Solutions détaillées — Exercices sur les Torseurs (Niveau L2 Physique)

Exercice 1 — Torseur des vitesses d'un solide en rotation

Données : $\omega = 2$ rad/s · ■ ; OA = (0.3, 0.4, 0) m ; l'axe (Δ) passe par O.
1) Torseur cinématique en O :
Comme l'axe de rotation passe par O, la composante translationnelle (v_O) = 0.
$\{V_{S1/S0}\}_O = (\omega = (0,0,2)$ rad/s ; $V_O = (0,0,0)$ m/s).
2) Vitesse du point A :
$v_A = \omega \times OA = [-0.8, 0.6, 0.0]$ m/s (soit $v_A = (-0.800, 0.600, 0.000)$ m/s).
3) Torseur en A :
$\{V\}_{S1/S0}\_A = (\omega = (0,0,2)$; $V_A = (-0.8, 0.6, 0)$ m/s).
Vérification du changement de point : $V_A = V_O + \omega \times OA = 0 + \omega \times OA$, concorde avec le calcul précédent.
4) Pour un point B sur l'axe (Δ) (par ex. B ∈ (Δ)), on obtient $V_B = 0$ et le même ω :
$\{V\}_B = (\omega = (0,0,2)$; $V_B = (0,0,0)$).

Exercice 2 — Composition des torseurs de vitesse

Données : $\omega_{S1/S0} = 4$ ■ ; $\omega_{S2/S1} = 3\ x_1$ (axe porté par S1).
1) Torseur $\{V_{S2/S0}\}_O$:
Le torseur cinématique total (au point O, si les origines coïncident) possède pour composante angulaire la somme des vecteurs angulaires relatifs:
$\omega_{S2/S0} = \omega_{S1/S0} + \omega_{S2/S1} = 4$ ■ $+ 3\ x_1$.
Si x_1 est exprimé dans la base fixe, on peut écrire numériquement ω_{tot} ; sinon on laisse la forme vectorielle ci■dessus. La partie linéaire vaut 0 si O est un point fixe commun.
2) Donc $\omega_{S2/S0} = 4$ ■ $+ 3\ x_1$.
3) L'axe instantané de rotation est orienté selon la direction de ce vecteur résultant : il est inclinée entre l'axe z et l'axe x_1 ; au cours du mouvement (si x_1 tourne), la direction de ω évolue en conséquence.

Exercice 3 — Torseur des actions mécaniques

Données : F1 = (10,5,0) N appliquée en A(1,0,0) ; F2 = (-10,3,0) N en B(0,2,0).
1) Résultante R = F1 + F2 = [0.0, 8.0, 0.0] N = (0.0, 8.0, 0.0) N.
2) Moment résultant au point O : $M_O = rA \times F1 + rB \times F2 = [0.0, 0.0, 25.0]$ N·m = (0.0, 0.0, 25.0) N·m.
3) Centre de réduction (point r0 tel que $M_O = r0 \times R$ + (composante suivant R)) :
r0 (particulier) = $(R \times M_O) / |R|^2 = [3.125, 0.0, 0.0]$ m ≈ (3.125, 0.000, 0.000) m.
4) Condition pour être glisseur : il faut que $R \cdot M_O = 0$ (moment orthogonal à la résultante), ce qui permet d'annuler le moment en un point de la ligne d'action. Ici $R \cdot M_O = 0$ → le torseur est un glisseur.

Exercice 4 — Torseur dynamique d'un solide en translation et rotation

Données : m = 2 kg ; ω(t) = 5 t rad/s ; α = dω/dt = 5 rad/s² ; OG = (0.2,0,0) m ; I_G (axe z) = 0.05 kg·m².

Calcul de l'accélération de G (formule générale pour rotation autour de Oz) : $a\_G = \alpha \times OG + \omega \times (\omega \times OG)$.
Avec $\omega = (0,0,5t)$ et $\alpha = (0,0,5)$ et $r\_G = (0.2,0,0)$: $\alpha \times r\_G = (0,1.0,0)$ m/s² ; $\omega \times (\omega \times r\_G) = (-5 t^2,0,0)$ m/s².
Donc $a\_G = (-5 t^2, 1.0, 0)$ m/s².
Résultante dynamique (force inertielle) : $F\_dyn = m\, a\_G = (-10 t^2, 2.0, 0)$ N.
Moment dynamique en G : $d(I\_G\, \omega)/dt = (0,0,0.25)$ N·m ; terme $\omega \times (I\omega) = 0$ (même axe).
Torseur dynamique en G : résultante = $(-10 t^2, 2.0, 0)$ N ; moment = $(0,0,0.25)$ N·m.
En O : $M\_O = M\_G + OG \times R = (0.000, 0.000, 0.650)$ N·m.
Réaction au pivot O (équilibre dynamique) : la réaction R_O doit compenser le torseur dynamique : $R\_O = -F\_dyn = (10 t^2, -2.0, 0)$ N ; moment au pivot $M\_O\_reaction = -M\_O = (0,0,-0.65)$ N·m (valeur numérique ci■dessus pour le terme z).

Exercice 5 — Bielle■manivelle (cinématique)

Notation : A à l'origine, AB = a, BC = b, C sur l'axe Ox (coordonnée x_C). θ = angle de la manivelle par rapport à l'axe x.
Position de B : $B = (a \cos\theta, a \sin\theta)$. Fermeture géométrique BC de longueur b $\rightarrow (x\_C - a \cos\theta)^2 + (0 - a \sin\theta)^2 = b^2$.
Donc $x\_C = a \cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2\theta}$ (on choisit la racine positive si piston à droite).
Vitesse du piston : dérivons x_C : $v\_C = x\blacksquare\_C = -a \sin\theta \cdot \theta\blacksquare + (1 / (2 \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2\theta})) \cdot (-2 a^2 \sin\theta \cos\theta) \cdot \theta\blacksquare$
Soit en factorisant $\theta\blacksquare$: $v\_C = \theta\blacksquare \cdot [-a \sin\theta - (a^2 \sin\theta \cos\theta) / \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2\theta}]$.
Ceci donne la relation entre la vitesse angulaire de la manivelle et la vitesse du piston.
L'accélération s'obtient en dérivant encore (forme un peu longue mais directe).

Exercice 6 — Torseur d'inertie et changement de point

Données : $[I\_G] = \mathrm{diag}(0.2, 0.1, 0.15)$ kg·m² ; $OG = (0.3,0.2,0.1)$ m ; m = 4 kg.
Calcul via la relation de Steiner : $I\_O = I\_G + m(||d||^2 I - d\, d^T)$.
$||d||^2 = 0.140$ m².
Matrice d'inertie en O (en kg·m²) :
[[0.4000 -0.2400 -0.1200] [-0.2400 0.5000 -0.0800] [-0.1200 -0.0800 0.6700]]
Valeurs propres (moments principaux d'inertie) et axes propres (vecteurs propres normalisés) :
$\lambda\_1 = 0.1641$ kg·m² ; axe propre ≈ (0.7508, 0.6014, 0.2732).
$\lambda\_2 = 0.6877$ kg·m² ; axe propre ≈ (0.4388, -0.7632, 0.4743).
$\lambda\_3 = 0.7182$ kg·m² ; axe propre ≈ (0.4938, -0.2363, -0.8369).
On en déduit le torseur d'inertie {J_S}_O : masse m = 4 kg et matrice d'inertie I_O ci■dessus.

Fin des solutions. Si tu veux, je peux : - fournir des détails supplémentaires étape par étape sur un exercice précis, - produire une version plus pédagogique (avec figures), - ou adapter le niveau de détail.