Généralités sur les torseurs

I- Scalaire

1. Définition

Un scalaire est une grandeur algébrique défini par un nombre réel associé à une unité:

La masse (scalaire extensive)

la température (scalaire intensive).

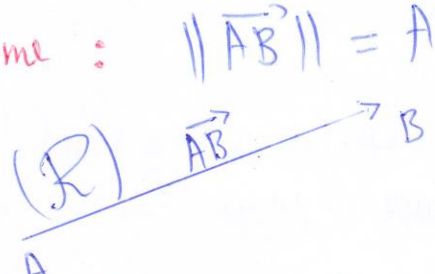
2. Déplacement

a. Définition

On appelle déplacement $\overrightarrow{AB}$ une paire ordonnée de points par rapport à un referentiel A (origine) et B (extrémité).

Ses caractéristiques sont :

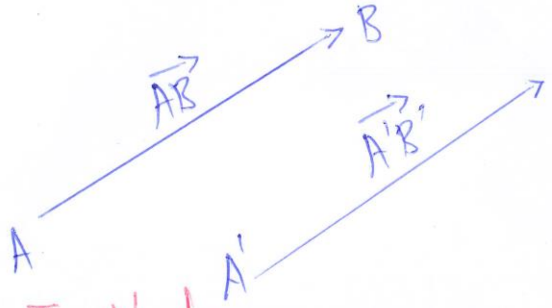
- point d'application A
- direction : droite (AB)
- Sens : de A vers B
- Norme : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$



$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

b. Déplacement équipollent

Deux déplacements $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont dits équipollents si la transformation amenant A sur B transforme également A' sur B' et dans ce cas $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{A'B'}$.



Le déplacement $\vec{AB}$ est un déplacement libre.

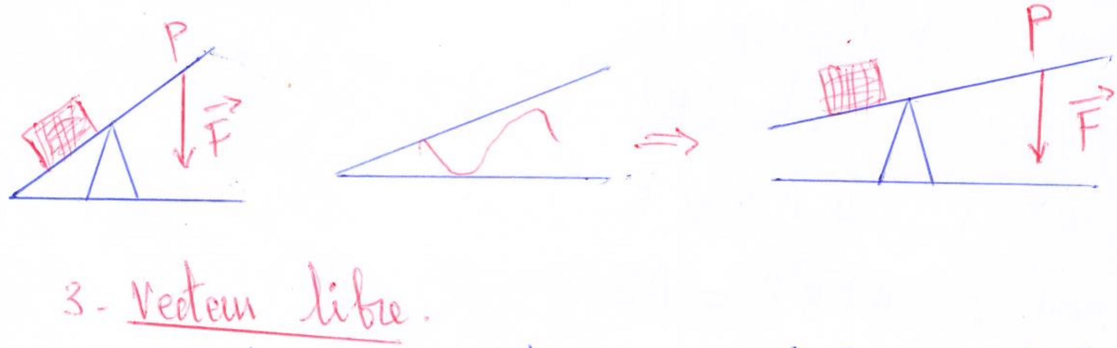
II Vecteurs

1. Définition

Toute grandeur physique ayant les propriétés d'un déplacement libre est un vecteur. Il existe trois types de vecteurs : vecteur liés, vecteur libre, vecteur glissant.

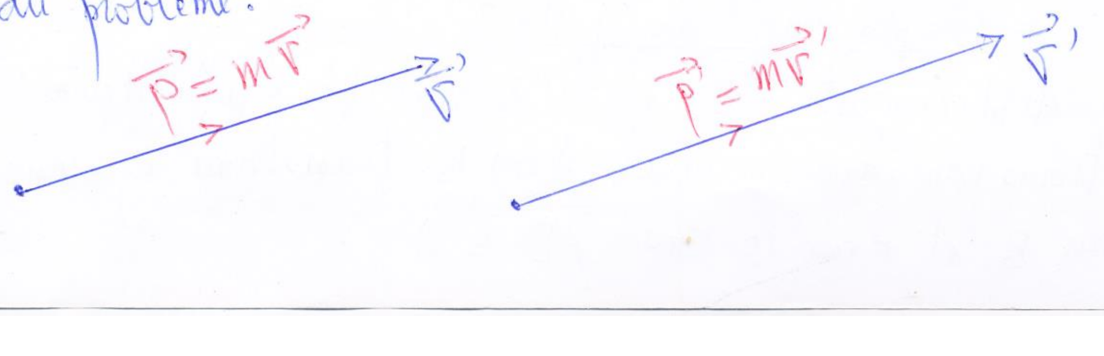
2. Vecteur lié.

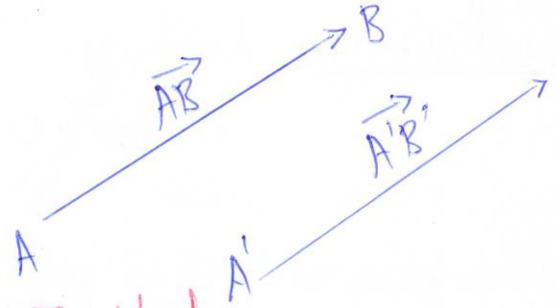
Un vecteur lié est un vecteur qui est associé à son point d'application. Son déplacement dans l'espace modifie les conditions du système.



3. Vecteur libre.

C'est un vecteur qui n'est pas associé à son point d'applicat° qui peut se déplacer librement sans changer les conditions du problème.





Le déplacement $\vec{AB}$ est un déplacement libre.

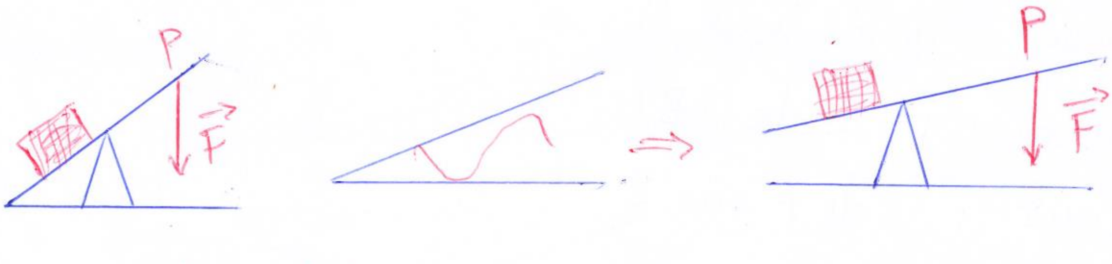
II Vecteurs

1. Définition

Toute grandeur physique ayant les propriétés d'un déplacement libre est un vecteur. Il existe trois types de vecteurs : vecteur liés, vecteur libre, vecteur glissant.

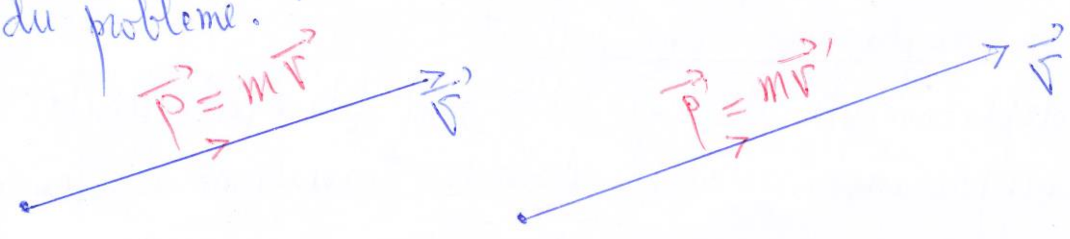
2. Vecteur lié.

Un vecteur lié est un vecteur qui est associé à son point d'application. Son déplacement dans l'espace modifie les conditions du système.



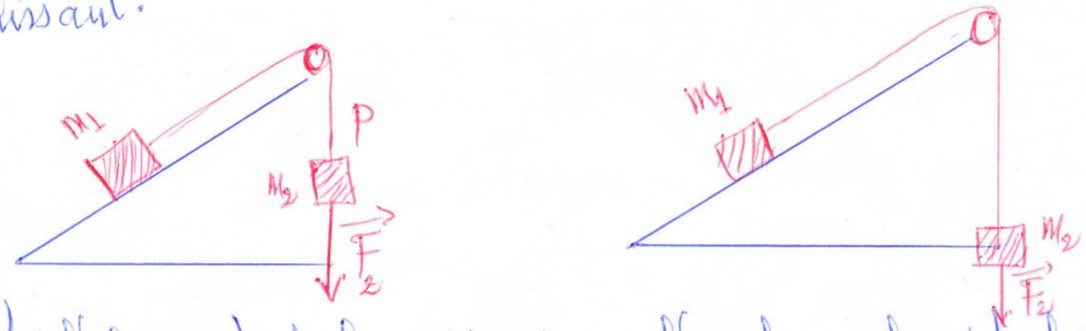
3. Vecteur libre.

C'est un vecteur qui n'est pas associé à son point d'applicat°. qui peut se déplacer librement sans changer les conditions du problème.



4. Vecteur glissant

Il existe des vecteurs liés dont leur action ne change pas si le point d'application se déplace sur la ligne d'action du vecteur. Un vecteur associé à une droite est un vecteur glissant.



Le déplacement de la masse m_2 ne dépend pas du point de suspension.

Généralement

- vecteur lié $[\overrightarrow{AB}]$
- vecteur libre $\overrightarrow{AB}$
- vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$

III- Glisseur

1. Définition

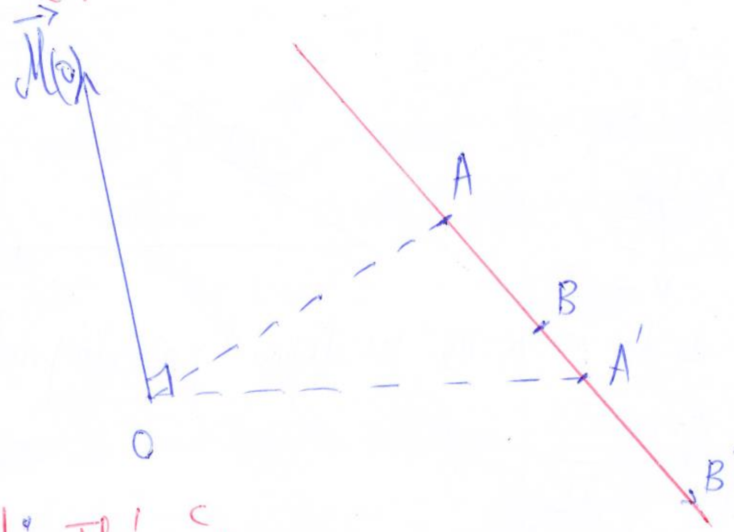
Soit $[\overrightarrow{AB}]$ un vecteur lié.
Sur la droite (D) support de $[\overrightarrow{AB}]$, on peut définir un ensemble de vecteurs liés équipollents à $[\overrightarrow{AB}]$.
$[\overrightarrow{AB}]$ représente un glisseur, on désigne le vecteur glissant $(\overrightarrow{AB})$ qui est constitué par l'association d'une droite (D) et un vecteur libre $\overrightarrow{AB}$.

2° Moment d'un glisseur en un point

a' Définition

Le moment d'un glisseur $(\vec{AB})$ en un point O est : $\vec{OA} \wedge \vec{AB}$.

$$\vec{M}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{AB}$$



b° Théorème

Le moment d'un glisseur en un point est indépendant du représentant $[\vec{AB}]$ adopté par caractérisation ce vecteur.

Soit $[\vec{A'B'}]$ un autre représentant du glisseur.

$$\vec{M}(O) = \vec{OA'} \wedge \vec{A'B'}$$

$$= (\vec{OA} + \vec{AA'}) \wedge \vec{A'B'} = \vec{OA} \wedge \vec{A'B'} + \vec{AA'} \wedge \vec{A'B'}$$

$$\vec{M}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{A'B'} = \vec{OA} \wedge \vec{A'B'} = \vec{OA} \wedge \vec{AB} \Rightarrow \vec{A'B'} = \vec{AB}$$

$$\vec{M}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{AB}$$

Changement de l'origine des moments

Soient $[\vec{AB}]$ un glisseur et O et O' deux points, on a :

$$\vec{M}(O') = \vec{O'A} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{M}(O') = \vec{O'A} \wedge \vec{AB} = (\vec{O'O} + \vec{OA}) \wedge \vec{AB}$$

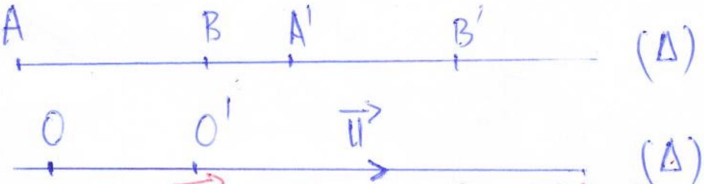
$$= \vec{O'O} \wedge \vec{AB} + \vec{OA} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{M}(O') = \vec{M}(O) + \vec{O'O} \wedge \vec{AB}.$$

3. Moment d'un glisseur par rapport à un axe.

a. Définition

Soit $[\vec{AB}]$ un glisseur et (Δ) un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$.
Soit $O \in \Delta$.
Le moment du glisseur $[\vec{AB}]$ par rapport à l'axe Δ représente la projection du moment du glisseur $[\vec{AB}]$ par rapport au point O sur l'axe Δ.



$$\vec{M}_\Delta(\vec{AB}) = (\vec{OA} \wedge \vec{AB})\vec{u}.$$

b. Théorème

Le moment d'un glisseur par rapport à un axe est indépendant du point choisi sur cet axe.

Soit O' un point de Δ.

$$\vec{M}_{O'}(\vec{AB}) = (\vec{O'A} \wedge \vec{AB})\vec{u}$$

$$= [(\vec{O'O} + \vec{OA}) \wedge \vec{AB}]\vec{u} = (\vec{O'O} \wedge \vec{AB})\vec{u} + \underbrace{(\vec{OA} \wedge \vec{AB})\vec{u}}_{\vec{M}_O(\vec{AB})}$$

$$(\vec{O'O} \wedge \vec{AB})\vec{u} = (\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{O'O} = (\vec{u} \wedge \vec{O'O}) \cdot \vec{AB} = \vec{0}$$

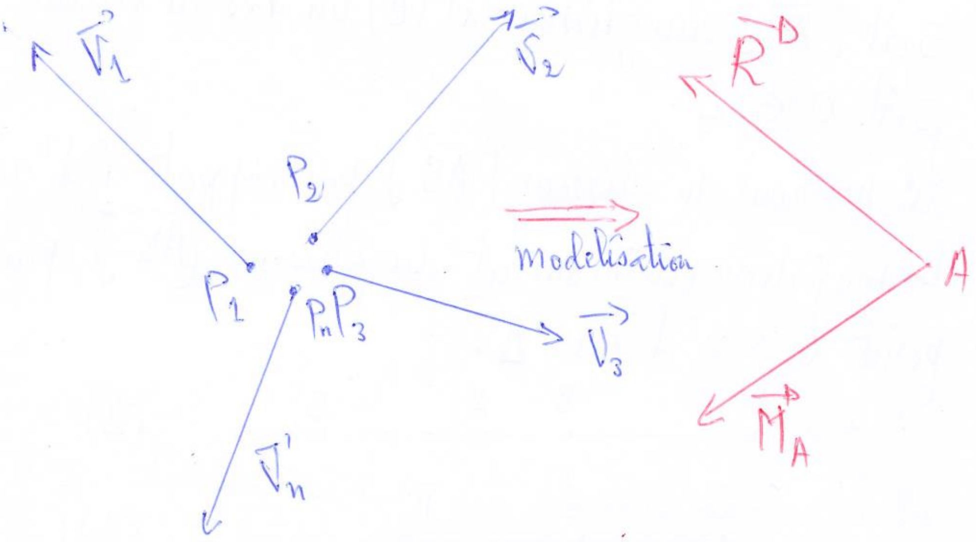
Donc $\vec{M}_{O'}(\vec{AB}) = \vec{M}_O(\vec{AB})$.

IV. Torseurs

1 Définition

un torseur est un ensemble de deux champs de vecteurs

- Un champ constant $\vec{R}$: resultante générale du torseur
- Un champ variable $\vec{M}$: Moment resultant du torseur.



n vecteurs glissants.

Le vecteur $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i$ et $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{AP_i} \wedge \vec{V}_i$

Un torseur se note : $\{T\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M}_A\end{matrix}\right\}$

A: point de réduction

$\vec{R}$ et $\vec{M}_A$ sont les éléments de réduction au point A.

2. Notations.

$\{T\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M}_A\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}\\ M_{x_A}\vec{i} + M_{y_A}\vec{j} + M_{z_A}\vec{k}\end{matrix}\right\}$ écriture en ligne

$$\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} R_x & M_{x_A} \\ R_y & M_{y_A} \\ R_z & M_{z_A} \end{Bmatrix}$$ écriture en colonne dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

3- Changement de point de réduction d'un torseur

Soit $\{T\}_A$ le torseur au point A défini par ses éléments de réduction. Les éléments de réduction de ce torseur au point B sont :

- Resultante invariable : $\vec{R}$

$$- \vec{M}_B = \sum_{i=1}^{n} \vec{BP_i} \wedge \vec{V_i} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{BA} + \vec{AP_i}) \wedge \vec{V_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{BA} \wedge \vec{V_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{AP_i} \wedge \vec{V_i}$$

$$= \vec{BA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} + \vec{M_A} = \vec{BA} \wedge \vec{R} + \vec{M_A}$$

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}}$$ Théorème de Varignon antisymétrique.

$$\{T\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} \end{Bmatrix}$$

$\{T\}_A$ et $\{T\}_B$ représentent le même torseur.

4- Invariants d'un torseur

- L'invariant vectoriel d'un torseur est sa resultante $\vec{R}$.
- L'invariant scalaire d'un torseur est : $\vec{R} \cdot \vec{M}_A$ (automoment).

Il est indépendant du point d'écriture du torseur. Donc :

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_A = \vec{R} \cdot \vec{M}_B$$

5. Opération sur les torseurs

a- Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux ssi : $\{T\}_A = \{T'\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{R'} \\ \vec{M_A} = \vec{M'_A} \end{Bmatrix}$

b- Addition de deux torseurs.

$$\{T\}_A + \{T'\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} + \vec{R'} \\ \vec{M_A} + \vec{M'_A} \end{Bmatrix}$$

c- Multiplication d'un torseur par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lambda \{T\}_A = \lambda\, {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M_A} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{M_A} \end{Bmatrix}$$

d- Comoment ou produit de deux torseurs

$$\{T\}_A * \{T'\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M_A} \end{Bmatrix} * {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R'} \\ \vec{M'_A} \end{Bmatrix} = \vec{R} * \vec{M'_A} + \vec{R'} * \vec{M_A}$$

6- Torseurs particuliers

a- Torseur nul.

Un torseur est nul ssi $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{M_A} = \vec{0}$. D'où $\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

b Torseur couple

Un torseur est dit couple si $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{M_A} \neq \vec{0}$. D'où

$$\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M_A} \end{Bmatrix}$$

c- Torseur glisseur

Un torseur est dit glisseur s'il existe un point A tel que $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{M_A} = \vec{0}$. D'où $\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Rq : Si $\vec{R}\cdot\vec{M}_A = \vec{0}$ alors le torseur est glisseur.

d- Décomposition d'un torseur

$$\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 \\ \underset{\text{Couple}}{\vec{M}_A} \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \underset{\text{glisseur}}{\vec{0}} \end{Bmatrix}$$

7 Point central et axe central d'un torseur

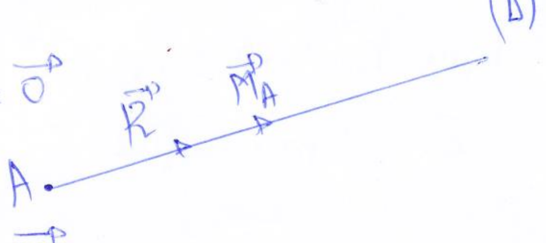
a- Définition

On appelle point central d'un torseur tout point de l'espace où la résultante générale et le moment résultant sont colinéaires. L'axe qui porte ces deux vecteurs est appelé axe central du torseur

b- Détermination de l'axe central.

Soit $\{T\}_A$ le torseur au point A et (Δ) l'axe central du torseur. Soit $P \in (\Delta)$

Soit $P \in \Delta$, on a $\vec{R} \wedge \vec{M}_P = \vec{0}$



$$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{PA} \wedge \vec{R} = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_P = \vec{R} \wedge (\vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AP}) = \vec{R} \wedge \vec{M}_A + \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{AP})$$

$$= \vec{R} \wedge \vec{M}_A + \vec{R}(\vec{R}\cdot\vec{AP}) - \vec{AP}\cdot\vec{R}^2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{\vec{R}^2} + \frac{\vec{R}(\vec{R}\cdot\vec{AP})}{\vec{R}^2} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{\vec{R}^2} + \lambda \vec{R}$$

avec $\lambda = \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{AP}}{\vec{R}^2}$

P appartient à une droite de vecteur directeur $\vec{R}$: c'est l'axe central.

C - Propriétés de l'axe central

- L'axe central est une droite de direction $\vec{R}$
- Si le moment d'un torseur est nul en un point, alors ce point appartient à l'axe central du torseur.
- Le moment central est colinéaire à la résultante.
- L'axe central d'un glisseur est une droite de moment nul et est l'axe du glisseur

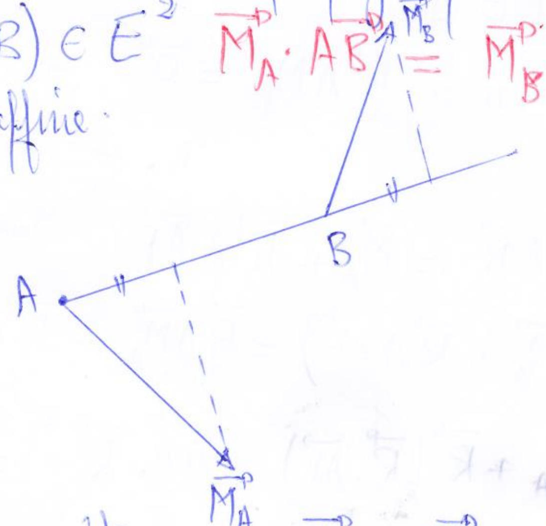
8 - Pas d'un torseur

Le pas d'un torseur en un point A est : $p = \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{M}_A}{\vec{R}^2}$

9 - Equiprojectivité du champ des moments

Un champ de vecteur $\vec{M}$ est équiprojectif si et seulement si pour tout $(A,B) \in E^2$ $\vec{M}_A \cdot \vec{AB} = \vec{M}_B \cdot \vec{AB}$

E : Espace affine.



Champ antisymétrique : $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}$

$\vec{M}_A \cdot \vec{AB} = \vec{M}_B \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \underbrace{(\vec{AB} \wedge \vec{R})}_{\vec{0}}$

Th : Tout champ antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.