模型研究系列　半角模型

一粒沙整理
安徽省霍邱县龙潭中心校

2020 年 6 月 11 日

文章导航

1　什么是半角模型？　1
2　半角模型“破解”策略　1
3　“半角模型”的类型　2
3.1　正方形内含半角 $90^\circ+45^\circ$　2
3.1.1　基本模型　2
3.1.2　模型变式　4
3.2　等腰直角三角形内含半角 $90^\circ+45^\circ$　4
3.3　正三角形内含半角 $120^\circ+60^\circ$　5
3.4　一般情况半角模型 $\alpha+2\alpha$　5
4　习题演练　5

1　什么是半角模型？

所谓“半角模型”指的是题目中出现了两个角，小角等于大角的一半，故称为“半角模型”，有最普通的半角问题，但是多数“半角模型”问题都是特殊角之间的“半角模型”。常见的有“30° 与 60°”、“45° 与 90°（又称为“正方形半角模型”)”、“60° 与 120°”等类型。

2　半角模型“破解”策略

记住一句话：“半角模型，必旋转”

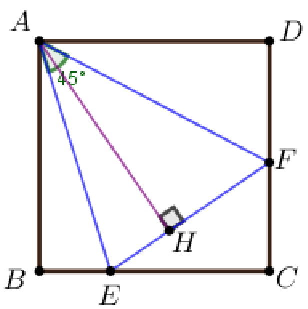
注意：
（1）旋转角度通常为大角的角度；
（2）旋转后，往往涉及三点共线问题（须简单证明)；
（3）旋转后，一般需要再证一对共旋转点的三角形全等（SAS）.

3 “半角模型”的类型

3.1 正方形内含半角 $90° + 45°$

3.1.1 基本模型

如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别为边 BC, CD 上点，且 $\angle EAF = 45°$，连接 EF，$AH \perp EF$.



结论①：$EF = BE + DF$;

结论②：$\triangle CEF$ 的周长 $C = 2AB$;

结论③：AE 平分 $\angle BEF$，AF 平分 $\angle DFE$;

结论④：$AH = AB$;

结论⑤：$S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$.

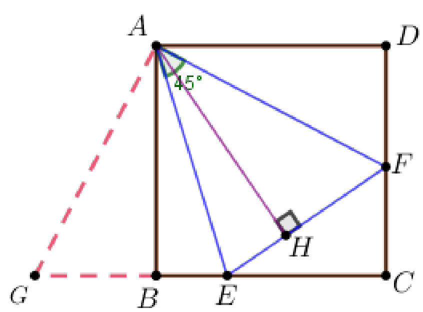


图 1

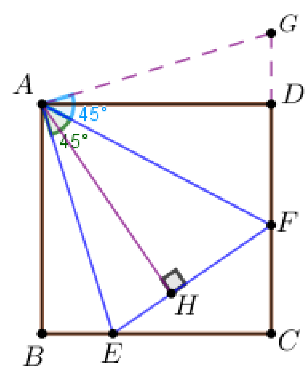


图 2

证法①：（旋转法）

如图 1，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle ABG$.（亦可旋转 $\triangle ABE$）

易得 $\triangle ADF \cong \triangle ABG \dashrightarrow AG = AF, DF = BG, \angle 1 = \angle 2$;

再证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF \dashrightarrow EF = EG$;

综上：$EF = EG = BE + BG = BE + DF$.(结论①得证)

$\triangle CEF$ 的周长 $C = EF + CE + CF = BE + DF + CE + CF = BC + DC = 2AB$.(结论②得证)

由 $\triangle AEG \cong \triangle AEEF \dashrightarrow AE$ 平分 $\angle BEF$，同理可证 AF 平分 $\angle AFE$.(结论③得证)

利用结论③易证 $\triangle ABE \cong \triangle AHE(AAS) \dashrightarrow AB = AH$.(结论④得证)

由①易证 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}EF \cdot AB$，而 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}EF \cdot AH$，由④易得 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$.(结论⑤得证)

证法②：（截长补短法）

如图 2，延长 CD 至点 G 使得 $DG = BE$.

易证：$\triangle ABE \cong \triangle ADG(SAS) \dashrightarrow AE = AG, \angle GAF = 45°$;

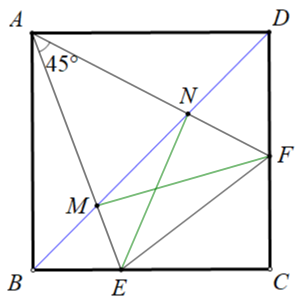
易证：$\triangle AFE \cong \triangle AFG(SAS) \dashrightarrow EF = GF$;

综上：$EF = GF = GD + DF = BE + DF$.

其它结论证法同证法①.

进一步地，连接对角线后还可以得出下面 8 个结论：

如图，连接 BD，分别交 AE, AF 于点 M, N.



结论①：$MN^2 = BM^2 + DN^2$；

结论②：$2AM^2 = BM^2 + DM^2, 2AN^2 = DN^2 + BN^2$；

结论③：$\triangle AEN$ 为等腰直角三角形，$\triangle AFM$ 为等腰直角三角形；

结论④：$\triangle ANM \sim \triangle DNF \sim \triangle BEM \sim \triangle AEF \sim \triangle BNA \sim \triangle DAM$；

结论⑤：$\sqrt{2}BN = AB + BE, \sqrt{2}DM = AD + DF$；

结论⑥：$\sqrt{2}DN = CE, \sqrt{2}BM = CF, \sqrt{2}MN = EF$；

结论⑦：$S_{\triangle AMN} = S_{四边形MNFE}$（即 $S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{2}S_{AEF}$）；

结论⑧：A, M, F, D 四点共圆；A, B, E, N 四点共圆；M, N, F, C, E 五点共圆.

下面我们来进行证明，对于结论①，我们用两种方法证明：

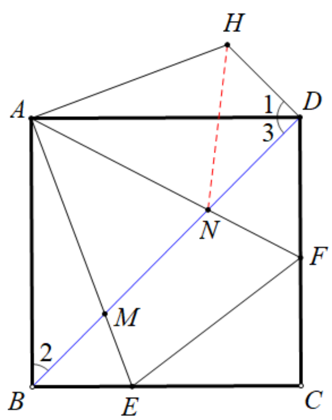


图1

证法①：

将 $\triangle AMB$ 逆时针 $90°$ 旋转到 $\triangle AHD$，如图 1.

则 $\angle 2 = \angle 1 = \angle 3 = 45°$

$\therefore \angle HDN = \angle 1 + \angle 3 = 90°$

$\therefore \triangle HDN$ 是直角三角形

$\because$ 易证 $\triangle ANH \cong \triangle ANM$

$\therefore NH = NM$

在 $Rt\triangle HDN$ 中，$HD^2 + DN^2 = HN^2$

又 $\therefore NH = NM, HD = MB$

$\therefore BM^2 + DN^2 = MN^2$

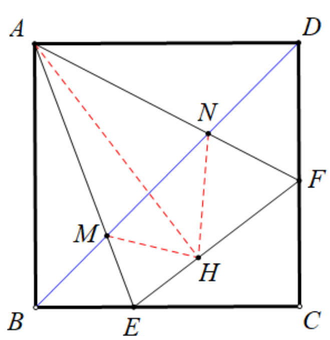


图2

证法②：

过 A 作 AH 垂直 EF 于 H，连接 MH, NH，如图 2.

易证，$\triangle ABM \cong \triangle AHM, \triangle ADN \cong \triangle AHN$

$\therefore \angle AHM = \angle ABM = 45°, \angle AHN = \angle ADN = 45°$

$\therefore \angle MHN = 90°$

$MH^2 + NH^2 = MN^2$

又 $\therefore MH = MB, NH = ND$

$\therefore BM^2 + DN^2 = MN^2$

结论②，我们也用两种方法予以证明，过程如下：

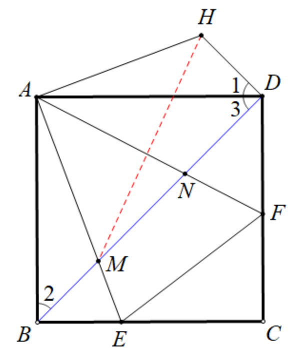


图1

证法①：

将 $\triangle AMB$ 逆时针 90° 旋转到 $\triangle AHD$，连接 MH，如图 1.

$\because AH=AM, \angle HAD+\angle DAN+\angle NAM=\angle HAM=90^\circ$

$\therefore HM=\sqrt{2}AM$

又 $\therefore HD^2+DM^2=HM^2, HD=BM$

$\therefore BM^2+DM^2=HM^2=2AM^2$

同理 $2AN^2=BN^2+DN^2$

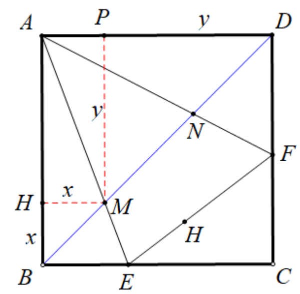


图2

证法②：

过 M 作 $MP\perp AD$ 于 P，$MH\perp AB$ 于 H，如图 2.

设 $HM=HB=x, PM=PD=y$

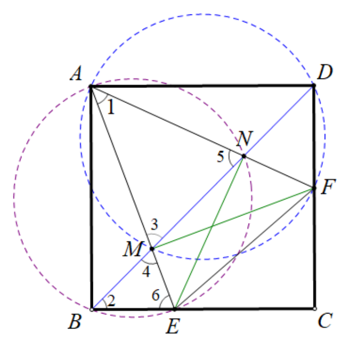
$\therefore BM^2=2x^2, PM^2=2y^2$

又 $\therefore AM^2=AH^2+HM^2=x^2+y^2$

$\therefore 2AM^2=BM^2+DM^2$

同理 $2AN^2=BN^2+DN^2$

结论③的证明如下：



证法②：

过 M 作 $MP\perp AD$ 于 P，$MH\perp AB$ 于 H，如图 2.

设 $HM=HB=x, PM=PD=y$

$\therefore BM^2=2x^2, PM^2=2y^2$

又 $\therefore AM^2=AH^2+HM^2=x^2+y^2$

$\therefore 2AM^2=BM^2+DM^2$

同理 $2AN^2=BN^2+DN^2$

3.1.2 模型变式

3.2 等腰直角三角形内含半角 $90^\circ+45^\circ$

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC, \angle BAC=90^\circ$，点 D,E 在 BC 上且 $\angle DAE=45^\circ$.

性质：①:$\triangle BAE\sim\triangle ADE\sim\triangle CDA$

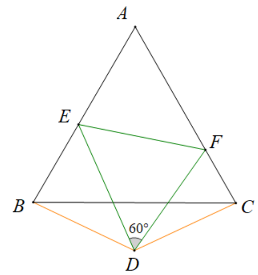
②:$BD^2+CE^2=DE^2$

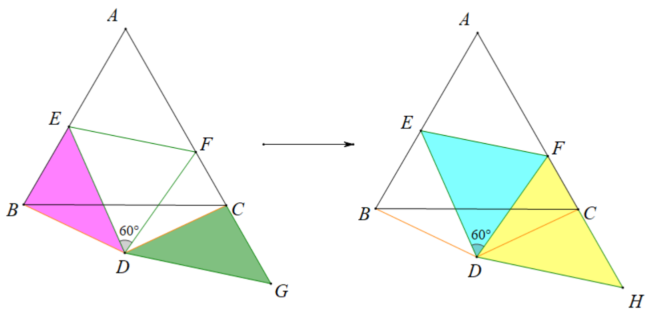
3.3 正三角形内含半角 $120^\circ + 60^\circ$

如图，已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，点 D 是 $\triangle ABC$ 外一点，$DB = DC$ 且 $\angle BDC = 120^\circ, \angle EDF = 60^\circ$，$DE, DF$ 分别交 AB, AC 于点 E, F. 此时可以推导出以下结论：

结论①：$EF = BE + CF$；

结论②：$C_{\triangle AEF} = 2AB$.





3.4 一般情况半角模型 $\alpha + 2\alpha$

4 习题演练