

重难点突破系列 二次函数题型汇编

安徽省霍邱县第一中学城南分校

一粒沙

2023 年 6 月 29 日

文章导航

1 知识梳理	1
1.1 二次函数的定义	1
1.2 二次函数的图象和性质	2
1.3 二次函数的解析式	3
1.4 二次函数的图象判断	3
1.5 二次函数的几何变换	5
1.6 二次函数的区间最值	5
1.7 二次函数的应用	6
1.8 二次函数和方程综合	6
1.9 二次函数的线段最值	7
1.10 二次函数和不等式综合	8
1.11 二次函数的面积最值	8
2 例题分析	9
2.1 题型一：二次函数的定义	9
2.2 题型二：二次函数的图象与性质	9
2.3 题型三：二次函数的解析式	11
2.4 题型四：二次函数的图象综合	12
2.5 题型五：二次函数的图象变换	14
2.6 题型六：二次函数在闭区间上的最值	15
2.7 题型七：二次函数应用	16
2.8 题型八：二次函数和方程综合	17
2.9 题型九：二次函数和不等式综合	19
2.10 题型十：二次函数的线段最值	20
2.11 题型十一：二次函数的面积最值	23

1 知识梳理

1.1 二次函数的定义

- 定义：一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的函数，叫做二次函数，其中 x 是自变量， a, b, c 分别是二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项.

注意： 二次函数的二次项系数 $a \neq 0$ ，而 b 、 c 可以为零.

1.2 二次函数的图象和性质

1. 二次函数的图象为抛物线，图象注意以下几点：开口方向，对称轴，顶点.
2. 二次函数 $y = ax^2(a \neq 0)$ 的性质：

- (1) 函数 $y = ax^2$ 的图象与 a 的符号关系：

① 当 $a > 0$ 时 \Leftrightarrow 抛物线开口向上 \Leftrightarrow 顶点为其最低点；
② 当 $a < 0$ 时 \Leftrightarrow 抛物线开口向下 \Leftrightarrow 顶点为其最高点；
③ $|a|$ 决定抛物线的开口大小； $|a|$ 越大，抛物线开口越小； $|a|$ 越小，抛物线开口越大.
- (2) 抛物线 $y = ax^2$ 的顶点是坐标原点 $(0,0)$ ，对称轴是 $x = 0$ (y 轴).

表 1: 抛物线的 $y = ax^2$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a > 0$	向上	$(0,0)$	y 轴	$x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x = 0$ 时， y 有最小值 0 .
$a < 0$	向下	$(0,0)$	y 轴	$x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x = 0$ 时， y 有最大值 0 .

3. 二次函数 $y = ax^2 + c(a \neq 0)$ 的性质：

表 2: 抛物线 $y = ax^2 + c$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a > 0$	向上	$(0,c)$	y 轴	$x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x = 0$ 时， y 有最小值 c .
$a < 0$	向下	$(0,c)$	y 轴	$x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x = 0$ 时， y 有最大值 c .

4. 二次函数 $y = a(x - h)^2 + k(a \neq 0)$ 的性质：

表 3: 抛物线 $y = a(x - h)^2 + k$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a > 0$	向上	(h,k)	$x = h$	$x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x = h$ 时， y 有最小值 k .
$a < 0$	向下	(h,k)	$x = h$	$x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大； $x = h$ 时， y 有最大值 k .

5. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 的性质:

配方：二次函数 $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

表 4: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a > 0$	向上	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	$x = -\frac{b}{2a}$	$x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$.
$a < 0$	向下	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	$x = -\frac{b}{2a}$	$x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

注意： 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与坐标轴的交点：
(1) 与 y 轴的交点： $(0, c)$;
(2) 与 x 轴的交点： 使方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 成立的 x 值.

1.3 二次函数的解析式

- 1. 一般式： $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$
已知图象上三点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) ，可用一般式来求解二次函数解析式.
- 2. 顶点式： $y = a(x - h)^2 + k(a \neq 0)$
已知抛物线的顶点或对称轴，可用顶点式求解二次函数解析式.
- 3. 两点式： $y = a(x - x_1)(x - x_2)(a \neq 0)$
已知抛物线与 x 轴的两个交点坐标，可用交点式求解二次函数解析式.
- 4. 对称式： $y = a(x - x_1)(x - x_2) + k(a \neq 0)$
已知抛物线经过点 (x_1, k) 、 (x_2, k) 时，可用对称式求二次函数解析式.

注意：
(1) 二次函数的解析式求解，最后结果一般写成一般式或顶点式，不写交点式；
(2) 任何二次函数的解析式都可以化成一般式或顶点式，但并非所有的二次函数都可以写成交点式，只有抛物线与 x 轴有交点，即 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，抛物线的解析式才可以用交点式表示，二次函数解析式的这三种形式可以互化.

1.4 二次函数的图象判断

(一) 二次函数图象与系数的关系

- 1. 二次项系数 a ： 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中， a 叫做二次项系数，显然 $a \neq 0$.
 - (1) 当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上， a 的值越大，开口越小，反之 a 的值越小，开口越大；
 - (2) 当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下， a 的值越小，开口越小，反之 a 的值越大，开口越大.总结起来， a 决定了抛物线开口的大小和方向， a 的正负决定了开口方向， $|a|$ 的大小决定开口的大小.

2. **一次项系数 b** : 在二次项系数 a 确定的前提下, b 决定了抛物线的对称轴.

(1) 在 $a > 0$ 的前提下,

当 $b > 0$ 时, $-\frac{b}{2a} < 0$, 即抛物线的对称轴在 y 轴左侧;

当 $b = 0$ 时, $-\frac{b}{2a} = 0$, 即抛物线的对称轴就是 y 轴;

当 $b < 0$ 时, $-\frac{b}{2a} > 0$, 即抛物线的对称轴在 y 轴右侧;

(2) 在 $a < 0$ 的前提下, 结论刚好与上述相反.

即当 $b > 0$ 时, $-\frac{b}{2a} > 0$, 即抛物线的对称轴在 y 轴右侧;

当 $b = 0$ 时, $-\frac{b}{2a} = 0$, 即抛物线的对称轴就是 y 轴;

当 $b < 0$ 时, $-\frac{b}{2a} < 0$, 即抛物线的对称轴在 y 轴左侧;

总结起来, 在 a 确定的前提下, b 决定了抛物线对称轴的位置.

(3) **ab 的符号**的判定: 对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 在 y 轴左边则 $ab > 0$, 在 y 轴的右侧则 $ab < 0$, 概况的说就是“左同右异”

3. **常数项 c** :

(1) 当 $c > 0$ 时, 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方, 即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为正;

(2) 当 $c = 0$ 时, 抛物线与 y 轴的交点为坐标原点, 即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为 0;

(3) 当 $c < 0$ 时, 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方, 即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为负;

总结起来, c 决定了抛物线与 y 轴交点的位置. 总之, 只要 a, b, c 都确定, 那么这条抛物线就是唯一确定的.

(二) 二次函数的图象信息

1. 根据抛物线的开口方向判断 a 的正负性;

2. 根据抛物线的对称轴判断 b 的正负性;

3. 根据抛物线与 y 轴的交点, 判断 c 的正负性;

4. 根据抛物线与 x 轴有无交点, 判断 $b^2 - 4ac$ 的正负性;

5. 根据抛物线的对称轴可得 $-\frac{b}{2a}$ 与 ± 1 的大小关系, 可得 $2a \pm b$ 的正负性;

6. 根据抛物线所经过的已知坐标的点, 可得到关于 a, b, c 的等式;

7. 根据抛物线的顶点, 判断 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 的大小

1.5 二次函数的几何变换

1. 二次函数图象的平移

平移规律：在原有函数的基础上“左加右减”，“上加下减”。

2. 二次函数图象的对称一般有五种情况，可以用一般式或顶点式表达.

(1) 关于 x 轴对称

$y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y = -ax^2 - bx - c$.

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y = -a(x - h)^2 - k$.

(2) 关于 y 轴对称

$y = ax^2 + bx + c$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y = ax^2 - bx + c$.

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y = a(x + h)^2 + k$.

(3) 关于原点对称

$y = ax^2 + bx + c$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y = -ax^2 + bx - c$.

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y = -a(x + h)^2 - k$.

(4) 关于顶点对称

$y = ax^2 + bx + c$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y = -ax^2 - bx + c - \frac{b^2}{2a}$.

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y = -a(x - h)^2 + k$.

(5) 关于点 (m, n) 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于点 (m, n) 轴对称后，得到的解析式是 $y = -a(x + h - 2m)^2 + 2n - k$.

3. 二次函数图象的翻折

函数 $y = |f(x)|$ 的图象可以由函数 $y = f(x)$ 通过关于 x 轴的翻折变换得到. 具体规则为函数 $y = f(x)$ 图象在 x 轴上方的部分不变，在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方.

1.6 二次函数的区间最值

1. 定轴定区间

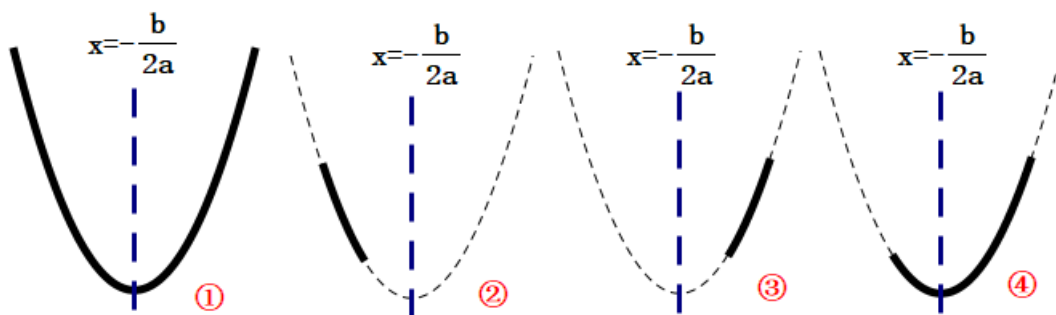
对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 在 $m \leq x \leq n$ 上的最值问题（其中 a, b, c, m 和 n 均为定值， y_{max} 表示 y 的最大值， y_{min} 表示 y 的最小值）

(1) 若自变量 x 为全体实数，如图①，函数在 $x = -\frac{b}{2a}$ 时，取到最小值，无最大值.

(2) 若 $n < -\frac{b}{2a}$ ，如图②，当 $x = m$ ， $y = y_{max}$ ；当 $x = n$ ， $y = y_{min}$.

(3) 若 $m > -\frac{b}{2a}$ ，如图③，当 $x = m$ ， $y = y_{min}$ ；当 $x = n$ ， $y = y_{max}$.

(4) 若 $m \leq -\frac{b}{2a} \leq n$ ， $n + \frac{b}{2a} > -\frac{b}{2a} - m$ ，如图④，当 $x = -\frac{b}{2a}$ ， $y = y_{min}$ ；当 $x = n$ ， $y = y_{max}$.



2. 动轴或动区间对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 在 $m \leq x \leq n$ (m, n 为参数) 条件下, 函数的最值需要分别讨论 m, n 与 $-\frac{b}{2a}$ 的大小.

1.7 二次函数的应用

1. 常见应用题类型按照考频从高到低可以分为:

- (1) 经济利润问题
- (2) 方案选择类问题
- (3) 行程问题
- (4) 建模类问题
- (5) 工程问题

2. 解应用题的关键在于审题, 理解题意, 尤其是一些条件范围的限制, 然后再列出相应的方程、不等式、一次函数、二次函数关系式求解。其中二次函数求最值是最常见的考点, 在求最值的过程中一定要注意自变量的取值范围。

1.8 二次函数和方程综合

1. 函数 $y = a_1x + b_1$ 和二次函数 $y = a_2x^2 + b_2x + c$ 的交点

- (1) 交点求解, 联立方程组 $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c \end{cases}$, 并代入求解.
- (2) 交点个数, 联立方程组 $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c \end{cases}$, 消元得到一元二次方程, 看判别式 (Δ).
- (3) 交点关系, 联立方程组 $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c \end{cases}$, 看判别式 (Δ), 再利用韦达定理.

2. 一元二次方程 $a_1x + b_1 = a_2x^2 + b_2x + c$ 的解也可以看成函数 $y = a_1x + b_1$ 和二次函数 $y = a_2x^2 + b_2x + c$ 的交点的横坐标.

3. 二次函数与一元二次方程的关系 (二次函数与 x 轴的交点情况):

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 当函数值 $y = 0$ 时的特殊情况.

图象与 x 轴的交点个数:

①当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 图象与 x 轴交于两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$, 其中的 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根. 这两点间的距离 $AB = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$.

②当 $\Delta = 0$ 时, 图象与 x 轴只有一个交点;

③当 $\Delta < 0$ 时, 图象与 x 轴没有交点. 此时:

1' 当 $a > 0$ 时, 图象落在 x 轴的上方, 无论 x 为任何实数, 都有 $y > 0$;

2' 当 $a < 0$ 时, 图象落在 x 轴的下方, 无论 x 为任何实数, 都有 $y < 0$.

4. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 y 轴一定相交, 交点坐标为 $(0, c)$;

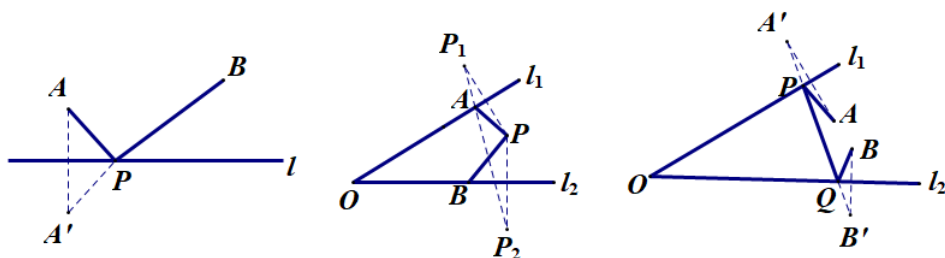
5. 二次函数常用解题方法总结:

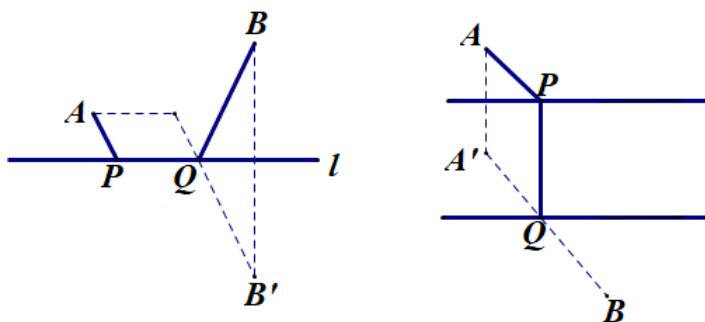
- (1) 求二次函数的图象与 x 轴的交点坐标, 需转化为一元二次方程;
- (2) 求二次函数的最大(小)值需要利用配方法将二次函数由一般式转化为顶点式;
- (3) 根据图象的位置判断二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中 a, b, c 的符号, 或由二次函数中 a, b, c 的符号判断图象的位置, 要数形结合;
- (4) 二次函数的图象关于对称轴对称, 可利用这一性质, 求和已知一点对称的点坐标, 或已知与 x 轴的一个交点坐标, 可由对称性求出另一个交点坐标;
- (5) 与二次函数有关的还有二次三项式, 二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 本身就是所含字母 x 的二次函数;

下面以 $a > 0$ 时为例, 揭示二次函数、二次三项式和一元二次方程之间的内在联系:

$\Delta > 0$	抛物线与 x 轴有两个交点	二次三项式的值可正、可零、可负	一元二次方程有两个不相等实根
$\Delta = 0$	抛物线与 x 轴只有一个交点	二次三项式的值为非负	一元二次方程有两个相等实根
$\Delta < 0$	抛物线与 x 轴无交点	二次三项式的值恒为正	一元二次方程无实根

1.9 二次函数的线段最值



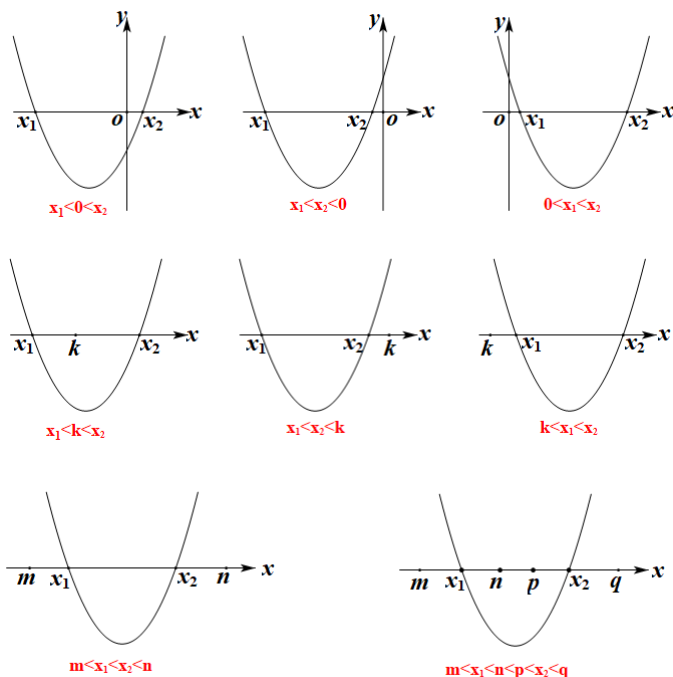


1. 定点在同侧，需要对称轴化为异侧；
2. 动线段端点不重合，需要平移转化到同一点.

1.10 二次函数和不等式综合

1. 数形结合，可以通过二次函数和其它函数的图象解不等式.
2. 根的分布: 一元二次方程根的分布问题，即一元二次方程的实根在什么区间内的问题，实质就是其相应二次函数的零点（图象与 x 轴的交点）问题，因此，借助于二次函数及其图象利用数形结合的方法来研究是非常有益的.

- (1) 0 分布或 k 分布
- (2) 区间分布



1.11 二次函数的面积最值

1. 铅垂法: $S = \frac{1}{2} \times \text{水平宽} \times \text{铅垂高}$.
分三步走: (1) 过动点做铅垂线，交另外两个定点连成的直线与一点; (2) 设出点坐标，表示线段长; (3) 利用二次函数配方求最值.
2. 切线法: 直线与抛物线相切，即联立解析式使 $\Delta = 0$.

2 例题分析

2.1 题型一：二次函数的定义

例题 2.1

- (1) 在函数① $y = \sqrt{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$; ② $y = (3x + 2)(4x - 3) - 12x^2$; ③ $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数); ④ $y = x^2 + kx + 20$ (k 是常数); ⑤ $y = x^2 + \frac{5}{x^2} + 6$ 中, y 关于 x 二次函数是_____
- (2) 当 $m =$ _____ 时, $y = (m^2 - 4)x^{m^2 - m - 4} + x + 3$ 是二次函数.
- (3) 下列函数关系中, 可以看作二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 模型的是_____
- A. 圆的周长与半径之间的关系
B. 在一定距离内, 汽车行驶的速度与行驶的时间的关系
C. 矩形周长一定时, 矩形面积和矩形边长之间的关系
D. 我国人口的自然增长率为 1%, 这样我国总人口数随年份变化的关系

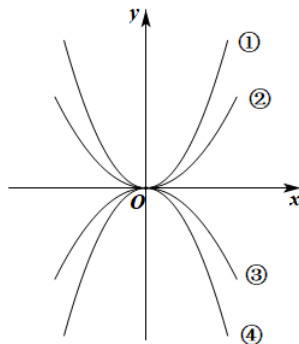
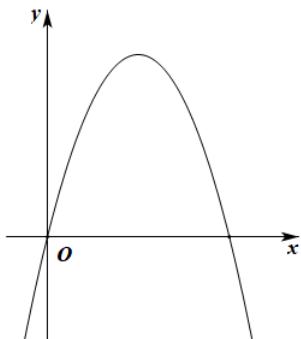
巩固 2.1

- (1) 下列函数: ① $y = \frac{1}{x^2}$; ② $y = (x - 1)(x + 3)$; ③ $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数); ④ $y = ax + x^2 + 3$ (a 为常数); ⑤ $y = (x - 1)^2 - (x + 1)(x - 1)$, 其中是二次函数的是_____
- (2) 当 $m =$ _____ 时, 函数 $y = (m - 4)x^{m^2 - 5m + 6} + 3x$ 是关于 x 的二次函数.
- (3) 已知函数 $y = (m^2 + m)x^{m^2 - m} + (m^2 + 3m + 2)x + 2m$ 是二次函数, 则函数为_____

2.2 题型二：二次函数的图象与性质

例题 2.2

- (1) 若二次函数 $y = ax^2 + bx + a^2 - 2$ (a, b 为常数) 图象如下左图, 则 a 值_____.
- (2) 如下右图, 抛物线①②③④对应的解析式为 $y = a_1x^2, y = a_2x^2, y = a_3x^2, y = a_4x^2$, 将 a_1, a_2, a_3, a_4 从小到大排列为_____.



例题 2.3

- (1) 抛物线 $y = 2x^2 + bx + 3$ 的对称轴是直线 $x = -2$, 则 b 的值为_____, 顶点坐标为_____.
- (2) 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a (a \neq 0)$ 的对称轴是直线_____, 与 x 轴的交点为_____ 和_____.
- (3) 二次函数 $y = x^2 - 2(k+1)x + 4$ 的顶点在 y 轴上, 则 $k =$ _____, 若顶点在 x 轴上, 则 $k =$ _____.

例题 2.4

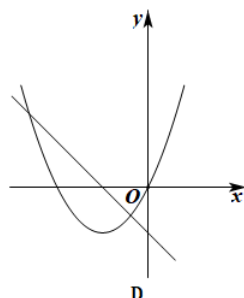
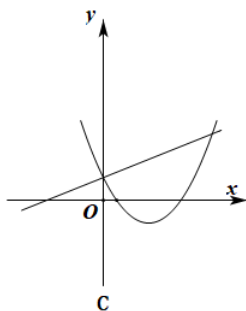
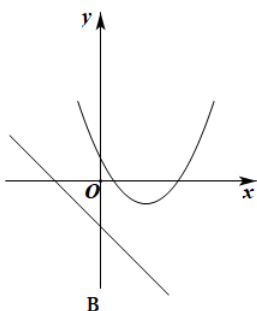
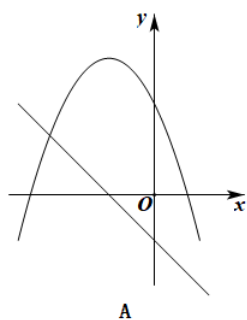
- (1) 若点 $A(2, y_1), B(-3, y_2), C(5, y_3)$ 三点在抛物线 $y = x^2 - 4x - m$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是
A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_1 > y_3$ C. $y_2 > y_3 > y_1$ D. $y_3 > y_2 > y_1$
- (2) 已知二次函数 $y = ax^2 - 4ax + c (a < 0)$, 当自变量 x 分别取 $\sqrt{2}, 3, 0$ 时, 对应的值分别为 y_1, y_2, y_3 , 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系正确的是
A. $y_3 < y_2 < y_1$ B. $y_1 < y_2 < y_3$ C. $y_2 < y_1 < y_3$ D. $y_3 < y_1 < y_2$
- (3) 已知二次函数 $y = -x^2 - (m-1)x + 1$, 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 则 m 范围是_____.

巩固 2.2

- (1) 已知抛物线经过点 $A(-2, 7), B(6, 7), C(3, -8), D(m, -8)$, 则 $m =$ _____.
- (2) 已知抛物线 $y = x^2 + 2x + 1$ 经过点 $A(m, n), B(m+6, n)$, 则 $n =$ _____.
- (3) 已知点 $A(x_1, 5), B(x_2, 5)$ 是函数 $y = x^2 - mx + 3$ 上两点, 则当 $x = x_1 + x_2$ 和 $x =$ _____ 时的函数值相等.

巩固 2.3

- (1) 已知二次函数 $y = (x-3)^2 + 1$, 下列说法: ①其图象的开口向下; ②其图象的对称轴为直线 $x = 3$; ③其图象顶点坐标为 $(3, -1)$; ④当 $x < 3$ 时, y 随 x 的增大而减小. 则正确的有
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- (2) 对于二次函数 $y = x^2 - 2mx + 3 (m > 0)$, 有下列说法:
①如果 $m = 2$, 则 y 有最小值 -1 ;
②如果当 $x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 则 $m = 1$;
③如果当 $x = 1$ 时的函数值与 $x = 2015$ 时的函数值相等, 则当 $x = 2016$ 时的函数值为 3.
其中正确的是_____. (把你认为正确的结论的序号都填上)
- (3) 在同一直角坐标系中, 函数 $y = mx + m$ 和函数 $y = -mx^2 + 2x + 2 (m \text{ 是常数, 且 } m \neq 0)$ 的图象可能是



2.3 题型三：二次函数的解析式

例题 2.5

- (1) 一个二次函数图象经过 $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(3, 28)$ 三点, 求二次函数解析式.
- (2) 已知一个二次函数的图象经过 $A(0, -1)$, $B(1, 5)$, $C(-1, -3)$ 三点, 求此二次函数的解析式并把二次函数转化成顶点式.

例题 2.6

- (1) 已知二次函数过点 $(0, -1)$, 且顶点为 $(-1, 2)$, 求二次函数的解析式.
- (2) 已知二次函数的顶点坐标为 $(2, -2)$, 且其图象经过点 $(3, 1)$, 求此二次函数的解析式, 并求出该函数图象与 x 轴的交点坐标.

巩固 2.4

- (1) 若抛物线经过 $(-3, 0)$, $(1, 0)$, 且与 y 轴交点为 $(0, 4)$, 求二次函数的解析式.
- (2) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 对称轴为 $x = 2$, 且经过点 $(1, 4)$, $(5, 0)$, 求此二次函数的解析式.

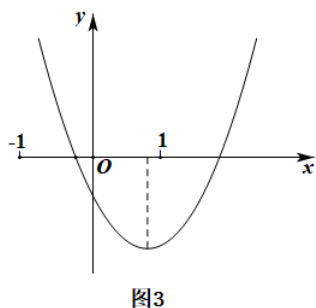
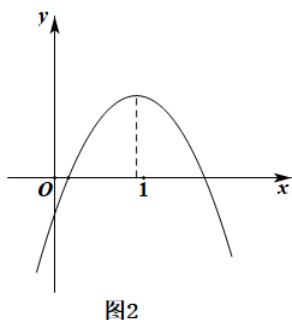
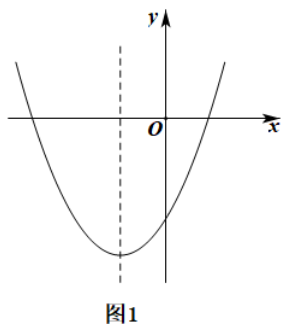
巩固 2.5

- (1) 已知二次函数图象经过点 $A(1, 3)$, $B(0, 2)$, $C(5, 3)$, 求二次函数解析式.
- (2) 已知函数 $y = x^2 - |x| - 12$ 的图象与 x 轴交于相异两点 A, B , 另一抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 A, B , 顶点为 P , 且 $\triangle APB$ 是等腰直角三角形, 求 a, b, c .

2.4 题型四：二次函数的图象综合

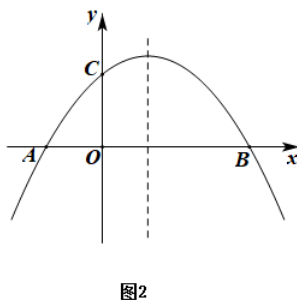
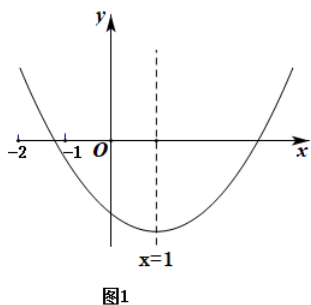
例题 2.7

- (1) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 1, 则一次函数 $y = (a+b)x + ac$ 的图象不经过
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- (2) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 2, 则下列六个代数式: $ab, ac, a+b+c, a-b+c, 2a+b, 2a-b, b^2-4ac$ 中, 其值为正的式子的个数是
- A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个
- (3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 3, 则 $|a+b+c| - |a-b+c| + |2a+b| - |2a-b|$ _____ 0.
(填 >、< 或 =) .



例题 2.8

- (1) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 1 所示, 有下列结论: ① $b^2 - 4ac > 0$; ② $abc > 0$; ③ $2a + b > 0$; ④ $9a + 3b + c < 0$; ⑤ $8a + c > 0$. 正确的有_____.
- (2) 如图 2, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象交 x 轴于 $A(x_1, 0), B(2, 0)$, 交 y 轴正半轴于 C , 且 $OA = OC$, 下列结论: ① $\frac{a-b}{c} > 0$; ② $ac = b - 1$; ③ $a = -\frac{1}{2}$; ④ $2b + c = 2$. 其中结论正确的有_____.



例题 2.9

- (1) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c + 2$ 的图象如图 1 所示, 顶点为 $(-1, 0)$, 下列结论: ① $abc < 0$; ② $b^2 - 4ac = 0$; ③ $a > 2$; ④ $4a - 2b + c > 0$. 其中正确结论的个数是_____.
- (2) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 2 所示, 给出下列结论: ① $2a + b > 0$; ② 若 $-1 < m < n < 1$, 则 $m + n < -\frac{b}{a}$; ③ $3|a| + |c| < 2|b|$; ④ $b > a > c$. 其中正确的结论有_____.

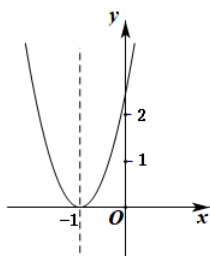


图1

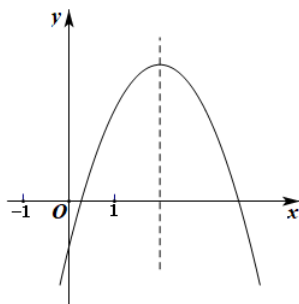


图2

例题 2.10

- (1) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 1, 则一次函数 $y = ax - \frac{b}{c}$ 的图象不经过第_____象限.
- (2) 如图 2, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(-1, 2)$ 和 $(1, 0)$, 给出五个结论: ① $abc < 0$; ② $2a + b > 0$; ③ $a + c = 1$; ④ $a > 1$; ⑤ $9a + 6b + 4c > 0$. 其中结论正确的是_____.
- (3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 3, 小丹观察得出了下面五条信息: ① $c < 0$; ② $abc > 0$; ③ $a - b + c > 0$; ④ $2a - 3b = 0$; ⑤ $c - 4b > 0$. 其中结论正确的是_____.

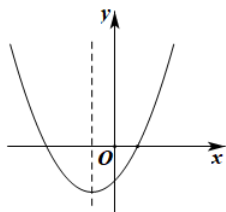


图1

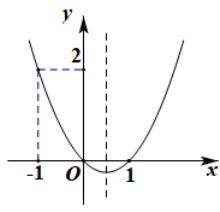


图2

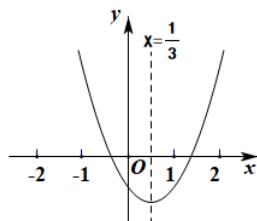


图3

巩固 2.6

- (1) 如图 1, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(-1, 2)$, 下列结论: ① $4a - 2b + c < 0$; ② $2a - b < 0$; ③ $b < -2$; ④ $(a + c)^2 < b^2$. 其中正确的结论有_____ (填序号)
- (2) 如图 2, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(1, 2)$, 下列结论: ① $2a + b < 0$; ② $abc < 0$; ③ $a + c < -1$; ④ $b^2 + 8a < 4ac$. 其中结论正确的是_____ (填序号).
- (3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图 3, 有下列五个结论: ① $abc < 0$; ② $b < a + c$; ③ $4a + 2b + c > 0$; ④ $b^2 - 4ac > 0$; ⑤ $a + b > m(am + b) (m \neq 1 \text{ 的实数})$. 其中结论正确的是_____ (填序号).

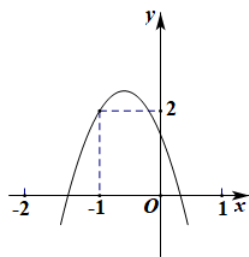


图1

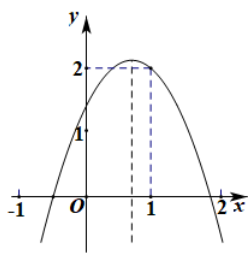


图2

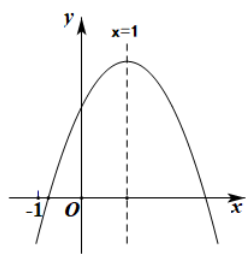


图3

巩固 2.7

- (1) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图 1 所示, 它与 x 轴两个交点分别为 $(-1, 0), (3, 0)$, 对于下列命题: ① $b - 2a = 0$; ② $abc < 0$; ③ $-a - \frac{1}{2}b + c < 0$; ④ $8a + c > 0$. 其中正确的结论有_____ (填序号)
- (2) 如图 2, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的对称轴是 $x = -1$, 且过点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 有下列结论: ① $abc > 0$; ② $a - 2b + 4c = 0$; ③ $25a - 10b + 4c = 0$; ④ $3b + 2c > 0$. 其中结论正确的是_____ (填序号).
- (3) 如图 3, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1$, 与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间 (包括这两点), 有下列结论: ① 当 $x > 3$ 时, $y < 0$; ② $3a + b < 0$; ③ $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$; ④ $4ac - b^2 > 8a$. 其中结论正确的是_____ (填序号).

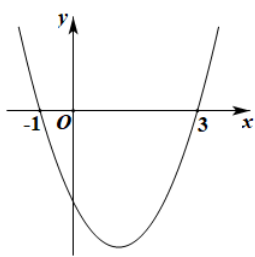


图1

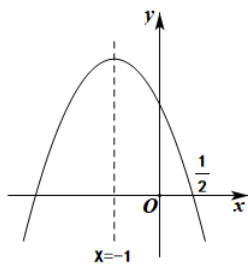


图2

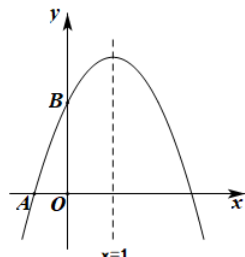


图3

2.5 题型五:二次函数的图象变换

例题 2.11

- (1) 二次函数 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 的图象如何移动就得到 $y = -2x^2$ 的图象
- A. 向左移动 1 个单位, 向上移动 3 个单位 B. 向右移动 1 个单位, 向上移动 3 个单位
- C. 向左移动 1 个单位, 向下移动 3 个单位 D. 向右移动 1 个单位, 向下移动 3 个单位
- (2) 一抛物线向右平移 3 个单位, 再向下平移 2 个单位后得到抛物线 $y = -2x^2 + 4x$, 则平移前抛物线的解析式为_____.
- (3) 如果抛物线 $y = -2x^2 + 8$ 向右平移 a 个单位后, 恰好过点 $(3, 6)$, 那么 a 值为_____.

例题 2.12

已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 1$, 求:

- (1) 与此二次函数关于 x 轴对称的二次函数解析式为_____.
- (2) 与此二次函数关于 y 轴对称的二次函数解析式为_____.
- (3) 与此二次函数关于原点对称的二次函数解析式为_____.

例题 2.13

已知二次函数 $y = ax^2 + 4ax + 4a - 1$ 的图象是 C_1 .

- (1) 求 C_1 关于点 $R(1, 0)$ 中心对称的图象 C_2 的解析式;
- (2) 设曲线 C_1, C_2 与 y 轴的交点分别为 A, B , 当 $|AB| = 18$ 时, 求 a 的值.

巩固 2.8

- (1) 如图, 已知抛物线 C_0 的解析式为 $y = x^2 - 2x$, 则抛物线 C_0 的顶点坐标_____; 将抛物线 C_0 每次向右平移 2 个单位, 平移 n 次, 依次得到抛物线 C_1, C_2, \dots, C_n (n 为正整数), 则抛物线 C_n 的解析式为_____.
- (2) 如图, 把抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 m , 抛物线 m 经过点 $A(-6, 0)$ 和原点 $O(0, 0)$, 它的顶点为 P , 它的对称轴与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 交于点 Q , 则图中阴影部分的面积为_____.

巩固 2.9

已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + 4x + k - 1 = 0$ 有实数根, k 为正整数.

- (1) 求 k 的值;
- (2) 当此方程有两个非零的整数根时, 将关于 x 的二次函数 $y = 2x^2 + 4x + k - 1$ 的图象向下平移 8 个单位, 求平移后的图象的解析式;
- (3) 在 (2) 的条件下, 将平移后的二次函数的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折, 图象的其余部分保持不变, 得到一个新的图象, 请结合这个新的图象回答: 当直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ ($b < k$) 与此图象有两个公共点时, b 的取值范围.

2.6 题型六: 二次函数在闭区间上的最值

例题 2.14

分别求出在下列条件下, 函数 $y = -2x^2 + 3x + 1$ 的最值.

- (1) x 取任意实数;
- (2) 当 $-2 \leq x \leq 0$ 时;
- (3) 当 $1 \leq x \leq 3$ 时;
- (4) 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时.

巩固 2.10

- (1) 求函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最小值;
- (2) 若 $1 \leq x \leq 2$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值;
- (3) 若 $0 \leq x \leq 1$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值;
- (4) 若 $-2 \leq x \leq 0$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

巩固 2.11

试求 $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 5$ 在 $-3 \leq x \leq 3$ 的最值.

例题 2.15

已知函数 $y = x^2 - 2x + 2$ 在 $t \leq x \leq t+1$ 范围内的最小值为 s , 写出函数 s 关于 t 的函数解析式.

例题 2.16

已知函数 $y = -9x^2 - 6ax - a^2 + 2a$ 在区间 $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ 有最大值 -3 , 求实数 a 的值.

巩固 2.12

已知函数 $y = -x^2 + 2ax + 1 - a$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上有最大值 2, 求 a 的值.

巩固 2.13

设 $y = x^2 + ax + 3 - a$, 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, y 的最小值不小于 0, 求实数 a 范围.

巩固 2.14

若函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在区间 $a \leq x \leq b (b > a)$ 上的最小值为 $2a$, 最大值为 $2b$, 求 a, b 的值.

2.7 题型七: 二次函数应用

例题 2.17

某超市销售某种玩具, 进货价为 20 元, 根据市场调查: 在一段时间内, 销售单价是 30 元时, 销售量是 400 件, 而销售单价每上涨 1 元, 就会少出售 10 件玩具, 超市要完成不少于 300 件的销售任务, 当销售单价定为多少元时, 可获得最大利润, 最大利润是多少元?

例题 2.18

某果园有 100 棵橙子树, 平均每棵树结 600 个橙子, 现准备多种一些橙子树以提高果园产量, 但是如果多种树, 那么树之间的距离和每一棵树所接受的阳光就会减少. 根据经验估计, 每多种一棵树, 平均每棵树就会少结 5 个橙子, 假设果园多种了 x 棵橙子树.

- (1) 直接写出平均每棵树结的橙子个数 y (个) 与 x 之间的关系;
- (2) 果园多种多少棵橙子树时, 可使橙子的总产量最大? 最大为多少个?

巩固 2.15

九 (1) 班数学兴趣小组经过市场调查, 整理出某种商品在第 x ($1 \leq x \leq 90$) 天的售价与销量的相关信息如下表: 已知该商品的进价为每件 30 元, 设销售该商品的每天利润为 y 元.

时间 x (天)	$1 \leq x < 50$	$50 \leq x \leq 90$
售价 (元/件)	$x + 40$	90
每天销量 (件)	$200 - 2x$	

- (1) 求出 y 与 x 的函数关系式;
- (2) 问销售该商品第几天时, 当天销售利润最大, 最大利润是多少?
- (3) 该商品在销售过程中, 共有多少天每天销售利润不低于 4800 元? 请直接写出结果.

巩固 2.16

某集团公司试销一种成本为每件 60 元的节能产品, 规定试销期间销售单价不低于成本单价, 且获利不将高于 40%. 经试销发现, 销售量 y (万件) 与销售单价 x (元) 之间的函数图象如图.

- (1) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;
- (2) 设该集团公司销售这种节能产品获得利润为 W (万元), 试求出利润 W (万元) 与销售单价 x (元) 之间的函数关系式; 并求出当销售单价定为多少元时, 公司可获得最大利润, 最大利润是多少万元?
- (3) 该公司决定每销售一件产品, 就抽出 5 元钱捐给希望工程, 若除去捐款后, 所获利润不低于 450 万元, 请你确定此时销售单价的范围.

2.8 题型八：二次函数和方程综合

例题 2.19

- (1) 抛物线 $y = x^2 + 5x + a^2$ 与一次函数 $y = ax + 2a - 1$ 有交点, 则 a 的范围_____.
- (2) 已知函数 $y = mx^2 - 3x + 2$ (m 是常数), 若一次函数 $y = x + 1$ 的图象与该函数的图象恰好只有一个交点, 则交点坐标为_____.

例题 2.20

- (1) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + 3 = 0$ 的根的情况是

A. 有两个相等的实数根
B. 无实数根

C. 有两个同号不相等实数根
D. 有两个异号实数根
- (2) 若方程 $|x^2 - 4x + 3| = m$ 有两个相异的实数解, 则 m 范围是_____.

巩固 2.17

- (1) 二次函数 $y = x^2 + kx + k - 1$ 的图象与 x 轴的交点个数_____.
- (2) 给出定义：设一条直线与一条抛物线只有一个公共点，且这条直线与这条抛物线的对称轴不平行，就称直线与抛物线相切，这条直线是这条抛物线的切线，有下列命题：
- ①直线 $y = 0$ 是抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的切线；
- ②直线 $x = -2$ 与抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 相切于点 $(-2, 1)$ ；
- ③直线 $y = x + b$ 与抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 相切，则相切于点 $(2, 1)$ ；
- ④直线 $y = kx - 2$ 与抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 相切，则 $k = \pm\sqrt{2}$.
- 其中正确的命题有_____.
- (3) 若方程 $|x^2 - 5x| = a$ 有四个不相等实根，则 a 的取值范围是_____.

例题 2.21

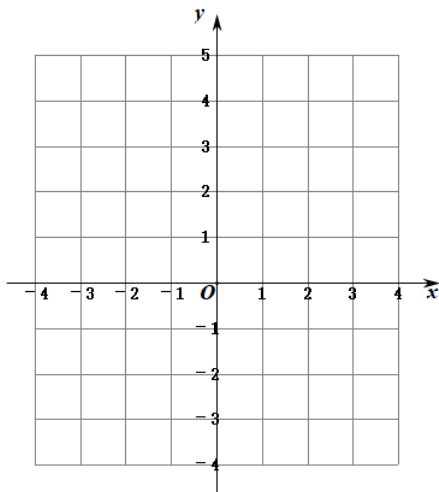
已知二次函数 $y = x^2 - x + c$.

- (1) 若点 $A(-1, n), B(2, 2n - 1)$ 在二次函数 $y = x^2 - x + c$ 的图象上，求此二次函数的最小值；
- (2) 若 $D(2, y_1), E(x_2, 2)$ 关于坐标原点成中心对称，试判断直线 DE 与抛物线 $y = x^2 - x + c + \frac{3}{8}$ 的交点个数，并说明理由.

巩固 2.18

已知二次函数 $y_1 = x^2 - 2x - 3$ 及一次函数 $y_2 = x + m$.

- (1) 求该二次函数图象的顶点坐标以及它与 x 轴的交点坐标；
- (2) 将该二次函数图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方，图象的其余部分不变，得到一个
新图象，请你在图中画出这个新图象，并求出新图象与直线 $y_2 = x + m$ 有三个不同公共点时 m 的值.



巩固 2.19

- (1) 抛物线 $y = x^2 + \sqrt{m}x + m^2$ 与 x 轴两交点间距离的最大值为_____.
- (2) 设二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 2), B(1, -1)$, 且其图象在 x 轴上所截得的线段长为 $2\sqrt{2}$, 求这个二次函数的解析式.

巩固 2.20

已知: y 关于 x 的函数 $y = (k-1)x^2 - 2kx + k+2$ 的图象与 x 轴有交点.

- (1) 求 k 的取值范围;
- (2) 若 x_1, x_2 是函数图象与 x 轴两个交点的横坐标 ($x_1 \neq x_2$), 且满足 $(k-1)x_1^2 + 2kx_2 + k+2 = 4x_1x_2$.
①求 k 的值; ②当 $k \leq x \leq k+2$ 时, 求 y 的最大值与最小值.

巩固 2.21

在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(2, 2)$, 且当 $x = 0$ 时, y 取得最小值 1.

- (1) 求此抛物线的解析式;
- (2) 已知点 $C(1, 3)$, 试探索是否存在满足下列条件的直线 l : ①直线 l 过点 $C(1, 3)$; ②直线 l 交抛物线于 E, F 两点且 C 点恰好是线段 EF 的中点. 若存在, 请求出直线 l 的函数解析式; 若不存在, 请说明理由.

巩固 2.22

已知: 抛物线与 x 轴交于 $A(-2, 0), B(4, 0)$, 与 y 轴交于 $C(0, 4)$.

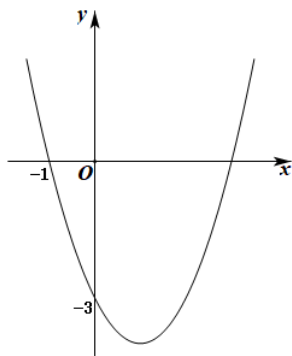
- (1) 求抛物线顶点 D 的坐标;
- (2) 设直线 CD 交 x 轴于点 E , 过点 B 作 x 轴的垂线, 交直线 CD 于点 F , 将抛物线沿其对称轴上下平移, 使抛物线与线段 EF 总有公共点. 试探究: 抛物线向上最多可以平移多少个单位长度, 向下最多可以平移多少个单位长度?

2.9 题型九：二次函数和不等式综合

例题 2.22

已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 它与 x 轴的一个交点的坐标为 $(-1, 0)$, 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -3)$.

- (1) 求二次函数的解析式, 并求图象与 x 轴的另一个交点的坐标;
- (2) 根据图象回答: 当 x 取何值时, $-3 < y < 0$.



例题 2.23

- (1) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (m-5)x + m-2 = 0$ 有实根, 且方程的两根都大于 0, 则实数 m 的取值范围是_____.
- (2) 已知方程 $ax^2 + (a+2)x + 9a = 0$ 的两个实根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < 1 < x_2$, 求实数 a 取值范围.

巩固 2.23

- (1) 方程 $x^2 - 11x + (30+a) = 0$ 有两实根, 两根都大于 5, 则实数 a 范围_____.
- (2) 方程 $7x^2 - (p+13)x + p^2 - p - 2 = 0$ 的两根 α, β 满足 $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$, 求实数 p 范围.

巩固 2.24

- (1) 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2-a)x + 5-a = 0$ 的一个根大于 0 而小于 2, 另一个根大于 4 而小于 6, 则实数 a 的取值范围是_____.
- (2) 若关于 x 的方程 $4x^2 - 2mx + n = 0$ 的解都位于 $0 < x < 1$ 的范围中, 求正整数 m, n 的值.

2.10 题型十: 二次函数的线段最值

例题 2.24

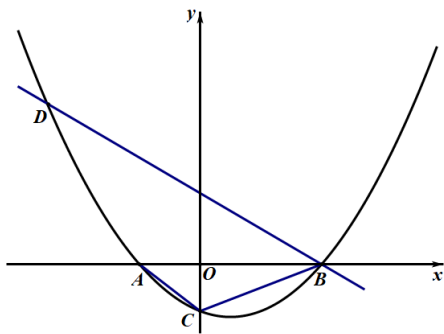
已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 经过点 $A(1, 3)$ 和点 $B(2, 1)$.

- (1) 求此抛物线解析式;
- (2) 点 C, D 分别是 x 轴和 y 轴上的动点, 求四边形 $ABCD$ 周长的最小值.

例题 2.25

如图, 已知抛物线 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$ (k 为常数, 且 $k > 0$) 与 x 轴从左至右依次交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 经过点 B 的直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ 与抛物线的另一个交点为 D .

- (1) 若点 D 的横坐标为 -5 , 求抛物线的函数表达式;
- (2) 在 (1) 的条件下, 设 F 为线段 BD 上一点 (不含端点), 连接 AF , 一动点 M 从点 A 出发, 沿线段 AF 以每秒 1 个单位的速度运动到 F , 再沿线段 FD 以每秒 2 个单位的速度运动到 D 后停止. 当点 F 的坐标是多少时, 点 M 在整个运动过程中用时最少?



例题 2.26

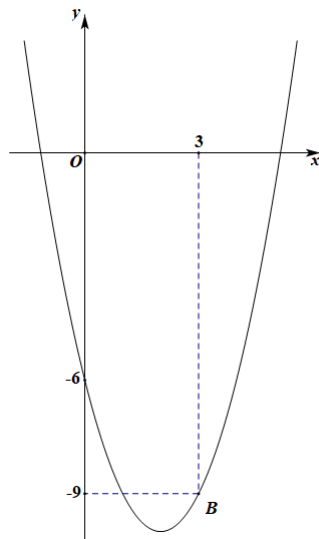
已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 经过点 $A(1, 3)$ 和点 $B(2, 1)$.

- (1) 求此抛物线解析式;
- (2) 点 C, D 分别是 x 轴和 y 轴上的动点, 求四边形 $ABCD$ 周长的最小值;
- (3) 过点 B 作 x 轴的垂线, 垂足为 E 点, 点 P 从抛物线的顶点出发, 先沿抛物线的对称轴到达 F 点, 再沿 FE 到达 E 点, 若 P 点在对称轴上的运动速度是它在直线 FE 上运动速度的 $\sqrt{2}$ 倍, 试确定点 F 的位置, 使得点 P 按照上述要求到达 E 点所用的时间最短. (要求: 简述确定 F 点位置的方法, 但不要求证明)

例题 2.27

如图, 已知抛物线 $y = ax^2 - 4x + c$ 经过点 $A(0, -6)$ 和 $B(3, -9)$.

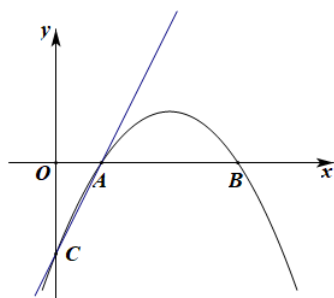
- (1) 求出抛物线的解析式;
- (2) 点 $P(m, n)$ 与点 Q 均在抛物线上 (其中 $m > 0$), 且这两点关于抛物线对称轴对称, 求 m 的值及点 Q 的坐标;
- (3) 在满足 (2) 的情况下, 在抛物线的对称轴上寻找一点 M , 使得 $\triangle QMA$ 的周长最小.



巩固 2.25

如图, 已知二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ ($c < 0$) 的图象与 x 轴的正半轴相交于点 A, B , 与 y 轴相交于点 C , 且 $OC^2 = OA \cdot OB$.

- (1) 求 c 的值;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 求该二次函数的解析式;
- (3) 设 D 是 (2) 中所确定的二次函数图象的顶点, 试问在直线 AC 是否存在一点 P 使 $\triangle PBD$ 的周长最小? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

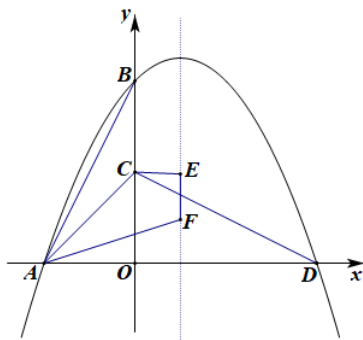
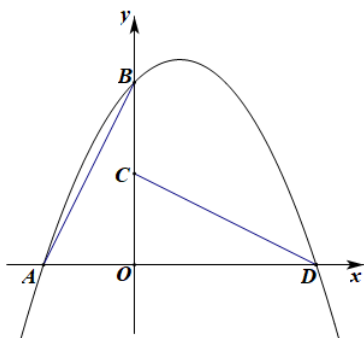


巩固 2.26

如图，在平面直角坐标系中， $Rt\triangle AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(-2,0)$, $O(0,0)$, $B(0,4)$ ，把 $\triangle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle COD$ 。

- (1) 求 C, D 两点的坐标；
- (2) 求经过 A, B, D 三点的抛物线的解析式；

(3) 在 (2) 中的抛物线的对称轴上取得两点 E, F (点 E 在点 F 的上方)，且 $EF = 1$ ，如图使四边形 $ACEF$ 的周长最小，求出 E, F 两点的坐标。



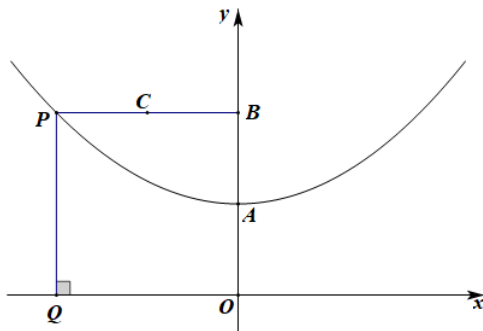
巩固 2.27

如图，抛物线的顶点 A 的坐标 $(0,2)$ ，对称轴为 y 轴，且经过点 $(-4,4)$ 。

- (1) 求抛物线的表达式；

(2) 若点 B 的坐标为 $(0,4)$ ， P 为抛物线上一点 (如图)，过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q ，连接 PB 。求证： $PQ = PB$ 。

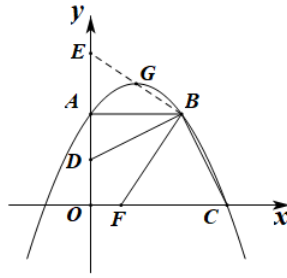
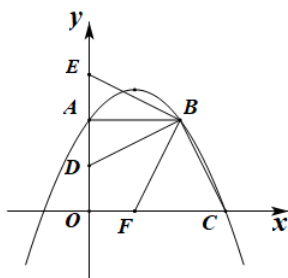
(3) 若点 $C(-2,4)$ ，利用 (2) 的结论，判断抛物线上是否存在一点 K ，使 $\triangle KBC$ 的周长最小？若存在，求出这个最小值，并求此时点 K 的坐标；若不存在，请说明理由。



巩固 2.28

如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直角梯形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上, OC 在 x 轴的正半轴上, $OA = AB = 2$, $OC = 3$, 过点 B 作 $BD \perp BC$, 交 OA 于点 D , 将 $\angle DBC$ 绕点 B 按顺时针方向旋转, 角的两边分别交 y 轴的正半轴、 x 轴的正半轴于点 E 和 F .

- (1) 求经过 A, B, C 三点的抛物线的解析式;
- (2) 当 BE 经过 (1) 中抛物线的顶点时, 求 CF 的长;
- (3) 在抛物线的对称轴上取两点 P, Q (点 Q 在点 P 的上方), 且 $PQ = 1$, 要使四边形 $BCPQ$ 的周长最小, 求出 P, Q 两点的坐标.

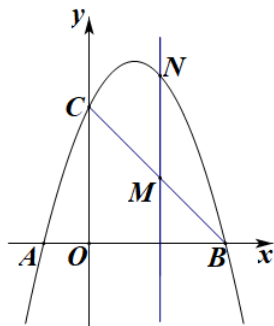


2.11 题型十一：二次函数的面积最值

例题 2.28

如图, 已知抛物线经过点 $A(-1, 0), B(3, 0), C(0, 3)$ 三点.

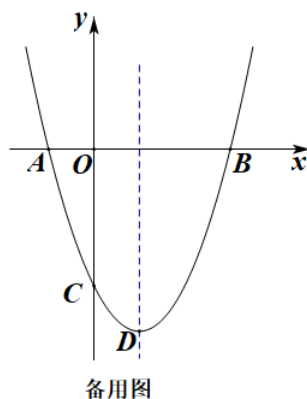
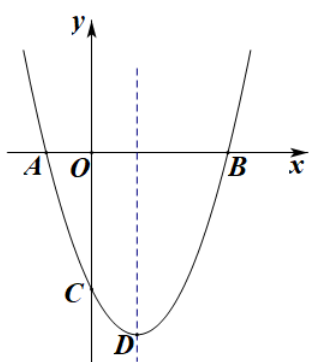
- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 点 M 是线段 BC 上的点 (不与 B, C 重合), 过 M 作 $MN \parallel y$ 轴交抛物线于 N , 若点 M 的横坐标为 m , 请用 m 的代数式表示 MN 的长.
- (3) 在 (2) 的条件下, 连接 NB, NC , 是否存在 m , 使 $\triangle BNC$ 的面积最大? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 说明理由.



例题 2.29

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 交 y 轴于 C 点, 已知抛物线的对称轴为 $x = 1$, 点 $B(3, 0)$, 点 $C(0, -3)$, D 为抛物线的顶点.

- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 在 x 轴下方且在抛物线上有一动点 F , 求四边形 $OBFC$ 的面积最大值.



巩固 2.29

如图，在直角坐标系中有一直角三角形 AOB ， O 为坐标原点， $OB = 6$ ， $\tan \angle ABO = \frac{1}{3}$ ，将此三角形绕原点 O 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle DOC$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 A, B, C 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若点 P 是第二象限内抛物线上的动点，其横坐标为 t ，是否存在一点 P ，使 $\triangle PCD$ 的面积最大？若存在，求出 $\triangle PCD$ 的面积的最大值；若不存在，请说明理由。

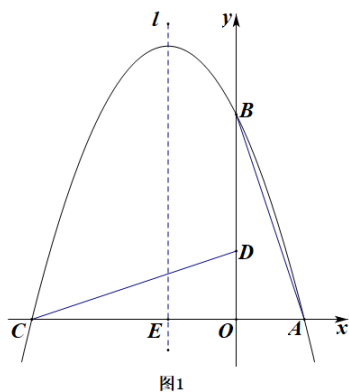
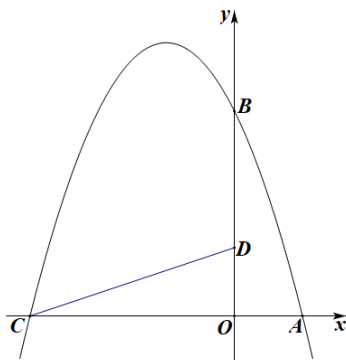


图1



备用图

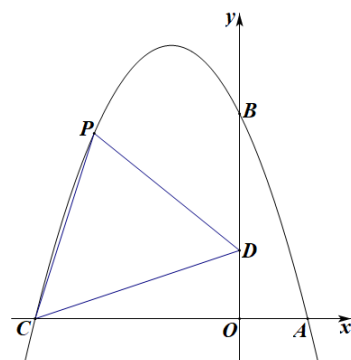


图2

巩固 2.30

如图，抛物线 $y = ax^2 + 3ax + c$ ($a > 0$) 与 y 轴交于 C 点，与 x 轴交于 A, B 两点， A 点在 B 点左侧，点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ， $OC = 3BD$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若点 D 是线段 AC 下方抛物线上的动点，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值。

