Teoria das Probabilidades

Ma. Pétala Tuy
Cientista de Dados – ATOS Brasil
Pesquisadora associada do Centro de Excelência em Pesquisa Aplicada em Inteligência Artificial para a Industria do SENAI CIMATEC/ATOS

Conteúdo

- Introdução
- Propriedades
- Probabilidade Condicional e Independência
- Teorema de Bayes

Introdução

- As freqüências relativas, que vimos em análise descritiva, são estimativas de ***probabilidades*** de ocorrências de certos eventos de interesse.

- Com suposições adequadas, podemos criar um ***modelo teórico*** que reproduza de maneira razoável a distribuição das freqüências.

- Tais modelos são chamados *modelos probabilísticos*.

Introdução

- Exemplo: Estudar as freqüências de ocorrências dos lados de uma moeda.

- Um procedimento a adotar seria:
  - Lançar a moeda n vezes
  - Contar o número de vezes em que ocorre o lado "cara".

- As proporções cara/(cara+coroa) determinam a distribuição de freqüências do experimento realizado.

- Lançando a moeda um número n1 (n1 ≠ n) de vezes, teríamos outra distribuição de freqüências, mas com um padrão que esperamos ser muito próximo do anterior.

Introdução

- O modelo probabilístico pode ser construído por meio de premissas:
  - Primeiro, observamos que só podem ocorrer dois lados;
  - A moeda é equilibrada, não favorecendo algum lado em específico;

- Com essas suposições, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes quando a moeda é lançada *n* vezes, e, portanto, a proporção de ocorrência de cada lado deve ser 1/2.

Face	Cara	Coroa
Frequência Teórica	1/2	1/2

Introdução

- Todo experimento que envolva aleatoriedade terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

(a) um ***espaço amostral***, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento:

$$\boldsymbol{\Omega = \{\omega 1, \omega 2, \ldots, \omega n, \ldots\}}$$

(b) uma ***probabilidade***, *P*(ω), para cada ponto amostral, isto é, a probabilidade do que chamaremos de um *evento aleatório* ou simplesmente *evento*.

Introdução

- Para o lançamento de duas moedas, o espaço amostral é definido por:

Ω = {

$\omega 1$ = (*Cara*, *Cara*)

$\omega 2$ = (*Cara*, *Coroa*)

$\omega 3$ = (*Coroa*, *Cara*)

$\omega 4$ = (*Coroa*, *Coroa*)

}

Introdução

- Se a moeda for simétrica e homogênea, cada ponto ωi tem probabilidade 1/4

- Sendo A o evento que consiste na obtenção de faces iguais nos dois lançamentos:

$$P(A) = P\{\omega 1, \omega 4\} = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

- De modo geral, se A for qualquer evento de Ω, então

$$P(A) = \sum_j P(\omega j)$$

onde a soma é estendida a todos os pontos amostrais $\omega_j \in A$.

Introdução

- Exemplo de espaço amostral *contínuo:*

*E*xperimento: Retirar uma lâmpada de um lote e medir seu "tempo de vida" antes de se queimar.

- **Espaço amostral**: conjunto de todos os números reais não negativos.

$$\Omega = \{t \in IR : t \geq 0\}$$

- **Evento A**: "o tempo de vida da lâmpada é inferior a 20 horas", então:

$$A = \{t : 0 \leq t \leq 20\}.$$

Propriedades

- Sendo o **modelo probabilístico** um **modelo teórico** para as freqüências relativas, podemos obter algumas das propriedades das probabilidades:

- Como a freqüência relativa é um número entre 0 e 1, temos que, para qualquer evento A:

$$0 < P(A) < 1$$

- Temos também que:

$P(\Omega) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

Propriedades

Dados referentes à classificação final do indivíduo testado para o COVID-19 dentre os diabéticos e não diabéticos.

	Descartado	Confirmado	Suspeito	Total_coluna
NAO	2193	720	584	3497
SIM	821	572	286	1679
Total_linha	3014	1292	870	5176

Escolhendo aleatoriamente um indivíduo da base de dados, temos que:

P(NAO) = 3497/5176 = 0,676

P(Confirmado) = 1292/5176 = 0,250

Propriedades

- **Exemplo:**

- **Experimento**:
  - Selecionar aleatoriamente um indivíduo da base de dados e avaliar se é diabético ou não.

- **Espaço amostral**:

$\Omega = \{ \omega 1 = (SIM) , \omega 2 = (NAO) \}$

- **Evento**:
  - A: Selecionar um indivíduo não diabético
  - P(A) = 0,676

Propriedades

- Sendo A e H dois eventos (A = NÃO e H= Confirmado):

A **U** H, chamado união de A e H, quando pelo menos um dos eventos ocorre;

A **∩** H, chamado a intersecção de A e H, quando A e H ocorrem simultaneamente.

- $P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \frac{3497}{5176} + \frac{1292}{5176} - \frac{720}{5176} = \frac{4069}{5176} = 0{,}786$

Propriedades

- No entanto, considerando-se os eventos “Descartado” e “Confirmado”, vemos que:

P(Descartado) = 3014/5176

P(Confirmado) = 1292/5176

P(Descartado **U** Confirmado) = 4306/200 = P(Descartado) + P(Confirmado)

Os eventos “Descartado” e “Confirmado” são **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos**, pois se “Descartado” ocorre, então “Confirmado” não ocorre e vice-versa.

Aqui, “Descartado” **∩** “Confirmado” = ø e *P*(*“Descartado”* **∩** *“Confirmado”*) = 0.

Propriedades

- $0 < P(A) < 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H)$
- $P(A \cup H) = P(A) + P(H)$ (Para eventos mutuamente exclusivos)

Propriedades

- Suponha, agora, que estejamos somente interessados em saber se um indivíduo escolhido ao acaso está **Confirmado** ou Suspeito, não interessando saber se é é diabético ou não.

A = Descarctado

B = Confirmado **U** *Suspeito*

- A **U** *B* = Ω
- *A* **∩** *B* = ø

- Dizemos que *A* e *B* são *complementares* e

$P(A) = 3014/5176$,

$P(B) = \frac{1292}{5176} + \frac{870}{5176} = \frac{2162}{5176}$,

$P(A) + P(B) = 1$.

Ω = {

ω1 = (*Confirmado*) ,

ω2 = (*Descartado*) ,

ω3 = (*Suspeito*)

}

Propriedades

- De modo geral, vamos indicar por A^c o complementar de um evento qualquer A, e teremos então:

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

- Outras propriedades:

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(c) $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap \Omega = A$
(d) $\varnothing^c = \Omega, \Omega^c = \varnothing$
(e) $A \cap A^c = \varnothing$
(f) $A \cup A^c = \Omega$
(g) $A \cup \varnothing = A, A \cup \Omega = \Omega$
(h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propriedades

- De forma geral:
  - Para **um espaço amostral finito**, $\Omega = \{\omega1, \ldots, \omega n\}$,
  - Em que todos os pontos têm a **mesma probabilidade** $1/n$
  - *Se* A for um **evento** contendo ***m*** **pontos amostrais**, então:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Propriedades

- Princípio ***multiplicativo***:

Se uma tarefa pode ser executada em duas etapas, a primeira podendo ser realizada de ***p*** maneiras e a segunda de ***q*** maneiras, então as duas podem ser realizadas simultaneamente de ***pq*** maneiras.

Esse é o chamado ***princípio multiplicativo***.

Propriedades

- Exemplo:

Num lote com 20 peças existam 5 defeituosas. Escolhemos quatro peças do lote ao acaso. O número de amostras com quatro elementos que podemos extrair do lote é $\binom{20}{4}$, ou seja, combinações de 20 elementos, tomados quatro a quatro.

Seja A o evento de se escolher duas defeituosas na amostra. Segue-se que m = $\binom{5}{2}\binom{15}{2}$,

pois podemos escolher na mostra de quatro elementos duas defeituosas e duas não

-defeituosas simultaneamente de $\binom{5}{2}\binom{15}{2}$ maneiras, usando o princípio multiplicativo. Logo,

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} = 0{,}217$$

Probabilidade Condicional e Independência

- Voltando ao exemplo anterior, dado que um indivíduo, escolhido ao acaso, seja diabético, a probabilidade de que seja confirmado com COVID-19 é 572/1679.

- Isso porque, do total de 1679 indivíduos que são diabéticos, 572 foram confirmados com COVID-19. Escrevemos:

P(Confirmado|SIM) = 572/1679

	Descartado	Confirmado	Suspeito	Total_coluna
NAO	2193	720	584	3497
SIM	821	572	286	1679
Total_linha	3014	1292	870	5176

Probabilidade Condicional e Independência

- Para dois eventos quaisquer A e B, sendo P(B) > 0, definimos a probabilidade condicional de A dado B, P(A|B), como sendo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade Condicional e Independência

- P(A) = P(Confirmado) = 1292/5176, é a probabilidade à ***priori*** de A

- P(A|B) = P(Confirmado| SIM) = 572/1679 probabilidade a ***posteriori***

- Regra do produto de probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)$$

Se A e B são independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Propriedades

- $0 < P(A) < 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Para eventos mutuamente exclusivos)
- $P(A) = \frac{m}{n}$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B}$
- $P(A \cap B) = P(B)\ P(A|B)$
- $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

O Teorema de Bayes

- Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo **Teorema de Bayes**. A versão mais simples desse teorema é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

O Teorema de Bayes

- Exemplo:

Para selecionar seus funcionários, uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento. No final do curso, eles são submetidos a uma prova e 25% são classificados como bons (B), 50% como médios (M) e os restantes 25% como fracos (F).

Para facilitar a seleção, a empresa pretende substituir o treinamento por um teste contendo questões referentes a conhecimentos gerais e específicos.

Para isso, gostaria de conhecer qual a probabilidade de um indivíduo aprovado no teste ser considerado fraco, caso fizesse o curso. Em uma aplicação do curso, obtiveram-se as seguintes probabilidades condicionais:

$$P(A|B) = 0{,}80, \qquad P(A|M) = 0{,}50, \qquad P(A|F) = 0{,}20.$$

O Teorema de Bayes

- Queremos encontrar $P(F|A)$ e, pelo Teorema de Bayes, essa probabilidade é dada por:

$$P(F|A) = \frac{P(A|F)P(F)}{P(A|B)P(B) + P(A|M)P(M) + P(A|F)P(F)}$$

$$= \frac{(0{,}20)(0{,}25)}{(0{,}80)(0{,}25) + (0{,}50)(0{,}50) + (0{,}20)(0{,}25)} = 0{,}10.$$

O Teorema de Bayes

- O Teorema de Bayes, que aparentemente poderia ser encarado como mais um resultado na teoria de probabilidades, tem importância fundamental, pois fornece a base para uma abordagem da inferência estatística conhecida como **inferência bayesiana**.