重难点突破系列　二次函数题型汇编

安徽省霍邱县第一中学城南分校
一粒沙

2022 年 8 月 3 日

文章导航

1 知识梳理

1.1 二次函数的定义

1. 定义：一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数，$a \neq 0$) 的函数，叫做二次函数，其中 x 是自变量，a, b, c 分别是二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项.

注意： 二次函数的二次项系数 $a \neq 0$，而 b、c 可以为零.

1.2 二次函数的图象和性质

1. 二次函数的图象为抛物线，图象注意以下几点：开口方向，对称轴，顶点.

2. 二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的性质：

   (1) 函数 $y = ax^2$ 的图象与 a 的符号关系：
   ① 当 $a > 0$ 时 $\Leftrightarrow$ 抛物线开口向上 $\Leftrightarrow$ 顶点为其最低点；
   ② 当 $a < 0$ 时 $\Leftrightarrow$ 抛物线开口向下 $\Leftrightarrow$ 顶点为其最高点；
   ③ $|a|$ 决定抛物线的开口大小；$|a|$ 越大，抛物线开口越小；$|a|$ 越小，抛物线开口越大.

   (2) 抛物线 $y = ax^2$ 的顶点是坐标原点 $(0, 0)$，对称轴是 $x = 0$(y轴).

表 1: 抛物线的 $y = ax^2$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a > 0$	向上	$(0, 0)$	y 轴	$x > 0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x < 0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x = 0$ 时，y 有最小值 0.
$a < 0$	向下	$(0, 0)$	y 轴	$x > 0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x < 0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x = 0$ 时，y 有最大值 0.

3. 二次函数 $y = ax^2 + c(a \neq 0)$ 的性质：

表 2: 抛物线 $y = ax^2 + c$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a > 0$	向上	$(0, c)$	y 轴	$x > 0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x < 0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x = 0$ 时，y 有最小值 c.
$a < 0$	向下	$(0, c)$	y 轴	$x > 0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x < 0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x = 0$ 时，y 有最大值 c.

4. 二次函数 $y = a(x - h)^2 + k(a \neq 0)$ 的性质：

表 3: 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a>0$	向上	(h,k)	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x=h$ 时，y 有最小值 k.
$a<0$	向下	(h,k)	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x=h$ 时，y 有最大值 k.

5. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质：

   配方：二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

表 4: 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	增减性
$a>0$	向上	$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.
$a<0$	向下	$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

> 注意： 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴的交点：
> (1) 与 y 轴的交点：$(0,c)$;
> (2) 与 x 轴的交点：使方程 $ax^2+bx+c=0$ 成立的 x 值.

1.3 二次函数的解析式

1. 一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

   已知图象上三点 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，可用一般式来求解二次函数解析式.

2. 顶点式：$y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$

   已知抛物线的顶点或对称轴，可用顶点式求解二次函数解析式.

3. 两点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$

   已知抛物线与 x 轴的两个交点坐标，可用交点式求解二次函数解析式.

4. 对称式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)+k(a\neq 0)$

   已知抛物线经过点 (x_1,k)、(x_2,k) 时，可用对称式求二次函数解析式.

注意：
(1) 二次函数的解析式求解，最后结果一般写成一般式或顶点式，不写交点式;
(2) 任何二次函数的解析式都可以化成一般式或顶点式，但并非所有的二次函数都可以写成交点式，只有抛物线与 x 轴有交点，即 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，抛物线的解析式才可以用交点式表示，二次函数解析式的这三种形式可以互化.

1.4 二次函数的图象判断

（一）二次函数图象与系数的关系

1. 二次项系数 a：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，a 叫做二次项系数，显然 $a\neq 0$.
   (1) 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，a 的值越大，开口越小，反之 a 的值越小，开口越大；
   (2) 当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，a 的值越小，开口越小，反之 a 的值越大，开口越大.
   总结起来，a 决定了抛物线开口的大小和方向，a 的正负决定了开口方向，$|a|$ 的大小决定开口的大小.
2. 一次项系数 b：在二次项系数 a 确定的前提下，b 决定了抛物线的对称轴.
   (1) 在 $a>0$ 的前提下，

当 $b>0$ 时，$-\dfrac{b}{2a}<0$，即抛物线的对称轴在 y 轴左侧；
当 $b=0$ 时，$-\dfrac{b}{2a}=0$，即抛物线的对称轴就是 y 轴；
当 $b<0$ 时，$-\dfrac{b}{2a}>0$，即抛物线的对称轴在 y 轴右侧；

(2) 在 $a<0$ 的前提下，结论刚好与上述相反.

即当 $b>0$ 时，$-\dfrac{b}{2a}>0$，即抛物线的对称轴在 y 轴右侧；
当 $b=0$ 时，$-\dfrac{b}{2a}=0$，即抛物线的对称轴就是 y 轴；
当 $b<0$ 时，$-\dfrac{b}{2a}<0$，即抛物线的对称轴在 y 轴左侧；

总结起来，在 a 确定的前提下，b 决定了抛物线对称轴的位置.
(3) ab 的符号的判定：对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 在 y 轴左边则 $ab>0$，在 y 轴的右侧则 $ab<0$，概况的说就是“左同右异”

3. 常数项 c：
   (1) 当 $c>0$ 时，抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为正；
   (2) 当 $c=0$ 时，抛物线与 y 轴的交点为坐标原点，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为 0；
   (3) 当 $c<0$ 时，抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为负；
   总结起来，c 决定了抛物线与 y 轴交点的位置. 总之，只要 a,b,c 都确定，那么这条抛物线就是唯一确定的.

（二）二次函数的图象信息

1. 根据抛物线的开口方向判断 a 的正负性；
2. 根据抛物线的对称轴判断 b 的正负性；
3. 根据抛物线与 y 轴的交点，判断 c 的正负性；
4. 根据抛物线与 x 轴有无交点，判断 b^2-4ac 的正负性；
5. 根据抛物线的对称轴可得 $-\dfrac{b}{2a}$ 与 ±1 的大小关系，可得 $2a\pm b$ 的正负性；
6. 根据抛物线所经过的已知坐标的点，可得到关于 a,b,c 的等式；
7. 根据抛物线的顶点，判断 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 的大小

1.5 二次函数的几何变换

1. 二次函数图象的平移

   平移规律：在原有函数的基础上“左加右减”，“上加下减”.

2. 二次函数图象的对称一般有五种情况，可以用一般式或顶点式表达.

(1) 关于 x 轴对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx-c$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-h)^2-k$.

(2) 关于 y 轴对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y=ax^2-bx+c$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y=a(x+h)^2+k$.

(3) 关于原点对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2+bx-c$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+h)^2-k$.

(4) 关于顶点对称

$y=ax^2+bx+c$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx+c-\dfrac{b^2}{2a}$.

$y=a(x-h)^2+k$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-h)^2+k$.

(5) 关于点 (m,n) 对称

$y=a(x-h)^2+k$ 关于点 (m,n)轴对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+h-2m)^2+2n-k$.

3. 二次函数图象的翻折

   函数 $y=|f(x)|$ 的图象可以由函数 $y=f(x)$ 通过关于 x 轴的翻折变换得到. 具体规则为函数 $y=f(x)$ 图象在 x 轴上方的部分不变，在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方.

1.6 二次函数的区间最值

1. 定轴定区间

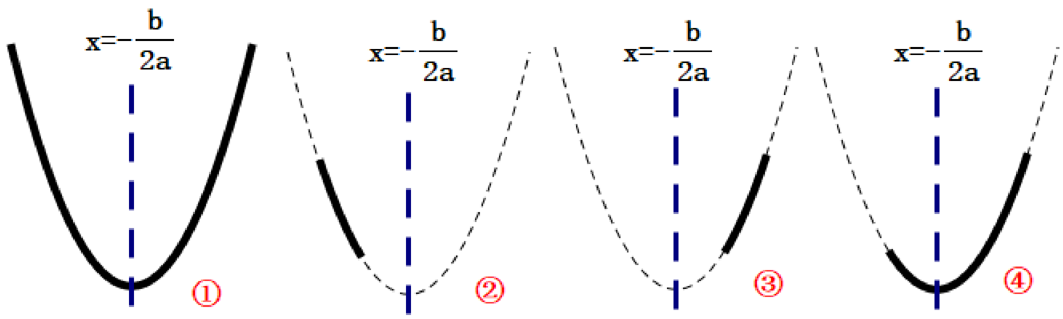
   对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 在 $m\le x\le n$ 上的最值问题（其中 a,b,c,m 和 n 均为定值，y_{max} 表示 y 的最大值，y_{min} 表示 y 的最小值）

(1) 若自变量 x 为全体实数，如图①，函数在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，取到最小值，无最大值.

(2) 若 $n<-\dfrac{b}{2a}$，如图②，当 $x=m$，$y=y_{max}$；当 $x=n$，$y=y_{min}$.

(3) 若 $m>-\dfrac{b}{2a}$，如图③，当 $x=m$，$y=y_{min}$；当 $x=n$，$y=y_{max}$.

(4) 若 $m\le-\dfrac{b}{2a}\le n,n+\dfrac{b}{2a}>-\dfrac{b}{2a}-m$，如图④，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$，$y=y_{min}$；当 $x=n$，$y=y_{max}$.



2. 动轴或动区间对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$，在 $m\le x\le n$（m,n 为参数）条件下，函数的最值需要分别讨论 m,n 与 $-\dfrac{b}{2a}$ 的大小.

1.7 二次函数的应用

1. 常见应用题类型按照考频从高到低可以分为：

   (1) 经济利润问题

   (2) 方案选择类问题

   (3) 行程问题

   (4) 建模类问题

   (5) 工程问题

2. 解应用题的关键在于审题，理解题意，尤其是一些条件范围的限制，然后再列出相应的方程、不等式、一次函数、二次函数关系式求解。其中二次函数求最值是最常见的考点，在求最值的过程中一定要注意自变量的取值范围。

1.8 二次函数和方程综合

1. 函数 $y=a_1x+b_1$ 和二次函数 $y=a_2x^2+b_2x+c$ 的交点

(1) 交点求解，联立方程组 $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c \end{cases}$，并代入求解.

(2) 交点个数，联立方程组 $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c \end{cases}$，消元得到一元二次方程，看判别式 ($\Delta$).

(3) 交点关系，联立方程组 $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c \end{cases}$，看判别式 ($\Delta$)，再利用韦达定理.

2. 一元二次方程 $a_1x + b_1 = a_2x^2 + b_2x + c$ 的解也可以看成函数 $y = a_1x + b_1$ 和二次函数 $y = a_2x^2 + b_2x + c$ 的交点的横坐标.

3. 二次函数与一元二次方程的关系（二次函数与 x 轴的交点情况）：

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 当函数值 $y = 0$ 时的特殊情况.

图象与 x 轴的交点个数：

①当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，图象与 x 轴交于两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)(x_1 \neq x_2)$，其中的 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的两根. 这两点间的距离 $AB = |x_2 - x_1| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$.

②当 $\Delta = 0$ 时，图象与 x 轴只有一个交点；

③当 $\Delta < 0$ 时，图象与 x 轴没有交点. 此时：

$1'$ 当 $a > 0$ 时，图象落在 x 轴的上方，无论 x 为任何实数，都有 $y > 0$；

$2'$ 当 $a < 0$ 时，图象落在 x 轴的下方，无论 x 为任何实数，都有 $y < 0$.

4. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 y 轴一定相交，交点坐标为 $(0, c)$；

5. 二次函数常用解题方法总结：

(1) 求二次函数的图象与 x 轴的交点坐标，需转化为一元二次方程；

(2) 求二次函数的最大（小）值需要利用配方法将二次函数由一般式转化为顶点式；

(3) 根据图象的位置判断二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中 a, b, c 的符号，或由二次函数中 a, b, c 的符号判断图象的位置，要数形结合；

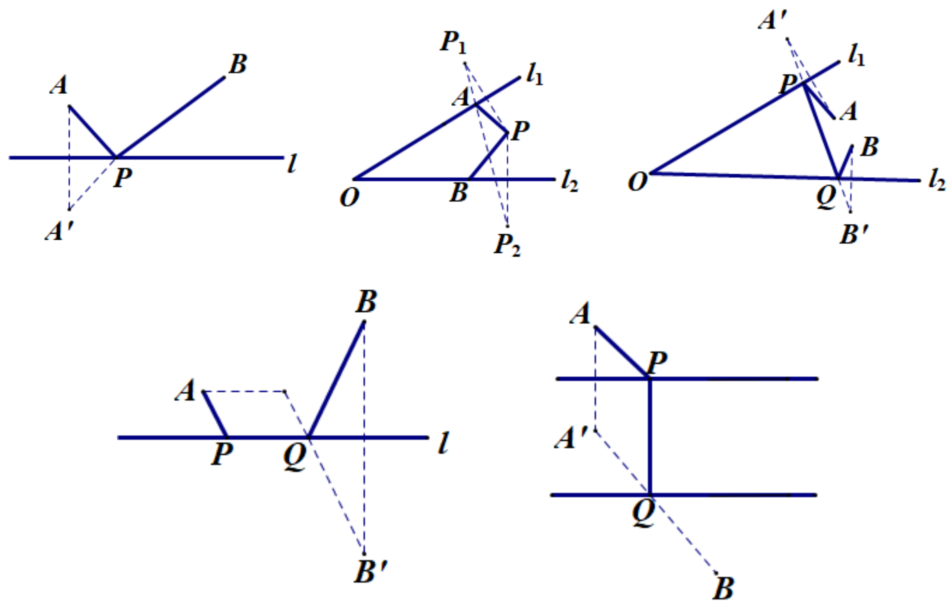
(4) 二次函数的图象关于对称轴对称，可利用这一性质，求和已知一点对称的点坐标，或已知与 x 轴的一个交点坐标，可由对称性求出另一个交点坐标；

(5) 与二次函数有关的还有二次三项式，二次三项式 $ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 本身就是所含字母 x 的二次函数；

下面以 $a > 0$ 时为例，揭示二次函数、二次三项式和一元二次方程之间的内在联系：

$\Delta > 0$	抛物线与 x 轴有两个交点	二次三项式的值可正、可零、可负	一元二次方程有两个不相等实根
$\Delta = 0$	抛物线与 x 轴只有一个交点	二次三项式的值为非负	一元二次方程有两个相等实根
$\Delta < 0$	抛物线与 x 轴无交点	二次三项式的值恒为正	一元二次方程无实根

1.9 二次函数的线段最值



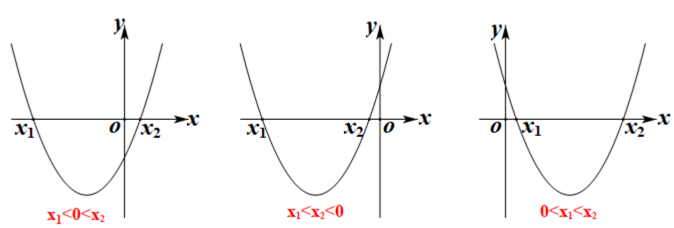
1. 定点在同侧，需要对称轴化为异侧；
2. 动线段端点不重合，需要平移转化到同一点.

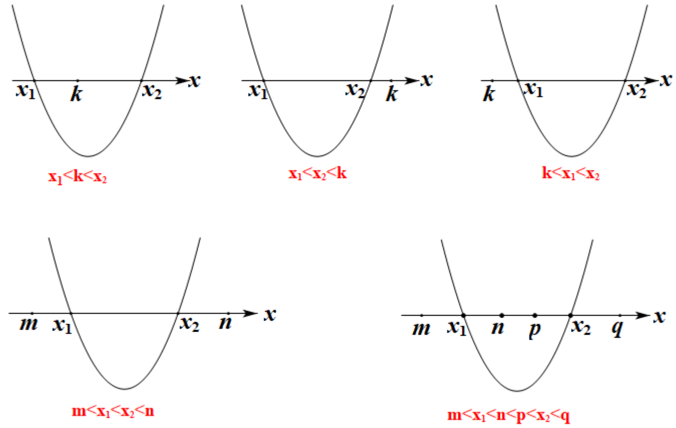
1.10 二次函数和不等式综合

1. 数形结合，可以通过二次函数和其它函数的图象解不等式.
2. 根的分布: 一元二次方程根的分布问题，即一元二次方程的实根在什么区间内的问题，实质就是其相应二次函数的零点（图象与 x 轴的交点）问题，因此，借助于二次函数及其图象利用数形结合的方法来研究是非常有益的.

   (1) 0 分布或 k 分布

   (2) 区间分布





1.11 二次函数的面积最值

1. 铅垂法：$S=\dfrac{1}{2}\times$ 水平宽 $\times$ 铅垂高.

   分三步走：(1) 过动点做铅垂线，交另外两个定点练成的直线与一点；(2) 设出点坐标，表示线段长；(3) 利用二次函数配方求最值.

2. 切线法: 直线与抛物线相切，即联立解析式使 $\Delta=0$.

2 例题分析

2.1 题型一：二次函数的定义

例题 2.1.1

(1) 在函数①$y=\sqrt{3}x^2+\dfrac{1}{2}x+1$；②$y=(3x+2)(4x-3)-12x^2$；③$y=ax^2+bx+c(a,b,c\text{是常数})$；④$y=x^2+kx+20(k\text{是常数})$；⑤$y=x^2+\dfrac{5}{x^2}+6$ 中，y 关于 x 二次函数是__________

(2) 当 $m=$__________ 时，$y=(m^2-4)x^{m^2-m-4}+x+3$ 是二次函数.

(3) 下列函数关系中，可以看作二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 模型的是__________

A. 圆的周长与半径之间的关系

B. 在一定距离内，汽车行驶的速度与行驶的时间的关系

C. 矩形周长一定时，矩形面积和矩形边长之间的关系

D. 我国人口的自然增长率为 1%，这样我国总人口数随年份变化的关系

巩固 2.1.1

(1) 下列函数：①$y=\dfrac{1}{x^2}$；②$y=(x-1)(x+3)$；③$y=x^2+bx+c$(b,c为常数)；④$y=ax+x^2+3$(a为常数)；⑤$y=(x-1)^2-(x+1)(x-1)$，其中是二次函数的是____________

(2) 当 $m=$____________ 时，函数 $y=(m-4)x^{m^2-5m+6}+3x$ 是关于 x 的二次函数.

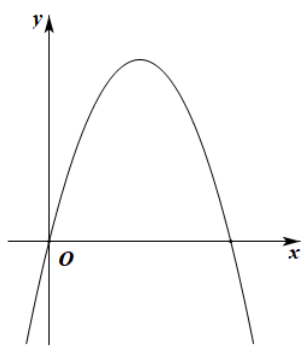
(3) 已知函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-m}+(m^2+3m+2)x+2m$ 是二次函数，则函数为____________

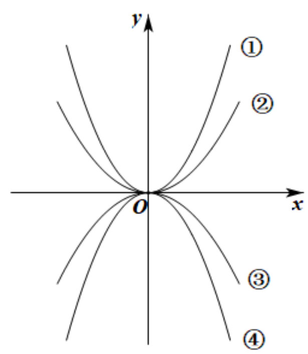
2.2 题型二：二次函数的图象与性质

例题 2.2.1

(1) 若二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-2$(a,b为常数) 图象如下左图，则 a 值____________.

(2) 如下右图，抛物线①②③④对应的解析式为 $y=a_1x^2,y=a_2x^2,y=a_3x^2,y=a_4x^2$，将 a_1,a_2,a_3,a_4 从小到大排列为____________.





例题 2.2.2

(1) 抛物线 $y=2x^2+bx+3$ 的对称轴是直线 $x=-2$，则 b 的值为_______，顶点坐标为_______.

(2) 抛物线 $y=ax^2-2ax-3a(a\neq 0)$ 的对称轴是直线_______，与 x 轴的交点为_______ 和_______.

(3) 二次函数 $y=x^2-2(k+1)x+4$ 的顶点在 y 轴上，则 $k=$_______，若顶点在 x 轴上，则 $k=$_______.

例题 2.2.3

(1) 若点 $A(2,y_1),B(-3,y_2),C(5,y_3)$ 三点在抛物线 $y=x^2-4x-m$ 的图象上，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是

(A) $y_1>y_2>y_3$　(B) $y_2>y_1>y_3$　(C) $y_2>y_3>y_1$　(D) $y_3>y_2>y_1$

(2) 已知二次函数 $y=ax^2-4ax+c(a<0)$，当自变量 x 分别取 $\sqrt{2},3,0$ 时，对应的值分别为 y_1,y_2,y_3，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系正确的是

(A) $y_3<y_2<y_1$　(B) $y_1<y_2<y_3$　(C) $y_2<y_1<y_3$　(D) $y_3<y_1<y_2$

(3) 已知二次函数 $y=-x^2-(m-1)x+1$，当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大，则 m 范围是______.

巩固 2.2.1

(1) 已知抛物线经过点 $A(-2,7),B(6,7),C(3,-8),D(m,-8)$，则 $m=$______.

(2) 已知抛物线 $y=x^2+2x+1$ 经过点 $A(m,n),B(m+6,n)$，则 $n=$______.

(3) 已知点 $A(x_1,5),B(x_2,5)$ 是函数 $y=x^2-mx+3$ 上两点，则当 $x=x_1+x_2$ 和 $x=$______ 时的函数值相等.

巩固 2.2.2

(1) 已知二次函数 $y=(x-3)^2+1$，下列说法：①其图象的开口向下；②其图象的对称轴为直线 $x=3$；③其图象顶点坐标为 $(3,-1)$；④当 $x<3$ 时，y 随 x 的增大而减小. 则正确的有

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

(2) 对于二次函数 $y=x^2-2mx+3(m>0)$，有下列说法：

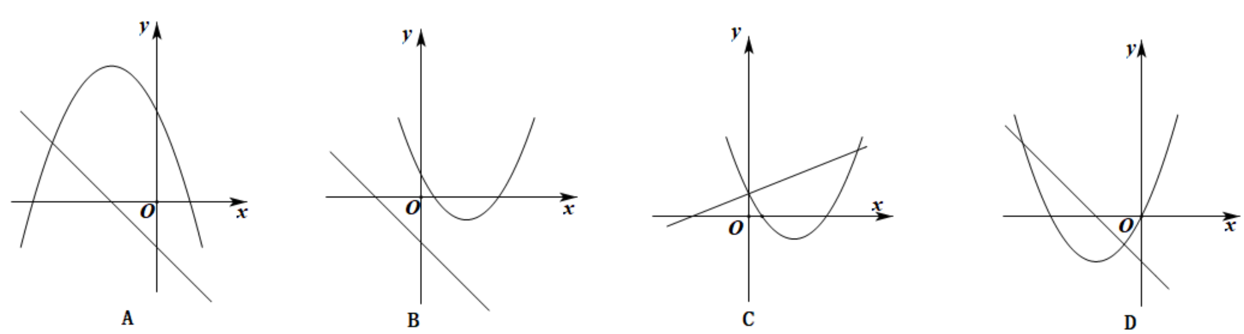
①如果 $m=2$，则 y 有最小值 -1；

②如果当 $x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，则 $m=1$；

③如果当 $x=1$ 时的函数值与 $x=2015$ 时的函数值相等，则当 $x=2016$ 时的函数值为 3.

其中正确的是______.（把你认为正确的结论的序号都填上）

(3) 在同一直角坐标系中，函数 $y=mx+m$ 和函数 $y=-mx^2+2x+2(m\text{是常数，且}m\neq 0)$ 的图象可能是



2.3 题型三：二次函数的解析式

例题 2.3.1

(1) 一个二次函数图象经过 $A(1,0), B(2,3), C(3,28)$ 三点，求二次函数解析式.

(2) 已知一个二次函数的图象经过 $A(0,-1), B(1,5), C(-1,-3)$ 三点，求此二次函数的解析式并把二次函数转化成顶点式.

例题 2.3.2

(1) 已知二次函数过点 $(0,-1)$，且顶点为 $(-1,2)$，求二次函数的解析式.

(2) 已知二次函数的顶点坐标为 $(2,-2)$，且其图象经过点 $(3,1)$，求此二次函数的解析式，并求出该函数图象与 x 轴的交点坐标.

巩固 2.3.1

(1) 若抛物线经过 $(-3,0)$，$(1,0)$，且与 y 轴交点为 $(0,4)$，求二次函数的解析式.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 对称轴为 $x=2$，且经过点 $(1,4),(5,0)$，求此二次函数的解析式.

巩固 2.3.2

(1) 已知二次函数图象经过点 $A(1,3), B(0,2), C(5,3)$，求二次函数解析式.

(2) 已知函数 $y=x^2-|x|-12$ 的图象与 x 轴交于相异两点 A,B，另一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 A,B，顶点为 P，且 ΔAPB 是等腰直角三角形，求 a,b,c.

2.4 题型四：二次函数的图象综合

例题 2.4.1

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1，则一次函数 $y=(a+b)x+ac$ 的图象不经过

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 2，则下列六个代数式：$ab, ac, a+b+c, a-b+c, 2a+b, 2a-b, b^2-4ac$ 中，其值为正的式子的个数是

(A) 5 个 (B) 4 个 (C) 3 个 (D) 2 个

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 3，则 $|a+b+c|-|a-b+c|+|2a+b|-|2a-b|$______0.（填 $>$、$<$ 或 $=$）.

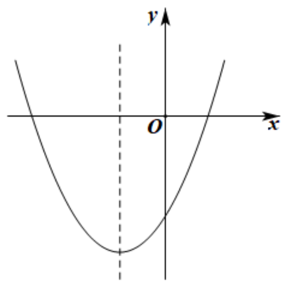


图1

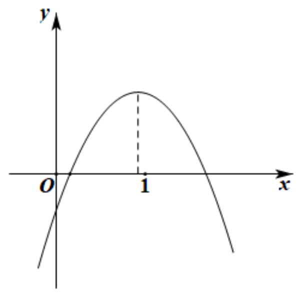


图2

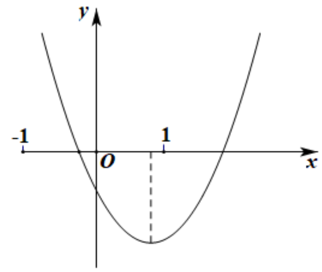


图3

例题 2.4.2

(1) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1 所示，有下列结论：①$b^2-4ac>0$；②$abc>0$；③$2a+b>0$；④$9a+3b+c<0$；⑤$8a+c>0$. 正确的有_______.

(2) 如图 2，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象交 x 轴于 $A(x_1,0),B(2,0)$，交 y 轴正半轴于 C，且 $OA=OC$，下列结论：①$\dfrac{a-b}{c}>0$；②$ac=b-1$；③$a=-\dfrac{1}{2}$；④$2b+c=2$. 其中结论正确的有_______.

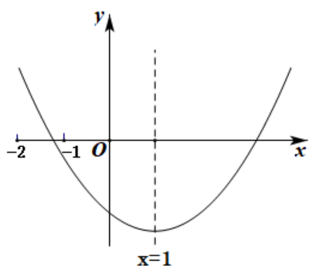


图1

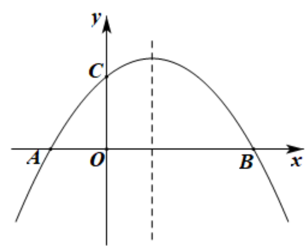


图2

例题 2.4.3

(1) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c+2$ 的图象如图 1 所示，顶点为 $(-1,0)$，下列结论：①$abc<0$；②$b^2-4ac=0$；③$a>2$；④$4a-2b+c>0$. 其中正确结论的个数是_______.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 2 所示，给出下列结论：：①$2a+b>0$；②若 $-1<m<n<1$，则 $m+n<-\dfrac{b}{a}$；③$3|a|+|c|<2|b|$；④$b>a>c$. 其中正确的结论有_______.

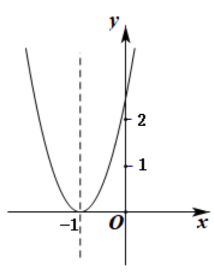


图1

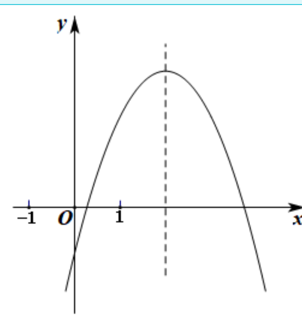


图2

例题 2.4.4

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1，则一次函数 $y=ax-\dfrac{b}{c}$ 的图象不经过第_______象限.

(2) 如图 2，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-1,2)$ 和 $(1,0)$，给出五个结论：①$abc<0$；②$2a+b>0$；③$a+c=1$；④$a>1$；⑤$9a+6b+4c>0$. 其中结论正确的是_______.

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 3，小丹观察得出了下面五条信息：①$c<0$；②$abc>0$；③$a-b+c>0$；④$2a-3b=0$；⑤$c-4b>0$. 其中结论正确的是_______.

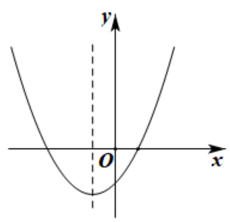


图1

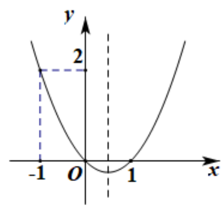


图2

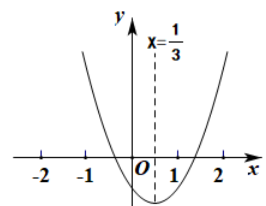


图3

巩固 2.4.1

(1) 如图 1，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-1,2)$，下列结论：①$4a-2b+c<0$；②$2a-b<0$；③$b<-2$；④$(a+c)^2<b^2$. 其中正确的结论有_______（填序号）

(2) 如图 2，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(1,2)$，下列结论：①$2a+b<0$；②$abc<0$；③$a+c<-1$；④$b^2+8a<4ac$. 其中结论正确的是_______（填序号）.

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图 3，有下列五个结论：①$abc<0$；②$b<a+c$；③$4a+2b+c>0$；④$b^2-4ac>0$；⑤$a+b>m(am+b)$（$m\neq 1$ 的实数）. 其中结论正确的是_______（填序号）.

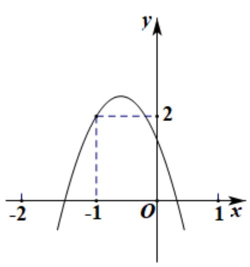


图1

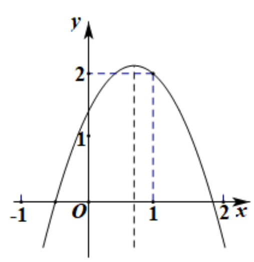


图2

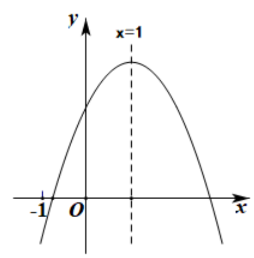


图3

巩固 2.4.2

(1) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图 1 所示，它与 x 轴两个交点分别为 $(-1,0),(3,0)$，对于下列命题：①$b-2a=0$；②$abc<0$；③$-a-\dfrac{1}{2}b+c<0$；④$8a+c>0$. 其中正确的结论有_______（填序号）

(2) 如图 2，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的对称轴是 $x=-1$，且过点 $(\dfrac{1}{2},0)$，有下列结论：①$abc>0$；②$a-2b+4c=0$；③$25a-10b+4c=0$；④$3b+2c>0$. 其中结论正确的是_______（填序号）.

(3) 如图 3，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，对称轴为直线 $x=1$，与 y 轴的交点 B 在 $(0,2)$ 和 $(0,3)$ 之间（包括这两点），有下列结论：①当 $x>3$ 时，$y<0$；②$3a+b<0$；③$-1\leq a\leq -\dfrac{2}{3}$；④$4ac-b^2>8a$. 其中结论正确的是_______（填序号）.

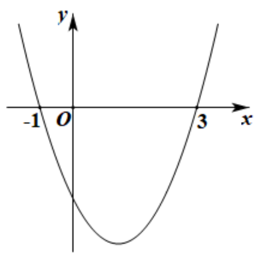


图1

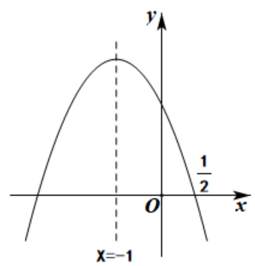


图2

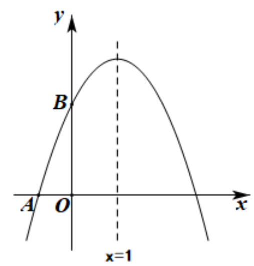


图3

2.5 题型五：二次函数的图象变换

例题 2.5.1

(1) 二次函数 $y=-2x^2+4x+1$ 的图象如何移动就得到 $y=-2x^2$ 的图象

(A) 向左移动 1 个单位，向上移动 3 个单位 (B) 向右移动 1 个单位，向上移动 3 个单位

(C) 向左移动 1 个单位，向下移动 3 个单位 (D) 向右移动 1 个单位，向下移动 3 个单位

(2) 一抛物线向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后得到抛物线 $y=-2x^2+4x$，则平移前抛物线的解析式为_______.

(3) 如果抛物线 $y=-2x^2+8$ 向右平移 a 个单位后，恰好过点 $(3,6)$，那么 a 值为_______.

例题 2.5.2

已知二次函数 $y=x^2-2x-1$，求：

(1) 与此二次函数关于 x 轴对称的二次函数解析式为_______.

(2) 与此二次函数关于 y 轴对称的二次函数解析式为_______.

(3) 与此二次函数关于原点对称的二次函数解析式为_______.

例题 2.5.3

已知二次函数 $y = ax^2 + 4ax + 4a - 1$ 的图象是 C_1.

(1) 求 C_1 关于点 $R(1,0)$ 中心对称的图象 C_2 的解析式；

(2) 设曲线 C_1, C_2 与 y 轴的交点分别为 A, B，当 $|AB| = 18$ 时，求 a 的值.

巩固 2.5.1

(1) 如图，已知抛物线 C_0 的解析式为 $y = x^2 - 2x$，则抛物线 C_0 的顶点坐标_______；将抛物线 C_0 每次向右平移 2 个单位，平移 n 次，依次得到抛物线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$（n 为正整数），则抛物线 C_n 的解析式为_______.

(2) 如图，把抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 m，抛物线 m 经过点 $A(-6,0)$ 和原点 $O(0,0)$，它的顶点为 P，它的对称轴与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 交于点 Q，则图中阴影部分的面积为_______.

巩固 2.5.2

已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + 4x + k - 1 = 0$ 有实数根，k 为正整数.

(1) 求 k 的值；

(2) 当此方程有两个非零的整数根时，将关于 x 的二次函数 $y = 2x^2 + 4x + k - 1$ 的图象向下平移 8 个单位，求平移后的图象的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，将平移后的二次函数的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新的图象，请结合这个新的图象回答：当直线 $y = \frac{1}{2}x + b(b < k)$ 与此图象有两个公共点时，b 的取值范围.

2.6 题型六：二次函数在闭区间上的最值

例题 2.6.1

分别求出在下列条件下，函数 $y = -2x^2 + 3x + 1$ 的最值.

(1) x 取任意实数；(2) 当 $-2 \leqslant x \leqslant 0$ 时；(3) 当 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 时；(4) 当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时.

巩固 2.6.1

(1) 求函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最小值；

(2) 若 $1 \leqslant x \leqslant 2$，求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值；

(3) 若 $0 \leqslant x \leqslant 1$，求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值；

(4) 若 $-2 \leqslant x \leqslant 0$，求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

巩固 2.6.2

试求 $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 5$ 在 $-3 \leqslant x \leqslant 3$ 的最值.

例题 2.6.2

已知函数 $y=x^2-2x+2$ 在 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 范围内的最小值为 s，写出函数 s 关于 t 的函数解析式.

例题 2.6.3

已知函数 $y=-9x^2-6ax-a^2+2a$ 在区间 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}$ 有最大值 -3，求实数 a 的值.

巩固 2.6.3

已知函数 $y=-x^2+2ax+1-a$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上有最大值 2，求 a 的值.

巩固 2.6.4

设 $y=x^2+ax+3-a$，当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，y 的最小值不小于 0，求实数 a 范围.

巩固 2.6.5

若函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{13}{2}$ 在区间 $a\le x\le b(b>a)$ 上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$，求 a,b 的值.

2.7 题型七：二次函数应用

例题 2.7.1

某超市销售某种玩具，进货价为 20 元，根据市场调查：在一段时间内，销售单价是 30 元时，销售量是 400 件，而销售单价每上涨 1 元，就会少出售 10 件玩具，超市要完成不少于 300 件的销售任务，当销售单价定为多少元时，可获得最大利润，最大利润是多少元？

例题 2.7.2

某果园有 100 棵橙子树，平均每棵树结 600 个橙子，现准备多种一些橙子树以提高果园产量，但是如果多种树，那么树之间的距离和每一棵树所接受的阳光就会减少. 根据经验估计，每多种一棵树，平均每棵树就会少结 5 个橙子，假设果园多种了 x 棵橙子树.

(1) 直接写出平均每棵树结的橙子个数 y（个）与 x 之间的关系；

(2) 果园多种多少棵橙子树时，可使橙子的总产量最大？最大为多少个？

巩固 2.7.1

九 (1) 班数学兴趣小组经过市场调查，整理出某种商品在第 $x(1 \leq x \leq 90)$ 天的售价与销量的相关信息如下表：已知该商品的进价为每件 30 元，设销售该商品的每天利润为 y 元.

时间 x（天）	$1 \leq x < 50$	$50 \leq x \leq 90$
售价（元/件）	$x+40$	90
每天销量（件）	$200-2x$	

(1) 求出 y 与 x 的函数关系式；

(2) 问销售该商品第几天时，当天销售利润最大，最大利润是多少？

(3) 该商品在销售过程中，共有多少天每天销售利润不低于 4800 元？请直接写出结果.

巩固 2.7.2

某集团公司试销一种成本为每件 60 元的节能产品，规定试销期间销售单价不低于成本单价，且获利不将高于 40%. 经试销发现，销售量 y（万件）与销售单价 x（元）之间的函数图象如图.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 设该集团公司销售这种节能产品获得利润为 W（万元），试求出利润 W（万元）与销售单价 x（元）之间的函数关系式；并求出当销售单价定为多少元时，公司可获得最大利润，最大利润是多少万元？

(3) 该公司决定每销售一件产品，就抽出 5 元钱捐给希望工程，若除去捐款后，所获利润不低于 450 万元，请你确定此时销售单价的范围.

2.8 题型八：二次函数和方程综合

例题 2.8.1

(1) 抛物线 $y=x^2+5x+a^2$ 与一次函数 $y=ax+2a-1$ 有交点，则 a 的范围______.

(2) 已知函数 $y=mx^2-3x+2$（m 是常数），若一次函数 $y=x+1$ 的图象与该函数的图象恰好只有一个交点，则交点坐标为______.

例题 2.8.2

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+3=0$ 的根的情况是

(A) 有两个相等的实数根 (B) 无实数根

(C) 有两个同号不相等实数根 (D) 有两个异号实数根

(2) 若方程 $\left|x^2-4x+3\right|=m$ 有两个相异的实数解，则 m 范围是______.

巩固 2.8.1

(1) 二次函数 $y=x^2+kx+k-1$ 的图象与 x 轴的交点个数______.

(2) 给出定义：设一条直线与一条抛物线只有一个公共点，且这条直线与这条抛物线的对称轴不平行，就称直线与抛物线相切，这条直线是这条抛物线的切线，有下列命题：

①直线 $y=0$ 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的切线；

②直线 $x=-2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相切于点 $(-2,1)$；

③直线 $y=x+b$ 与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相切，则相切于点 $(2,1)$；

④直线 $y=kx-2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相切，则 $k=\pm\sqrt{2}$.

其中正确的命题有______.

(3) 若方程 $\left|x^2-5x\right|=a$ 有四个不相等实根，则 a 的取值范围是______.

例题 2.8.3

已知二次函数 $y=x^2-x+c$.

(1) 若点 $A(-1,n),B(2,2n-1)$ 在二次函数 $y=x^2-x+c$ 的图象上，求此二次函数的最小值；

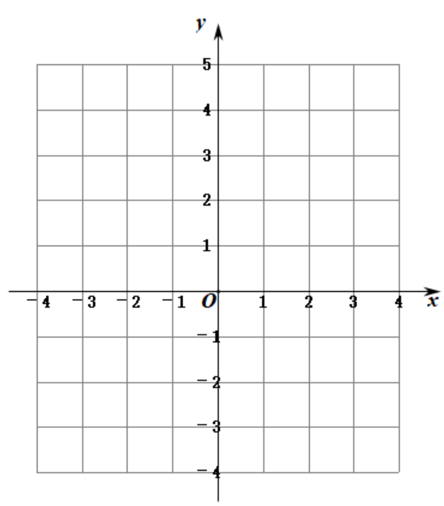
(2) 若 $D(2,y_1),E(x_2,2)$ 关于坐标原点成中心对称，试判断直线 DE 与抛物线 $y=x^2-x+c+\frac{3}{8}$ 的交点个数，并说明理由.

巩固 2.8.2

已知二次函数 $y_1=x^2-2x-3$ 及一次函数 $y_2=x+m$.

(1) 求该二次函数图象的顶点坐标以及它与 x 轴的交点坐标；

(2) 将该二次函数图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方，图象的其余部分不变，得到一个新图象，请你在图中画出这个新图象，并求出新图象与直线 $y_2=x+m$ 有三个不同公共点时 m 的值.



巩固 2.8.3

(1) 抛物线 $y=x^2+\sqrt{m}x+m^2$ 与 x 轴两交点间距离的最大值为______.

(2) 设二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(0,2),B(1,-1)$，且其图象在 x 轴上所截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求这个二次函数的解析式.

巩固 2.8.4

已知：y 关于 x 的函数 $y=(k-1)x^2-2kx+k+2$ 的图象与 x 轴有交点.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若 x_1,x_2 是函数图象与 x 轴两个交点的横坐标 $(x_1\neq x_2)$，且满足 $(k-1)x_1^2+2kx_2+k+2=4x_1x_2$.

①求 k 的值；②当 $k\leqslant x\leqslant k+2$ 时，求 y 的最大值与最小值.

巩固 2.8.5

在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(2,2)$，且当 $x=0$ 时，y 取得最小值 1.

(1) 求此抛物线的解析式；

(2) 已知点 $C(1,3)$，试探索是否存在满足下列条件的直线 l：①直线 l 过点 $C(1,3)$；②直线 l 交抛物线于 E,F 两点且 C 点恰好是线段 EF 的中点. 若存在，请求出直线 l 的函数解析式；若不存在，请说明理由.

巩固 2.8.6

已知：抛物线与 x 轴交于 $A(-2,0),B(4,0)$，与 y 轴交于 $C(0,4)$.

(1) 求抛物线顶点 D 的坐标；

(2) 设直线 CD 交 x 轴于点 E，过点 B 作 x 轴的垂线，交直线 CD 于点 F，将抛物线沿其对称轴上下平移，使抛物线与线段 EF 总有公共点. 试探究：抛物线向上最多可以平移多少个单位长度，向下最多可以平移多少个单位长度？

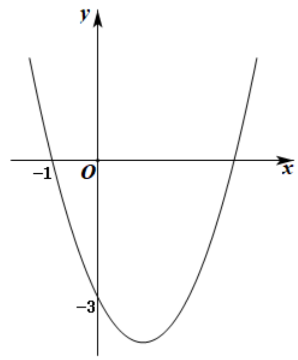
2.9 题型九：二次函数和不等式综合

例题 2.9.1

已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象如图所示，它与 x 轴的一个交点的坐标为 $(-1,0)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,-3)$.

(1) 求二次函数的解析式，并求图象与 x 轴的另一个交点的坐标；

(2) 根据图象回答：当 x 取何值时，$-3<y<0$.



例题 2.9.2

(1) 已知关于 x 的方程 $x^2+(m-5)x+m-2=0$ 有实根，且方程的两根都大于 0，则实数 m 的取值范围是_______.

(2) 已知方程 $ax^2+(a+2)x+9a=0$ 的两个实根 x_1 和 x_2，且 $x_1<1<x_2$，求实数 a 取值范围.

巩固 2.9.1

(1) 方程 $x^2-11x+(30+a)=0$ 有两实根，两根都大于 5，则实数 a 范围_______.

(2) 方程 $7x^2-(p+13)x+p^2-p-2=0$ 的两根 α,β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，求实数 p 范围.

巩固 2.9.2

(1) 已知关于 x 的方程 $x^2-(2-a)x+5-a=0$ 的一个根大于 0 而小于 2，另一个根大于 4 而小于 6，则实数 a 的取值范围是_______.

(2) 若关于 x 的方程 $4x^2-2mx+n=0$ 的解都位于 $0<x<1$ 的范围中，求正整数 m,n 的值.

2.10 题型十：二次函数的线段最值

例题 2.10.1

已知抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 经过点 $A(1,3)$ 和点 $B(2,1)$.

(1) 求此抛物线解析式；

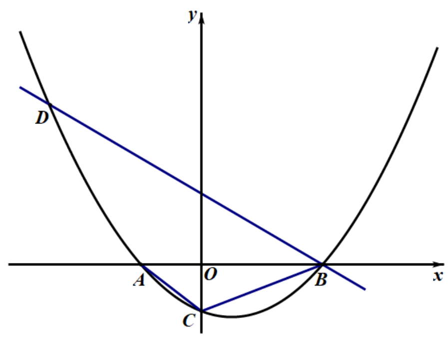
(2) 点 C,D 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，求四边形 $ABCD$ 周长的最小值.

例题 2.10.2

如图，已知抛物线 $y=\dfrac{k}{8}(x+2)(x-4)$(k为常数，且$k>0$) 与 x 轴从左至右依次交于 A,B 两点，与 y 轴交于点 C，经过点 B 的直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ 与抛物线的另一个交点为 D.

(1) 若点 D 的横坐标为 -5，求抛物线的函数表达式；

(2) 在 (1) 的条件下，设 F 为线段 BD 上一点（不含端点），连接 AF，一动点 M 从点 A 出发，沿线段 AF 以每秒 1 个单位的速度运动到 F，再沿线段 FD 以每秒 2 个单位的速度运动到 D 后停止. 当点 F 的坐标是多少时，点 M 在整个运动过程中用时最少？



例题 2.10.3

已知抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 经过点 $A(1,3)$ 和点 $B(2,1)$.

(1) 求此抛物线解析式；

(2) 点 C,D 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，求四边形 $ABCD$ 周长的最小值；

(3) 过点 B 作 x 轴的垂线，垂足为 E 点，点 P 从抛物线的顶点出发，先沿抛物线的对称轴到达 F 点，再沿 FE 到达 E 点，若 P 点在对称轴上的运动速度是它在直线 FE 上运动速度的 $\sqrt{2}$ 倍，试确定点 F 的位置，使得点 P 按照上述要求到达 E 点所用的时间最短.（要求：简述确定 F 点位置的方法，但不要求证明）

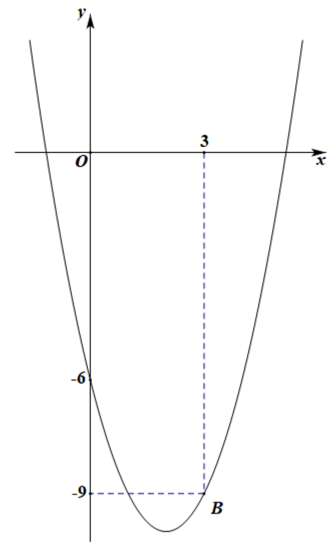
例题 2.10.4

如图，已知抛物线 $y=ax^2-4x+c$ 经过点 $A(0,-6)$ 和 $B(3,-9)$.

(1) 求出抛物线的解析式；

(2) 点 $P(m,n)$ 与点 Q 均在抛物线上（其中 $m>0$），且这两点关于抛物线对称轴对称，求 m 的值及点 Q 的坐标；

(3) 在满足 (2) 的情况下，在抛物线的对称轴上寻找一点 M，使得 ΔQMA 的周长最小.



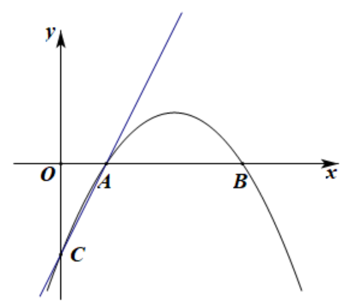
巩固 2.10.1

如图，已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c(c<0)$ 的图象与 x 轴的正半轴相交于点 A,B，与 y 轴相交于点 C，且 $OC^2=OA\cdot OB$.

(1) 求 c 的值；

(2) 若 ΔABC 的面积为 3，求该二次函数的解析式；

(3) 设 D 是 (2) 中所确定的二次函数图象的顶点，试问在直线 AC 是否存在一点 P 使 ΔPBD 的周长最小？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



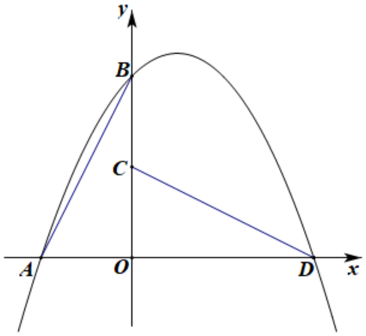
巩固 2.10.2

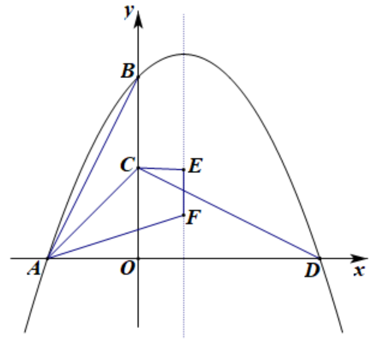
如图，在平面直角坐标系中，$Rt\Delta AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(-2,0),O(0,0),B(0,4)$，把 ΔAOB 绕点 O 按顺时针方向旋转 90°，得到 ΔCOD.

(1) 求 C,D 两点的坐标；

(2) 求经过 A,B,D 三点的抛物线的解析式；

(3) 在 (2) 中的抛物线的对称轴上取得两点 E,F（点 E 在点 F 的上方），且 $EF=1$，如图使四边形 $ACEF$ 的周长最小，求出 E,F 两点的坐标.





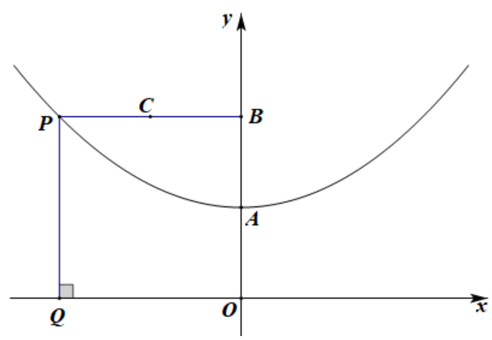
巩固 2.10.3

如图，抛物线的顶点 A 的坐标 $(0,2)$，对称轴为 y 轴，且经过点 $(-4,4)$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 若点 B 的坐标为 $(0,4)$，P 为抛物线上一点（如图），过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q，连接 PB. 求证：$PQ=PB$.

(3) 若点 $C(-2,4)$，利用 (2) 的结论，判断抛物线上是否存在一点 K，使 ΔKBC 的周长最小？若存在，求出这个最小值，并求此时点 K 的坐标；若不存在，请说明理由.



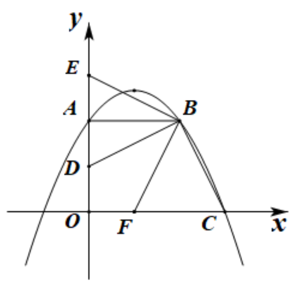
巩固 2.10.4

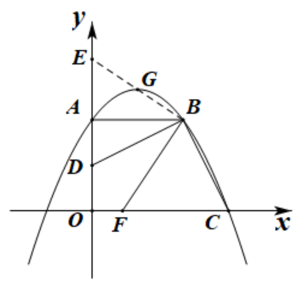
如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，直角梯形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上，OC 在 x 轴的正半轴上，$OA=AB=2$，$OC=3$，过点 B 作 $BD\perp BC$，交 OA 于点 D，将 $\angle DBC$ 绕点 B 按顺时针方向旋转，角的两边分别交 y 轴的正半轴、x 轴的正半轴于点 E 和 F.

(1) 求经过 A,B,C 三点的抛物线的解析式；

(2) 当 BE 经过 (1) 中抛物线的顶点时，求 CF 的长；

(3) 在抛物线的对称轴上取两点 P,Q（点 Q 在点 P 的上方），且 $PQ=1$，要使四边形 $BCPQ$ 的周长最小，求出 P,Q 两点的坐标.





2.11 题型十一：二次函数的面积最值

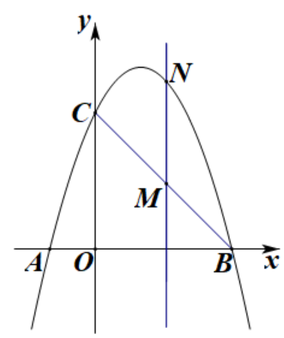
例题 2.11.1

如图，已知抛物线经过点 $A(-1,0),B(3,0),C(0,3)$ 三点.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 M 是线段 BC 上的点（不与 B,C 重合），过 M 作 $MN//y$ 轴交抛物线于 N，若点 M 的横坐标为 m，请用 m 的代数式表示 MN 的长.

(3) 在 (2) 的条件下，连接 NB,NC，是否存在 m，使 ΔBNC 的面积最大？若存在，求 m 的值；若不存在，说明理由.

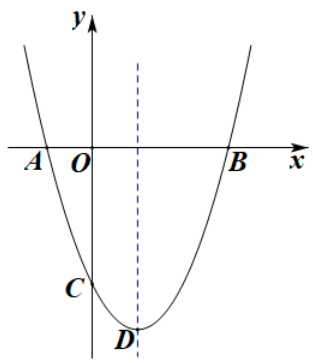


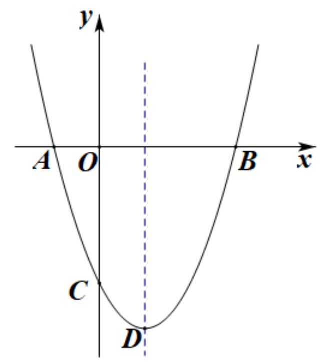
例题 2.11.2

已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A,B 两点，交 y 轴于 C 点，已知抛物线的对称轴为 $x=1$，点 $B(3,0)$，点 $C(0,-3)$，D 为抛物线的顶点.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 在 x 轴下方且在抛物线上有一动点 F，求四边形 $OBFC$ 的面积最大值.





备用图

巩固 2.11.1

如图，在直角坐标系中有一直角三角形 AOB，O 为坐标原点，$OB=6,\tan\angle ABO=\dfrac{1}{3}$，将此三角形绕原点 O 逆时针旋转 $90°$，得到 ΔDOC，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 A,B,C.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若点 P 是第二象限内抛物线上的动点，其横坐标为 t，是否存在一点 P，使 ΔPCD 得面积最大？若存在，求出 ΔPCD 的面积的最大值；若不存在，请说明理由.

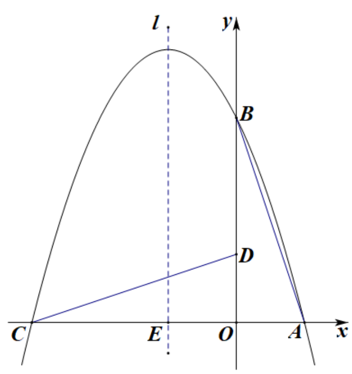
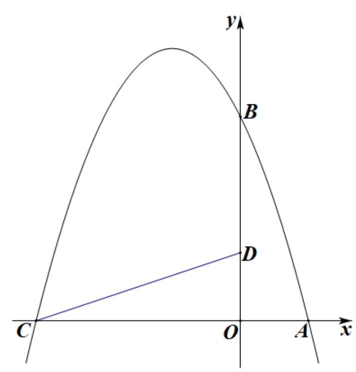


图1



备用图

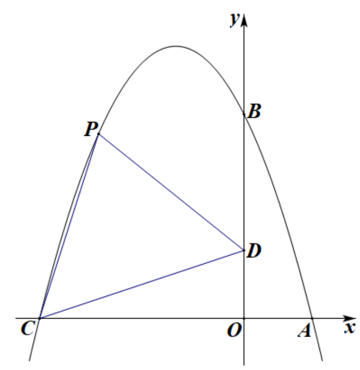


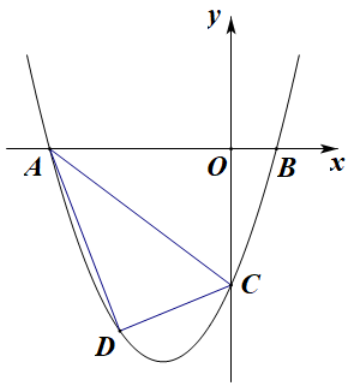
图2

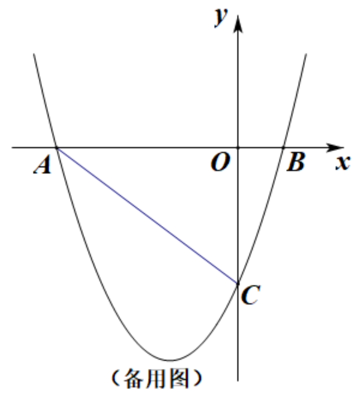
巩固 2.11.2

如图，抛物线 $y=ax^2+3ax+c(a>0)$ 与 y 轴交于 C 点，与 x 轴交于 A,B 两点，A 点在 B 点左侧，点 B 的坐标为 $(1,0),OC=3BD$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若点 D 是线段 AC 下方抛物线上的动点，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.


y
A
O
B
x
C
D


y
A
O
B
x
C
（备用图）