aguja 1 a la aguja 3. Deseamos desarrollar un algoritmo que imprima la secuencia precisa de transferencias de los discos de una aguja a otra.

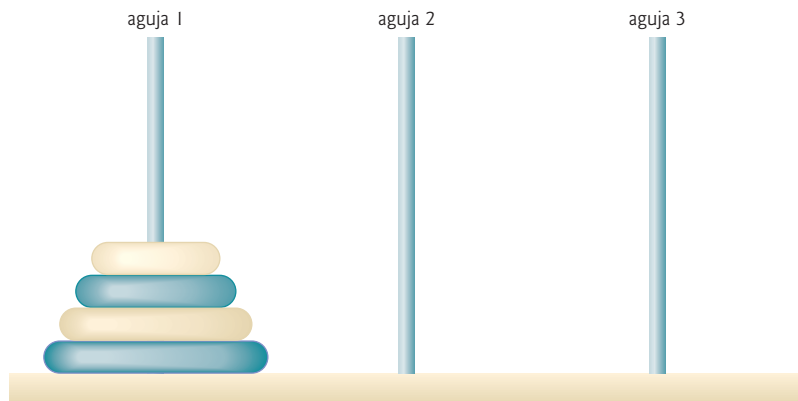


Fig. 18.10 | Las torres de Hanoi para el caso con cuatro discos.

Si tratamos de encontrar una solución iterativa, es probable que terminemos “atados” manejando los discos sin esperanza. En vez de ello, si atacamos este problema mediante la recursividad podemos producir rápidamente una solución. La acción de mover n discos puede verse en términos de mover sólo $n - 1$ discos (de ahí la recursividad) de la siguiente forma:

1. Mover $n - 1$ discos de la aguja 1 a la aguja 2, usando la aguja 3 como un área de almacenamiento temporal.
2. Mover el último disco (el más grande) de la aguja 1 a la aguja 3.
3. Mover $n - 1$ discos de la aguja 2 a la aguja 3, usando la aguja 1 como área de almacenamiento temporal.

El proceso termina cuando la última tarea implica mover $n = 1$ disco (es decir, el caso base). Esta tarea se logra con sólo mover el disco, sin necesidad de un área de almacenamiento temporal.

En la figura 18.11, el método `resolverTorres` (líneas 6 a 25) resuelve el acertijo de las Torres de Hanoi, dado el número total de discos (en este caso 3), la aguja inicial, la aguja final y la aguja de almacenamiento temporal como parámetros. El caso base (líneas 10 a 14) ocurre cuando sólo se necesita mover un disco de la aguja inicial a la aguja final. En el paso recursivo (líneas 18 a 24), la línea 18 mueve discos - 1 discos de la primera aguja (`agujaOrigen`) a la aguja de almacenamiento temporal (`agujaTemp`). Cuando se han movido todos los discos a la aguja temporal excepto uno, en la línea 21 se mueve el disco más grande de la aguja inicial a la aguja de destino. En la línea 24 se termina el resto de los movimientos, llamando al método `resolverTorres` para mover discos - 1 discos de manera recursiva, de la aguja temporal (`agujaTemp`) a la aguja de destino (`agujaDestino`), esta vez usando la primera aguja (`agujaOrigen`) como aguja temporal. La línea 35 en `main` llama al método recursivo `resolverTorres`, el cual imprime los pasos en el símbolo del sistema.

```

1  // Fig. 18.11: TorresDeHanoi.java
2  // Solución de las torres de Hanoi con un método recursivo.
3  public class TorresDeHanoi
4  {
5      // mueve discos de una torre a otra, de manera recursiva
6      public static void resolverTorres(int discos, int agujaOrigen,
7          int agujaDestino, int agujaTemp)
8      {
9          // caso base -- sólo hay que mover un disco
10         if (discos == 1)
11         {
12             System.out.printf("%n%d --> %d", agujaOrigen, agujaDestino);
13             return;
14         }
15
16         // paso recursivo -- mueve (disco - 1) discos de agujaOrigen
17         // a agujaTemp usando agujaDestino
18         resolverTorres(discos - 1, agujaOrigen, agujaTemp, agujaDestino);
19
20         // mueve el último disco de agujaOrigen a agujaDestino
21         System.out.printf("%n%d --> %d", agujaOrigen, agujaDestino);
22
23         // mueve (discos - 1) discos de agujaTemp a agujaDestino
24         resolverTorres(discos - 1, agujaTemp, agujaDestino, agujaOrigen);
25     }
26

```

Fig. 18.11 | Solución de las torres de Hanoi con un método recursivo (parte 1 de 2).

```

27     public static void main(String[] args)
28     {
29         int agujaInicial = 1; // se usa el valor 1 para indicar agujaInicial en la
                               // salida
30         int agujaFinal = 3; // se usa el valor 3 para indicar agujaFinal en la salida
31         int agujaTemp = 2; // se usa el valor 2 para indicar agujaTemp en la salida
32         int totalDiscos = 3; // número de discos
33
34         // llamada no recursiva inicial: mueve todos los discos.
35         resolverTorres(totalDiscos, agujaInicial, agujaFinal, agujaTemp);
36     }
37 } // fin de la clase TorresDeHanoi

```

```

1 --> 3
1 --> 2
3 --> 2
1 --> 3
2 --> 1
2 --> 3
1 --> 3

```

Fig. 18.11 | Solución de las torres de Hanoi con un método recursivo (parte 2 de 2).

18.9 Fractales

Un **fractal** es una figura geométrica que puede generarse a partir de un patrón que se repite en forma recursiva (figura 18.12). Para modificar la figura, se aplica en forma recursiva el patrón a cada segmento de la figura original. Aunque estas figuras se han estudiado desde antes del siglo 20, fue el matemático polaco Benoit Mandelbrot quien introdujo el término “fractal” en la década de 1970, junto con los detalles específicos acerca de cómo se crea un fractal, y las aplicaciones prácticas de los fractales. La geometría fractal de Mandelbrot proporciona modelos matemáticos para muchas formas complejas que se encuentran en la naturaleza, como las montañas, nubes y litorales. Los fractales tienen muchos usos en las matemáticas y la ciencia. Pueden utilizarse para comprender mejor los sistemas o patrones que aparecen en la naturaleza (por ejemplo, los ecosistemas), en el cuerpo humano (por ejemplo, en los pliegues del cerebro) o en el universo (por ejemplo, los grupos de galaxias). No todos los fractales se asemejan a los objetos en la naturaleza. El dibujo de fractales se ha convertido en una forma de arte popular. Los fractales tienen una **propiedad autosimilar**: cuando se subdividen en partes, cada una se asemeja a una copia del todo, en un tamaño reducido. Muchos fractales producen una copia exacta del original cuando se amplía una porción de la imagen original; se dice que dicho fractal es **estrictamente autosimilar**.

18.9.1 Fractal de la Curva de Koch

Como ejemplo, veamos el fractal estrictamente autosimilar, conocido como la **Curva de Koch** (figura 18.12). Para formar este fractal, se elimina la tercera parte media de cada línea en el dibujo, y se sustituye con dos líneas que forman un punto, de tal forma que si permaneciera la tercera parte media de la línea original, se formaría un triángulo equilátero. A menudo, las fórmulas para crear fractales implican eliminar toda o parte de la imagen del fractal anterior. Este patrón ya se ha determinado para este fractal; en esta sección nos enfocaremos en cómo utilizar esas fórmulas en una solución recursiva.

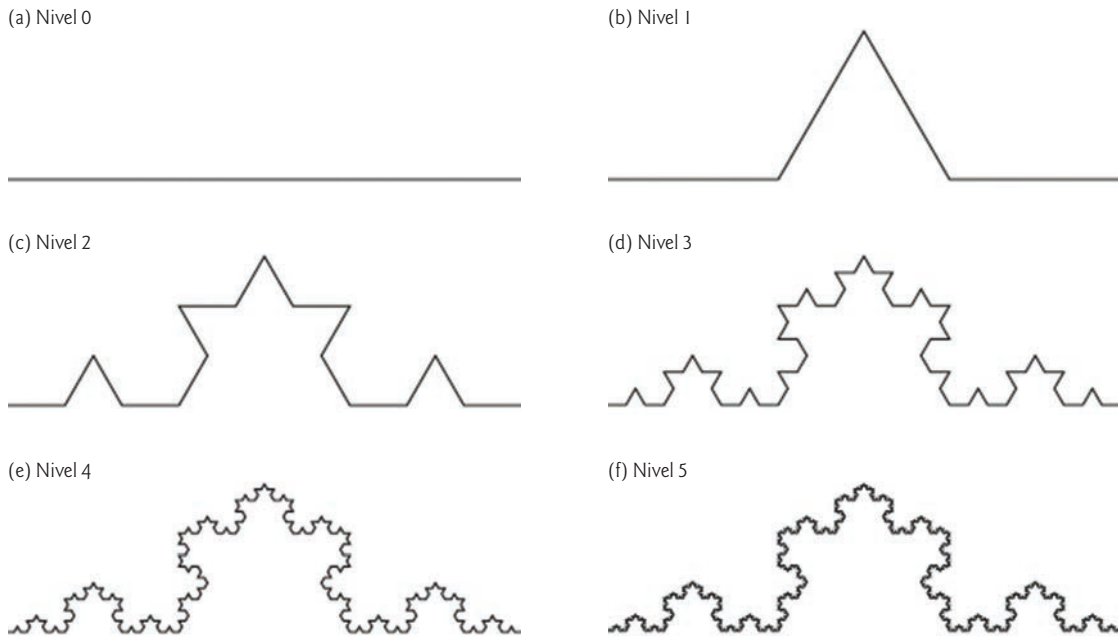


Fig. 18.12 | Fractal de la Curva de Koch.

Empezamos con una línea recta [figura 18.12(a)] y aplicamos el patrón creando un triángulo a partir de la tercera parte media [figura 18.12(b)]. Después aplicamos el patrón de nuevo a cada línea recta, lo cual produce la figura 18.12(c). Cada vez que se aplica el patrón, decimos que el fractal está en un nuevo **nivel**, o **profundidad** (algunas veces se utiliza también el término **orden**). Los fractales pueden mostrarse en muchos niveles; por ejemplo, a un fractal de nivel 3 se le han aplicado tres iteraciones del patrón [figura 18.12(d)]. Después de sólo unas cuantas iteraciones, este fractal empieza a verse como una porción de un copo de nieve [figura 18.12(e y f)]. Como éste es un fractal estrictamente autosimilar, cada porción del mismo contiene una copia exacta del fractal. Por ejemplo, en la figura 18.12(f), hemos resaltado una porción del fractal con un cuadro punteado. Si se aumentara el tamaño de la imagen en este cuadro, se vería exactamente igual que el fractal completo de la parte (f).

Hay un fractal similar, llamado **Copo de nieve de Koch**, que es similar a la Curva de Koch, pero empieza con un triángulo en vez de una línea. Se aplica el mismo patrón a cada lado del triángulo, lo cual produce una imagen que se asemeja a un copo de nieve encerrado. Hemos optado por enfocarnos en la Curva de Koch por cuestión de simpleza.

18.9.2 (Opcional) Ejemplo práctico: fractal Lo Feather

Ahora demostraremos el uso de la recursividad para dibujar fractales, escribiendo un programa para crear un fractal estrictamente autosimilar. A este fractal lo llamaremos fractal “Lo Feather”, en honor de Sin Han Lo, un colega de Deitel & Associates que lo creó. En un momento dado, el fractal se asemejará a la mitad de una pluma (vea los resultados en la figura 18.19). El caso base, o nivel 0 del fractal, empieza como una línea entre dos puntos, A y B (figura 18.13). Para crear el siguiente nivel superior, buscamos el punto medio (C) de la línea. Para calcular la ubicación del punto C, utilice la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} x_C &= (x_A + x_B) / 2; \\ y_C &= (y_A + y_B) / 2; \end{aligned}$$

[Nota: la x y la y a la izquierda de cada letra se refieren a las coordenadas x y y de ese punto, respectivamente. Por ejemplo, x_A se refiere a la coordenada x del punto A, mientras que y_C se refiere a la coordenada y del punto C. En nuestros diagramas denotamos el punto por su letra, seguida de dos números que representan las coordenadas x y y].

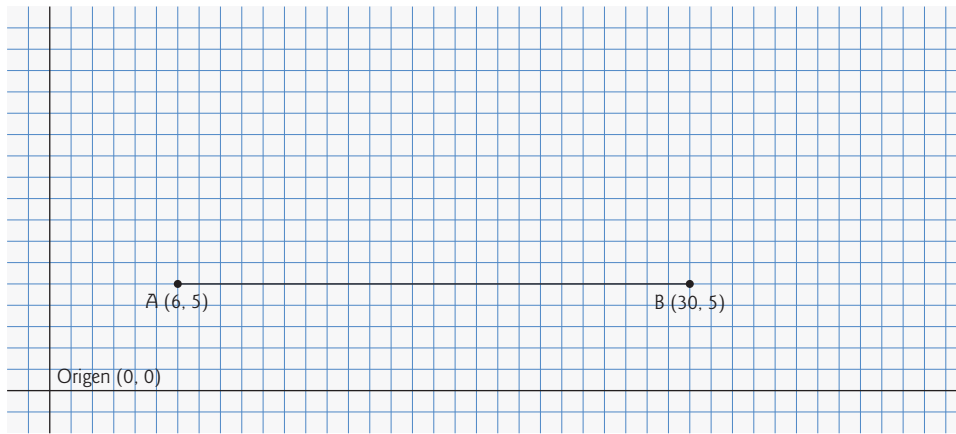


Fig. 18.13 | El fractal “Lo Feather” en el nivel 0.

Para crear este fractal, también debemos buscar un punto D que se encuentre a la izquierda del segmento AC y que crea un triángulo isósceles recto ADC. Para calcular la ubicación del punto D, utilice las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} x_D &= x_A + (x_C - x_A) / 2 - (y_C - y_A) / 2; \\ y_D &= y_A + (y_C - y_A) / 2 + (x_C - x_A) / 2; \end{aligned}$$

Ahora nos movemos del nivel 0 al nivel 1 de la siguiente manera: primero, se suman los puntos C y D (como en la figura 18.14). Después se elimina la línea original y se agregan los segmentos DA, DC y DB. El resto de las líneas se curvarán en un ángulo, haciendo que nuestro fractal se vea como una pluma. Para el siguiente nivel del fractal, este algoritmo se repite en cada una de las tres líneas en el nivel 1. Para cada línea se aplican las fórmulas anteriores en donde el punto anterior D se considera ahora como el punto A, mientras que el otro extremo de cada línea se considera como el punto B. La figura 18.15 contiene la línea del nivel 0 (ahora una línea punteada) y las tres líneas que se agregaron del nivel 1. Hemos cambiado el punto D para que sea el punto A, y los puntos originales A, C y B son B1, B2 y B3, respectivamente. Las fórmulas anteriores se utilizaron para buscar los nuevos puntos C y D en cada línea. Estos puntos también se enumeran del 1 al 3 para llevar la cuenta de cuál punto está asociado con cada línea. Por ejemplo, los puntos C1 y D1 representan a los puntos C y D asociados con la línea que se forma de los puntos A a B1. Para llegar al nivel 2, se eliminan las tres líneas de la figura 18.15 y se sustituyen con nuevas líneas de los puntos C y D que se acaban de agregar. La figura 18.16 muestra las nuevas líneas (las líneas del nivel 2 se muestran como líneas punteadas, para conveniencia del lector). La figura 18.17 muestra el nivel 2 sin las líneas punteadas del nivel 1. Una vez que se ha repetido este proceso varias veces, el fractal creado empezará a parecerse a la mitad de una pluma, como se muestra en los resultados de la figura 18.19. En breve presentaremos el código para esta aplicación.

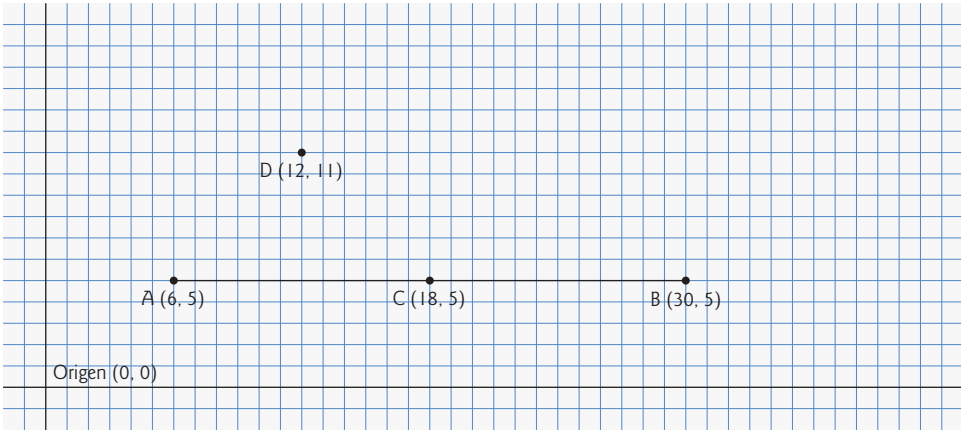


Fig. 18.14 | Determinación de los puntos C y D para el nivel I del fractal “Lo Feather”.

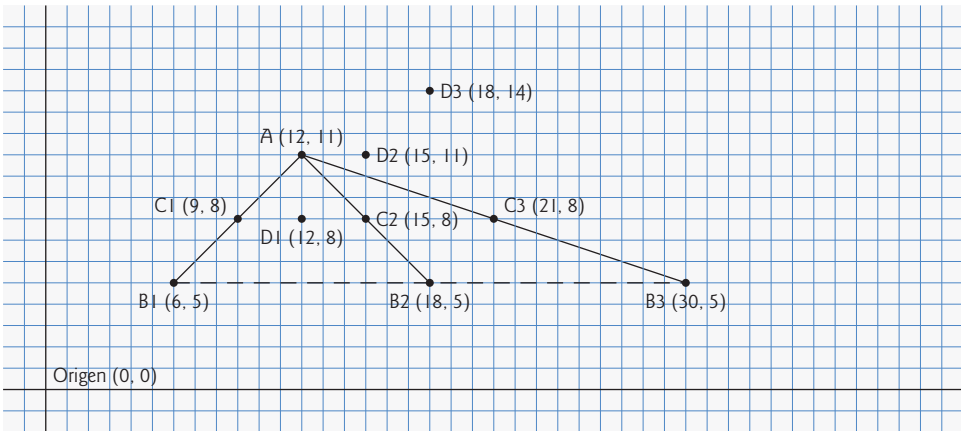


Fig. 18.15 | El fractal “Lo Feather” en el nivel I, y se determinan los puntos C y D para el nivel 2. [Nota: se incluye el fractal en el nivel 0 como una línea punteada, para recordar en dónde se encontraba la línea en relación con el fractal actual].

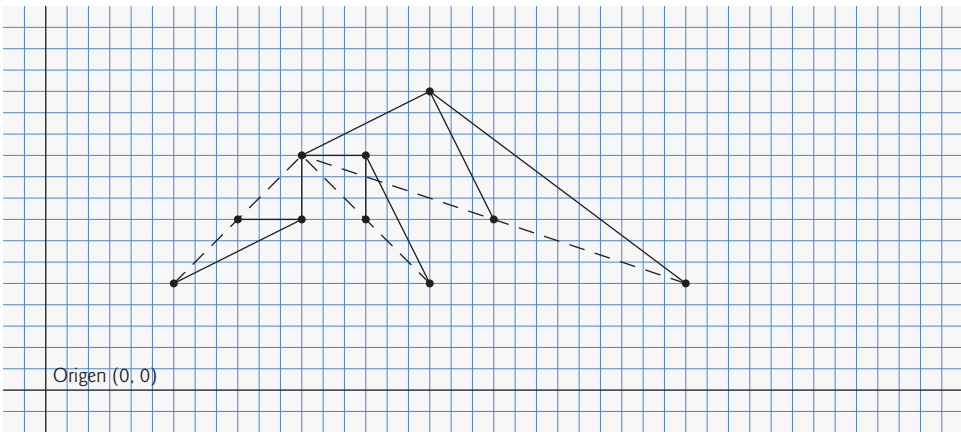


Fig. 18.16 | El fractal “Lo Feather” en el nivel 2, y se proporcionan las líneas punteadas del nivel 1.

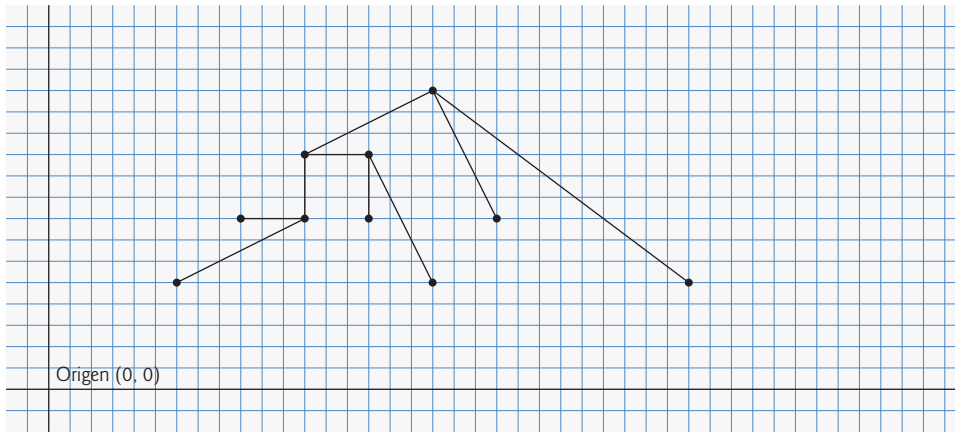


Fig. 18.17 | El fractal “Lo Feather” en el nivel 2.

La aplicación de la figura 18.18 define la interfaz de usuario para dibujar este fractal (que se muestra al final de la figura 18.19). La interfaz consiste de tres botones: uno para que el usuario modifique el color del fractal, otro para incrementar el nivel de recursividad y uno para reducir el nivel de recursividad. Un objeto `JLabel` lleva la cuenta del nivel actual de recursividad, que se modifica mediante una llamada al método `establecerNivel`, que veremos en breve. En las líneas 15 y 16 se especifican las constantes `ANCHURA` y `ALTURA` como 400 y 480 respectivamente, para indicar el tamaño del objeto `JFrame`. El usuario activa un evento `ActionEvent` haciendo clic en el botón **Color**. El manejador de eventos para este botón se registra en las líneas 37 a 53. El método `actionPerformed` muestra un cuadro de diálogo `JColorChooser`. Este cuadro de diálogo devuelve el objeto `Color` seleccionado, o azul (si el usuario oprime **Cancelar** o cierra el cuadro de diálogo sin oprimir **Aceptar**). En la línea 50 se hace una llamada al método `establecerColor` en la clase `FractalJPanel` para actualizar el color.

```

1 // Fig. 18.18: Fractal.java
2 // Interfaz de usuario para dibujar un fractal.
3 import java.awt.Color;
4 import java.awt.FlowLayout;
5 import java.awt.event.ActionEvent;
6 import java.awt.event.ActionListener;
7 import javax.swing.JFrame;
8 import javax.swing.JButton;
9 import javax.swing.JLabel;
10 import javax.swing.JPanel;
11 import javax.swing.JColorChooser;
12
13 public class Fractal extends JFrame
14 {
15     private static final int ANCHURA = 400; // define la anchura de la GUI
16     private static final int ALTURA = 480; // define la altura de la GUI
17     private static final int NIVEL_MIN = 0;
18     private static final int NIVEL_MAX = 15;
19
20     // establece la GUI
21     public Fractal()
22     {

```

Fig. 18.18 | Interfaz de usuario para dibujar un fractal (parte I de 3).

```

23     super("Fractal");
24
25     // establece nivelJLabel para agregar a controlJPanel
26     final JLabel nivelJLabel = new JLabel("Nivel: 0");
27
28     final FractalJPanel espacioDibujo = new FractalJPanel(0);
29
30     // establece el panel de control
31     final JPanel controlJPanel = new JPanel();
32     controlJPanel.setLayout(new FlowLayout());
33
34     // establece el botón de color y registra el componente de escucha
35     final JButton cambiarColorJButton = new JButton("Color");
36     controlJPanel.add(cambiarColorJButton);
37     cambiarColorJButton.addActionListener(
38         new ActionListener() // clase interna anónima
39         {
40             // procesa el evento de cambiarColorJButton
41             @Override
42             public void actionPerformed(ActionEvent evento)
43             {
44                 Color color = JColorChooser.showDialog(
45                     Fractal.this, "Elija un color", Color.BLUE);
46
47                 // establece el color predeterminado, si no se devuelve un color
48                 if (color == null)
49                     color = Color.BLUE;
50
51                 espacioDibujo.establecerColor(color);
52             }
53         } // fin de la clase interna anónima
54     ); // fin de addActionListener
55
56     // establece botón para reducir nivel, para agregarlo al panel de control y
57     // registra el componente de escucha
58     final JButton reducirNivelJButton = new JButton("Reducir nivel");
59     controlJPanel.add(reducirNivelJButton);
60     reducirNivelJButton.addActionListener(
61         new ActionListener() // clase interna anónima
62         {
63             // procesa el evento de reducirNivelJButton
64             @Override
65             public void actionPerformed(ActionEvent evento)
66             {
67                 int nivel = espacioDibujo.obtenerNivel();
68                 --nivel;
69
70                 // modifica el nivel si es posible
71                 if ((nivel >= NIVEL_MIN) &&
72                     (nivel <= NIVEL_MAX))
73                 {
74                     nivelJLabel.setText("Nivel: " + nivel);

```

Fig. 18.18 | Interfaz de usuario para dibujar un fractal (parte 2 de 3).

```

75         espacioDibujo.establecerNivel(nivel);
76         repaint();
77     }
78 }
79 } // fin de la clase interna anónima
80 ); // fin de addActionListener
81
82 // establece el botón para aumentar nivel, para agregarlo al panel de
83 // control y registra el componente de escucha
84 final JButton aumentarNivelJButton = new JButton("Aumentar nivel");
85 controlJPanel.add(aumentarNivelJButton);
86 aumentarNivelJButton.addActionListener(
87     new ActionListener() // clase interna anónima
88     {
89         // procesa el evento de aumentarNivelJButton
90         @Override
91         public void actionPerformed(ActionEvent evento)
92         {
93             int nivel = espacioDibujo.obtenerNivel();
94             ++nivel;
95
96             // modifica el nivel si es posible
97             if ((nivel >= NIVEL_MIN) &&
98                 (nivel <= NIVEL_MAX))
99             {
100                 nivelJLabel.setText("Nivel: " + nivel);
101                 espacioDibujo.establecerNivel(nivel);
102                 repaint();
103             }
104         }
105     } // fin de la clase interna anónima
106 ); // fin de addActionListener
107
108 controlJPanel.add(nivelJLabel);
109
110 // crea principalJPanel para que contenga a controlJPanel y espacioDibujo
111 final JPanel principalJPanel = new JPanel();
112 principalJPanel.add(controlJPanel);
113 principalJPanel.add(espacioDibujo);
114
115 add(principalJPanel); // agrega JPanel a JFrame
116
117 setSize(ANCHURA, ALTURA); // establece el tamaño de JFrame
118 setVisible(true); // muestra JFrame
119 } // fin del constructor de Fractal
120
121 public static void main(String[] args)
122 {
123     Fractal demo = new Fractal();
124     demo.setDefaultCloseOperation(JFrame.EXIT_ON_CLOSE);
125 }
126 } // fin de la clase Fractal

```

Fig. 18.18 | Interfaz de usuario para dibujar un fractal (parte 3 de 3).

El manejador de eventos para el botón **Reducir nivel** se registra en las líneas 60 a 80. El método `actionPerformed` obtiene el nivel actual de recursividad y lo reduce en 1 (líneas 67 y 68). En las líneas 71 y 72 se realiza una verificación para asegurar que el nivel sea mayor o igual que `NIVEL_MIN` y menor o igual que `NIVEL_MAX`, ya que el fractal no está definido para niveles de recursividad menores que `NIVEL_MIN`, y no es posible ver el detalle adicional por encima de `NIVEL_MAX`. El programa permite al usuario avanzar hacia cualquier nivel deseado, pero cerca del nivel 10 y de niveles superiores el despliegue del fractal se vuelve cada vez más *lento*, ya que hay muchos detalles que dibujar. En las líneas 74 a 76 se restablece la etiqueta del nivel para reflejar el cambio; se establece el nuevo nivel y se hace una llamada al método `repaint` para actualizar la imagen y mostrar el fractal correspondiente al nuevo nivel.

El objeto `JButton` **Aumentar nivel** funciona de la misma forma que el objeto `JButton` **Reducir nivel**, excepto que el nivel se incrementa en vez de reducirse para mostrar más detalles del fractal (líneas 93 y 94). Cuando se ejecuta la aplicación por primera vez, el nivel se establece en 0, en el que se muestra una línea azul entre dos puntos especificados en la clase `FractalJPanel`.

La clase `FractalJPanel` (figura 18.19) especifica las medidas del objeto `JPanel` del dibujo como 400 por 400 (líneas 13 y 14). El constructor de `FractalJPanel` (líneas 18 a 24) recibe el nivel actual como parámetro y lo asigna a su variable de instancia `nivel`. La variable de instancia `color` se establece en el color azul predeterminado. En las líneas 22 y 23 se cambia el color de fondo del objeto `JPanel` a blanco (para que el fractal se pueda ver con facilidad) y se establecen las medidas del objeto `FractalJPanel` de dibujo.

```

1  // Fig. 18.19: FractalJPanel.java
2  // Cómo dibujar el "fractal Lo Feather" mediante recursividad.
3  import java.awt.Graphics;
4  import java.awt.Color;
5  import java.awt.Dimension;
6  import javax.swing.JPanel;
7
8  public class FractalJPanel extends JPanel
9  {
10     private Color color; // almacena el color utilizado para dibujar el fractal
11     private int level;   // almacena el nivel actual del fractal
12
13     private static final int ANCHURA = 400; // define la anchura de JPanel
14     private static final int ALTURA = 400; // define la altura de JPanel
15
16     // establece el nivel inicial del fractal al valor especificado
17     // y establece las especificaciones del JPanel
18     public FractalJPanel(int nivelActual)
19     {
20         color = Color.BLUE; // inicializa el color de dibujo en azul
21         level = nivelActual; // establece el nivel inicial del fractal
22         setBackground(Color.WHITE);
23         setPreferredSize(new Dimension(ANCHURA, ALTURA));
24     }
25
26     // dibuja el fractal en forma recursiva
27     public void dibujaFractal(int nivel, int xA, int yA, int xB,
28                               int yB, Graphics g)
29     {

```

Fig. 18.19 | Cómo dibujar el "fractal Lo Feather" mediante recursividad (parte I de 4).

```

30     // caso base: dibuja una línea que conecta dos puntos dados
31     if (nivel == 0)
32         g.drawLine(xA, yA, xB, yB);
33     else // paso recursivo: determina los nuevos puntos, dibuja el siguiente nivel
34     {
35         // calcula punto medio entre (xA, yA) y (xB, yB)
36         int xC = (xA + xB) / 2;
37         int yC = (yA + yB) / 2;
38
39         // calcula el cuarto punto (xD, yD) que forma un
40         // triángulo recto isósceles entre (xA, yA) y (xC, yC)
41         // en donde el ángulo recto está en (xD, yD)
42         int xD = xA + (xC - xA) / 2 - (yC - yA) / 2;
43         int yD = yA + (yC - yA) / 2 + (xC - xA) / 2;
44
45         // dibuja el Fractal en forma recursiva
46         dibujarFractal(nivel - 1, xD, yD, xA, yA, g);
47         dibujarFractal(nivel - 1, xD, yD, xC, yC, g);
48         dibujarFractal(nivel - 1, xD, yD, xB, yB, g);
49     }
50 }
51
52 // inicia el dibujo del fractal
53 @Override
54 public void paintComponent(Graphics g)
55 {
56     super.paintComponent(g);
57
58     // dibuja el patrón del fractal
59     g.setColor(color);
60     dibujarFractal(nivel, 100, 90, 290, 200, g);
61 }
62
63 // establece el color de dibujo a c
64 public void establecerColor(Color c)
65 {
66     color = c;
67 }
68
69 // establece el nuevo nivel de recursividad
70 public void establecerNivel(int nivelActual)
71 {
72     level = nivelActual;
73 }
74
75 // devuelve el nivel de recursividad
76 public int obtenerNivel()
77 {
78     return nivel;
79 }
80 } // fin de la clase FractalJPanel

```

Fig. 18.19 | Cómo dibujar el “fractal Lo Feather” mediante recursividad (parte 2 de 4).

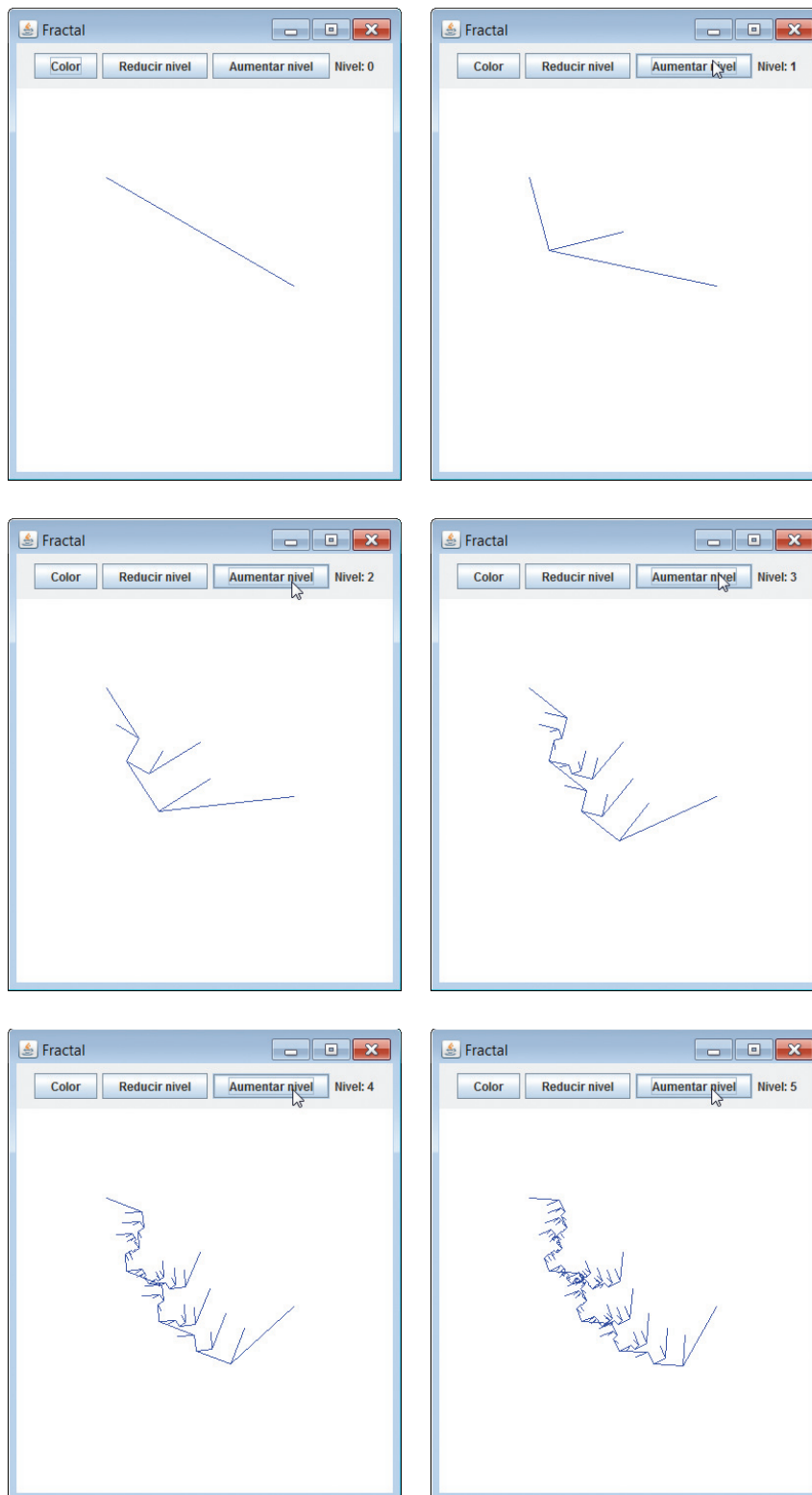


Fig. 18.19 | Cómo dibujar el “fractal Lo Feather” mediante recursividad (parte 3 de 4).

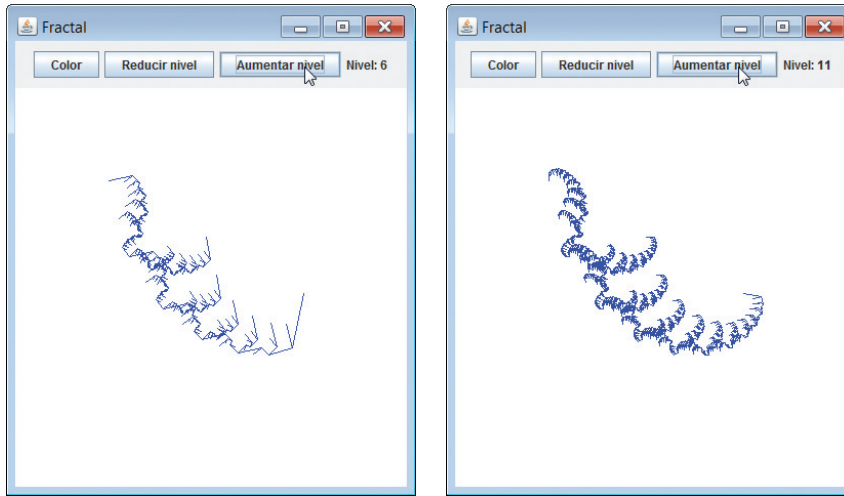


Fig. 18.19 | Cómo dibujar el “fractal Lo Feather” mediante recursividad (parte 4 de 4).

En las líneas 27 a 50 se define el método recursivo que crea el fractal. Este método recibe seis parámetros: el nivel, cuatro enteros que especifican las coordenadas x y y de dos puntos, y el objeto `g` de `Graphics`. El caso base para este método (línea 31) ocurre cuando `nivel` es igual a 0, en cuyo momento se dibujará una línea entre los dos puntos que se proporcionan como parámetros. En las líneas 36 a 43 se calcula (xC, yC) , el punto medio entre (xA, yA) y (xB, yB) , y (xD, yD) , el punto que crea un triángulo isósceles recto con (xA, yA) y (xC, yC) . En las líneas 46 a 48 se realizan tres llamadas recursivas en tres conjuntos distintos de puntos.

En el método `paintComponent`, en la línea 60 se realiza la primera llamada al método `dibujarFractal` para empezar el dibujo. Esta llamada al método no es recursiva, pero todas las llamadas subsiguientes a `dibujarFractal` que se realicen desde el cuerpo de `dibujarFractal` sí lo son. Como las líneas no se dibujarán sino hasta que se llegue al caso base, la distancia entre dos puntos se reduce en cada llamada recursiva. A medida que aumenta el nivel de recursividad, el fractal se vuelve más uniforme y detallado. La figura de este fractal se estabiliza a medida que el nivel se acerca a 11. Los fractales se estabilizarán en distintos niveles, con base en la figura y el tamaño del fractal.

La salida de la figura 18.19 muestra el desarrollo del fractal de los niveles 0 al 6. La última imagen muestra la figura que define el fractal en el nivel 11. Si nos enfocamos en uno de los brazos de este fractal, será idéntico a la imagen completa. Esta propiedad define al fractal como estrictamente autosimilar.

18.10 “Vuelta atrás” recursiva (*backtracking*)

Todos nuestros métodos recursivos tienen una arquitectura similar; si se llega al caso base, devuelven un resultado; si no, hacen una o más llamadas recursivas. En esta sección exploraremos una técnica recursiva más compleja, que busca una ruta a través de un laberinto, y devuelve verdadero si hay una posible solución al laberinto. La solución implica recorrer el laberinto un paso a la vez, en donde los movimientos pueden ser hacia abajo, a la derecha, hacia arriba o a la izquierda (no se permiten movimientos diagonales). De la posición actual en el laberinto (empezando con el punto de entrada), se realizan los siguientes pasos: para cada posible dirección, se realiza el movimiento en esa dirección y se hace una llamada recursiva para resolver el resto del laberinto desde la nueva ubicación. Cuando se llega a un punto sin salida (es decir, no

podemos avanzar más pasos sin pegar en la pared), retrocedemos a la ubicación anterior y tratamos de avanzar en otra dirección. Si no puede elegirse otra dirección, retrocedemos de nuevo. Este proceso continúa hasta que encontramos un punto en el laberinto en donde *puede* realizarse un movimiento en otra dirección. Una vez que se encuentra dicha ubicación, avanzamos en la nueva dirección y continuamos con otra llamada recursiva para resolver el resto del laberinto.

Para retroceder a la ubicación anterior en el laberinto, nuestro método recursivo simplemente devuelve falso, avanzando hacia arriba en la cadena de llamadas a métodos, hasta la llamada recursiva anterior (que hace referencia a la ubicación anterior en el laberinto). A este proceso de utilizar la recursividad para regresar a un punto de decisión anterior se le conoce como “**vuelta atrás**” **recursiva** o **backtracking**. Si un conjunto de llamadas recursivas no resulta en una solución para el problema, el programa *retrocede* hasta el punto de decisión anterior y toma una decisión distinta, lo que a menudo produce otro conjunto de llamadas recursivas. En este ejemplo, el punto de decisión anterior es la ubicación anterior en el laberinto, y la decisión a realizar es la dirección que debe tomar el siguiente movimiento. Una dirección ha conducido a un *punto sin salida*, por lo que la búsqueda continúa con una dirección *diferente*. La solución de “vuelta atrás” recursiva para el problema del laberinto utiliza la recursividad para regresar sólo *una parte* a través de la cadena de llamadas a métodos, y después probar una dirección diferente. Si la vuelta atrás llega a la ubicación de entrada del laberinto y se han recorrido todas las direcciones, entonces el laberinto no tiene solución.

En los ejercicios del capítulo le pediremos que implemente soluciones de “vueltas atrás” recursivas para el problema del laberinto (ejercicios 18.20 a 18.22) y para el problema de las Ocho Reinas (ejercicio 18.15), el cual trata de encontrar la manera de colocar ocho reinas en un tablero de ajedrez vacío, de forma que ninguna reina esté “atacando” a otra (es decir, que no haya dos reinas en la misma fila, en la misma columna o a lo largo de la misma diagonal).

18.11 Conclusión

En este capítulo aprendió a crear métodos recursivos; es decir, métodos que se llaman a sí mismos. Aprendió que los métodos recursivos por lo general dividen a un problema en dos piezas conceptuales: una pieza que el método sabe cómo resolver (el caso base) y una pieza que el método no sabe cómo resolver (el paso recursivo). El paso recursivo es una versión un poco más pequeña del problema original, y se lleva a cabo mediante una llamada a un método recursivo. Usted ya vio algunos ejemplos populares de recursividad, incluyendo el cálculo de factoriales y la producción de valores en la serie de Fibonacci. Después aprendió cómo funciona la recursividad “tras bambalinas”, incluyendo el orden en el que se meten o se sacan las llamadas a métodos recursivos de la pila de ejecución del programa. Después comparó los métodos recursivo e iterativo (no recursivo). Aprendió a resolver problemas más complejos mediante la recursividad: las torres de Hanoi y cómo desplegar fractales. El capítulo concluyó con una introducción a la “vuelta atrás” recursiva (o *backtracking*), una técnica para resolver problemas que implica retroceder a través de llamadas recursivas para probar distintas soluciones posibles. En el siguiente capítulo, aprenderá diversas técnicas para ordenar listas de datos y buscar un elemento en una lista de datos, y explorará las circunstancias bajo las que debe utilizarse cada técnica de búsqueda y ordenamiento.

Resumen

Sección 18.1 Introducción

- Un método recursivo (pág. 777) se llama a sí mismo en forma directa o indirecta a través de otro método.

Sección 18.2 Conceptos de recursividad

- Cuando se llama a un método recursivo (pág. 778) para resolver un problema, éste es capaz de resolver sólo los casos más simples, o casos base. Si se llama con un caso base (pág. 778), el método devuelve un resultado.
- Si se llama a un método recursivo con un problema más complejo que el caso base, por lo general éste divide el problema en dos piezas conceptuales: una pieza que el método sabe cómo resolver y otra pieza que no sabe cómo resolver.
- Para que la recursividad sea factible, la pieza que el método no sabe cómo resolver debe asemejarse al problema original, pero debe ser una versión ligeramente más simple o pequeña del mismo. Como este nuevo problema se parece al problema original, el método llama a una nueva copia de sí mismo para trabajar en el problema más pequeño; a esto se le conoce como paso recursivo (pág. 778).
- Para que la recursividad termine en un momento dado, cada vez que un método se llame a sí mismo con una versión más simple del problema original, la secuencia de problemas cada vez más pequeños debe converger en un caso base. Cuando el método reconoce el caso base, devuelve un resultado a la copia anterior del método.
- Una llamada recursiva puede ser una llamada a otro método, que a su vez realiza una llamada de vuelta al método original. Dicho proceso sigue provocando una llamada recursiva al método original. A esto se le conoce como llamada recursiva indirecta, o recursividad indirecta (pág. 778).

Sección 18.3 Ejemplo de uso de recursividad: factoriales

- La acción de omitir el caso base, o escribir el paso recursivo de manera incorrecta para que no converja en el caso base, puede ocasionar una recursividad infinita (pág. 781), con lo cual se agota la memoria en cierto punto. Este error es similar al problema de un ciclo infinito en una solución iterativa (no recursiva).

Sección 18.5 Ejemplo de uso de recursividad: serie de Fibonacci

- La serie de Fibonacci (pág. 783) empieza con 0 y 1, y tiene la propiedad de que cada número subsiguiente de Fibonacci es la suma de los dos anteriores.
- La proporción de números de Fibonacci sucesivos converge en un valor constante de 1.618..., un número al que se le denomina la proporción dorada, o media dorada (pág. 783).
- Algunas soluciones recursivas, como la de Fibonacci, producen una “explosión” de llamadas a métodos.

Sección 18.6 La recursividad y la pila de llamadas a métodos

- El método en ejecución es siempre el que tiene su marco de pila en la parte superior de la pila, y el registro de activación para ese método contiene los valores de sus variables locales.

Sección 18.7 Comparación entre recursividad e iteración

- Tanto la iteración como la recursividad se basan en una instrucción de control: la iteración utiliza una instrucción de repetición, la recursividad una instrucción de selección.
- Tanto la iteración como la recursividad implican la repetición: la iteración utiliza de manera explícita una instrucción de repetición, mientras que la recursividad logra la repetición a través de llamadas repetidas a un método.
- La iteración y la recursividad implican una prueba de terminación: la iteración termina cuando falla la condición de continuación de ciclo, la recursividad cuando se reconoce un caso base.
- La iteración con repetición controlada por contador y la recursividad se acercan en forma gradual a la terminación: la iteración sigue modificando un contador hasta que éste asume un valor que hace que falle la condición de continuación de ciclo, mientras que la recursividad sigue produciendo versiones cada vez más simples del problema original hasta llegar al caso base.
- Tanto la iteración como la recursividad pueden ocurrir en forma infinita. Un ciclo infinito ocurre con la iteración cuando la prueba de continuación de ciclo nunca se vuelve falsa, mientras que la recursividad infinita ocurre si el paso recursivo no reduce el problema cada vez más de una forma que converja en el caso base.

- La recursividad invoca el mecanismo en forma repetida, y en consecuencia a la sobrecarga producida por las llamadas al método.
- Cualquier problema que pueda resolverse en forma recursiva, se puede resolver también en forma iterativa.
- Por lo general se prefiere un método recursivo en vez de uno iterativo cuando el primero refleja el problema con más naturalidad y produce un programa más fácil de comprender y de depurar.
- A menudo se puede implementar un método recursivo con pocas líneas de código, pero el método iterativo correspondiente podría requerir una gran cantidad de código. Otra razón por la que es más conveniente elegir una solución recursiva es que una solución iterativa podría no ser aparente.

Sección 18.9 Fractales

- Un fractal (pág. 791) es una figura geométrica que se genera a partir de un patrón que se repite en forma recursiva, un número infinito de veces.
- Los fractales tienen una propiedad de autosimilitud (pág. 791): las subpartes son copias de tamaño reducido de toda la pieza.

Sección 18.10 “Vuelta atrás” recursiva (backtracking)

- En la “vuelta atrás” recursiva (pág. 802), si un conjunto de llamadas recursivas no produce como resultado una solución al problema, el programa retrocede hasta el punto de decisión anterior y toma una decisión distinta, lo cual a menudo produce otro conjunto de llamadas recursivas.

Ejercicios de autoevaluación

- 18.1** Conteste con *verdadero* o *falso* a cada una de las siguientes proposiciones; en caso de ser *falso*, explique por qué.
- Un método que se llama a sí mismo en forma indirecta no es un ejemplo de recursividad.
 - La recursividad puede ser eficiente en la computación, debido a la reducción en el uso del espacio en memoria.
 - Cuando se llama a un método recursivo para resolver un problema, en realidad es capaz de resolver sólo los casos más simples, o casos base.
 - Para que la recursividad sea factible, el paso recursivo en una solución recursiva debe asemejarse al problema original, pero debe ser una versión ligeramente más grande del mismo.
- 18.2** Para terminar la recursividad, se requiere un(a) _____.
- paso recursivo
 - instrucción `break`
 - tipo de valor de retorno `void`
 - caso base
- 18.3** La primera llamada para invocar a un método recursivo es _____.
- no recursiva
 - recursiva
 - el paso recursivo
 - ninguna de las anteriores
- 18.4** Cada vez que se aplica el patrón de un fractal, se dice que el fractal está en un(a) nuevo(a) _____.
- anchura
 - altura
 - nivel
 - volumen
- 18.5** La iteración y la recursividad implican una _____.
- instrucción de repetición
 - prueba de terminación
 - variable contador
 - ninguna de las anteriores

18.6 Complete los siguientes enunciados:

- La proporción de números de Fibonacci sucesivos converge en un valor constante de 1.618..., un número al que se le conoce como _____ o _____.
- Por lo general, la iteración utiliza una instrucción de repetición, mientras que la recursividad comúnmente utiliza una instrucción _____.
- Los fractales tienen una propiedad llamada _____; cuando se subdividen en partes, cada una de ellas es una copia de tamaño reducido de la pieza completa.

Respuestas a los ejercicios de autoevaluación

18.1 a) Falso. Un método que se llama a sí mismo de esta forma es un ejemplo de recursividad indirecta. b) Falso. La recursividad puede ser ineficiente en la computación debido a las múltiples llamadas a un método y el uso del espacio de memoria. c) Verdadero. d) Falso. Para que la recursividad sea factible, el paso recursivo en una solución recursiva debe asemejarse al problema original, pero debe ser una versión un poco *más pequeña* del mismo.

18.2 d

18.3 a

18.4 c

18.5 b

18.6 a) proporción dorada, media dorada. b) selección. c) autosimilitud.

Ejercicios

18.7 ¿Qué hace el siguiente código?

```
1 public int misterio(int a, int b)
2 {
3     if (b == 1)
4         return a;
5     else
6         return a + misterio(a, b - 1);
7 }
```

18.8 Busque los errores en el siguiente método recursivo, y explique cómo corregirlos. Este método debe encontrar la suma de los valores de 0 a n.

```
1 public int suma(int n)
2 {
3     if (n == 0)
4         return 0;
5     else
6         return n + suma(n);
7 }
```

18.9 (**Método potencia recursivo**) Escriba un método recursivo llamado potencia(base, exponente) que cuando sea llamado devuelva

$$base^{\text{exponente}}$$

Por ejemplo, potencia(3,4) = 3 * 3 * 3 * 3. Suponga que exponente es un entero mayor o igual que 1. *Sugerencia:* el paso recursivo debe utilizar la relación

$$base^{\text{exponente}} = base \times base^{\text{exponente} - 1}$$

y la condición de terminación ocurre cuando exponente es igual a 1, ya que

$$base^1 = base.$$

Incorpore este método en un programa que permita al usuario introducir la base y el exponente.

18.10 (Visualización de la recursividad) Es interesante observar la recursividad “en acción”. Modifique el método factorial de la figura 18.3 para imprimir su variable local y su parámetro de llamada recursiva. Para cada llamada recursiva, muestre los resultados en una línea independiente y agregue un nivel de sangría. Haga su máximo esfuerzo por hacer que los resultados sean claros, interesantes y significativos. Su meta aquí es diseñar e implementar un formato de salida que facilite la comprensión de la recursividad. Tal vez deba agregar ciertas capacidades de visualización a otros ejemplos y ejercicios recursivos a lo largo de este libro.

18.11 (Máximo común divisor) El máximo común divisor de los enteros x y y es el entero más grande que se puede dividir entre x y y de manera uniforme. Escriba un método recursivo llamado `mcd`, que devuelva el máximo común divisor de x y y . El `mcd` de x y y se define, mediante la recursividad, de la siguiente manera: si y es igual a 0, entonces `mcd(x, y)` es x ; en caso contrario, `mcd(x, y)` es `mcd(y, x % y)`, en donde `%` es el operador residuo. Use este método para sustituir el que escribió en la aplicación del ejercicio 6.27.

18.12 ¿Qué hace el siguiente programa?

```
1 // Ejercicio 18.12 Solución: ClaseMisteriosa.java
2 public class ClaseMisteriosa
3 {
4     public static int misterio(int[] arreglo2, int tamano)
5     {
6         if (tamano == 1)
7             return arreglo2[0];
8         else
9             return arreglo2[tamano - 1] + misterio(arreglo2, tamano - 1);
10    }
11
12    public static void main(String[] args)
13    {
14        int[] arreglo = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
15
16        int resultado = misterio(arreglo, arreglo.length);
17        System.out.printf("El resultado es: %d\n", resultado);
18    } // fin del método main
19 } // fin de la clase ClaseMisteriosa
```

18.13 ¿Qué hace el siguiente programa?

```
1 // Ejercicio 18.13 Solución: UnaClase.java
2 public class UnaClase
3 {
4     public static String unMetodo(int[] arreglo2, int x)
5     {
6         if (x < arreglo2.length)
7             return String.format(
8                 "%s%d ", unMetodo(arreglo2, x + 1), arreglo2[x]);
9         else
10            return "";
11    }
12 }
```



```

13 public static void main(String[] args)
14 {
15     int[] arreglo = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
16     String resultados = unMetodo(arreglo, 0);
17     System.out.println(resultados);
18 }
19 } // fin de la clase UnaClase

```

18.14 (Palíndromos) Un palíndromo es una cadena que se escribe de la misma forma tanto al derecho como al revés. Algunos ejemplos de palíndromos son “radar”, “reconocer” y (si se ignoran los espacios) “anita lava la tina”. Escriba un método recursivo llamado `probarPalindromo` que devuelva el valor `boolean true` si la cadena almacenada en el arreglo es un palíndromo, y `false` en caso contrario. El método debe ignorar espacios y puntuación en la cadena.

18.15 (Ocho reinas) Un buen acertijo para los fanáticos del ajedrez es el problema de las Ocho reinas, que se describe a continuación: ¿es posible colocar ocho reinas en un tablero de ajedrez vacío, de forma que ninguna reina “ataque” a otra (es decir, que no haya dos reinas en la misma fila, en la misma columna o a lo largo de la misma diagonal)? Por ejemplo, si se coloca una reina en la esquina superior izquierda del tablero, no pueden colocarse otras reinas en ninguna de las posiciones marcadas que se muestran en la figura 18.20. Resuelva el problema mediante el uso de recursividad. [Sugerencia: su solución debe empezar con la primera columna y buscar una ubicación en esa columna, en donde pueda colocarse una reina; al principio, coloque la reina en la primera fila. Después, la solución debe buscar en forma recursiva el resto de las columnas. En las primeras columnas, habrá varias ubicaciones en donde pueda colocarse una reina. Tome la primera posición disponible. Si se llega a una columna sin que haya una posible ubicación para una reina, el programa deberá regresar a la columna anterior y desplazar la reina que está en esa columna hacia una nueva fila. Este proceso continuo de retroceder y probar nuevas alternativas es un ejemplo de la “vuelta atrás” recursiva].

18.16 (Imprimir un arreglo) Escriba un método recursivo llamado `imprimirArreglo`, que muestre todos los elementos en un arreglo de enteros separados por espacios.

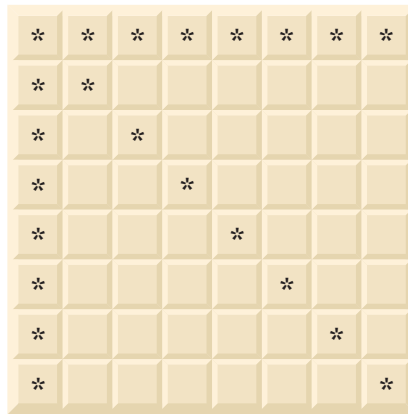


Fig. 18.20 | Eliminación de posiciones al colocar una reina en la esquina superior izquierda de un tablero de ajedrez.

18.17 (Imprimir un arreglo al revés) Escriba un método recursivo llamado `cadenaInversa`, que reciba un arreglo de caracteres que contenga una cadena como argumento y que la imprima al revés. [Sugerencia: use el método `String` llamado `toCharArray`, el cual no recibe argumentos, para obtener un arreglo `char` que contenga los caracteres en el objeto `String`].

18.18 (Buscar el valor mínimo en un arreglo) Escriba un método recursivo llamado `minimoRecursivo` que determine el elemento más pequeño en un arreglo de enteros. Este método deberá regresar cuando reciba un arreglo de un elemento.

18.19 (Fractales) Repita el patrón del fractal de la sección 18.9 para formar una estrella. Empiece con cinco líneas (figura 18.21) en vez de una, en donde cada línea es un pico distinto de la estrella. Aplique el patrón del fractal “Lo Feather” a cada pico de la estrella.

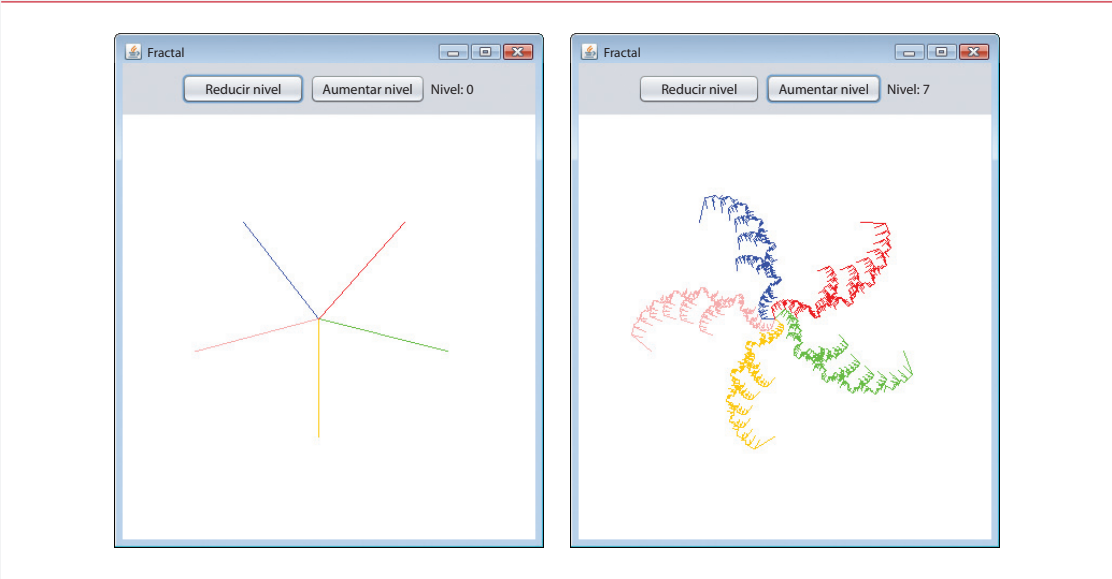


Fig. 18.21 | Resultados de ejemplo para el ejercicio 18.19.

18.20 (*Recorrido de un laberinto mediante el uso de la “vuelta atrás” recursiva*) La cuadrícula de caracteres # y puntos (.) en la figura 18.22 es una representación de un laberinto mediante un arreglo bidimensional. Los caracteres # representan las paredes del laberinto, y los puntos representan las ubicaciones en las posibles rutas a través del laberinto. Sólo pueden realizarse movimientos hacia una ubicación en el arreglo que contenga un punto.

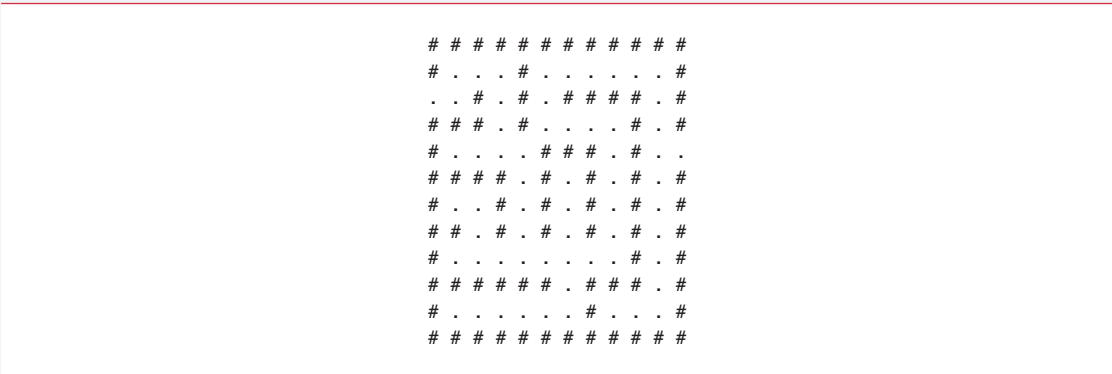


Fig. 18.22 | Representación de un laberinto mediante un arreglo bidimensional.

Escriba un método recursivo (`recorridoLaberinto`) para avanzar a través de laberintos como el de la figura 18.22. El método debe recibir como argumentos un arreglo de caracteres de 12 por 12 que representa el laberinto, y la posición actual en el laberinto (la primera vez que se llama a este método, la posición actual debe ser el punto de entrada del laberinto). A medida que `recorridoLaberinto` trate de localizar la salida, debe colocar el carácter `x` en cada posición en la ruta. Hay un algoritmo simple para avanzar a través de un laberinto, que garantiza encontrar la salida (suponiendo que haya una). Si no hay salida, llegaremos a la posición inicial de nuevo. El algoritmo es el siguiente: partiendo de la posición actual en el laberinto, trate de avanzar un espacio en cualquiera de las posibles direcciones (abajo, derecha, arriba o izquierda). Si es posible avanzar por lo menos en una dirección, llame a `recorridoLaberinto` en forma recursiva pasándole la nueva posición en el laberinto como la posición actual.

Si no es posible avanzar en ninguna dirección, “retroceda” a una posición anterior en el laberinto y pruebe una nueva dirección para esa posición (éste es un ejemplo de vuelta atrás recursiva). Programe el método para que muestre el laberinto después de cada movimiento, de manera que el usuario pueda observar a la hora de que se resuelva el laberinto. La salida final del laberinto deberá mostrar sólo la ruta necesaria para resolverlo; si al ir en una dirección específica se llega a un punto sin salida, no se deben mostrar las x que avancen en esa dirección. [Sugerencia: para mostrar sólo la ruta final, tal vez sea útil marcar las posiciones que resulten en un punto sin salida con otro carácter (como ‘0’)].

18.21 (*Generación de laberintos al azar*) Escriba un método llamado `generadorLaberintos` que reciba como argumento un arreglo bidimensional de 12 por 12 caracteres y que produzca un laberinto al azar. Este método también deberá proporcionar las posiciones inicial y final del laberinto. Pruebe su método `recorridoLaberinto` del ejercicio 18.20, usando varios laberintos generados al azar.

18.22 (*Laberintos de cualquier tamaño*) Generalice los métodos `recorridoLaberinto` y `generadorLaberintos` de los ejercicios 18.20 y 18.21 para procesar laberintos de cualquier anchura y altura.

18.23 (*Tiempo para calcular números de Fibonacci*) Mejore el programa de Fibonacci de la figura 18.5 de manera que calcule el tiempo aproximado requerido para realizar el cálculo y el número de llamadas realizadas al método recursivo. Para este fin, llame al método `static` de `System` llamado `currentTimeMillis`, el cual no recibe argumento y devuelve el tiempo actual de la computadora en milisegundos. Llame a este método dos veces: una antes y la otra después de la llamada a `fibonacci`. Guarde cada valor y calcule la diferencia en los tiempos, para determinar cuántos milisegundos se requirieron para realizar el cálculo. Después agregue una variable a la clase `CalculadoraFibonacci` y utilice esta variable para determinar el número de llamadas realizadas al método `fibonacci`. Muestre sus resultados.