

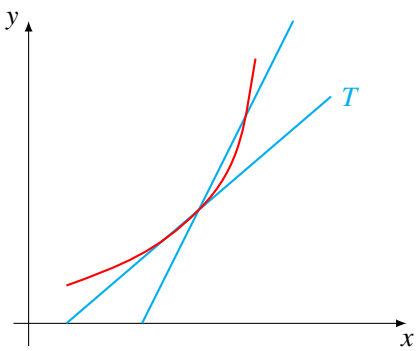
目录

1	导数的概念	1
1.1	导数的定义	1
1.2	可导与连续的关系	5
1.3	导数的几何意义	6
2	求导初步	7
2.1	导数的四则运算	7
2.2	反函数的导数	9
2.3	复合函数的求导法则	9
3	其他求导类型	13
3.1	隐函数及其求导法	13
3.2	对数求导法	14
3.3	双曲函数与反双曲函数的导数	15
3.4	高阶导数	16
3.5	参数方程的导数	16
4	函数与微分	16
4.1	微分的概念	16
5	导数在函数中的应用	16
5.1	函数单调增减性的判定	16

1 导数的概念

1.1 导数的定义

例 1: 求曲线  $y = f(x)$  在曲线上的点  $(x_0, y_0)$  处切线的斜率。



在曲线  $y = f(x)$  上点  $P_0(x_0, y_0)$  的附近另取一点  $P_1(x, y)$ , 连接  $P_1$  和  $P_0$  得割线  $P_0P_1$ , 当  $P_1$  沿曲线趋于  $P_0$  时, 割线  $P_0P_1$  的极限位置称为曲线在点  $P_0$  的切线。令  $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$ , 则  $P_0P_1$  的斜率为  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值就是曲线的切线的斜率。设切线的倾角为  $\alpha$ , 则

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

从另一角度,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  表示  $y = f(x)$  在区间  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  (或  $[x_0 + \Delta x, x_0]$ ) 的平均变化率, 极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  的变化率。

**例 2:** 求变速直线运动的物体的瞬时速度。物体产生的位移  $s$  是时间  $t$  的函数, 设运动方程为  $s = s(t)$ , 求在  $t_0$  时刻的速度。

解:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \\ v(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \end{aligned}$$

**定义** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内有定义, 当自变量  $x$  从  $x_0$  变到  $x_0 + \Delta x$  时, 则函数得相应的增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导, 并称此极限为函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的导数。记作  $f'(x_0)$ , 或  $y'(x_0)$ ,  $y'|_{x=x_0}$ ,  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$ 。即:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果记  $x_0 + \Delta x = x$ , 则上式可写为

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ 或记 } h = \Delta x,$$

则  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ , 如果上述极限不存在, 则称函数在点  $x_0$  不可导。

**例 3:** 设  $y = f(x)$  在  $x_0$  处可导

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = ?$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 1, \text{ 则 } f'(x_0) = ?$$

解:

$$\begin{aligned}(1) & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{-h} \\&= 2f'(x_0). \\(2) & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\&= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} \\&= 2f'(x_0) = 1 \\&\therefore f'(x_0) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**例 4:** 设  $f'(x_0) = 5$ , 且  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - k\Delta x)}{\Delta x} = -10$ , 则  $k = ?$

解:

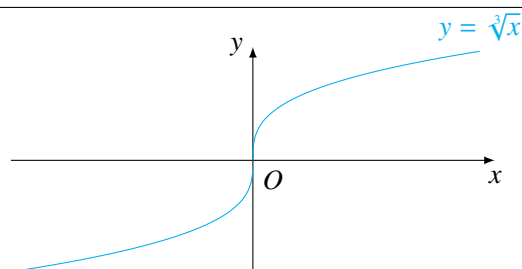
$$\begin{aligned}& \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - k\Delta x)}{\Delta x} \\&= k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - k\Delta x) - f(x_0)}{-k\Delta x} \\&= kf'(x_0) = 5k = -10 \\&\therefore k = -2\end{aligned}$$

**例 5:** 证明:  $y = \sqrt[3]{x}$  在  $x = 0$  处不可导。

解:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty \\&\therefore y = \sqrt[3]{x} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处不可导。}\end{aligned}$$

注意: 函数  $y = \sqrt[3]{x}$  在  $(0, 0)$  处的切线存在, 斜率为  $\infty$ , 所以函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$  时, 有时也称  $f(x)$  在  $x_0$  处导数无穷大。



**例 6:** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & -1 < x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的可导性。

解:

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x) - 0}{x} = 1\end{aligned}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$$

$\therefore f(x)$  在  $x = 0$  可导且  $f'(0) = 1$ .

如果函数  $f(x)$  在区间  $I$  内每一点都可导（闭区间时，左端点须右可导，右端点须左可导），则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  内可导，此时其导数值是随  $x$  而变的函数，称为  $f(x)$  的导函数，简称导数，记作

$$f'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

而  $f'(x_0)$  是  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  在  $x = x_0$  处的函数值。

🔗 总结：用定义求函数的导数（函数），可分三步进行：

1) 求增量  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

2) 求比值  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

3) 求极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

**例 7：** 求  $y = x^n$  ( $n$  为正整数)

解：

$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$  应用二项式定理

$$= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}, \text{ 所以 } (x^n)' = nx^{n-1}$$

一般有： $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ ,  $\mu$  为任意实数。

利用导数的定义和基本求导法则求出了常用初等函数的导数：

$(c)' = 0$	$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

**例 8：** 设  $y = x^3 \sqrt{x}$ ，求  $y', y'|_{x=1}$ 。

解：

$$y = x^{\frac{7}{2}}, y' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}, y'|_{x=1} = \frac{7}{2}.$$

## 1.2 可导与连续的关系

👉 **定理** 如果函数  $y = f(x)$  在点  $x$  可导, 则函数  $y = f(x)$  在点  $x$  连续。

因为  $f(x)$  在点  $x$  可导, 即  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ ,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$  (增量公式)

即  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$

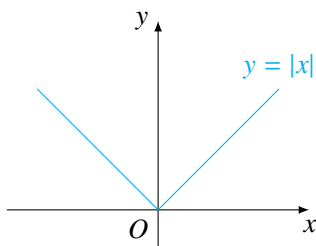
所以  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $f(x)$  在  $x$  处连续。

注: 定理的逆不一定成立, 即函数  $y = f(x)$  在点  $x$  连续, 却不一定可导。

**例 9:** 函数  $y = f(x) = |x|$ , 在点  $x = 0$  连续, 但不可导。

解:

$$\because y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ , 所以  $y = |x|$  在  $x = 0$  连续。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0, \\ -1, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

$\therefore f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$ ,  $y = |x|$  在  $x = 0$  不可导。

**例 10:** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \frac{1}{\sin x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的连续性与可导性。

解:

$\because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$ ,  $\therefore f(x)$  在  $x = 0$  处连续。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $f'(0) = 0$ 。

**例 11:** 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + bx, & \geq 0 \end{cases}$  问当  $a, b$  为何值时,  $f(x)$  在  $x = 0$  连续且可导。

解:

$f(x)$  在  $x=0$  处连续, 则  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,

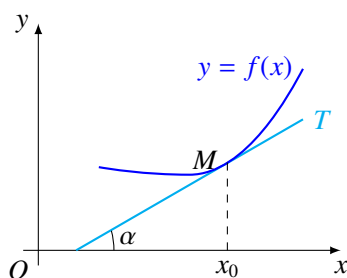
$\therefore a = 1$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + bx) - 1}{x} = b$$

$f(x)$  在  $x=0$  处可导, 则  $f'_-(0) = f'_+(0)$ ,  $\therefore b = 1$

### 1.3 导数的几何意义



👉 **导数的几何意义**  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的导数  $f'(x_0)$  是曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x_0, y_0)$  处切线的斜率。所以  $y = f(x)$  在  $(x_0, y_0)$  处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

法线方程为

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

**例 12:** 求  $y = x^2$  在  $(-1, 1)$  处的切线方程和法线方程。

解:

$$y' = 2x, \quad y'(-1) = -2$$

切线方程为  $y - 1 = -2[x - (-1)]$ , 即  $2x + y + 1 = 0$

法线方程为  $y - 1 = -\frac{1}{-2}[x - (-1)]$ , 即  $x - 2y + 3 = 0$ .

**例 13:** 设曲线  $y = 2x + \ln x$  上的点  $M(x_0, y_0)$  处的切线平行于直线  $y = 4x$ , 求点  $M$  的坐标。

解:

$y' = 2 + \frac{1}{x}$ , 因为曲线在  $M$  点的切线平行于  $y = 4x$ ,

$$\therefore y'(x_0) = 2 + \frac{1}{x_0} = 4$$

$$\text{解出 } x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 2x_0 + \ln x_0 = 1 + \ln \frac{1}{2} = 1 - \ln 2$$

所以  $M$  点的坐标为  $\left(\frac{1}{2}, 1 - \ln 2\right)$ 。

## 2 求导初步

### 2.1 导数的四则运算

**定理** 设函数  $u(x)$  和  $v(x)$  在点  $x$  可导, 则它们的和、差、积、商 (分母不为零) 也均在  $x$  处可导, 且

$$1) (\mu + \nu)' = \mu' \pm \nu';$$

$$2) (\mu\nu)' = \mu'\nu + \mu\nu';$$

$$(c\mu)' = c\mu' \quad (c \text{ 为常数})$$

$$\text{推广: } (u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 \cdots u_{n-1} u_n'$$

$$3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

**例 14:** 设  $y = x^3 + \sqrt[3]{x} + \cos x + \ln x + \sin \frac{\pi}{7}$ , 求  $y'$ 。

解:

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\cos x)' + (\ln x)' + \left(\sin \frac{\pi}{7}\right)' \\ &= 3x^2 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \sin x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

**例 15:** 设  $y = x^3 \ln x \cos x$ , 求  $y'$ 。

解:

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)' \ln x \cos x + x^3 (\ln x)' \cos x + x^3 \ln x (\cos x)' \\ &= 3x^2 \ln x \cos x + x^2 \cos x - x^3 \ln x \sin x \end{aligned}$$

**例 16:** 设  $y = (x^2 + 3a^x)(\sin x - 1)$ , 求  $y'$ 。

解:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 3a^x)' (\sin x - 1) + (x^2 + 3a^x) (\sin x - 1)' \\ &= (2x + 3a^x \ln a) (\sin x - 1) + (x^2 + 3a^x) \cos x \end{aligned}$$

**例 17:** 设  $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$ , 求  $y'$ 。

解:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x \sin x)'(1 + \cos x) - x \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{(\sin x + x \cos x)(1 + \cos x) + x \sin^2 x}{1 + \cos x} \\&= \frac{\sin x + x}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

**例 18:**  $f(x) = x^2 + \sin x$ , 求  $f'(x)$  及  $f'(\frac{\pi}{2})$ 。

解:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x \\f'(\frac{\pi}{2}) &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

**例 19:**  $y = \tan x$ , 求  $y'$ 。

解:

$$\begin{aligned}y' &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\&= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

即  $(\tan x)' = \sec^2 x$ , 同样方法可求出  $y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$  的导数。

**例 20:**  $y = \frac{1}{x}$ , 求  $y' = ?$ 。

解:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

**例 21:** 求下列函数的导数: (1)  $y = e^x \cos x - \frac{\ln x}{2x}$   
(2)  $y = \frac{1 + \tan x}{\sin x} + (1 + x^2) \arctan x$

解:



$$\begin{aligned}
 (1)y' &= (e^x \cos x)' - \left(\frac{\ln x}{2x}\right)' \\
 &= e^x \cos x - e^x \sin x - \frac{\frac{1}{x} \cdot 2x - \ln x \cdot 2}{(2x)^2} \\
 &= e^2 (\cos x - \sin x) - \frac{1 - \ln x}{2x^2} \\
 (2)y' &= \frac{(1 + \tan x)' \sin x - (1 + \tan x)(\sin x)'}{(\sin x)^2} + (1 + x^2)' \arctan x + (1 + x^2)(\arctan x)' \\
 &= \frac{\sec^2 x \sin x - (1 + \tan x) \cos x}{(\sin x)^2} + 2x \arctan x + 1
 \end{aligned}$$

## 2.2 反函数的导数

前面我们讲反函数的连续性时讲过，区间  $I$  上的单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数，现在我们假定它的导数存在来研究其反函数导数的情况。

**定理** 如果函数  $x = \varphi(y)$  在某区间  $I_y$  内单调、可导且  $\varphi'(y) \neq 0$ ，那么它的反函数  $y = f(x)$  在对应区间  $I_x$  内也可导，且  $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$  即反函数的导数等于直接函数导数的倒数。

**例 22:** 求函数  $y = \arcsin x$  的导数。

解：

$y = \arcsin x$  是  $x = \sin y$  的反函数， $x = \sin y$  在  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内单调可导，且  $(\sin y)' = \cos y$

所以  $y = \arcsin x$  在  $(-1, 1)$  内可导，且

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

由  $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ，所以  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

同理可得  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ， $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ ， $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

## 2.3 复合函数的求导法则

复合函数的求导方法是一非常重要的方法，因为一个复杂的函数不仅可由一些简单函数经四则运算得到，也经常由函数的复合运算而构成，因此我们必须研究复合函数的求导方法。

**定理** 如果  $u = \varphi(x)$  在点  $x$  可导，而  $y = f(u)$  在点  $u = \varphi(x)$  可导，则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x$  可导，且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ 或 } y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

证明. 由于  $y = f(u)$  在  $u$  可导，因此  $f'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$  存在，因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha$$

其中  $\alpha$  是  $\Delta u \rightarrow 0$  时的无穷小, 当  $\Delta u \neq 0$  时, 用  $\Delta u$  乘上式两端得

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

当  $\Delta u = 0$  时, 规定  $\alpha = 0$ , 则上式仍然成立, 两端除以  $\Delta x \neq 0$  得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

取极限得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = f'(u)\varphi'(x)$$

即

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

□

**例 23:** 设  $y = \sin(3x^2)$ , 求  $y'$ 。

解:

设  $u = 3x^2$ , 则  $y = \sin u$ , 用复合函数求导公式得  $y' = (\sin u)' \cdot (3x^2)' = \cos u \cdot 6x = 6x \cdot \cos 3x^2$

**例 24:**  $y = \ln \cos x$ , 求  $y'$ 。

解:

设  $u = \cos x$ , 则  $y = \ln u$ ,

$$y' = (\ln u)' (\cos x)' = \frac{1}{u} (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

**例 25:**  $y = e^{x^3}$ , 求  $y'$ 。

解:

$y = e^u, u = x^3$ ,

$$y' = (e^u)' (x^3)' = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

利用复合函数求导公式还可得

$$\left( \frac{1}{v(x)} \right)' = ([v(x)]^{-1})' = -[v(x)]^{-2} (v(x))' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形, 如设

$$y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$$

则  $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$  的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} \text{ 或 } y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

**例 26:**  $y = e^{\sin \frac{1}{x}}$ , 求  $y'$ 。

解:

$$y = e^u, u = \sin v, v = \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} y' &= y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (e^u)'_u (\sin v)'_v \left(\frac{1}{x}\right)'_x = e^u \cdot \cos v \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} e^{\sin \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

求导熟练后, 可不写出中间变量, 按复合顺序层层求导即可, 大家要能做到这一点。

如上例

$$y' = \left(e^{\sin \frac{1}{x}}\right)' = e^{\sin \frac{1}{x}} \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = e^{\sin \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\sin \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x} \frac{-1}{x^2}$$

注意:  $(e^{-x})' = -e^{-x}$

**例 27:** 求下列函数的导数 (1)  $y = e^{\arctan \frac{1}{x}}$  (2)  $y = \sqrt{\cot 3x}$  (3)  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

解:

$$\begin{aligned} (1) y' &= e^{\arctan \frac{1}{x}} \left(\arctan \frac{1}{x}\right)' \\ &= e^{\arctan \frac{1}{x}} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\arctan \frac{1}{x}} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{-1}{1+x^2} e^{\arctan \frac{1}{x}} \\ (2) y' &= \frac{1}{2} (\cot 3x)^{-\frac{1}{2}} (\cot 3x)' \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{\cot 3x}} (-\csc^2 3x) (3x)' \\ &= -\frac{3 \csc^2 3x}{2 \sqrt{\cot 3x}} \\ (3) y' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left[x + \sqrt{1+x^2}\right]' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left[1 + \frac{x}{1+x^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

注意: 符号  $f'[\varphi(x)]$  与  $\{[\varphi(x)]'\}$  的区别。如:  $\{f(\ln x)\}' = f'(\ln x) (\ln x)' = \frac{1}{x} f'(\ln x)$

**例 28:** 下列写法哪个正确

1. 设  $y = \ln(1+x^2)$ , 则

$$(1) y' = (\ln u)' (1+x^2)' = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$(2) y' = \left[ \ln(1+x^2) \right]' = \frac{1}{1+x^2} (1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$(3) y' = \left[ \ln(1+x^2) \right]' (1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$2. \text{ 设 } y = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}), \text{ 则 } y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \right) (x^2 - a^2)'$$

$$3. \text{ 设 } y = \sqrt{\tan \frac{x}{2}}, \text{ 则 } y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan \frac{x}{2}}} \left( \frac{x}{2} \right)'$$

**例 29:** 设下列函数可导, 求它们的导数

$$(1) y = f(e^x + x^e)$$

$$(2) y = f[(x+a)^n]$$

$$(3) y = [f(x+a)]^n$$

解:

$$(1) y' = f'(e^x + x^e) (e^x + x^e)' = f'(e^x + x^e) (e^x + ex^{e-1})$$

$$(2) y' = f'[(x+a)^n] [(x+a)]' = f'[(x+a)^n] [n(x+a)^{n-1}]$$

$$(3) y' = n[f(x+a)]^{n-1} f'(x+a)$$

**例 30:** 设  $f(x)$  可导, 且  $f'(1) = 2$ , 求  $\left. \frac{df(\sqrt{x})}{dx} \right|_{x=1}$ 。

解:

$$\left. \frac{df(\sqrt{x})}{dx} \right|_{x=1} = f'(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} f'(1) = 1$$

**例 31:** 已知  $\frac{d}{dx} \left[ f\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{1}{x}$ , 求  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

解:

$$f'\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{-2}{x^3} = \frac{1}{x}, \therefore f'\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}x^2, f'(x) = -\frac{1}{2x},$$

$$\text{所以 } f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

**例 32:** 设  $f(x)$  是可导的偶函数, 证明:  $f'(x)$  是奇函数。

证明. 因  $f(x)$  是可导的偶函数,  $f(-x) = f(x)$

等号两边对  $x$  求导,  $-f'(-x) = f'(x)$ , 即  $f'(-x) = -f'(x)$

所以  $f'(x)$  是奇函数。□

此结论也可用导数的定义证明。

### 3 其他求导类型

#### 3.1 隐函数及其求导法

由方程  $F(x, y) = 0$  所确定的  $y$  与  $x$  间的函数关系称为隐函数。

隐函数求导法:  $F(x, y) = 0$  两边对  $x$  求导 ( $y$  是  $x$  的函数  $y = f(x)$ ) 得到一个关于  $y'_x$  的方程, 解出  $y'_x$  即可。

**例 33:** 求方程  $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$  所确定的隐函数  $y$  的导数。

解:

方程两边对  $x$  求导

$$5y^4y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0$$

$$\therefore y' = \frac{1 + 21x^6}{5y^4 + 2}$$

**例 34:** 求由方程  $xy + e^y = e^x$  所确定的隐函数  $y$  的导数  $y'(0)$ 。

解:

方程两边对  $x$  求导  $y + xy' + e^y y' = e^x$

$$\therefore y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$

当  $x = 0$  时, 由方程解出  $y = 0$ ,  $\therefore y'(0) = 1$

**例 35:** 设  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = \ln 2$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ 。

解:

$$\text{原方程为 } \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \arctan \frac{y}{x} + \ln 2$$

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{xy' - y}{x^2}$$

$$\text{等号两边对 } x \text{ 求导得 } x + yy' = xy' - y, \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

**例 36:** 求椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  在点  $\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  处的切线方程。

解:

$$\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0, y' = -\frac{9x}{16y}, y' \Big|_{\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = \left(-\frac{9x}{16y}\right) \Big|_{\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{所以, 切线方程为 } y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2)$$

注: 方程  $F(x, y) = 0$  中, 变量  $x$  与  $y$  的地位是平等的, 同样可确定  $y$  的一个隐函数  $x$ , 所以可求  $\frac{dx}{dy}$ 。

### 3.2 对数求导法

先把函数  $y = f(x)$  取自然对数化为隐函数然后求导, 这种方法叫对数求导法。

**例 37:** 设  $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ , 求  $y'$ 。

解:

$x > 4$  时

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \\&= \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)] \\ \frac{1}{y} y' &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right] \\ y' &= \frac{1}{2} y \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right] \\&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right]\end{aligned}$$

**例 38:** 设  $y = [f(x)]^{g(x)}$ , 其中  $f(x), g(x)$  均为可导函数, 且  $f(x) > 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ 。

解:

$$\begin{aligned}\ln y &= g(x) \ln [f(x)] \\ \frac{1}{y} y' &= g'(x) \ln [f(x)] + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= [f(x)]^{g(x)} \left\{ g'(x) \ln [f(x)] + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}\end{aligned}$$

注: 幂函数也可以写成复合函数的形式求导  $y = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln [f(x)]}$ 。

**例 39:** 求函数  $y = x^{\sin x}$ , ( $x > 0$ ) 的导数。

解:

$$\begin{aligned}\text{法一} \quad & \text{取对数 } \ln y = \sin x \ln x, \frac{1}{y} y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \\ \therefore y' &= x^{\sin x} \left[ \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right] \\ \text{法二} \quad & y = x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x} \\ \therefore y' &= e^{\sin x \ln x} [\sin x \ln x]' = x^{\sin x} \left[ \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]\end{aligned}$$

**例 40:** 设  $y = x^x + x^{e^x} + e^x + x^e$ , 求  $y'$ 。

解:

$$y = e^{x \ln x} + e^{e^x \ln x} + e^x + x^e$$

$$\therefore y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) + e^{e^x \ln x} \left( e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) + e^x + ex^{e-1}$$

$$y' = x^x (\ln x + 1) + x^{e^x} \left( e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) + e^x + ex^{e-1}$$

**例 41:** 设由方程  $x^y = y^x$  确定  $y$  是  $x$  的函数, 求  $y'$ 。

解:

方程两边取对数  $y \ln x = x \ln y$

等号两边对  $x$  求导  $y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y'$

$$\therefore y' \left( \ln y - \frac{x}{y} \right) = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

### 3.3 双曲函数与反双曲函数的导数

公式:

$$(shx)' = chx \quad (chx)' = shx \quad (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$(arshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (arthx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

注: 分段函数的导数, 如

$$\begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 1 \\ x^2+1, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x+4, & x > 2 \end{cases}, \text{求 } f'(x).$$

解:

$f(x)$  在  $x=0$  不连续, 所以不可导:

$$f'_-(1) = 2, \quad f'_+(1) = 2, \quad \therefore f'(1) = 2, f'_-(2) = 4, f'_+(2) = \frac{1}{2},$$

所以  $f'(2)$  不存在。

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

### 3.4 高阶导数

### 3.5 参数方程的导数

## 4 函数与微分

### 4.1 微分的概念

## 5 导数在函数中的应用

### 5.1 函数单调增减性的判定