Teoria das Probabilidades

Ma. Pétala Tuy
Cientista de Dados – ATOS Brasil
Pesquisadora associada do Centro de Excelência em Pesquisa Aplicada em Inteligência Artificial para a Industria do SENAI CIMATEC/ATOS

Conteúdo

- Variáveis Aleatórias Discretas
  - Valor Médio
  - Variância
- Função de Distribuição Acumulada
  - Modelos probabilísticos – Distribuição Binomial
- Variáveis Aleatórias Contínuas
  - Modelos probabilísticos – Distribuição Normal

Variáveis Aleatórias Discretas

- Vimos modelos probabilísticos simples, baseados em tabelas de frequência para variáveis qualitativas.
- Podemos criar modelos probabilísticos que representem todos os tipos de variáveis.
- Os modelos probabilísticos para variáveis quantitativas são muito importantes, e tais modelos serão construídos para ***variáveis aleatórias***.

Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo:
- Considere o experimento em que lançamos uma moeda duas vezes.
- Definamos a **v.a. *Y***: número de caras obtidas nos dois lançamentos.

Resultados	Probabilidades	$\boxed{Y}$
CC	1/4	2
CR	1/4	1
RC	1/4	1
RR	1/4	0

v.a Discreta

Variáveis Aleatórias Discretas

- Para uma variável discreta, a **distribuição de probabilidade** é apenas uma lista de valores possíveis com suas probabilidades associadas

- A **distribuição de probabilidade** da variável aleatória discreta

y = número de vezes que acontece o lado ‘cara’ da moeda no lançamento de duas moedas, é dada por:

y	$p(y)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Distribuição de probabilidade

Variáveis Aleatórias Discretas

- A cada ponto do espaço amostral, a variável aleatória discreta associa um valor numérico.
- Essa associação corresponde, em Matemática, o conceito de função.
- Uma variável aleatória é uma função definida no espaço amostral Ω que assume valores reais.

Ω = {0, 1, 2}

P(0) = ¼

P(1) = ½

P(2) = ¼

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & se\ y = 0 \\ \frac{1}{2}, & se\ y = 1 \\ \frac{1}{4}, & se\ y = 2 \end{cases}$$

Variáveis Aleatórias Discretas

- **Definição:** Uma função *X*, definida no espaço amostral Ω e com valores num conjunto enumerável de pontos da reta é dita uma **variável aleatória discreta**.

- Exemplo:

Um sistema de comunicação possui 48 linhas externas. O sistema é observado e algumas linhas estão sendo usadas. Seja a variável X o número de linhas em uso. X pode assumir quaisquer valores inteiros de 0 até 48. Se o sistema é observado e 10 linhas estão em uso x = 10.

$\Omega = \{0, 1, 2, ..., 48\}$

X = v.a discreta

$P(x_i) = P(X = x_i) = P(A)$

$A = \{\omega 1, \omega 2, ...\} \subset \Omega$, tal que $X(\omega i) = xi$, se $\omega i \in A$ e $X(\omega i)$ xi, se $\omega i \notin Ac$.

Variáveis Aleatórias Discretas

Definição: A **distribuição de probabilidade** é uma descrição das probabilidades associadas com os valores possíveis da variável aleatória X.

Exemplo: Considere uma pessoa infectada com determinado vírus. Seja X o número de indivíduos a quem a pessoa infectada pode transmitir o vírus. Os valores possíveis de X são {0, 1, 2, 3, 4}. Suponha que as probabilidades associadas a cada valor são:

$P(X = 0) = 0{,}651$

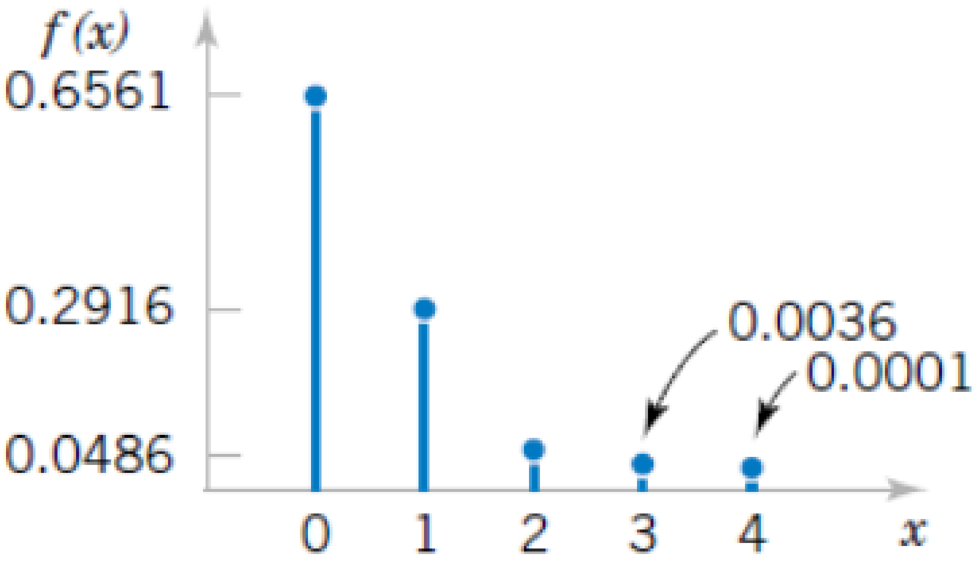
$P(X = 1) = 0{,}2916$

$P(X = 2) = 0{,}0486$

$P(X = 3) = 0{,}0036$

$P(X = 4) = 0{,}0001$

Representação gráfica Da distribuição de X



Variáveis Aleatórias Discretas
Valor Médio

- Dois números são geralmente usados para resumir a distribuição de uma variável: média e variância.

- **Definição**: Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores x1, ..., xn, chamamos valor médio ou esperança matemática de X ao valor:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Variáveis Aleatórias Discretas

Valor Médio

Exemplo:

$P(X = 0) = 0{,}6561$

$P(X = 1) = 0{,}2916$

$P(X = 2) = 0{,}0486$

$P(X = 3) = 0{,}0036$

$P(X = 4) = 0{,}0001$

E(X) = 0(0, 6561) + 1(0, 2916) + 2(0, 0486)+ 3(0, 0036) + 4(0, 0001) = **0, 4**

A **média ponderada** do número de pessoas a quem o indivíduo infectado pode transferir o virus é de **0,4**.

Variáveis Aleatórias Discretas

Variância

- **Definição:** Chamamos de *variância* da v.a. *X* o valor:

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i$$

- O **desvio padrão** de *X*, DP(*X*), é definido como a raiz quadrada positiva da variância.

Variáveis Aleatórias Discretas

- Para o exemplo:

x	$x - 0.4$	$(x - 0.4)^2$	$f(x)$	$f(x)(x - 0.4)^2$
0	−0.4	0.16	0.6561	0.104976
1	0.6	0.36	0.2916	0.104976
2	1.6	2.56	0.0486	0.124416
3	2.6	6.76	0.0036	0.024336
4	3.6	12.96	0.0001	0.001296

V(x) = 0, 36

Função de Distribuição Acumulada

- **Definição**: Dada a variável aleatória X, chamaremos de função de distribuição acumulada (f.d.a.), ou simplesmente F(x) à função:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Função de Distribuição Acumulada

P(X = 0) = 0,6561

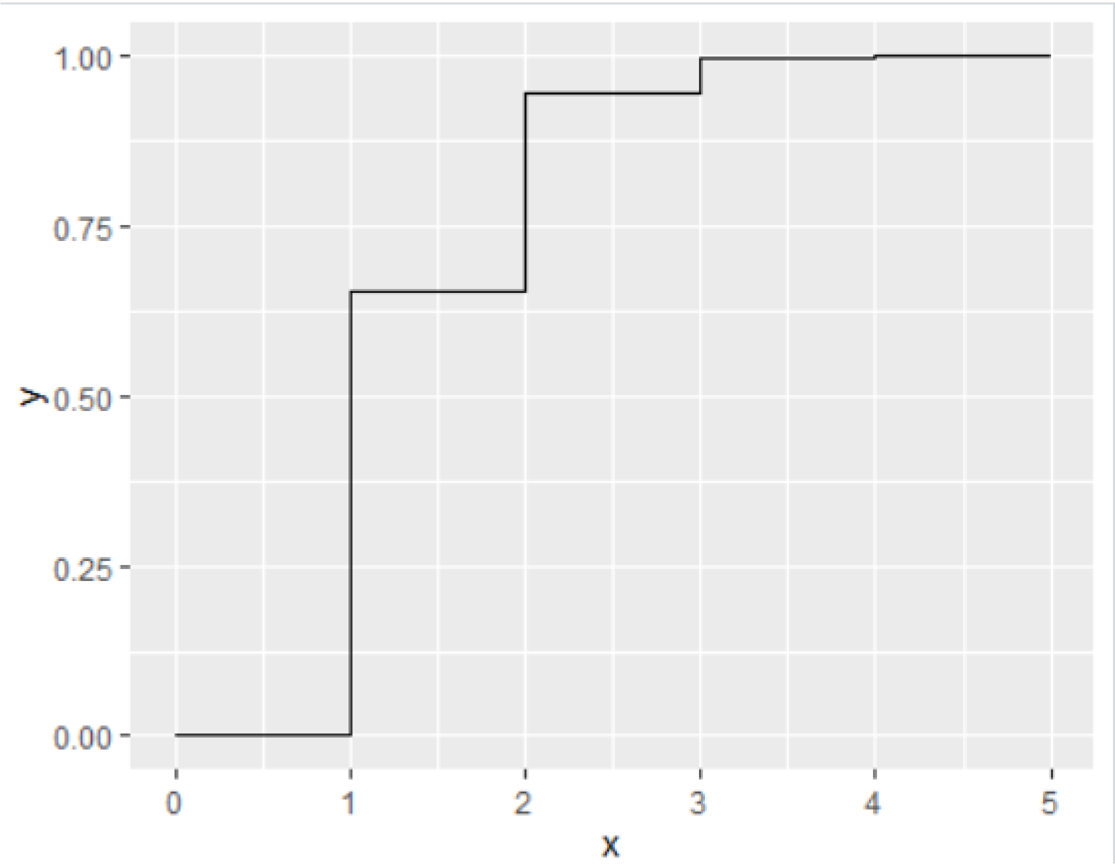
P(X = 1) = 0,2916

P(X = 2) = 0,0486

P(X = 3) = 0,0036

P(X = 4) = 0,0001

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}6561 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}9477 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}9963 & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}9999 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$



Modelos probabilísticos

Distribuição Binomial

- A distribuição binomial é a **distribuição** de **probabilidade** e estatística **discreta** do número de sucessos decorrentes de uma determinada sequência de tentativas.

- A distribuição Binomial segue às seguintes características:

    - Espaço amostral finito;
    - Apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) para cada tentativa;
    - Todos os elementos devem possuir possibilidades iguais de ocorrência; Eventos devem ser independentes um dos outros.

Modelos probabilísticos

Distribuição Binomial

- Quando utilizar a distribuição Binomial?
- A distribuição Binomial é uma distribuição discreta e deve ser utilizada para modelar situações em que a saída de interesse só pode assumir valores inteiros (discretos) como:
  - Número de caras ou coroas, 0 ou 1
  - Número de pessoas contaminadas, 0, 1, 2, 3 ou 4

Modelos probabilísticos

Distribuição Binomial

- Quando utilizar a distribuição Binomial?

Deve ser utilizada para modelar situações onde para uma determinada saída de interesse a probabilidade de ocorrências de um sucesso ‘p’ e de um fracasso ‘q’ é sempre constante.

A probabilidade de ter k sucessos em um evento que segue a distribuição binomial, é calculada através da equação a seguir:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Modelos probabilísticos

Distribuição Binomial

- As probabilidades serão indicadas por $b(k; n, p)$ e, quando a v.a. X tiver distribuição binomial com parâmetros n e p, escreveremos:

$$\boldsymbol{X \sim b(n, p)}$$

- A média e a variância de uma v.a. binomial, com parâmetros n e p são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} E(X) &= np, \\ \mathrm{Var}(X) &= npq. \end{aligned}$$

Modelos probabilísticos

Distribuição Binomial

- Dez peças são extraídas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças; qual é a probabilidade de que todas sejam defeituosas, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas?

- n = 10
- $P(Sucesso) = P(\text{peça defeituosa}) = p = 0{,}1$
- Se X indicar o número de peças defeituosas na amostra, queremos calcular:

$$P(X = 10) = b(\text{k} = 10; \text{n} = 10, \text{p} = 1/10)$$

Modelos probabilísticos

Distribuição Binomial

- Utilizando as propriedades da distribuição Binomial temos que:

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}(1/10)^{10}(9/10)^{0} = (1/10)^{10} = 1/10^{10}.$$

- A probabilidade de que, selecionando 10 peças aleatoriamente, todas sejam defeituosas é de 1/[10^10]

Modelos probabilísticos
Distribuição Binomial

- A esperança e variância da v.a X, indicando o número de peças defeituosas na amostra, são iguais a:

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{10} = 1,$$

$$\mathrm{Var}(X) = 10 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{10}$$

Modelos probabilísticos

Distribuição Binomial

- Qual a probabilidade de que uma peça seja defeituosa?

$$\mathbb{P}(X=1) = \binom{10}{1}(0,1)^{1}(1-0,1)^{10-1} = \frac{10!}{1!(10-1)!}0,1(0,9)^{9} = 0,3874.$$

- Qual a probabilidade de que nenhuma peça seja defeituosa?

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{10}{0}(0,1)^{0}(1-0,1)^{10-0} = \frac{10!}{0!(10-0)!}(0,9)^{10} = 0,3486.$$

$X \sim b(n = 10, p = 1/10)$

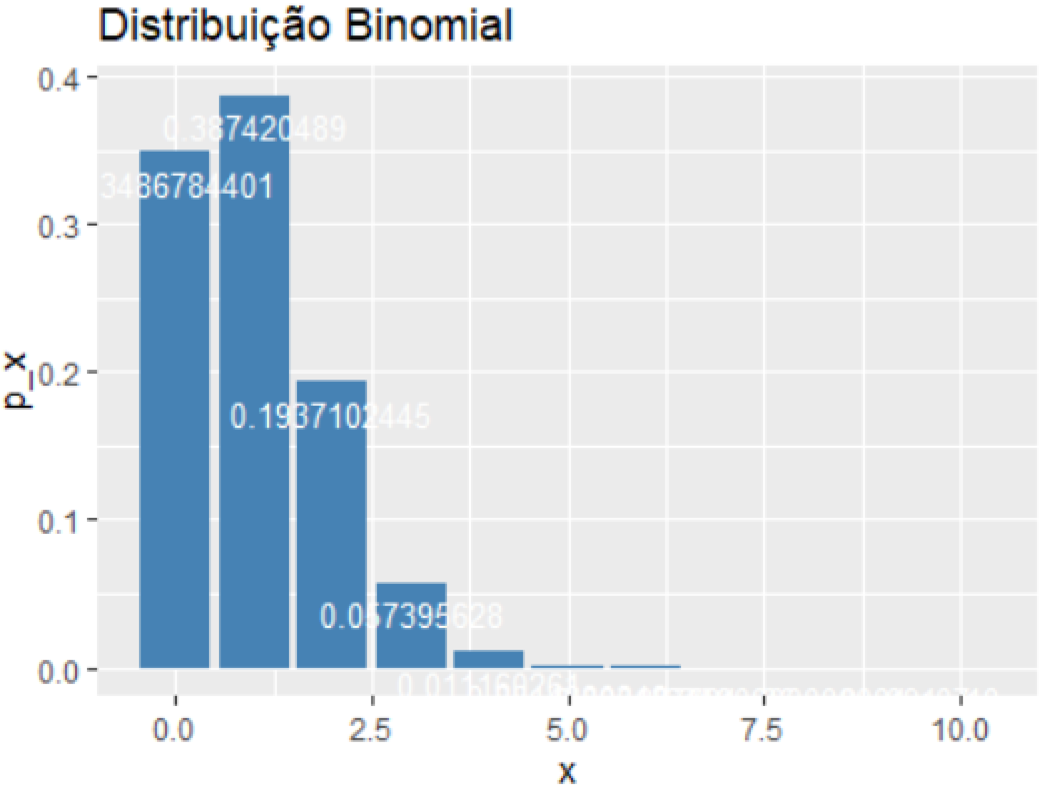
Modelos probabilísticos
Distribuição Binomial

- No mínimo duas peças defeituosas?

$P(X \geq 2) = P(X=2)+P(X=3)+\ldots+P(X=10)$

- No máximo duas peças defeituosas?

$P(X \leq 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$



$P(X = 0) = 0{,}651$

$P(X = 1) = 0{,}2916$

$P(X = 2) = 0{,}0486$

$P(X = 3) = 0{,}0036$

$P(X = 4) = 0{,}0001$

Modelos probabilísticos
Distribuição Binomial

- Considere o exemplo da pessoa infectada com determinado vírus.

- Se selecionarmos aleatoriamente 10 pessoas que já tiveram o vírus, qual a probabilidade do vírus não ter sido transmitido para nenhuma outra pessoa a partir dessas 10 pessoas?

P(Sucesso) = p = P(X>0) = 0.3439 (infectou pelo menos uma pessoa)

P(Fracasso) = q = P(X!=0) = 0,6561 (não infectou nenhuma pessoa)

$k = 0$

$n = 10$

$p = 0{,}3439$

$q = 1 - p = 0{,}6561$

$X \sim b(10, 0.3439)$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Definição**: Uma função X, definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma variável aleatória contínua.

- Dessa forma, não é possível atribuir probabilidades para um ponto específico, apenas para intervalos da reta.

- Exemplos:
  - Peso de animais
  - Tempo de falha de um equipamento eletrônico
  - Altura da maré em uma hora específica
  - Salinidade da água do mar
  - Retorno financeiro de um investimento

Variáveis Aleatórias Contínuas

*E*xperimento: Retirar uma lâmpada de um lote e medir seu “tempo de vida” antes de se queimar.

- **Espaço amostral**: conjunto de todos os números reais não negativos.

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$$

- **Evento A**: “o tempo de vida da lâmpada é inferior a 20 horas”, então:

$$A = \{t : 0 \leq t \leq 20\}.$$

V.A contínua X = tempo de vida antes da lâmpada se Queimar.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo:
- Estudos anteriores revelam a existência de uma grande lençol de água no subsolo de uma região. No entanto, sua profundidade ainda não foi determinada, sabendo-se apenas que o lençol pode estar situado em qualquer ponto entre 20 e 100 metros.

- Não podemos atribuir probabilidades à valores específicos, pois há uma quantidade não enumerável (infinita) de valores em um ponto.

- Atribuimos probabilidades à intervalos de valores, por meio de uma função. Portanto, as probabilidades são representadas por áreas.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A função f(x) é a função de densidade de probabilidade (fdp) e atribui probabilidades à intervalos de valores do tipo [a, b], e é definida por

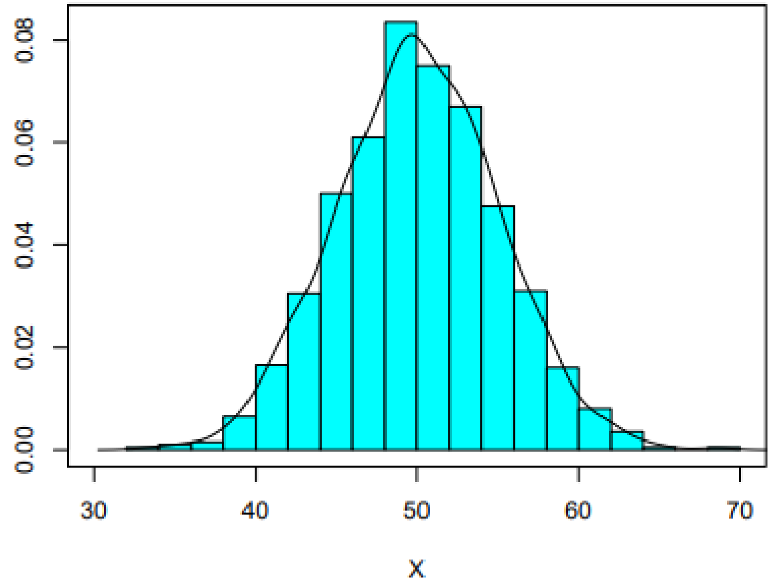
$$P[a < X < b] = \int_a^b f(x)dx$$

- A função f(x) possui as seguintes propriedades:
  - É uma função não negativa

$$f(x) \geq 0$$

  - A área total sob a curva deve ser igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



Variáveis Aleatórias Contínuas

- Observações:

- P[X = x] = 0, portanto:

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b]$$

- f (x) não representa a probabilidade de ocorrência de algum evento.

- A área sob a curva entre dois pontos é que fornecerá a probabilidade.

- A área sob a curva da uma f.d.p é igual a 1.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- O valor esperado (ou média) da v.a contínua X com função densidade f(x), é dado pela expressão:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx.$$

- A mediana é o valor Md que tem a propriedade de:

$$P(X \geq Md) \geq 1/2 \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq 1/2.$$

- A moda é o valor Mo tal que

$$f(Mo) = \max_{x} f(x).$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Para uma v.a X com densidade f(x), a variância é dada por:

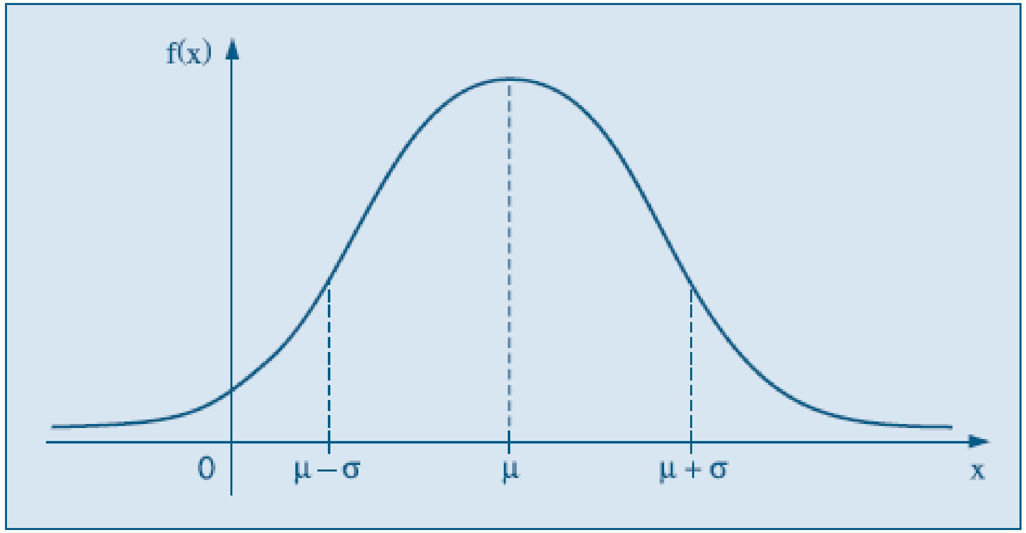
$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Distribuição Normal

- **Definição**: Dizemos que uma v.a X segue o modelo normal se sua fdp é a seguinte:

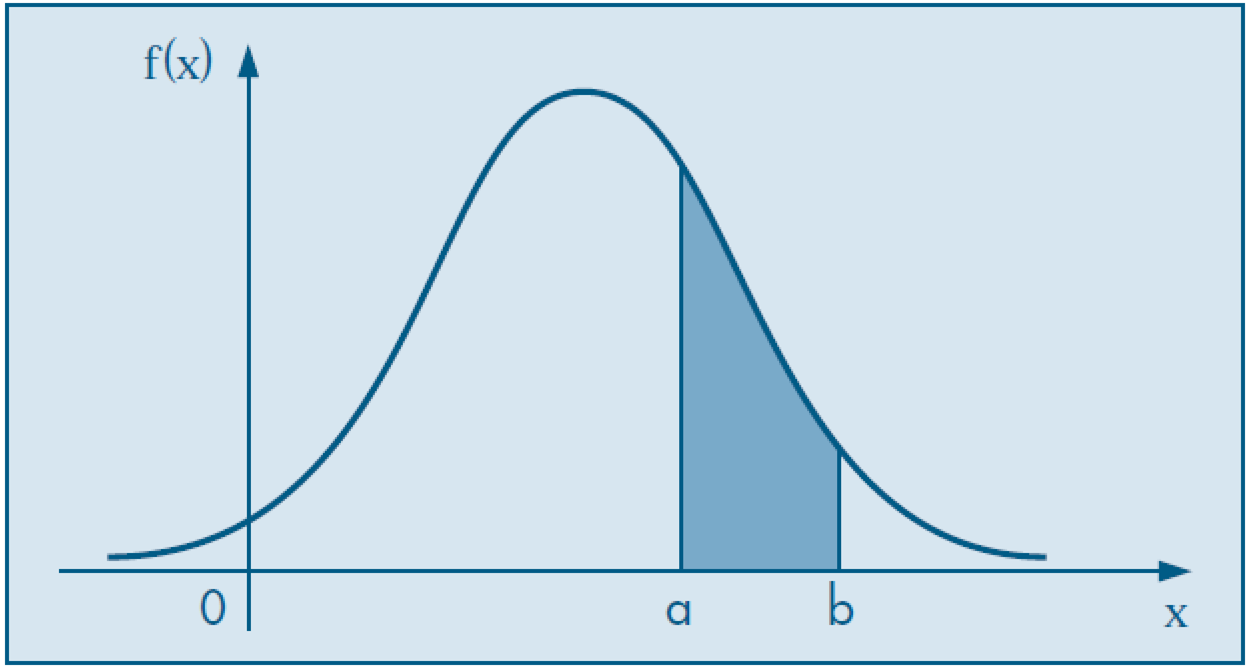
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < \infty$$

- Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Média: $E(X) = \mu$
- Variância: $Var(X) = \sigma^2$



Distribuição Normal

- Para uma v.a. Normal, a $P(a \leqslant X \leqslant b)$ é a área sob a curva:



Distribuição Normal

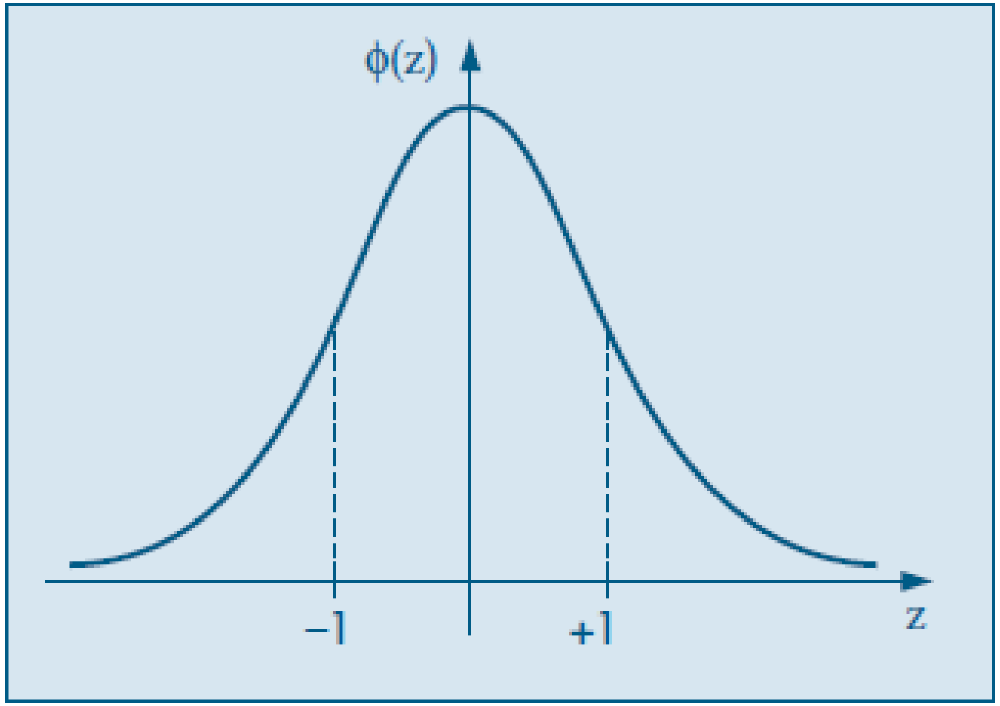
- Característcas da curva normal:
  - É simétrica em relação à μ
  - O ponto máximo (moda) de $f(x)$ é o ponto $x = \mu$
  - Os pontos de inflexão da função são $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$
  - A área total sob a curva é 1 ou 100%
  - A curva é assintótica em relação ao eixo x

Distribuição Normal

- Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, temos uma distribuição *padrão* ou *reduzida*, ou brevemente $N(0,1)$.

- Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então a v.a. definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Distribuição Normal