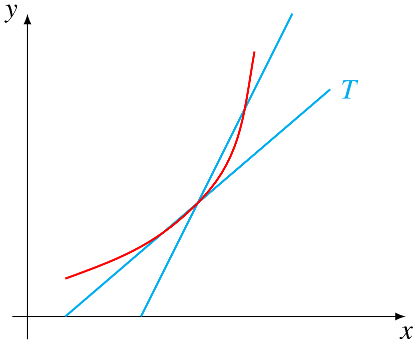
中学数学教师必备的高等数学知识

目录

1 导数的概念

1.1 导数的定义

例 1: 求曲线 $y = f(x)$ 在曲线上的点 (x_0, y_0) 处切线的斜率。



在曲线 $y=f(x)$ 上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的附近另取一点 $P_1(x,y)$，连接 P_1 和 P_0 得割线 P_0P_1，当 P_1 沿曲线趋于 P_0 时，割线 P_0P_1 的极限位置称为曲线在点 P_0 的切线。令 $x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y$，则 P_0P_1 的斜率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x-f(x_0))}{\Delta x}$$

存在，则此极限值就是曲线的切线的斜率。设切线的倾角为 α，则

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

从另一角度，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x,x_0]$）的平均变化率，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的变化率。

例 2: 求变速直线运动的物体的瞬时速度。物体产生的位移 s 是时间 t 的函数，设运动方程为 $s=s(t)$，求在 t_0 时刻的速度。

解：

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

.

➥定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，则函数得相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，并称此极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数。记作 $f'(x_0)$，或 $y'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0}$，$\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=x_0}$. 即：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果记 $x_0+\Delta x=x$，则上式可写为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{或记}h=\Delta x,$$

则 $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, 如果上述极限不存在，则称函数在点 x_0 不可导。

例 3: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=?$

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)=?$

解：

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$

$=2f'(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

$=2f'(x_0)=1$

$\therefore f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$

例 4: 设 $f'(x_0)=5$，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-k\Delta x)}{\Delta x}=-10$，则 $k=?$

解：

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-k\Delta x)}{\Delta x}$

$=k\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-k\Delta x)-f(x_0)}{-k\Delta x}$

$=kf'(x_0)=5k=-10$

$\therefore k=-2$

例 5: 证明：$y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导。

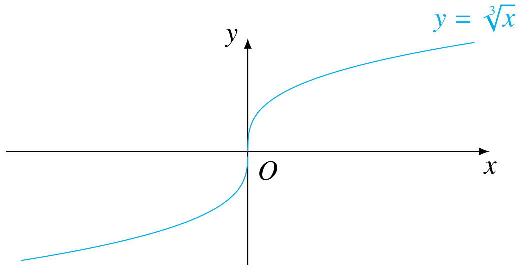
解：

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$

$\therefore y=\sqrt[3]{x}\text{在}x=0\text{处不可导。}$

注意：函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处的切线存在，斜率为 ∞，所以函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ 或

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ 时，有时也称 $f(x)$ 在 x_0 处导数无穷大。



例 6: 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & -1 < x \leqslant 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的可导性。

解:

$f(0) = 0$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(1+x) - 0}{x} = 1$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x - 0}{x} = 1$

$\therefore f(x)$在$x = 0$可导且$f'(0) = 1.$

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内每一点都可导（闭区间时，左端点须右可导，右端点须左可导），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内可导，此时其导数值是随 x 而变的函数，称为 $f(x)$ 的导函数，简称导数，记作

$$f'(x),\ y',\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dy}{dx}.$$

而 $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值。

✍ 总结：用定义求函数的导数（函数），可分三步进行：

1) 求增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

2) 求比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

3) 求极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

例 7: 求 $y = x^n$（n 为正整数）

解:

$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$ 应用二项式定理

$= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n$

$= nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$, 所以$(x^n)' = nx^{n-1}$

一般有：$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu - 1}$, μ 为任意实数。

利用导数的定义和基本求导法则求出了常用初等函数的导数:

$(c)' = 0$	$(x^{\mu})' = \alpha x^{\mu-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
$(a^x)' = a^x \ln x$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

例 8: 设 $y = x^3\sqrt{x}$，求 y'，$y'|_{x=1}$.

解:

$y = x^{\frac{7}{2}}$，$y' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$，$y'|_{x=1} = \frac{7}{2}$.

1.2 可导与连续的关系

➥定理 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 可导，则函数 $y = f(x)$ 在点 x 连续。

因为 $f(x)$ 在点 x 可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$,

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$,

$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ (增量公式)

即$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$

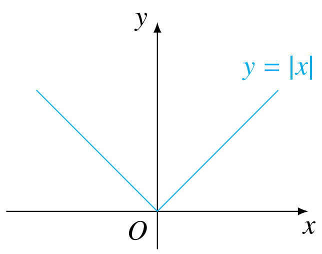
所以$\Delta x \to 0$时,$\Delta y \to 0$.$f(x)$在x处连续.

注：定理的逆不一定成立，即函数 $y = f(x)$ 在点 x 连续，却不一定可导。

例 9: 函数 $y = f(x) = |x|$，在点 $x = 0$ 连续，但不可导。

解:

$$\because y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



$\lim\limits_{n\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{n\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$，所以 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 连续。

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \quad \Delta x > 0, \; -1, \quad \Delta x < 0, \end{cases}$

$\therefore f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1, y = |x|$在$x = 0$不可导.

例 10: 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2\dfrac{1}{\sin x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性。

解：

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0), \therefore f(x)$在$x = 0$处连续。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

$\therefore f(x)$在$x = 0$处可导，且$f'(0) = 0.$

例 11: 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + bx, & \geqslant 0 \end{cases}$ 问当 a, b 为何值时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续且可导。

解：

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，

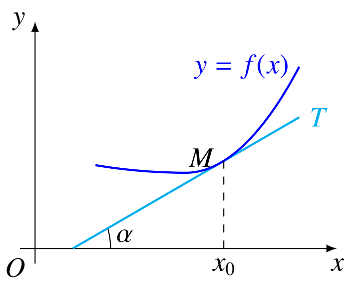
$\therefore a = 1$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+bx)-1}{x} = b$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，则 $f'_-(0) = f'_+(0), \quad \therefore b = 1$

1.3 导数的几何意义



➥导数的几何意义　$y = f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处切线的斜率。所以 $y = f(x)$ 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

法线方程为

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

例 12: 求 $y = x^2$ 在 $(-1, 1)$ 处的切线方程和法线方程。

解：

$y'2x,\ y'(-1) = -2$

切线方程为$y - 1 = -2\,[\,x - (-1)]$，即$2x + y + 1 = 0$

法线方程为$y - 1 = -\dfrac{1}{-2}\,[\,x - (-1)]$，即$x - 2y + 3 = 0.$

例 13: 设曲线 $y = 2x + \ln x$ 上的点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线平行于直线 $y = 4x$，求点 M 的坐标。

解:

$y' = 2 + \dfrac{1}{x}$，因为曲线在 M 点的切线平行于 $y = 4x$，

$\therefore y'(x_0) = 2 + \dfrac{1}{x_0} = 4$

解出 $x_0 = \dfrac{1}{2}, y_0 = 2x_0 + \ln x_0 = 1 + \ln\dfrac{1}{2} = 1 - \ln 2$

所以 M 点的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2}, 1 - \ln 2\right)$。

2 求导初步

2.1 导数的四则运算

定理 设函数 $u(x)$和$v(x)$ 在点 x 可导，则它们的和、差、积、商（分母不为零）也均在 x 处可导，且

1) $(\mu + \nu)' = \mu' \pm \nu'$;

2) $(\mu\nu)' = \mu'\nu + \mu\nu'$;

   $(c\mu)' = c\mu'$ （c 为常数）

   推广：$(u_1u_2\cdots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + \cdots + u_1\cdots u_{n-1}u_n'$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

例 14: 设 $y = x^3 + \sqrt[3]{x} + \cos x + \ln x + \sin\dfrac{\pi}{7}$，求 y'。

解:

$$y' = \left(x^3\right)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\cos x)' + (\ln x)' + \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)'$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \sin x + \frac{1}{x}$$

例 15: 设 $y = x^3 \ln x \cos x$，求 y'。

解:

$$y' = \left(x^3\right)' \ln x \cos x + x^3 (\ln x)' \cos x + x^3 \ln x (\cos x)'$$

$$= 3x^2 \ln x \cos x + x^2 \cos x - x^3 \ln x \sin x$$

例 16: 设 $y = \left(x^2 + 3a^x\right)(\sin x - 1)$，求 y'。

解：

$$y' = \left(x^2+3a^x\right)'(\sin x-1)+\left(x^2+3a^x\right)(\sin x-1)'$$
$$= (2x+3a^x\ln a)(\sin x-1)+\left(x^2+3a^x\right)\cos x$$

例 17: 设 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$，求 y' 。

解：

$$f'(x)=\frac{(x\sin x)'(1+\cos x)-x\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{(\sin x+x\cos x)(1+\cos x)+x\sin^2 x^2}{1+\cos x}$$
$$=\frac{\sin x+x}{1+\cos x}$$

例 18: $f(x)=x^2+\sin x$，求 $f'(x)$及$f'(\frac{\pi}{2})$ 。

解：

$$f'(x)=\left(x^2\right)'+(\sin x)'=2x+\cos x$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=\pi$$

例 19: $y=\tan x$，求 y' 。

解：

$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$
$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x$， 同样方法可求出 $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ 的导数。

例 20: $y=\dfrac{1}{x}$ ， 求 y' =? 。

解：

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

例 21: 求下列函数的导数：(1)$y=e^x\cos x-\dfrac{\ln x}{2x}$

(2)$y=\dfrac{1+\tan x}{\sin x}+\left(1+x^2\right)\arctan x$

解:

$$(1)y' = (\mathrm{e}^x\cos x)' - \left(\frac{\ln x}{2x}\right)'$$

$$= \mathrm{e}^x\cos x - \mathrm{e}^x\sin x - \frac{\frac{1}{x}\cdot 2x - \ln x\cdot 2}{(2x)^2}$$

$$= \mathrm{e}^2(\cos x - \sin x) - \frac{1-\ln x}{2x^2}$$

$$(2)y' = \frac{(1+\tan x)'\sin x - (1+\tan x)(\sin x)'}{(\sin x)^2} + \left(1+x^2\right)'\arctan x + \left(1+x^2\right)(\arctan x)'$$

$$= \frac{\sec^2 x\sin x - (1+\tan x)\cos x}{(\sin x)^2} + 2x\arctan x + 1$$

2.2 反函数的导数

前面我们讲反函数的连续性时讲过，区间 I 上的单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数，现在我们假定它的导数存在来研究其反函数导数的情况。

➥定理 如果函数 $x=\varphi(x)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(x)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ 即反函数的导数等于直接函数导数的倒数。

例 22: 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数。

解:

$y=\arcsin x$是$x=\sin y$的反函数，$x=\sin y$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调可导，且$(\sin y)'=\cos y$

所以$y=\arcsin x$在$(-1,1)$内可导，且

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

由 $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, 所以 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

同理可得 $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arccot\ x})' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2.3 复合函数的求导法则

复合函数的求导方法是一非常重要的方法，因为一个复杂的函数不仅可由一些简单函数经四则运算得到，也经常由函数的复合运算而构成，因此我们必须研究复合函数的求导方法。

➥定理 如果 $u=\varphi(x)$ 点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=\varphi(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 可导，且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\text{或}y'_x = y'_u\cdot u'_x = f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

证明. 由于 $y=f(u)$ 在 u 可导，因此 $f'(u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ 存在，因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha$$

其中 α 是 $\Delta u \to 0$ 时的无穷小，当 $\Delta u \neq 0$ 时，用 Δu 乘上式两端得

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

当 $\Delta u = 0$ 时，规定 $\alpha = 0$，则上式仍然成立，两端除以 $\Delta x \neq 0$ 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

取极限得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = f'(u)\varphi'(x)$$

即

$$y' = f'(u) \cdot \varphi(x)$$

. □

例 23: 设 $y = \sin\left(3x^2\right)$，求 y'。

> 解：
> 设 $u = 3x^2$，则 $y = \sin u$，用复合函数求导公式得 $y' = (\sin u)' \cdot \left(3x^2\right) = \cos u \cdot 6x = 6x \cdot \cos 3x^2$

例 24: $y = \ln\cos x$，求 y'。

> 解：
> 设 $u = \cos x$，则 $y = \ln u$，
> $y' = (\ln u)'(\cos x)' = \frac{1}{u}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

例 25: $y = \mathrm{e}^{x^3}$，求 y'。

> 解：
> $y = \mathrm{e}^u,\ u = x^3$，
> $y' = (\mathrm{e}^u)'\left(x^3\right)' = \mathrm{e}^u \cdot 3x^2 = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}$

利用复合函数求导公式还可得

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \left([v(x)]^{-1}\right)' = -[v(x)]^{-2}(v(x))' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形，如设

$$y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$$

则 $y=f\left\{\varphi\left[\psi(x)\right]\right\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}\text{或}y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$$

例 26: $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$，求 y'。

解:

$y=\mathrm{e}^u,\ u=\sin v,\ v=\dfrac{1}{x}$，

$y'=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=(\mathrm{e}^u)'_u(\sin v)'_v\left(\dfrac{1}{x}\right)'_x=\mathrm{e}^u\cdot\cos v\cdot\dfrac{-1}{x^2}$

$=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cos\dfrac{1}{x}$

求导熟练后，可不写出中间变量，按复合顺序层层求导即可，大家要能做到这一点。

如上例

$$y'=\left(\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\right)'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\frac{-1}{x^2}$$

注意: $(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}$

例 27: 求下列函数的导数 $(1)y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}$ $(2)y=\sqrt{\cot 3x}$ $(3)y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

解:

$(1)y'=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)'$

$=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{-1}{x^2}$

$=\dfrac{-1}{1+x^2}\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}$

$(2)y'=\dfrac{1}{2}(\cot 3x)^{-\frac{1}{2}}(\cot 3x)'$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{\cot 3x}}\left(-\csc^2 3x\right)(3x)'$

$=-\dfrac{3\csc^2 3x}{2\sqrt{\cot 3x}}$

$(3)y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]'$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\dfrac{x}{1+x^2}\right]$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

注意: 符号 $f'\left[\varphi(x)\right]$ 与 $\left\{\left[\varphi(x)\right]\right\}'$ 的区别。如: $\left\{f(\ln x)\right\}'=f'(\ln x)(\ln x)'=\dfrac{1}{x}f'(\ln x)$

例 28: 下列写法哪个正确

1. 设 $y=\ln\left(1+x^2\right)$，则

(1) $y'=(\ln u)'\left(1+x^2\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot 2x=\dfrac{2x}{1+x^2}$

(2) $y' = \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]' = \dfrac{1}{1+x^2}\left(1+x^2\right)' = \dfrac{2x}{1+x^2}$

(3) $y' = \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]'\left(1+x^2\right)' = \dfrac{2x}{1+x^2}$

2. 设 $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$，则 $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right)\left(x^2-a^2\right)'$

3. 设 $y = \sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$，则 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}}\left(\dfrac{x}{2}\right)'$

例 29: 设下列函数可导，求它们的导数

(1) $y = f\left(\mathrm{e}^x + x^e\right)$

(2) $y = f\left[(x+a)^n\right]$

(3) $y = \left[f(x+a)\right]^n$

解：

(1) $y' = f'\left(\mathrm{e}^x + x^e\right)\left(\mathrm{e}^x + x^e\right)' = f'\left(\mathrm{e}^x + x^e\right)\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}x^{e-1}\right)$

(2) $y' = f'\left[(x+a)^n\right]\left[(x+a)\right]' = f'\left[(x+a)^n\right]\left[n(x+a)^{n-1}\right]$

(3) $y' = n\left[f(x+a)\right]^{n-1} f'(x+a)$

例 30: 设 $f(x)$ 可导，且 $f'(1) = 2$，求 $\left.\dfrac{df\left(\sqrt{x}\right)}{dx}\right|_{x=1}$。

解：

$$\left.\frac{df\left(\sqrt{x}\right)}{dx}\right|_{x=1} = f'\left(\sqrt{x}\right)\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}f'(1) = 1$$

例 31: 已知 $\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = \dfrac{1}{x}$，求 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$。

解：

$f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$，$\therefore f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}x^2$，$f'(x) = -\dfrac{1}{2x}$，

所以 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$

例 32: 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，证明：$f'(x)$ 是奇函数。

证明. 因 $f(x)$ 是可导的偶函数，$f(-x) = f(x)$

等号两边对 x 求导，$-f'(-x) = f'(x)$，即 $f'(-x) = -f'(x)$

所以 $f'(x)$ 是奇函数。 □

此结论也可用导数的定义证明。

3 其他求导类型

3.1 隐函数及其求导法

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 间的函数关系称为隐函数。

隐函数求导法：$F(x,y)=0$ 两边对 x 求导（y 是 x 的函数 $y=f(x)$）得到一个关于 y'_x 的方程，解出 y'_x 即可。

例 33: 求方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数 y 的导数。

解：

方程两边对 x 求导

$5y^4y'+2y'-1-21x^6=0$

$\therefore y'=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}$

例 34: 求由方程 $xy+e^y=e^x$ 所确定的隐函数 y 的导数 $y'(0)$。

解：

方程两边对 x 求导 $y+xy'+e^yy'=e^x$

$\therefore y'=\dfrac{e^x-y}{e^y+x}$

当$x=0$时，由方程解出$y=0,\therefore y'(0)=1$

例 35: 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=\ln 2$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

原方程为 $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=\arctan\dfrac{y}{x}+\ln 2$

$\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\dfrac{xy'-y}{x^2}$

等号两边对 x 求导得 $x+yy'=xy'-y$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$

例 36: 求椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线方程。

解：

$\dfrac{2x}{16}+\dfrac{2yy'}{9}=0$，$y'=-\dfrac{9x}{16y}$，$y'\Big|_{\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\left(-\dfrac{9x}{16y}\right)\Big|_{\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

所以，切线方程为 $y-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

注：方程 $F(x,y)=0$ 中，变量 x 与 y 的地位是平等的，同样可确定 y 的一个隐函数 x，所以可求 $\dfrac{dx}{dy}$。

3.2 对数求导法

先把函数 $y=f(x)$ 取自然对数化为隐函数然后求导，这种方法叫对数求导法。

例 37: 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 y。

解:

$x>4$时

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\right]\\ \frac{1}{y}y' &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]\\ y' &= \frac{1}{2}y\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]\end{aligned}$$

例 38: 设 $y=[f(x)]^{g(x)}$，其中 $f(x),g(x)$ 均为可导函数，且 $f(x)>0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解:

$$\ln y = g(x)\ln[f(x)]$$

$$\frac{1}{y}y' = g'(x)\ln[f(x)]+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = [f(x)]^{g(x)}\left\{g'(x)\ln[f(x)]+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

注：幂函数也可以写成复合函数的形式求导 $y=[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln[f(x)]}$。

例 39: 求函数 $y=x^{\sin x},(x>0)$ 的导数。

解:

法一　取对数 $\ln y=\sin x\ln x$，$\dfrac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$

$$\therefore y' = x^{\sin x}\left[\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

法二　$y=x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}$

$$\therefore y' = \mathrm{e}^{\sin x\ln x}[\sin x\ln x]' = x^{\sin x}\left[\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

例 40: 设 $y=x^x+x^{e^x}+e^x+x^e$，求 y'。

解:

$$y=e^{x\ln x}+e^{e^x\ln x}+e^x+x^e$$
$$\therefore y'=e^{x\ln x}(\ln x+1)+e^{e^x\ln x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)+e^x+ex^{e-1}$$
$$y'=x^x(\ln x+1)+x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)+e^x+ex^{e-1}$$

例 41: 设由方程 $x^y=y^x$ 确定 y 是 x 的函数，求 y'。

解:

方程两边取对数 $y\ln x=x\ln y$

等号两边对 x 求导 $y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}y'$

$$\therefore y'\left(\ln y-\frac{x}{y}\right)=\ln y-\frac{y}{x}$$
$$y'=\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}}$$

3.3 双曲函数与反双曲函数的导数

公式:

$$(shx)'=chx\qquad(chx)'=shx\qquad(thx)'=\frac{1}{ch^2x}$$
$$(arshx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\qquad(archx)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\qquad(arthx)'=\frac{1}{1-x^2}$$

注：分段函数的导数，如

$$\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0\\ 2x, & 0<x\leqslant 1\\ x^2+1, & 1<x\leqslant 2\\ \frac{1}{2}x+4, & x>2\end{cases}\text{，求}f'(x)\text{.}$$

解:

$f(x)$ 在 $x=0$ 不连续，所以不可导:

$$f'_-(1)=2,\quad f'_+(1)=2,\quad \therefore f'(1)=2, f'_-(2)=4, f'_+(2)=\frac{1}{2},$$

所以 $f'(2)$ 不存在。

$$f'(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 2, & 0<x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x<2\\ \frac{1}{2}, & x>2\end{cases}$$

3.4 高阶导数

3.5 参数方程的导数

4 函数与微分

4.1 微分的概念

5 导数在函数中的应用

5.1 函数单调增减性的判定

6 微分方程

6.1 一阶微分方程