Contents

Chapter Un

Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Contents

Objectifs

- Définition et propriétés élémentaires des formes bilinéaires symétriques
- Classification des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}$
- Décomposition de Gauss d'une forme quadratique et utilisation de cette décomposition

1.1 Généralités

1.1.1 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Définition 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle forme bilinéaire sur $E \times E$ toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *φ est linéaire par rapport à la première variable, c'est-à-dire:*

$$\varphi(\alpha x + x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \varphi(x', y), \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall(x, x', y) \in E^3; \tag{1.1}$$

2. *φ est linéaire par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire*

$$\varphi(x, \beta y + y') = \beta\varphi(x, y) + \varphi(x, y'), \quad \forall\beta \in \mathbb{R}, \forall(x, y, y') \in E^3. \tag{1.2}$$

On note $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$.

Exemple 1.1.1. *L'exemple fondamental de forme bilinéaire est le suivant: si $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ sont des formes linéaires, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) = f(x)g(y) \end{array}$$

est une forme bilinéaire.

Une somme et, plus précisement une combinaison linéaire de formes bilinéaires est encore une forme bilinéaire. Il est immédiat que $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1.1.2. *L'application $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_3 - 4x_3y_4 \quad \textit{avec} \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \textit{et} \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

est une forme bilinéaire.

Proposition 1.1.1. *Soient φ une forme bilinéaire sur $E \times E$ et $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p \in E$. Alors on a:*

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\Big) = \sum_{1 \le i \le n; 1 \le j \le p} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j).$$

Proof. On a par récurrence sur n:

$$\forall Y \in E, \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, Y\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i, Y),$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi\Big(x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{p} \beta_j \varphi(x_i, y_j)\Big) \\ &= \sum_{1 \le i \le n; 1 \le j \le p} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j). \end{aligned}$$

$\square$

Définition 1.1.2. *Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite symétrique si et seulement si:*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Nous noterons par $\mathcal{S}(E; \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $E \times E$. Il est immédiat que $\mathcal{S}(E; \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{R})$.

Proposition 1.1.2. *Pour qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ soit une forme bilinéaire symétrique, il faut et il suffit que l'on ait*

- *φ est symétrique;*
- *φ est linéaire par rapport à la deuxième variable.*

Remarque 1.1.1. *La symétrie et la linéarité par rapport à la deuxième variable entraînent la linéarité par rapport à la première variable.*

Définition 1.1.3. *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$. On appelle forme quadratique associée à φ l'application, souvent notée ϕ de E dans $\mathbb{R}$ définie par:*

$$\forall x \in E, \quad \phi(x) = \varphi(x, x).$$

Exemple 1.1.3. *Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, défini par*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \Big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\Big) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2. \end{array}$$

Exemple 1.1.4. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) & \mapsto & x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & 2x_1 x_2. \end{array}$$

Définition 1.1.4. *Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ une application. On dit que ϕ est une fome quadratique si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que ϕ soit la forme quadratique associée à φ.*

On notera $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des fq sur E.

Proposition 1.1.3. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, ϕ la forme quadratique associée à φ. On a:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \forall x_1, \dots, x_n \in E$,*

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \phi(x_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j).$$

2. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \forall(x,y)\in E^2,$

$$\phi(\alpha x+\beta y)=\alpha^2\phi(x)+2\alpha\beta\varphi(x,y)+\beta^2\phi(y).$$

3. $\forall(x,y)\in E^2, \varphi(x,y)=\frac{1}{2}[\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)].$

4. $\forall(x,y)\in E^2, \varphi(x,y)=\frac{1}{2}[\phi(x)+\phi(y)-\phi(x-y)].$

5. $\forall(x,y)\in E^2, \varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\phi(x+y)-\phi(x-y)].$

Proof. Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $E\times E$, ϕ la forme quadratique associée à φ. On a:

1. La première est une généralisation de la deuxième.

2. La définition de ϕ montre que:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha x+\beta y) &= \varphi(\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y)\\ &= \alpha^2\varphi(x,x)+2\alpha\beta\varphi(x,y)+\beta^2\varphi(y,y)\\ &= \alpha^2\phi(x)+2\alpha\beta\varphi(x,y)+\beta^2\phi(y).\end{aligned}$$

3. La bilinéarité de φ montre que:

$$\varphi(x+y,x+y)=\varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y),$$

soit

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\Big(\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)\Big).$$

On a la troisième identité.

4. En changeant y en $-y$, on obtient la quatrième identité.

5. La dernière identité s'obtient par la somme de la troisième et quatrième.

□

Remarque 1.1.2. *Les formules 3), 4) et 5) précédentes montrent que ϕ détermine entièrement φ; φ appelée forme polaire de ϕ. Les trois dernières formules sont appelées identités de polarisation.*

Remarque 1.1.3. *En pratique, pour montrer qu'une application $\phi: E\to\mathbb{R}$ est une forme quadratique,*

1. *on construit une forme bilinéaire symétrique $\varphi: E\times E\to\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x\in E,\quad \phi(x)=\varphi(x,x);$$

2. *ou bien, on vérifie les deux propriétés suivantes:*

- $\phi(0)=0$;
- $\phi(\lambda x)=\lambda^2\phi(x)$ *pour tout* $x\in E$ *et pour tout* $\lambda\in\mathbb{R}$.

1.1.2 Recherche de la forme bilinéaire associée

On peut à partir d'une forme quadratique ϕ, retrouver la forme bilinéaire symétrique φ par la règle dite du dédoublement. Soit

$$\phi(x) = \phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

En dédoublant:

$$\begin{cases} x_i^2 \quad \text{en} \quad x_i y_i \quad (1 \le i \le n) \\ 2x_i x_j \quad \text{en} \quad x_i y_j + x_j y_i \quad (1 \le i < j \le n) \end{cases}$$

on obtient la forme quadratique:

$$\varphi\Big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Exemple 1.1.5. *Soit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par:*

$$\phi(u) = \phi(x, y, z) = xy + xz + yz$$

avec $u = (x, y, z)$. Le dédoublement donne:

$$xy \to \frac{1}{2}(xy' + x'y), \quad xz \to \frac{1}{2}(xz' + x'z), \quad \text{et} \quad yz \to \frac{1}{2}(yz' + y'z).$$

Ainsi, la forme polaire associée à ϕ est:

$$\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = \frac{1}{2}(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z).$$

On dit qu'on a polarisée (dédoublée) la forme quadratique.

1.1.3 Formes positives et définies positives

Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et ϕ la forme quadratique associée.

Définition 1.1.5. *On dit que φ ou ϕ, est positive si elle vérifie:*

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) \ge 0.$$

On dit que φ ou ϕ, est définie positive si elle vérifie:

$$\forall x \in E - \{0\}, \varphi(x, x) > 0.$$

On note:

- $\mathcal{S}^+(E, \mathbb{K}), \mathcal{S}^{++}(E, \mathbb{K})$ les ensembles des formes bilinéaires symétriques respectivement positives et définies positives.

- $\mathcal{Q}^+(E,\mathbb{K}), \mathcal{Q}^{++}(E,\mathbb{K})$ les ensembles des formes quadratiques respectivement positives et définies positives.

Remarque 1.1.4. *Une forme bilinéaire symétrique positive φ est définie positive si et seulement si, elle vérifie de plus la propriétré dite de séparation:*

$$\forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Remarque 1.1.5. *Les ensembles $\mathcal{S}^+(E,\mathbb{K}), \mathcal{S}^{++}(E,\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(E,\mathbb{K})$. Ils sont évidemment stables par combinaison linéaire à coefficients positifs. On dit que ce sont des cônes convexes de $\mathcal{S}(E,\mathbb{K})$.*
On a bien sûr la même chose pour les ensembles $\mathcal{Q}^+(E,\mathbb{K}), \mathcal{Q}^{++}(E,\mathbb{K})$ dans $\mathcal{Q}(E)$.

Remarque 1.1.6. *On dit qu'une forme bilinéaire symétrique $\varphi \in \mathcal{S}(E,\mathbb{K})$ est négative (respectivement définie négative) si $-\varphi$ est positive (respectivement définie positive).*

Remarque 1.1.7. *L'étude d'un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, appelé produit scalaire, est l'objet de la théorie des espaces préhilbertiens réels et des espaces euclidiens.*

Exemple 1.1.6. *Le produit scalaire canonique:*

$$\big((x_i),(y_i)\big) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Par isomorphisme il existe des formes bilinéaires symétriques sur tout espace vectoriel réel de dimension finie

Proposition 1.1.4. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive. On a:*

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x,y)^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

Lorsque φ est définie positive, il y a égalité dans la relation de Cauchy-Schwarz si et seulement si x et y sont liés

Proof. Soit $(x,y) \in E^2$. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$P(t) = \varphi(tx - x, tx - y) = t^2\varphi(x,x) - 2t\varphi(x,y) + \varphi(y,y)$$

est une application polynômiale de degré inférieur ou égal à 2, dont les valeurs sont comme celles de $\varphi \circ \Delta$ positives. Distinguons deux cas.

1. Si $\varphi(x,x)$ est non nul, P est un trinôme du second degré à valeurs positives. Le scalaire

$$\varphi(x,x)P\Big(\frac{\varphi(x,y)}{\varphi(x,x)}\Big) = -\varphi(x,y)^2 + \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

   est donc positif ou nul.

2. Si $\varphi(x,x)$ est nul, P est une application affine à valeurs positives. L'étude de son comportement à l'infini montre que l'on a $\varphi(x,y)=0$ et, dans ce cas aussi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Supposons φ définie positive. Le cas $x=0$ étant évident, on supposera $x\neq 0$. Comme $\varphi(x,x)$ est non nul, on voit en reprenant la première partie du point précédent qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$P(\alpha)=\varphi(\alpha x-y,\alpha x-y)=0.$$

Ce qui est équivalent à $y=\alpha x$. $\square$

Remarque 1.1.8. *Si φ est une forme bilinéaire symétrique positive. On a pour tout $x\in E$*

$$\varphi(x,x)=0\Leftrightarrow \forall y\in E,\varphi(x,y)=0.$$

1.1.4 Interprétation matricielle

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini, $n=\dim(E)\geq 1$.

Définition 1.1.6. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $E\times E$ et $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ relativement à $\mathcal{B}$, et on note, $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice carrée d'ordre n, symétrique, définie par:*

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)=(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i<j\leq n}.$$

Plus précisement

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}\varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \cdots & \varphi(e_1,e_n)\\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \cdots & \varphi(e_2,e_n)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \varphi(e_n,e_1) & \varphi(e_n,e_2) & \cdots & \varphi(e_n,e_n)\end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.9. *La matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique car φ étant symétrique. On a pour tout $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$:*

$$\varphi(e_i,e_j)=\varphi(e_j,e_i).$$

Théorème 1.1.1. *Soient φ une forme bilinéaire et $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Pour que φ soit symétrique, il faut et il suffit que sa matrice par rapport à $\mathcal{B}$ soit symétrique.*

Exemple 1.1.7. *Considérons $E=\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$, $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ et*

$$\begin{array}{rcl}\varphi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ \Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) & \mapsto & \alpha x_1y_1+\beta(x_1y_2+x_2y_1)+\gamma x_2y_2.\end{array}$$

Il est clair que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, et on a:

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$$

Proposition 1.1.5. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soient $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $x, y \in E$. Si $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$, alors on a:*

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY.$$

Proof. Si $A = (\alpha_{ij})$ est la matrice de φ ainsi que $X = (x_i)$ et $Y = (y_j)$ les matrices colonnes de x et y dans $\mathcal{B}$. Le developpement de φ par bilinéarité montre que l'on a:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i y_j = {}^tXAY.$$

$\square$

Corollaire 1.1.1. *On a:*

$$\phi(x) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j = {}^tXAX.$$

On écrit en général $\phi(x)$ sous la forme

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

L'expression analytique de ϕ dans $\mathcal{B}$ est donc un polynôme homogène de degré 2 appelé polynône quadratique en les coordonnées (x_i) du vecteur x. On retrouve:

- *les termes diagonaux* α_{ii} de la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$ comme coefficients des termes x_i^2;
- *les termes rectangles* α_{ij} comme demi-coefficients des termes $x_i x_j$ avec $i < j$.

Avec les notations précédentes, ϕ est une fq sur $\mathbb{K}^n$ et la matrice de la forme polaire φ associée à ϕ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1.8. *La forme générale d'un polynôme quadratique à deux variables x_1, x_2 est:*

$$\phi(x_1, x_2) = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{22} x_2^2.$$

La matrice de la forme polaire associée à ϕ dans la base canonique $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1.9. *Soit les formes quadratiques suivantes:*

1. $\phi_1(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$,

2. $\phi_2(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

Les matrices des formes quadratiques dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.1.6. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application qui associe à toute forme bilinéaire symétrique (respectivement forme quadratique) sa matrice dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(E;\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{Q}(E)$) sur l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques.*

Remarque 1.1.10. $\dim(\mathcal{S}(E;\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 1.1.7. *(Formule de Changement de bases) Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Alors on a:*

$$A' = {}^tPAP$$

Proof. Soit $x, y \in E$. Notons $X = Mat_{\mathcal{B}}(x), Y = Mat_{\mathcal{B}}(y), X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x), Y' = Mat_{\mathcal{B}'}(y)$. On a: $X = PX'$ et $Y = PY'$. Donc il vient:

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y' = {}^tX'A'Y'.$$

□

Définition 1.1.7. *On dit que deux matrices symétriques A et B sont congruentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = {}^tPAP$.*

C'est une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{R})$. Il est clair que deux matrices congruentes sont équivalentes.

Définition 1.1.8. *Soient φ une forme bilinéaire ssymétrique sur $E \times E$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.*

- *On appelle discriminant de φ ou ϕ, dans $\mathcal{B}$, le déterminant de $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$.*
- *Le discriminant de φ ou ϕ, dans $\mathcal{B}'$ est égal à celui de φ ou ϕ, dans $\mathcal{B}$ multiplié par* $(\det P)^2$.

Exemple 1.1.10. *Soit $q(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^2$. Sa matrice et son discriminant dans la base canonique est*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad et \quad \alpha\gamma - \beta^2.$$

On retrouve le discriminant usuel d'un trinôme au signe près.

1.2 Orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique

Définition 1.2.1. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ et ϕ la forme quadratique associée à φ.*

1. *Soit $(x, y) \in E^2$; on dit que x est orthogonal à y pour φ si et seulement si:*
$$\varphi(x, y) = 0.$$
2. *Soient $x \in E, A \in \mathcal{P}(E)$; on dit que x est orthogonal à A pour φ si et seulement si:*
$$\forall a \in A, \varphi(x, a) = 0.$$
3. *Pour toute partie A de E, on définit l'orthogonal de A pour φ noté $A^{\perp}$ par:*
$$A^{\perp} = \{x \in E; \forall a \in A, \varphi(x, a) = 0\}.$$
4. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale pour φ si et seulement si:*
$$\forall (i, j) \in I^2,\ (i \neq j \Rightarrow \varphi(x_i, x_j) = 0).$$

Au lieu de "orthogonal pour φ", on dit aussi φ-orthogonal.

Proposition 1.2.1. *Soient $u_1 \dots, u_p$ des vecteurs de E et F le sous-espace vectoriel engendré par $u_1 \dots, u_p$. Pour qu'un vecteur $x \in E$ soit orthogonal à F il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à u_i pour tout i.*

Proof. Si x est orthogonal à F, il est en particulier orthogonal à chacun des u_i, puisque u_i appartient à F. Réciproquement, supposons $\varphi(x, u_i) = 0$ pour tout i. Soit $y \in F$. Le vecteur y est combinaison linéaire de $u_1 \dots, u_p$, donc il existe des scalaires réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $y = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$. Puisque φ est une forme bilinéaire on en déduit
$$\varphi(x, y) = \varphi(x, \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 \varphi(x, u_1) + \cdots + \lambda_p \varphi(x, u_p).$$
Le vecteur x est ainsi orthogonal à tout vecteur de F, donc est orthogonal à F. □

Proposition 1.2.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à F est un sous-espace vectoriel de E.*

Proof. Notons G l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à F.

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de F, donc en particulier à tout vecteur de F, par suite $0 \in G$.
- Soient $x_1, x_2 \in G$. Puisque φ est une forme bilinéaire on a:
$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = 0 \quad \text{por tout} \quad y \in F.$$
Donc le vecteur $x_1 + x_2$ est orthogonal à y. On en déduit que $x_1 + x_2 \in G$.

- De même, λx_1 appartient à G, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par suite G est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Définition 1.2.2. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs orthogonaux à F s'appelle l'orthogonal de F et se note $F^\perp$.*

Remarque 1.2.1. *Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ ne sont pas nécessairement supplémentaires: F et $F^\perp$ peuvent avoir un vecteur non nul en commun et il n'y a en général pas de relation très simple entre leur dimension.*

Proposition 1.2.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

1. *Pour toute partie A de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp)$.
3. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = (vect(A))^\perp$.
4. $\{0\}^\perp = E$.
5. *Pour toute sous-espace vectoriel F de E: $F \subset F^{\perp\perp}$.*

Définition 1.2.3. *On appelle noyau de φ, et on note $\ker(\varphi)$ le sous-espace vectoriel $E^\perp$ de E. Autrement dit: $\ker(\varphi) = E^\perp = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$.*

Remarque 1.2.2. *Un vecteur x est dans le noyau de φ s'il est orthogonal à n'importe quel vecteur de E; en particulier il suffit pour cela que x soit orthogonal à tous les vecteurs d'une base de E. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de φ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $x \in E$, notons X la matrice-colonne des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de x. Nous avons:*

$$x \in \ker\varphi \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \varphi(e_1,x) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \varphi(e_n,x) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = 0.$$

Si A est la matrice de φ dans une base, le noyau de φ est le sous-espace vectoriel des $x \in E$ tels que $AX = 0$, où X est la matrice-colonne des coordonnées de x.

Exemple 1.2.1. *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2$. Soit*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) & \mapsto & x_1 y_1 \end{array}$$

une forme biliéaire symétrique. Son noyau est

$$\ker(\varphi) = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\} = \mathbb{R}(0,1).$$

Définition 1.2.4. *Une forme bilinéaire symétrique φ sur $E \times E$ est dite dégénérée (respectivement non dégénérée) si et seulement si $\ker(\varphi) \neq \{0\}$ (respectivement $\ker(\varphi) = \{0\}$). Autrement dit: φ est dégénérée si et seulement si $\forall x \in E, \Big((\forall y \in E, \varphi(x,y) = 0) \Rightarrow x = 0\Big)$.*

Définition 1.2.5. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle rang de φ ou ϕ, l'entier noté $rg(\varphi)$, défini par:*

$$rg(\varphi) = \dim(E) - \dim(\ker(\varphi)).$$

On dit φ ou ϕ est non dégénérée si son rang vaut n.

Proposition 1.2.4. *Pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur $E \times E$ et toute base $\mathcal{B}$ de E, on a:*

$$rg(\varphi) = rg(Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

Proposition 1.2.5. *Soit $\varphi(x, y) = {}^tXAY$. La forme bilinéaire symétrique φ est non dégénérée si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Exemple 1.2.2. *Soit la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ définie par:*

$$\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = \frac{1}{2}(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z).$$

La matrice de φ est: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, *car*

$$\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

On a: $\det A = \frac{1}{4} \neq 0$, *donc la forme bilinéaire est non dégérée.*

Théorème 1.2.1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si la forme quadratique ϕ est non dégénérée, alors on a:* $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$

Définition 1.2.6. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

1. *Un vecteur x de E est dit isotrope (pour ϕ) si et seulement si $\phi(x) = 0$.*
2. *On appelle cône isotrope de ϕ l'ensemble des vecteurs isotropes pour ϕ.*
3. *Un sev F de E est dit totalement isotrope si et seulement si: $F \subset F^{\perp}$.*

Exemple 1.2.3. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) & \mapsto & x_1y_1 - x_2y_2 \end{array}$$

une fbs. Le vecteur $(1, 1)$ est isotrope pour φ.

1.3 Décomposition de Gauss d'une forme quadratique

Soient $l_1, \cdots, l_r \in E^*$ sont des formes linéaires, et $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ des scalaires. La somme de carrées

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i(l_i(x))^2, \quad x \in E$$

est une forme quadratique, de fbs associée

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i(x) l_i(y), \quad x, y \in E.$$

Inversement, on va démontrer que toute forme quadratique peut être mise sous cette forme, grêce a une méthode due à Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, l'un des très grands mathématiciens, auteur de nombreux travaux d'arithmétique, de géométrie et d'astronomie...)

Théorème 1.3.1. *(Décomposition en carrés de formes linéaires indépendantes) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et ϕ une forme quadratique sur E. Alors il existe une famille de formes linéaires indépendantes $l_1, \cdots, l_r \in E^*$ et des scalaires $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{K}, a_i \neq 0$ tels que*

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i(x)^2, \quad \forall x \in E.$$

Proof. Montrons par récurrence sur n que toute quadratique:

$$\phi(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_2^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

ne dependant que de $x_1, \cdots, x_n$ peut s'écrire sous la forme

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i^2(x_1, \cdots, x_n),$$

où les $(l_i)_{(i \in [1,n])}$ est une famille libre de n formes linéaires ne dependant que de $x_1, \cdots, x_n$.

- si $n = 1, \phi(x) = \alpha_{11} x^2$ est déjà un carré et il n'y a rien à faire.
- Si la somme contient un terme carré non nul, disons $\alpha_{11} x_1^2, \alpha_{11} \neq 0$, on regroupe tous les termes contenant x_1, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + 2\alpha_{1n} x_1 x_n &= \alpha_{11}\Big(x_1^2 + 2\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_1 x_2 + \cdots + 2\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_1 x_n\Big) \\
&= \alpha_{11}\Big(x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} x_n\Big)^2 \\
&\quad -\phi'(x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

où ϕ' ne contient plus de x_1. On en déduit

$$\phi(x) = \alpha_{11}\Big(x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}x_n\Big)^2 + \tilde{\phi}(x_2, \cdots, x_n).$$

Par hypothèse de récurrence pour la dimension $n-1$, on obtient que $\tilde{\phi}(x_2, \cdots, x_n)$ s'exprime comme une somme de carrés de formes linéaires indépendantes dans les variables $x_2, \cdots, x_n)$:

$$\tilde{\phi}(x') = a_2 l_2(x')^2 + \cdots + a_n l_n(x')^2, \quad x' = (x_2, \cdots, x_n).$$

À cette somme, il faut encore ajouter le carré initialement trouvé

$$a_1 l_1(x)^2,\ a_1 = \alpha_{11},\ l_1(x) = x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}x_n$$

On voit que les formes linéaires $x \to l_1(x), l_2(x'), \cdots, l_n(x')$ sont encore indépendantes dans $(\mathbb{K}^n)^*$ car $l_1(x)$ est la seule forme qui fasse intervenir x_1, donc $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_r l_r = 0$ implique $\lambda_1 = 0$ et par suite $\lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_r l_r = 0$, d'où aussi $\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

- Si $\phi(x)$ ne contient aucun terme carré mais contient un terme rectangle non nul, par exemple $2\alpha_{12}x_1x_2, \alpha_{12} \neq 0$, on regroupe tous les termes contenant x_1 ou x_2 , c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
F &= 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + \cdots + 2\alpha_{1n}x_1x_n + 2\alpha_{23}x_2x_3 + \cdots + 2\alpha_{2n}x_2x_n \\
&= 2\alpha_{12}\Big(x_1x_2 + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_1x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}x_1x_n + \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{12}}x_2x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{12}}x_2x_n\Big) \\
&= 2\alpha_{12}\Big(x_1 + \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{12}}x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{12}}x_n\Big)\Big(x_2 + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}x_n\Big) \\
&\quad -\phi'(x_3, \cdots, x_n).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\phi(x) = 2\alpha_{12}\Big(x_1 + \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{12}}x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{12}}x_n\Big)\Big(x_2 + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}x_n\Big) + \tilde{\phi}(x'')$$

Le produit $2\alpha_{12}AB$ s'écrit comme $\frac{1}{2}\alpha_{12}(A+B)^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}(A-B)^2 = a_1 l_1(x)^2 + a_2 l_2(x)^2$ avec $a_1 = \frac{1}{2}\alpha_{12}, a_2 = -\frac{1}{2}\alpha_{12}, l_1(x) = x_1 + x_2 + (\cdots), l_2 = x_1 - x_2 + (\cdots)$, tandis qu'on a par hypothèse de récurrence pour la dimension $n-2$ une décomposition en carrés de formes linéaires indépendantes

$$\tilde{\phi}(x'') = a_3 l_3(x'')^2 + \cdots + a_n l_r(x'')^2, \quad x'' = (x_3, \cdots, x_n).$$

Si $\lambda_1 l_1 + \cdots + \lambda_n l_r = 0$, alors en regardant les termes qui contiennent x_1 et x_2, présents dans les seules formes l_1 et l_2, on voit que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, puis $\lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ par hypothèse de récurrence. Le théorème est démontré.

$\square$

Cas de la dimension 2. Supposons $n = 2$, donc $\phi(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

- Si $a_{11} \neq 0$, on peut écrire:

$$\phi(x) = a_{11}\Big(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\Big)^2 + \Big(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\Big)x_2^2,$$

ce qui donne une décomposition de ϕ en combinaison linéaire de carrés de deux formes linéaires sur E:

$$l_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2, \quad l_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2;$$

de plus (l_1, l_2) est libre.

- Si $a_{11} = 0$ et $a_{22} \neq 0$, on échange les rôles de x_1, x_2 et on procède comme en haut.

- Si $a_{11} = a_{22} = 0$, on peut écrire:

$$\phi(x) = 2a_{12}x_1x_2 = \frac{a_{12}}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{a_{12}}{2}(x_1 - x_2)^2,$$

ce qui donne une décomposition de ϕ en combinaison linéaire de carrés de deux formes linéaires sur E:

$$l_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2, \quad l_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2;$$

de plus (l_1, l_2) est libre.

Exemple 1.3.1. *Considérons la forme quadratique $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\phi(x, y) = x^2 - 6xy + 5y^2, \quad \textit{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

L'expression $x^2 - 6xy$ est le debut du carré $x - 3y$. En effet,

$$(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2 \Rightarrow x^2 - 6xy = (x - 3y)^2 - 9y^2.$$

On en déduit que

$$\phi(x, y) = (x - 3y)^2 - 9y^2 + 5y^2 = (x - 3y)^2 - 4y^2.$$

Soient les formes linéaires $l_1 : (x, y) \mapsto x - 3y$ et $l_2 : (x, y) \mapsto y$ définies sur $\mathbb{R}^2$. Elles ne sont pas proportionnelles, donc elles sont linéairement indépendantes.
En priviligiant la coordonnée y, il vient que:

$$5y^2 - 6xy = 5\Big(y^2 - 6/5xy\Big) = 5\Big[\Big(y - \frac{3}{5}x\Big)^2 - \frac{9}{25}x^2\Big].$$

on déduit que:

$$\phi(x, y) = x^2 + 5\Big[\Big(y - \frac{3}{5}x\Big)^2 - \frac{9}{25}x^2\Big] = 5\Big(y - \frac{3}{5}x)^2 - \frac{4}{5}x^2.$$

Les formes linéaires $l_1' : (x, y) \mapsto y - \frac{3}{5}x$ et $l_2' : (x, y) \mapsto x$ sont linéairement indépendantes.

Exemple 1.3.2. *Considérons la forme quadratique* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\phi(x,y) = xy, \quad \textit{pour tout} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Grâce aux identités remarquables $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ *et* $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$*, on obtient* $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$*, on déduit*

$$xy = \frac{1}{4}\Big[(x+y)^2 - (x-y)^2\Big].$$

Les formes linéaires $l_1 : (x,y) \mapsto x+y$ *et* $l_2 : (x,y) \mapsto x-y$ *sont linéairement indépendantes.*

Cas de la dimension 3**.** Supposons $n = 3$, donc $\phi(u) = ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$ avec $u = (x,y,y)$.

- Il y a un terme carré, c'est-à-dire l'un au moins des coefficients a, b, c n'est pas nul.

  Exemple 1.3.3. *Considérons sur* $E = \mathbb{R}^3$ *la forme quadratique*

  $$\phi(x,y,z) = -x^2 + 3xy + 2y^2 - 5xz + 3z^2 + 8yz, \quad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

  On commence par regrouper tous les termes contenant l'une des variables, par exemple x*:*

  $$-x^2 + 3xy - 5xz.$$

  L'idée est d'écrire ceux-ci comme le début d'un carré, auquel on va retrancher les termes qui ne contient pas x*:*

  $$-x^2 + 3xy - 5xz = -\Big(x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z\Big)^2 + \frac{9}{4}y^2 + \frac{25}{4}z^2 - \frac{15}{2}yz.$$

  En incorporant ceux-ci dans $\phi(x,y,z)$*, on obtient le carré déjà trouvé et des termes qui ne contiennent plus la variable* x*:*

  $$\phi(x,y,z) = -\Big(x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z\Big)^2 + \frac{17}{4}y^2 + \frac{37}{4}z^2 + \frac{1}{2}yz.$$

  On procède maintenant de même avec les termes restants qui contiennent l'une des autres variables, par exemple y*:*

  $$\frac{17}{4}y^2 + \frac{1}{2}yz = \frac{17}{4}\Big(y^2 + \frac{2}{17}yz\Big) = \frac{17}{4}\Big(y + \frac{1}{17}z\Big) - \frac{1}{68}z^2.$$

  En définitive, si $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}$*, on obtient:*

  $$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= -\Big(x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z\Big)^2 + \frac{17}{4}\Big(y + \frac{1}{17}z\Big) + \frac{157}{17}z^2 \\ &= a_1 l_1(x,y,z)^2 + a_2 l_2(x,y,z)^2 + a_3 l_3(x,y,z)^2\end{aligned}$$

  avec

  $$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{17}{4}, \quad a_3 = \frac{157}{17}$$

  et

  $$l_1(x,y,z) = x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z, \quad l_2(x,y,z) = y + \frac{1}{17}z, \quad l_3(x,y,z) = z.$$

  On observera que les formes linéaires l_1, l_2, l_3 *sont forcément indépendantes car si on a* $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0$*, on trouve successivement* $\lambda_1 = 0$ *du fait que* l_1 *est la seule des trois formes à contenir* x*, puis* $\lambda_2 = 0$ *car* l_2 *contient* y *mais pas* l_3*, et enfin* $\lambda_3 = 0$*.*

- Il n'y a pas de terme carré.

  Exemple 1.3.4. *Considérons la forme quadratique* $\phi(x,y,z) = xy + 2xz - 3yz$. *Écrivons* $xy + 2xz - 3yz$ *comme le debut du produit* $(x-3z)(y+2z)$. *On a:*

  $$(x-3z)(y+2z) = xy + 2xz - 3yz - 6z^2 \Rightarrow xy + 2xz - 3yz = (x-3z)(y+2z) + 6z^2$$

  En utilisant l'identité

  $$ab = \frac{1}{4}\Big[(a+b)^2 - (a-b)^2\Big],$$

  on en déduit que

  $$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4}\Big[(x+y-z)^2 - (x-y-5z)^2\Big]6z^2$$

  et les formes linéaires $(x,y,z) \mapsto x+y-z, (x,y,z) \mapsto x-y-5z, (x,y,z) \mapsto z$ *définies sur* $\mathbb{R}^3$ *sont linéairement indépendantes.*

Voici deux autres exemples de décomposition de Gauss en dimension 4.

Exemple 1.3.5. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *la forme quadratique définie par*

$$\phi(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 - 2xy + 2xz - 2xt - 2yt - 4ayt$$

pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. *Écrivons* $x^2 - 2xy + 2xz - 2xt$ *(cad les termes contenant* x *en facteur) comme le debut du carré de* $x - y + z - t$. *Il vient:*

$$\begin{array}{rcl} \phi(x,y,z,t) & = & (x-y+z-t)^2 - (y-z+t)^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 - 2yz - 4ayt \\ & = & (x-y+z-t)^2 - 3t^2 - 2(1+2a)yt + 2zt. \end{array}$$

Soit $\phi'(y,z,t) = -3t^2 - 2(1+2a)yt + 2zt$. *Appliquons l'algorithme de la dimension* 3. *On obtient:*

$$\begin{array}{rcl} \phi'(y,z,t) & = & -3t^2 - 2(1+2a)yt + 2zt \\ & = & -3\Big(t - \frac{1}{3}z + \frac{1+2a}{3}y\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(z - (1+2a)y\Big)^2 \\ & = & -\frac{1}{3}(3t - z + (1+2a)y)^2 + \frac{1}{3}\Big(z - (1+2a)y\Big)^2. \end{array}$$

Il vient donc

$$\phi(x,y,z,t) = (x-y+z-t)^2 - \frac{1}{3}(3t - z + (1+2a)y)^2 + \frac{1}{3}\Big(z - (1+2a)y\Big)^2.$$

Il reste à montrer que les formes linéaires $(x,y,z,t) \mapsto x - y + z - t, (x,y,z,t) \mapsto 3t - z + (1+2a)y, (x,y,z,t) \mapsto z - (1+2a)y$ *sont linéairement indépendantes.*

Exemple 1.3.6. *Lorsque la forme quadratique ne contient aucun terme carré, on ne peut procéder comme ci-dessus et il faut utiliser une technique différente. Considérons par exemple la forme quadratique sur* $E = \mathbb{R}^4$ *définie par:*

$$\phi(x,y,z,t) = 3xy + 5yz + 7zt - 4yt + 9xt, \quad (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

Dans ce cas on choisit un terme rectangle formé de 2 variables, tel que $3xy$, et on essaie de regouper tous les termes contenant x ou y en un produit $(x+[\cdots)(y+[\cdots)$ où les $[\cdots]$ ne font intervenir que les autres variables, c'est-à-dire ici z et t. Ceci donne

$$\begin{aligned} 3xy+5yz-4yt+9xt &= 3\Big(xy+\frac{5}{3}yz-\frac{4}{3}yt+3xt\Big) \\ &= 3\Big(x+\frac{5}{3}z-\frac{4}{3}t\Big)(y+3t)-15zt+12t^2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\phi(x,y,z,t)=3\Big(x+\frac{5}{3}z-\frac{4}{3}t\Big)(y+3t)-8zt+12t^2.$$

Les termes restants (ici $-8zt+12t^2$) ne doivent plus faire intervenir que les variables non encore traitées, soient z et t. On peut ramener le premier produit AB a une différence de deux carrés grâce à l'identité de polarisation élémentaire

$$AB=\frac{1}{4}(A+B)^2-\frac{1}{4}(A-B)^2.$$

Il vient

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{3}{4}\Big(x+y+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}t\Big)^2-\frac{3}{4}\Big(x-y+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}t\Big)^2-8zt+12t^2.$$

Il reste à transformer les derniers termes en carrés, on trouve par exemple:

$$-8zt+12t^2=12\Big(t^2-\frac{2}{3}zt\Big)=12\Big(t-\frac{1}{3}z\Big)^2-\frac{4}{3}z^2.$$

En définitive on obtient la décomposition en carrés de formes linéaires

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{3}{4}\Big(x+y+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}t\Big)^2-\frac{3}{4}\Big(x-y+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}t\Big)^2+12\Big(t-\frac{1}{3}z\Big)^2-\frac{4}{3}z^2$$

et on peut vérifier que ces formes sont indépendantes dans $(\mathbb{R}^4)^*$.

Remarque 1.3.1. *Lorsqu'on pratique la méthode de Gauss, les formes linéaires trouvées sont linéairement indépendantes.*

Voici une première application de cette décomposition explicite en somme de carrées de formes linéaires.

Théorème 1.3.2. *Soient $l_1,\ldots,l_r : E\to\mathbb{R}$ des formes linéaires linéairement indépendantes et $a_1,\ldots,a_r$ des nombres réels non tous nuls tels que $\phi(u)=a_1l_1(u)^2+\ldots,a_rl_r(u)^2$ quel que soit $u\in E$. Alors la forme quadratique ϕ est de rang r et le noyau de ϕ est le sous-espace vectoriel des vecteurs $u\in E$ tels que $l_1(u)=\ldots=l_r(u)=0$.*

Remarque 1.3.2. *La décomposition en carrées permet d'étudier le signe de ϕ. Supposons $l_1,\ldots,l_r : E\to\mathbb{R}$ des formes linéaires linéairement indépendantes et $a_1,\ldots,a_r$ des nombres réels non tous nuls tels que $\phi(u)=a_1l_1(u)^2+\ldots,a_rl_r(u)^2$ quel que soit $u\in E$.*

- *Si les nombres a_i sont tous positifs, alors la forme quadratique ϕ est positive.*
- *Supposons $r=n=\dim E$ et $a_i>0$ quel que soit i. Si le seul vecteur $u\in E$ tel que $l_1(u)=\ldots=l_n(u)=0$ est 0, et on a $\phi(u)>0$ pour tout $u\neq 0$, alors la forme quadratique ϕ est définie positive.*

1.4 Bases orthogonales

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une forme bilinéaire symétrique φ. On note ϕ la forme quadratique associée.

Définition 1.4.1. *Soient ϕ une forme quadratique et φ la forme bilinéaire symétrique associée à ϕ. Une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de E est orthogonale si $\varphi(u_i, u_j) = 0$ pour $i \neq j$.*

Proposition 1.4.1. *Une base de E est orthogonale pour la forme quadratique ϕ si et seulement si la matrice de ϕ dans cette base est diagonale. Plus précisement, la matrice de ϕ dans la base orthogonale $(u_1, \ldots, u_n)$ est*

$$A = \begin{pmatrix} \phi(u_1) & & 0 \\ 0 & \ddots & \phi(u_n) \end{pmatrix}$$

et pour tout vecteur $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$, on a: $\phi(x) = {}^tXAX = \phi(u_1)x_1^2 + \ldots + \phi(u_n)x_n^2$.

Proof. La matrice A de la forme quadratique dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$ est définie par $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Elle est diagonale si et seulement si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. □

Proposition 1.4.2. *Soit ϕ une forme quadratique sur E. Supposons la forme quadratique dégénérée. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthogonale pour ϕ, alors les vecteurs u_i, tels que $\phi(u_i) = 0$ forment une base du noyau.*

Proof. Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthogonale pour ϕ et A la matrice de ϕ dans cette base. Alors A est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\phi(u_1), \ldots, \phi(u_n)$; il vient donc que $\det A = \phi(u_1) \cdots \phi(u_n)$. La forme quadratique étant dégénérée, le déterminant de A est nul, par suite il existe un i tel que $\phi(u_i) = 0$. Si $\phi(u_j) \neq 0$, alors on a: $\varphi(u_j, u_j) \neq 0$, donc u_j n'appartient pas au noyau de φ. Par contre, si $\varphi(u_j, u_j) = \phi(u_j) = 0$, alors on a: $\varphi(u_j, u_k) = 0$ quel que soit k, donc $\varphi(u_j, v) = 0$ pour tout vecteur $v \in E$ et par suite $u_j \in \ker \phi$.
Réciproquement, considérons un vecteur $u \in E$ appartenant au noyau de ϕ. Posons $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. On a pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi(u, u_j) = x_j\phi(u_j) = 0$ quel que soit j, en particulier nous avons $x_j = 0$ si $\phi(u_j) \neq 0$. On en déduit que u est combinaison linéaire des vecteurs u_i tels que $\varphi(u_i) = 0$. Puisque ces vecteurs font partie d'une base de E, ils sont linéairement indépendants et forment donc une base du noyau de ϕ. □

Remarque 1.4.1. *Si ϕ est non dégénérée, alors son noyau est réduit au vecteur nul.*

Théorème 1.4.1. *Soient $l_1, \cdots, l_r$ des formes linéaires linéairement indépendantes et $a_1, \cdots, a_r$ des nombres réels non tous nuls tels que $\phi(u) = a_1l_1^2(u) + \cdots + a_rl_r^2(u)$. Alors il existe une base $(u_1, \cdots, u_n)$ de E, orthogonale pour ϕ telle que $\phi(u_i) = a_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$.*

Corollaire 1.4.1. *Il existe des bases de E orthogonales pour la forme quadratique ϕ.*

Remarque 1.4.2. *Soit $l_1, \ldots, l_r : E \to \mathbb{R}$ des formes linéaires linéairement indépendantes et $a_1, \ldots, a_r$ des nombres réels tous non nuls tels que $\phi(u) = a_1l_1(u)^2 + \ldots, a_rl_r(u)^2$ quel que soit $u \in E$.*

- *La forme quadratique ϕ est positive si et seulement si les nombres a_i sont tous positifs,*
- *La forme quadratique ϕ est définie positive si et seulement si $r = n = \dim E$ et les $a_i > 0$ quel que soit i.*

Recherche d'une base orthogonale Voici les différentes étapes pour trouver une base de E orthogonale pour ϕ.

- **Étape 1.** On utilise la méthode de Gauss pour écrire

$$\phi(u) = a_1 l_1^2(u) + \cdots + a_r l_r^2(u).$$

- **Étape 2.** Si $r < n$, on cherche une base $(u_{r+1}, \cdots, u_n)$ du noyau de ϕ.
- **Étape 3.** Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base E. On résout le système

$$\begin{cases} l_1(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ l_r(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) & = & b_r. \end{cases}$$

On choisit ensuite des vecteurs $u_1, \cdots, u_r \in E$ tels que $l_i(u_i) = 1$ et $l_i(u_j) = 0$ si $i \neq j$, en donnant des valeurs particulières au second membre du système: u_i est obtenu en prenant $b_i = 1$ et $b_j = 0$ si $i \neq j$.

Les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ ainsi obtenu forment toujours une base de E. De plus, la base $(u_1, \cdots, u_n)$ de E est orthogonale pour ϕ.

Remarque 1.4.3. *La décomposition de Gauss est une metode aloritmique. Elle permet de trouver explicitement une base de E ortoonale pour ϕ.*

Exemple 1.4.1. *Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par:*

$$\phi(x, y, z, t) = xy + 2xz + 2xt + yz + 4yt + 2zt, \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

1. *Quelle est la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Donner une réduction de Gauss en précisant une base de $\mathbb{R}^4$ orthogonale pour ϕ et la matrice de ϕ dans cette base.*

Solution 2. *Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par:*

$$\phi(x, y, z, t) = xy + 2xz + 2xt + yz + 4yt + 2zt, \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

1. *La matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Déterminons une réduction de Gauss de ϕ. On a:*

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z,t) &= xy + x(2z+2t) + y(z+4t) + 2zt \\
&= (x+z+4t)(y+2z+2t) - (z+4t)(2z+2t) + 2zt \\
&= (x+z+4t)(y+2z+2t) - 2z^2 - 8zt - 8t^2 \\
&= \frac{1}{4}(x+y+3z+6t)^2 - \frac{1}{4}(x-y-z+2t)^2 - 2(z+2t)^2.
\end{aligned}$$

Les formes linéaires $l_1(x,y,z,t) = x+y+3z+6t, l_2(x,y,z,t) = x-y-z+2t$ *et* $l_3(x,y,z,t) = z+2t$ *sont linéairement indépendantes.*
On a: $\mathrm{sgn}(\phi) = (1,2)$ *et* $\mathrm{rg}(\phi) = 3$. *Déterminons une base de* $\mathbb{R}^4$ *orthogonale pour* ϕ.

- *Une base de noyau de* ϕ *est:* $\mathrm{vect}(u_4)$ *avec* $u_4 = (2,-2,2,-1)$.
- *Cherchons* $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^4$ *tels que*

$$\begin{aligned}
l_1(u_1) &= 1, \quad l_2(u_1) = 0, \quad l_3(u_1) = 0 \\
l_1(u_2) &= 0, \quad l_2(u_2) = 1, \quad l_3(u_2) = 0 \\
l_1(u_3) &= 0, \quad l_2(u_3) = 0, \quad l_3(u_3) = 1.
\end{aligned}$$

  On trouve $u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (1,-1,0,0)$ *et* $u_3 = (1,2,-1,0)$. *Les vecteurs* $u_1, u_{2,3}, u_4$ *sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de E.*

Déterminons la matrice de ϕ *dans cette base. La forme polaire associée à* ϕ *est*

$$\varphi(u,u') = \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}x'y + xz' + x'z + xt' + x't + \frac{1}{2}yz' + \frac{1}{2}y'z + 2yt' + 2y't + zt' + z't.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Classification des formes quadratiques en dimension finie

Définition 1.5.1. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}, \mathbb{K} = (\mathbb{R}\ ou\, \mathbb{C})$, ϕ et ϕ' deux formes quadratiques. On dit que ϕ est équivalente à ϕ' s'il existe une bijection linéaire $u : E \to E$ telle que $\phi(x) = \phi'(u(x))$ pour tout $x \in E$.*

Théorème 1.5.1. *(Classification des formes quadratiques complexes en dimension finie) Pour que deux formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie soient congruentes, il faut et il suffit qu'elles aient même rang.*

Théorème 1.5.2. *(Classification des formes quadratiques réelles en dimension finie) Pour que deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie soient congruentes, il faut et il suffit qu'elles aient la même signature.*

Proposition 1.5.1. *(Définition) Soit ϕ une forme quadratique sur E. Il existe un couple unique $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de ϕ soit:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ce couple (p,q) est appelé la signature de ϕ, noté $sgn(\phi)$.

Définition 1.5.2. *La signature de la forme quadratique ϕ est le couple (p,q) d'entiers naturels tel que p est le maximum de la dimension d'un sous-espace vectoriel où la restriction de ϕ est définie positive, q est le maximum de la dimension d'un sous-espace vectoriel où la restriction de ϕ est définie négative.*

Théorème 1.5.3. *(Théorème d'invariance (ou d'inertie) de Sylvester) Dans toute base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où la matrice de la forme quadratique ϕ est diagonale,* $\operatorname{card}\{i, \phi(i) > 0\} = p$, $\operatorname{card}\{i, \phi(i) < 0\} = p$ *et $p + q = r$ où (p,q) est la signature et r est le rang de la forme quadratique.*

Exemple 1.5.1. *Appliquer la méthode de Gauss à la forme quadratique ϕ définie sur $\mathbb{R}^3$ par:*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

en déduire le noyau, le rang, la signature de ϕ. On a:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_1(2x_3 - x_2) + 2x_2^2 + 8x_3^2 \\ &= \Big(x_1 + (2x_3 - x_2)\Big)^2 + x_1^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2. \end{aligned}$$

Par définition $\ker(\phi) = \cap_{i=1}^n \ker(l_i)$. *Ainsi:*

$$(x_1, x_2, x_3) \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = -2x_3. \end{array} \right.$$

Donc $\ker(\phi)$ *est de dimension 1 et est engendré par:* $(-4, -2, 1)$. *Par définition $rg(\phi) =$* $\dim(E) - \dim(\ker(\phi)) = 2$. *Enfin: $sgn(\phi) = (2, 0)$.*

Exemple 1.5.2. *Appliquer la methode de Gauss à la forme quadratique ϕ définie sur $\mathbb{R}^4$ par*

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 24x_2x_3 - 24x_2x_4$$

et en déduire le noyau, le rang et la signature de ϕ. On a:

$$\begin{array}{rcl} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & 4(x_1 + 6x_3 - 6x_4)(x_2 + 2x_3) - 48x_3^3 + 48x_3x_4 \\ & = & (x_1 + 6x_3 - 6x_4)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 - 48\Big(x_3 - \dfrac{1}{2}x_4\Big) + 12x_4^2. \end{array}$$

D'où

$$\ker(\phi) = \{0\}, \quad rg(\phi) = 4, \quad sg(\phi) = (2, 2).$$