TD GENERALITES SUR LES TORSEURS

***

EXERCICE 1

On considère dans le repère orthonormé direct $R\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$ un vecteur $\vec{V}=-\vec{e}_x+2\vec{e}_y$ et deux points A et B de coordonnées $A(0,5,2)$ et $B(3,1,4)$.

1. Calculer $\vec{M}_B\left(\vec{V}\right)$, le moment d'un glisseur $\left(A,\vec{V}\right)$ au point B ;

2. Calculer $M_\Delta\left(\vec{V}\right)$, le moment de $\left(A,\vec{V}\right)$ par rapport à l'axe Δ passant par B et parallèle au vecteur $\overrightarrow{W}$ de composantes $(-1,2,2)$ dans R.

EXERCICE 2

Soient les trois vecteurs $\vec{V}_1=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{V}_2=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{V}_3=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}-2\vec{k}$, relativement à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, liés respectivement aux points $A\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$, $B\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$.
α , β sont des nombres réels.

1. Construire le torseur $\{T\}$ au point de réduction O associé au système des vecteurs $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$;

2. Montrer que $\forall$ α , β le torseur est un glisseur;

3. Trouver les coordonnées des points P où $\vec{M}_P=\vec{0}$;

4. Pour quelles valeurs de α et β le torseur est- il nul ? Vérifier pour ces valeurs que les trois vecteurs sont coplanaires.

EXERCICE 3

Soit le torseur $\{T_1\}$ au point de réduction O, défini par les trois vecteurs $\vec{V}_1=-2\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{V}_2=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{V}_3=-\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}$ définis dans un repère orthonormé $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ respectivement aux points $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$; et le torseur $\{T_2\}$ au même point de réduction O tel que : $\{T_2\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_2\\ \vec{M}_2(O)\end{Bmatrix}$ où $\vec{R}_2=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ et $\vec{M}_2(O)=-3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$

1. Déterminer les éléments de réduction du torseur $\{T_1\}$ au point de réduction O, conclure;

2. Déterminer le pas et l'axe central du torseur $\{T_2\}$ au point de réduction O;

3. Calculer la somme et le produit des deux torseurs ;

4. Calculer l'automoment du torseur somme.

EXERCICE 4

Les coordonnées (éléments de réduction) d'un torseur sont $\vec{R} = (10,6,4)$, $\vec{M}_O = (6,3,-6)$ dans un repère orthonormé $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Déterminer le point I ou l'axe central (Δ) rencontre le plan $\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$.

EXERCICE 5 :

Dans un repère $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $\{T_1\}_O$ et $\{T_2\}_O$ dont les éléments de réduction au point O sont respectivement ${}_O\begin{Bmatrix}\vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(O)\end{Bmatrix}$ et ${}_O\begin{Bmatrix}\vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(O)\end{Bmatrix}$ définis par :

$$\{T_1\}_O = {}_O\begin{Bmatrix}\vec{R}_1 = \cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j} \\ \vec{M}_1(O) = -a\sin\alpha\vec{i} - a\cos\alpha\vec{j}\end{Bmatrix} \qquad \{T_2\}_O = {}_O\begin{Bmatrix}\vec{R}_2 = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j} \\ \vec{M}_2(O) = -a\sin\alpha\vec{i} + a\cos\alpha\vec{j}\end{Bmatrix}$$

Où a et α sont des constantes réelles non nulles.

1. Calculer les invariants scalaires des torseurs $\{T_1\}_O$, $\{T_2\}_O$ et déduire leur(s) nature(s).

2. Calculer $\vec{M}_1(O')$ pour un point O′ de coordonnées (0, 1, 1).

3. Déterminer l'équation de l'axe central de $\{T_2\}_O$ et calculer le moment $\vec{M}_2(P)$ en un point P de cet axe.

4. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $\{T_3\}_O = \{T_1\}_O + \{T_2\}_O$ est un glisseur.

EXERCICE 6 :

Soit $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct et soit $\overrightarrow{M}$ le champ de vecteurs défini par :

$$\overrightarrow{M}(P) = \begin{pmatrix} a - \beta^2 y + \beta z \\ b + x - 3z \\ c - \beta x + 3y \end{pmatrix}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du point P dans (R), a, b, c sont des constantes données et β un paramètre réel.

Déterminer les valeurs de β pour que le champ $\overrightarrow{M}$ soit un torseur dont on précisera la résultante.