1、计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

（2）$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 42 = -36$$

（3）$\begin{vmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & a \\ x-a & x+a & 2a \\ x-a & 0 & x+a \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & a \\ x-a & x+a & 2a \\ x-a & 0 & x+a \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} x-a & 2a \\ x-a & x+a \end{vmatrix} + (x+a)\begin{vmatrix} x & a \\ x-a & x+a \end{vmatrix}$$

$$= -a\left(x^2 - 2ax + a^2\right) + (x+a)\left(x^2 + a^2\right) = x^3 + 3a^2x$$

（4）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = -adf\begin{vmatrix} b & -c & -e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = -adf\begin{vmatrix} b & -c & -e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & 0 \end{vmatrix} = -adfb\begin{vmatrix} 0 & 2e \\ 2c & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef$$

（5）$\begin{vmatrix} 1+\cos\varphi & 1+\sin\varphi & 1 \\ 1-\sin\varphi & 1+\cos\varphi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1+\cos\varphi & 1+\sin\varphi & 1 \\ 1-\sin\varphi & 1+\cos\varphi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\cos\varphi & 1+\sin\varphi & 1 \\ -\sin\varphi-\cos\varphi & \cos\varphi-\sin\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi+\cos\varphi & \sin\varphi-\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= (\sin\varphi+\cos\varphi)\sin\varphi - (\sin\varphi-\cos\varphi)\cos\varphi = \sin^2\varphi+\cos^2\varphi = 1$$

（6）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1+x & 3 \\ 1 & 2 & 1+x \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1+x & 3 \\ 1 & 2 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)$$

（7）

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} + a_1\left[(1+a_2)(1+a_3)-1\right]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} + a_1(a_2a_3+a_2+a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} + a_2(1+a_3-1) + a_1(a_2a_3+a_2+a_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} + a_1a_2a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$$

（8）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

2、证明不等式

（1）$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

证明：

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ a & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ a & b & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & b-a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 0 & b-a & b-a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)^2 + a(b-a)^2 - (b-a)^2(b+a) = (b-a)^2(a+a-b-a) = (a-b)^3$$

（2）$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

3、试问a,b,c满足什么条件时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = a+b+c \\ ax_1+bx_2+cx_3 = a^2+b^2+c^2 \\ bcx_1+acx_2+abx_3 = 3abc \end{cases}$$

有唯一解，并求之

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&c(a-b)&b(a-c)\end{vmatrix}=(b-c)(b-a)(a-c)$$

当$D\neq 0$时，方程组有唯一解

即$D=(b-c)(b-a)(a-c)\neq 0\Rightarrow a,b,c$互不相等

$$D_1=\begin{vmatrix}a+b+c&1&1\\a^2+b^2+c^2&b&c\\3abc&ac&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+c&1&1\\a(a-c)+b(b-c)&b-c&0\\2abc-a^2b-ab^2&a(c-b)&0\end{vmatrix}=a(b-c)(b-a)(a-c)$$

同理

$D_2=b(b-c)(b-a)(a-c),D_3=c(b-c)(b-a)(a-c)$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{D_1}{D}=a,x_2=\dfrac{D_2}{D}=b,x_3=\dfrac{D_3}{D}=c$

4、解下列方程

（1）$\begin{vmatrix}a&a&x\\m&m&m\\b&x&b\end{vmatrix}=0(m\neq 0)$

$$\begin{vmatrix}a&a&x\\m&m&m\\b&x&b\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}a&a&x\\m&m&m\\b&x&b\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}a&a&x\\1&1&1\\b&x&b\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}0&0&x-a\\1&1&1\\0&x-b&0\end{vmatrix}$$

$=-m(x-a)(x-b)=0\Rightarrow x=a,x=b$

（2）$\begin{vmatrix}15-2x&11&10\\11-3x&17&16\\7-x&14&13\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}15-2x&11&10\\11-3x&17&16\\7-x&14&13\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}15-2x&11&10\\11-3x&17&16\\7-x&14&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15-2x&11&10\\-4-x&6&6\\-8+x&3&3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}15-2x&11&10\\12-3x&0&0\\-8+x&3&3\end{vmatrix}=(12-3x)\begin{vmatrix}11&10\\3&3\end{vmatrix}=12(4-x)=0\Rightarrow x=4$$

5、求二次多项式$P(x)$，使得$P(1)=-1,P(-1)=9,P(2)=-3$

$$P\left(x\right)=ax^2+bx+c\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=-1\\a-b+c=9\\4a+2b+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-5\\c=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow P\left(x\right)=x^2-5x+3$$