Université Alioune Diop de Bambey
UFR SATIC, Département de Mathématiques
Licence 2 MPI-SID

Année académique 2022-2023
Semestre 4

Travaux dirigés 1

L2 MPI-SID

Exercice 1. On considère l'application $\varphi_1 : C^1([0,1]) \times C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\varphi_1(u,v) = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt.$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une forme bilinéaire.
2. Déterminer les parties symétrique et antisymétrique de φ_1.

Exercice 2. On considère l' application $\varphi_2 : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par: $\varphi_2(u,v) = u(0)v(1)$.

1. Vérifier qu'il s'agit d'une forme bilinéaire.
2. Déterminer les parties symétrique et antisymétrique de φ_2.
3. Écrire la matrice de φ_2 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Préciser si φ_2 est dégénérée.

Exercice 3. Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et B l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $B(P,Q) = P(0)Q(1) + P(1)Q(0)$.

1. Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique.
2. Est-elle positive ?

Exercice 4. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et B l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$B(P,Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

1. Montrer que B est bien définie.
2. Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique.
3. Que peut-on dire des polynômes P satisfaisant $B(P,P) = 0$?
4. Montrer que $\{X+1, X^2-1, X-X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de B et l'expression de la forme bilinéaire dans cette nouvelle base.

Exercice 5. (TPE) Soit $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$). Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$B(P,Q) := \int_0^1 tP(t)Q(t)dt \quad \text{et} \quad q(P) := B(P,P).$$