初中数学模型研究系列

霍邱县第一中学城南分校

2023 年 6 月 29 日

文章导航

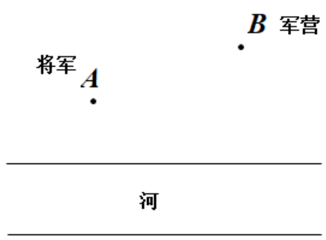
1 将军饮马

1.1 什么是将军饮马？

“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”，这是唐代诗人李颀《古从军行》里的一句诗。由此却引申出一系列非常有趣的数学问题，通常称为“将军饮马”。

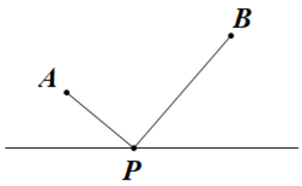
【问题描述】

如图，将军在图中点 A 处，现在他要带马去河边喝水，之后返回军营 B，问：将军怎么走能使得路程最短？



【问题简化】

如图，在直线上找一点 P 使得 $PA+PB$ 最小？

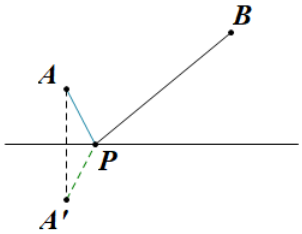


【问题分析】

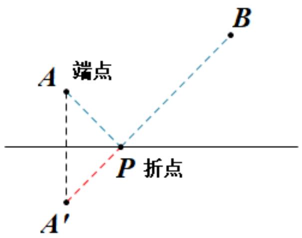
这个问题的难点在于 $PA+PB$ 是一段折线段，通过观察图形很难得出结果，关于最小值，我们知道"两点之间，线段最短"、"点到直线的连线中，垂线段最短"等，所以此处，需转化问题，将折线变为直线段.

【问题解决】

作点 A 关于直线的对称点 A'，连接 PA'，则 $PA'=PA$，所以 $PA+PB=PA'+PB$.



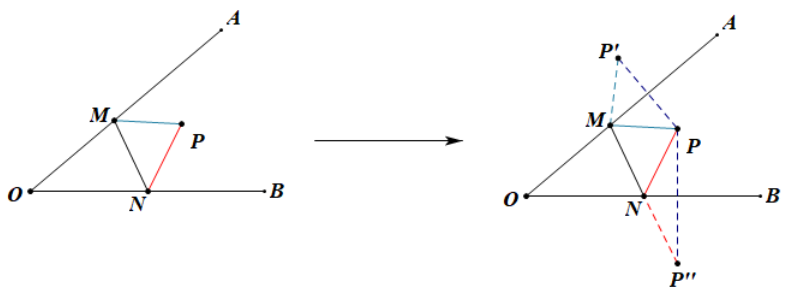
当 A',P,B 三点共线的时候，$PA'+PB=A'B$，此时为最小值（两点之间线段最短）



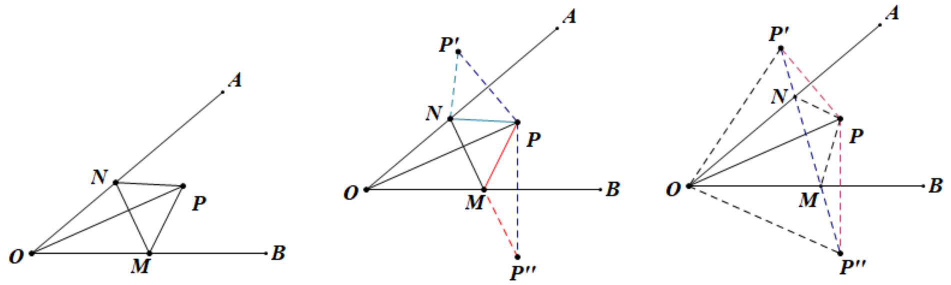
1.2 将军饮马模型系列

1.2.1 "一定两动"之点到点

在 OA,OB 上分别取点 M,N，使得 ΔPMN 周长最小.



此处 M,N 均为折点，分别作点 P 关于 OA（折点 M 所在直线）、OB（折点 N 所在直线）的对称点，化折线段 $PM+MN+NP$ 为 $P'M+MN+NP''$，当 P',M,N,P'' 共线时，ΔPMN 周长最小.



1.2.2 “两定两动”之点到点

1.2.3 “一定两动”之点到线

1.3 几何图形中的将军饮马

1.3.1 正方形中的将军饮马

1.3.2 三角形中的将军饮马

1.3.3 菱形、矩形中的将军饮马

1.4 特殊角的对称

1.5 将军过桥

1.6 将军遛马

2 半角模型

2.1 什么是半角模型？

所谓“半角模型”指的是题目中出现了两个角，小角等于大角的一半，故称为“半角模型”，有最普通的半角问题，但是多数“半角模型”问题都是特殊角之间的“半角模型”。常见的有“30° 与 60°”、“45° 与 90°（又称为“正方形半角模型”）”、“60° 与 120°”等类型。

2.2 半角模型“破解”策略

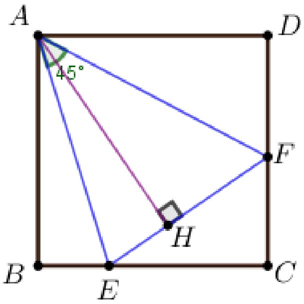
记住一句话：“半角模型，必旋转”

注意：
（1）旋转角度通常为大角的角度；
（2）旋转后，往往涉及三点共线问题（须简单证明）；
（3）旋转后，一般需要再证一对共旋转点的三角形全等（SAS）.

2.3 “半角模型”的类型

2.3.1 正方形内含半角 $90° + 45°$

如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别为边 BC, CD 上点，且 $\angle EAF = 45°$，连接 EF，$AH \perp EF$.



结论①：$EF = BE + DF$;
结论②：$\triangle CEF$ 的周长 $C = 2AB$;
结论③：AE 平分 $\angle BEF$, AF 平分 $\angle DFE$;
结论④：$AH = AB$;
结论⑤：$S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$.

证法①：（旋转法）
如图 1，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle ABG$.（亦可旋转 $\triangle ABE$）
易得 $\triangle ADF \cong \triangle ABG \dashrightarrow AG = AF, DF = BG, \angle 1 = \angle 2$;

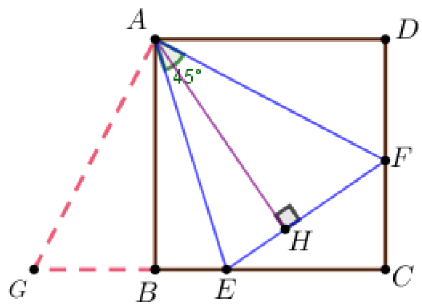


图 1

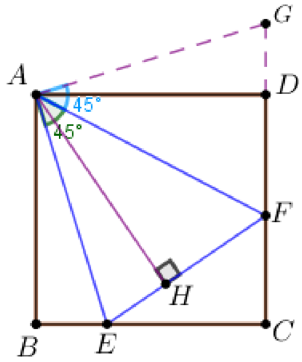


图 2

再证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF \dashrightarrow EF = EG$;

综上：$EF = EG = BE + BG = BE + DF$.(结论①得证)

$\triangle CEF$ 的周长 $C = EF + CE + CF = BE + DF + CE + CF = BC + DC = 2AB$.(结论②得证)

由 $\triangle AEG \cong \triangle AEEF \dashrightarrow AE$ 平分 $\angle BEF$，同理可证 AF 平分 $\angle AFE$.(结论③得证)

利用结论③易证 $\triangle ABE \cong \triangle AHE(AAS) \dashrightarrow AB = AH$.(结论④得证)

由①易证 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = \dfrac{1}{2}EF \cdot AB$，而 $S_{\triangle AEF} = \dfrac{1}{2}EF \cdot AH$，由④易得 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$.(结论⑤得证)

证法②：(截长补短法)

如图 2，延长 CD 至点 G 使得 $DG = BE$.

易证：$\triangle ABE \cong \triangle ADG(SAS) \dashrightarrow AE = AG, \angle GAF = 45°$;

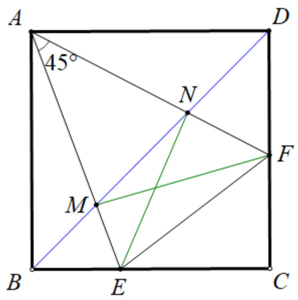
易证：$\triangle AFE \cong \triangle AFG(SAS) \dashrightarrow EF = GF$;

综上：$EF = GF = GD + DF = BE + DF$.

其它结论证法同证法①.

进一步地，连接对角线后还可以得出下面 8 个结论：

如图，连接 BD，分别交 AE, AF 于点 M, N.



结论①：$MN^2 = BM^2 + DN^2$;

结论②：$2AM^2 = BM^2 + DM^2, 2AN^2 = DN^2 + BN^2$;

结论③：$\triangle AEN$ 为等腰直角三角形，$\triangle AFM$ 为等腰直角三角形;

结论④：$\triangle ANM \sim \triangle DNF \sim \triangle BEM \sim \triangle AEF \sim \triangle BNA \sim \triangle DAM$;

结论⑤：$\sqrt{2}BN = AB + BE, \sqrt{2}DM = AD + DF$;

结论⑥：$\sqrt{2}DN = CE, \sqrt{2}BM = CF, \sqrt{2}MN = EF$;

结论⑦：$S_{\triangle AMN} = S_{\text{四边形}MNFE}$（即 $S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{2}S_{AEF}$）;

结论⑧：A, M, F, D 四点共圆；A, B, E, N 四点共圆；M, N, F, C, E 五点共圆.

下面我们来进行证明，对于结论①，我们用两种方法证明：

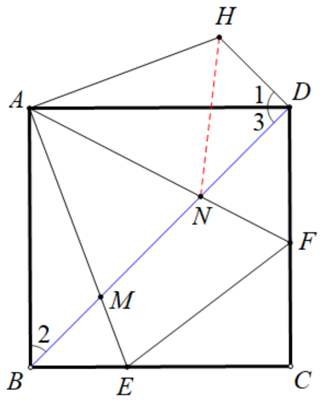


图1

证法①:

将 $\triangle AMB$ 逆时针 $90°$ 旋转到 $\triangle AHD$，如图 1.

则 $\angle 2=\angle 1=\angle 3=45°$

$\therefore \angle HDN=\angle 1+\angle 3=90°$

$\therefore \triangle HDN$ 是直角三角形

$\because$ 易证 $\triangle ANH\cong\triangle ANM$

$\therefore NH=NM$

在 $Rt\triangle HDN$ 中，$HD^2+DN^2=HN^2$

又 $\therefore NH=NM, HD=MB$

$\therefore BM^2+DN^2=MN^2$

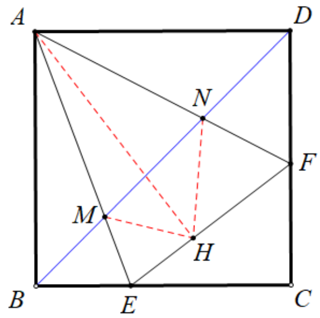


图2

证法②:

过 A 作 AH 垂直 EF 于 H，连接 MH, NH，如图 2.

易证，$\triangle ABM\cong\triangle AHM, \triangle ADN\cong\triangle AHN$

$\therefore \angle AHM=\angle ABM=45°, \angle AHN=\angle ADN=45°$

$\therefore \angle MHN=90°$

$MH^2+NH^2=MN^2$

又 $\therefore MH=MB, NH=ND$

$\therefore BM^2+DN^2=MN^2$

结论②，我们也用两种方法予以证明，过程如下:

证法①:

将 $\triangle AMB$ 逆时针 $90°$ 旋转到 $\triangle AHD$，连接 MH，如图 1.

$\because AH=AM, \angle HAD+\angle DAN+\angle NAM=\angle HAM=90°$

$\therefore HM=\sqrt{2}AM$

又 $\therefore HD^2+DM^2=HM^2, HD=BM$

$\therefore BM^2+DM^2=HM^2=2AM^2$

同理 $2AN^2=BN^2+DN^2$

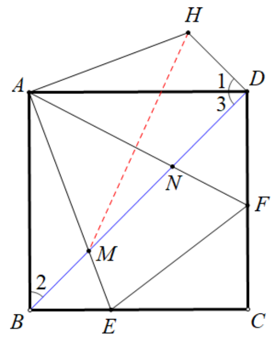


图1

证法②:

过 M 作 $MP\perp AD$ 于 P，$MH\perp AB$ 于 H，如图 2.

设 $HM=HB=x, PM=PD=y$

$\therefore BM^2=2x^2, PM^2=2y^2$

又 $\therefore AM^2=AH^2+HM^2=x^2+y^2$

$\therefore 2AM^2=BM^2+DM^2$

同理 $2AN^2=BN^2+DN^2$

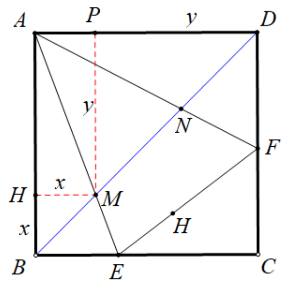
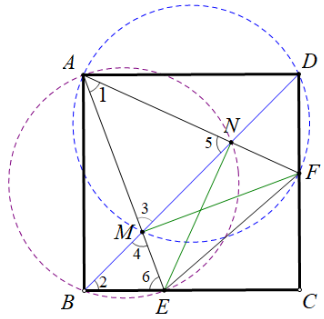


图2

结论③的证明如下:

证法②:
过 M 作 $MP \perp AD$ 于 P，$MH \perp AB$ 于 H，如图 2.
设 $HM = HB = x, PM = PD = y$
$\therefore BM^2 = 2x^2, PM^2 = 2y^2$
又 $\therefore AM^2 = AH^2 + HM^2 = x^2 + y^2$
$\therefore 2AM^2 = BM^2 + DM^2$
同理 $2AN^2 = BN^2 + DN^2$

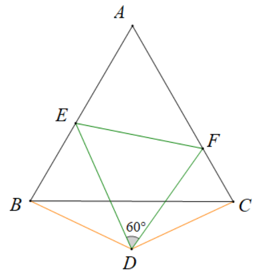


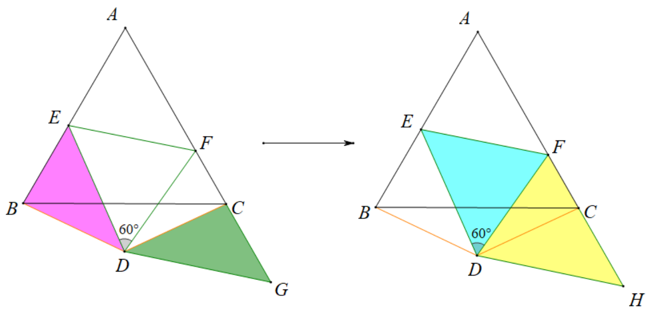
2.3.2 等腰直角三角形内含半角 $90° + 45°$

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC, \angle BAC = 90°$，点 D, E 在 BC 上且 $\angle DAE = 45°$.
性质：①:$\triangle BAE \sim \triangle ADE \sim \triangle CDA$
②:$BD^2 + CE^2 = DE^2$

2.3.3 正三角形内含半角 $120° + 60°$

如图，已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，点 D 是 $\triangle ABC$ 外一点，$DB = DC$ 且 $\angle BDC = 120°, \angle EDF = 60°$，$DE, DF$ 分别交 AB, AC 于点 E, F. 此时可以推导出以下结论：
结论①：$EF = BE + CF$；
结论②：$C_{\triangle AEF} = 2AB$.





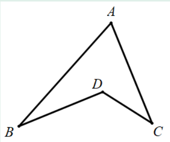
2.3.4 一般情况半角模型 $\alpha + 2\alpha$

2.4 习题演练

3 角的飞镖模型和“8”字模型

3.1 角的飞镖模型

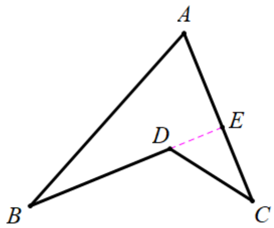
飞镖模型



结论①：$\angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$

结论②：$AB + AC > BD + CD$

对于结论②的证明，主要利用三角形两边之和大于第三边进行证明.



证明：延长 BD，交 AC 于点 E，如图.

$\because AB + AE > BE, CE + DE > CD$

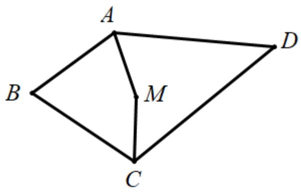
$\therefore AB + AE + CE + DE > BE + CD$

$\therefore AB + AC + DE > BD + DE + CD$

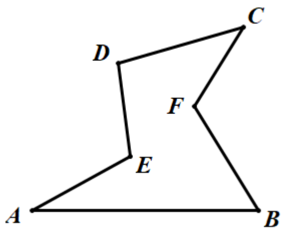
$\therefore AB + AC > BD + CD$

3.1.1 飞镖模型例题

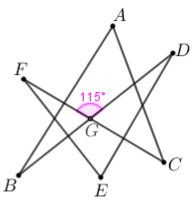
✔例 1: 如图，在四边形 $ABCD$ 中，AM、CM 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle DCB$，AM 与 CM 交于点 M，探究 $\angle AMC$ 与 $\angle B$、$\angle D$ 之间的数量关系.



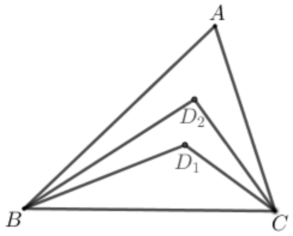
✔例 2: 如图，已知 $\angle DEC = 100°$，$\angle CFB = 120°$，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$______



✔例 3: 如图，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F =$______



✔例 4: 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 52°$，$\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的角平分线交于点 D_1，$\angle ABD_1$ 与 $\angle ACD_1$ 的角平分线交于点 D_2，以此类推，$\angle ABD_4$ 与 $\angle ACD_4$ 的角平分线交于点 D_5，则 $\angle BD_5C$ 是______度.



✔例 5: 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC, \angle ACB$ 的角平分线交于点 O，则 $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\times 180^\circ + \frac{1}{2}\angle A$. 如图 2 和图 3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC, \angle ACB$ 的两条三等分角线分别对应交于 O_1, O_2，则 $\angle BO_1C = \frac{2}{3}\times 180^\circ + \frac{1}{3}\angle A, \angle BO_2C = \frac{1}{3}\times 180^\circ + \frac{2}{3}\angle A$. 根据以上阅读理解，你能猜想 $\angle BO_{2020}C$______

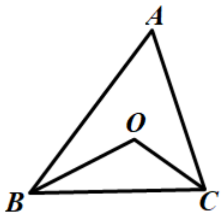


图1

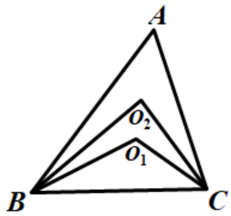


图2

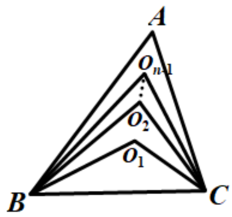
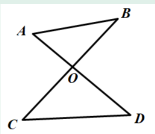


图3

3.2 “8”字模型

“8”字模型



如图，线段 AD, BC 相交于点 O，连接 AB, CD.

结论①：$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

结论②：$AB + CD > AD + BC$

下面对结论①进行证明，分别根据三角形内角和等于 180°及三角形外角的性质有两种证法，如下：

证法①：利用三角形内角和等于 180

$\angle A + \angle B + \angle AOB = 180^\circ$,

$\angle C + \angle D + \angle COD = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle AOB = \angle C + \angle D + \angle COD$

$\because \angle AOB = \angle COD$

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$

证法②：利用三角形外角的性质

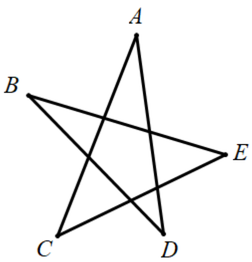
$\because \angle BOD = \angle A + \angle B$

$\angle BOD = \angle C + \angle D$

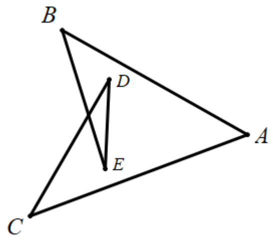
$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$

3.2.1 “8”字模型例题

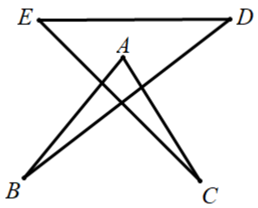
✔例 6: 如图，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$______.



✔例 7: 如图，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$ 的度数为______.

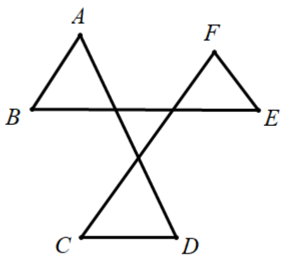


✔例 8: 如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$______.

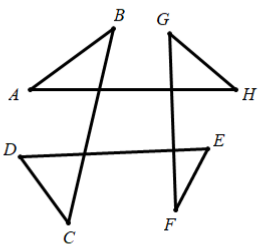


✔例 9: 如图，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=(\quad)$

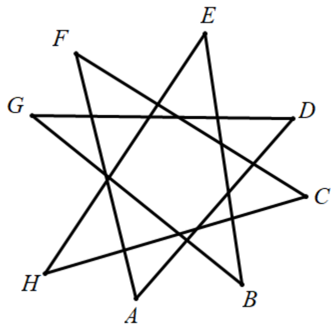
A. 180° B. 360° C. 270° D. 540°



✔例 10: 如图，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle G+\angle H$ 的度数为______.

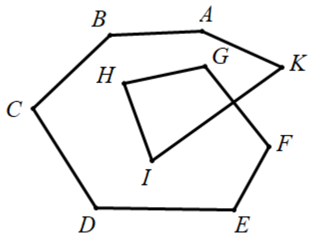


✔例 11: 如图，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle G+\angle H=$______.



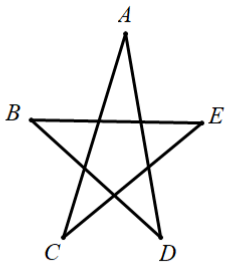
✔例 12: 如图，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle G+\angle H+\angle I+\angle K$ 的度数为 (　　).

A. 720°　　B. 900°　　C. 1080°　　D. 1260°

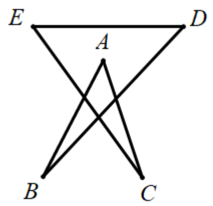


3.3 飞镖模型和“8”字模型进阶练习

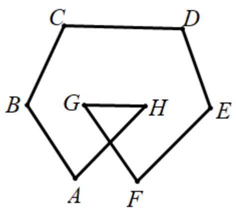
1. 如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$ 的度数是______.



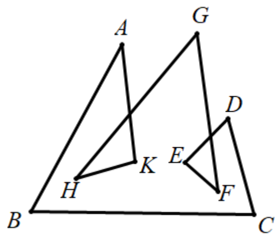
2. 如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$______.



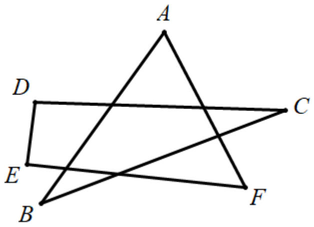
3. 如图，若 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=660°$，求 $\angle G+\angle H$ 的度数.



4. 如图，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle K$ 的度数.



5. 如图，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数.



6. (1) 如图①，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数.

(2) 如图②，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$ 的度数.

(3) 如图③，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 的度数.

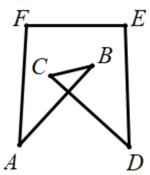


图1

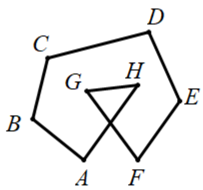


图2

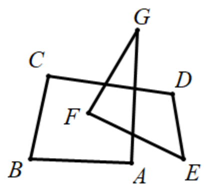
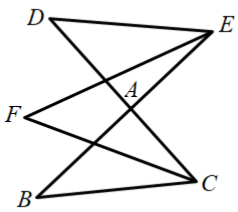


图3

7. 如图，BE 与 CD 相交于点 A，CF 为 $\angle BCD$ 的平分线，EF 为 $\angle BED$ 的角平分线，若 $\angle B:\angle D:\angle F=2:4:x$，求 x 的值.



4 十字架模型

5 三垂直全等模型

6 角平分线模型

7 胡不归

8 阿氏圆

9 倍长中线

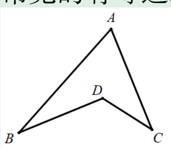
10 对角互补

11 手拉手模型——旋转全等

11.1 手拉手模型的定义及基本结论

手拉手全等模型

所谓手拉手模型，是指顶角相等，且有公共顶点的两个等腰三角形组成的图形，从中可以得到一个经典的全等模型：因为顶点相连的四条边，形象的可以看作两双手，所以通常称为“手拉手模型”．常见的有等边三角形共顶点，等腰直角三角形共顶点，正方形共顶点等几种，如下图所示。

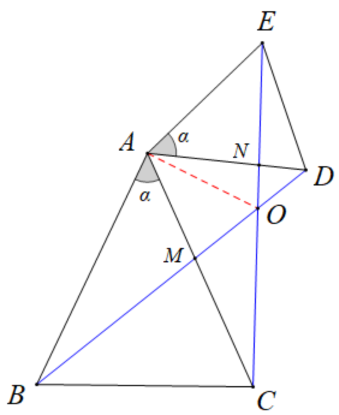


结论①：$\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$

结论②：$AB+AC>BD+CD$

11.2 手拉手模型的类型

11.3 一般等腰三角形手拉手



结论①：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$;

结论②：$BD=CE$;

结论③：$\angle BOC=\angle BAC=\alpha$;

结论④：OA 平分 $\angle BOE$;

结论⑤：$\triangle ABM\sim\triangle OCM,\triangle AEM\sim\triangle ODN$;

结论⑥：点 A,B,C,O 四点共圆，点 A,E,D,O 四点共圆.

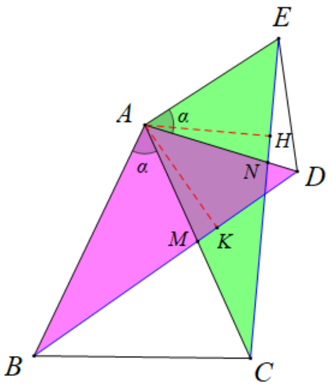


图1

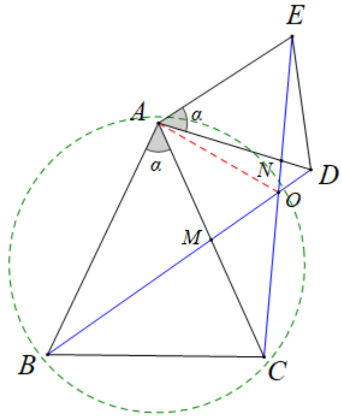


图2

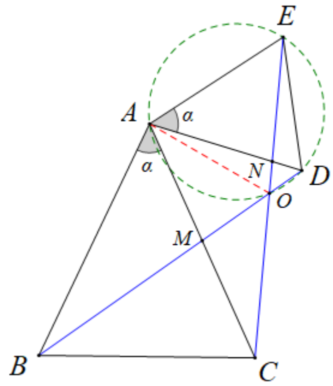
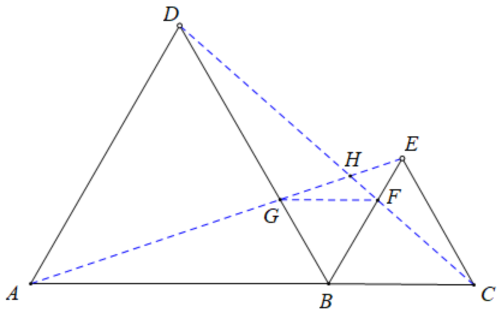


图3

11.4 等边三角形手拉手

如图，直线 AB 的同侧作 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 都为等边三角形，连接 AE,CD，二者交点为 H，则有以下结论成立：



结论①：$\triangle ABE \cong \triangle DBC$;

结论②：$AE = DC$;

结论③：$\angle DHA = 60°$;

结论④：$\triangle AGB \cong \triangle DFB; \triangle EGB \cong \triangle CFB$;

结论⑤：连接 $GF, \triangle BGF$ 是等边三角形；

结论⑥：$GF//AC$;

结论⑦：连接 HB，HB 平分 $\angle AHC$;

结论⑧：$HC = HB + HE; HA = HC + HD$;

结论⑨：$\triangle DHG \sim \triangle ABG; \triangle EHF \sim \triangle CBF$;

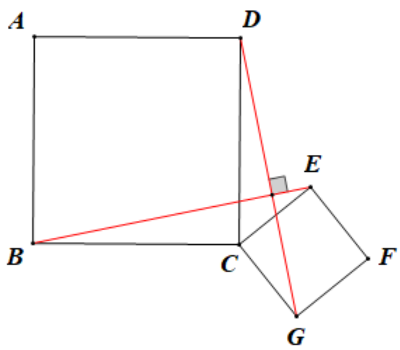
结论⑩：点 A,B,H,D 四点共圆，点 C,B,H,E 四点共圆.

11.5 正方形手拉手

如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 均为正方形，连接 BE,DG，则有以下结论：

结论①：$\triangle BCE \cong \triangle DCG$;

结论②：$BE = DG, BE \perp DG$.



11.6　习题演练

12　12345 模型

12.1　【模型解读】

初中几何，直角三角形具有举足轻重的地位，贯彻初中数学的始终，无论是一次函数、平行四边形、特殊平行四边形、反比例函数、二次函数、相似、圆，都离不开直角三角形。而在直角三角形中，345 的三角形比含有 30° 的直角三角形的 $1\ \sqrt{3}:2$ 以及含有 45° 的直角三角形的 $1:1:\sqrt{2}$ 更加特殊更加重要。因为 345 不仅仅是自己特殊，更是可以在变化中隐藏更加特殊的变化 $(1:2:\sqrt{5}$及$1:3:\sqrt{10})$，综合性非常大，深受压轴题的喜爱。现在带领大家领略一下 345 的独特魅力：

$$\text{12345 模型}\begin{cases}\tan\alpha=\frac{1}{2}\\ \tan\beta=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=45^\circ$$