模型研究系列　角平分线四大模型

一粒沙整理
安徽省霍邱县龙潭中心校

2020 年 7 月 4 日

文章导航

1　角平分线的相关重要知识点

1. 角平分线的定义
2. 角平分线的性质定理
3. 角平分线的判定定理

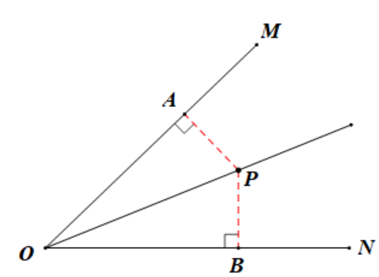
2　角平分线的相关模型

2.1　角平分线上的点向两边作垂线（双垂模型）

【模型基础】

如图，P 是 $\angle MON$ 的平分线上一点，过点 P 作 $PA \perp OM$ 于点 A，$PB \perp BN$ 于点 B.

结论：$PB = PA$.

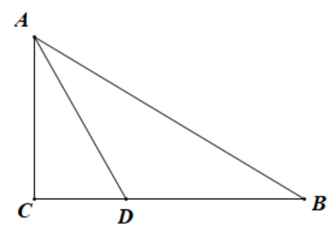


【模型分析】

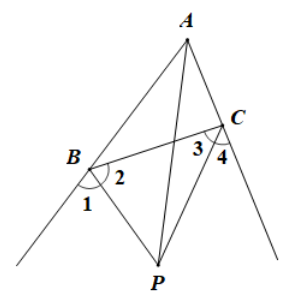
利用角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等，构造模型，为边相等、角相等、三角形全等创造更多的条件，进而可以快速找到解题的突破口。

【模型实例】

✔例 1: 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AD 平分 $\angle CAB, BC=6, BD=4$，那么点 D 到直线 AB 的距离是________；

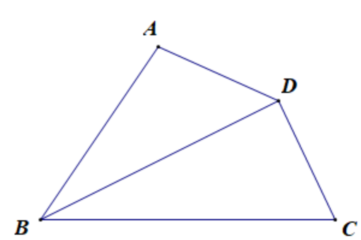


✔例 2: 如图 2，$\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$. 求证：$AP$ 平分 $\angle BAC$.

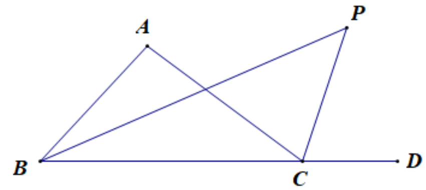


【模型精炼】

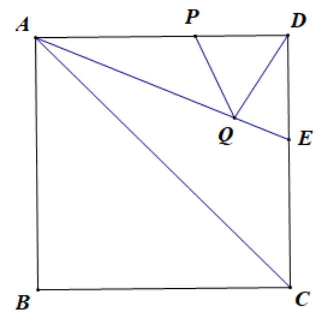
1．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$BC>AB$，$AD=DC$，BD 平分 $\angle ABC$。求证：$\angle BAD+\angle BCD=180°$。



2. 如图，$\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角 $\angle ABC$ 的平分线 BP 交于点 P，若 $\angle BPC=40°$，则 $\angle CAP=$________.



3. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle DAC$ 的平分线交 DC 于点 E，若点 P,Q 分别是 AD 和 AE 上的动点，则 $PQ+PD$ 的最小值是 ________.

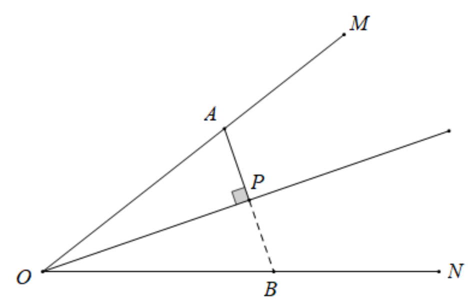


2.2 角平分线 + 垂线构造等腰三角形（单垂模型）

【模型基础】

如图，P 是 MON 的平分线上一点，$AP \perp OP$ 于 P 点，延长 AP 于点 B.

结论：$\triangle AOB$ 是等腰三角形.



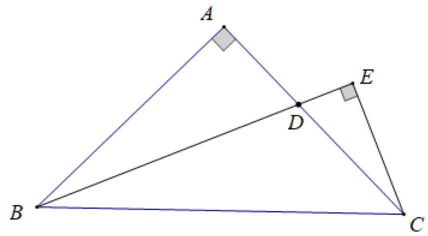
【模型分析】

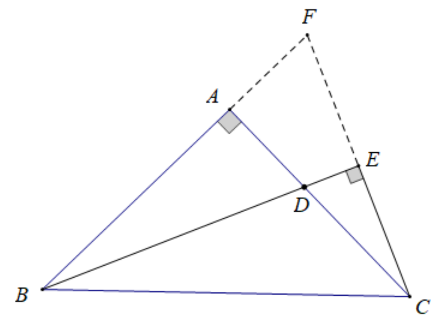
构造此模型可以利用等腰三角形的“三线合一”，也可以得到两个全等的直角三角形，进而得到对应边、对应角相等。这个模型巧妙地把角平分线和三线合一联系了起来。

【模型实例】

如图，已知等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，BD 平分 $\angle ABC$，$CE \perp BD$，垂足为 E.

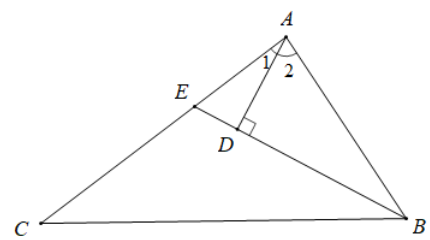
求证：$BD=2CE$.



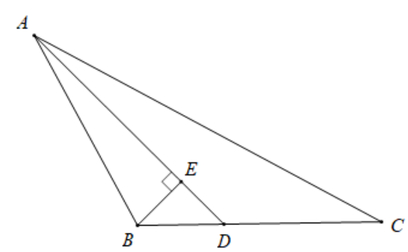


【模型精炼】

1．如图，在 $\triangle ABC$ 中，BE 是角平分线，$AD \perp BE$，垂足为 D。
求证：$\angle 2 = \angle 1 + \angle C$.



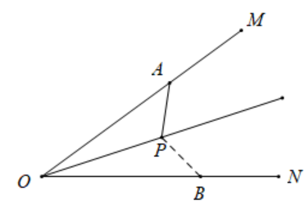
2．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 3\angle C$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$BE \perp AD$ 于点 E。
求证：$BE = \dfrac{1}{2}(AC - AB)$.



2.3　截长补短构造对称全等（双等模型）

【模型基础】

如图，P 是 $\angle MON$ 的平分线上一点，点 A 是射线 OM 上任意一点，在 ON 上截取 $OB = OA$，连接 PB.
结论：$\triangle OPB \cong \triangle OPA$.



【模型分析】

利用角平分线图形的对称性，在角的两边构造对称全等三角形，可以得到对应边、对应角相等。利用对称性把一些线段或角进行转移，这是经常使用的一种解题技巧。

【模型实例】

(1) 图 1 所示，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，P 是 AD 上异于点 A 的任意一点，试比较 $PB+PC$ 与 $AB+AC$ 的大小，并说明理由；

(2) 如图 2 所示，AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，其他条件不变，试比较 $PC-PB$ 与 $AC-AB$ 的大小，并说明理由。

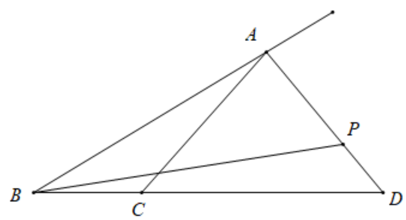


图1

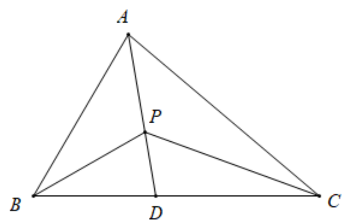
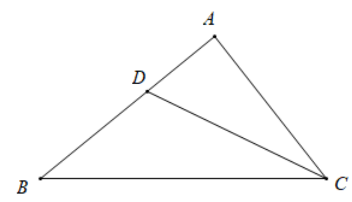


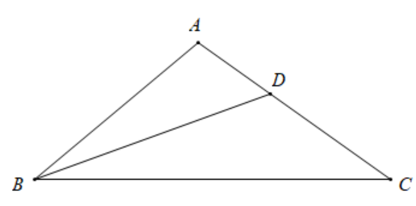
图2

【模型精炼】

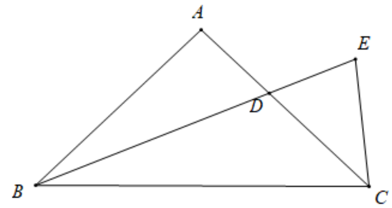
1．已知，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$，CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，$AC=16$，$AD=8$. 求线段 BC 的长。



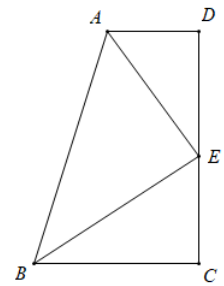
2．已知，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\triangle A=108°$，BD 平分 $\angle ABC$. 求证：$BC=AB+CD$.



3. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 100°$，$\angle A = 40°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，延长 BD 至 E，$DE = AD$. 求证：$BC = AB + CE$.



4. 如图,梯形 $ABCD$ 中,$AD//BC$,点 E 在 CD 上,且 AE 平分 $\angle BAD$,BE 平分 $\angle ABC$,求证:$AD = AB - BC$.

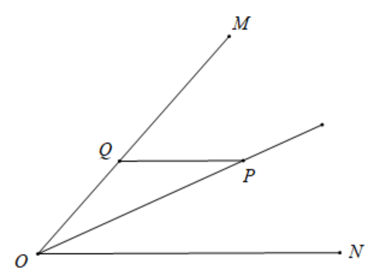


2.4 角平分线 + 平行线（双平模型）

【模型基础】

如图，P 是 $\angle MON$ 的平分线上一点，过点 P 作 $PQ//ON$，交 OM 于点 Q.

结论：$\triangle POQ$ 是等腰三角形.



【模型分析】

有角平分线时，常过角平分线上一点作角的一边的平行线，构造等腰三角形，为证明结论提供更多的条件，体现了角平分线与等腰三角形之间的密切关系。

【模型实例】

解答下列问题：

(1) 如图 1 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$EF//BC$，点 D 在 EF 上，BD,CD 分别平分 $\angle ABC,\angle ACB$，写出线段 EF 与 BE,CF 有什么数量关系；

(2) 如图 2 所示，BD 平分 $\angle ABC$，CD 平分 $\angle ACG$，$DE//BC$ 交 AB 于点 E，交 AC 于点 F，线段 EF 与 BE,CF 有什么数量关系？并说明理由;

(3) 如图 3 所示，BD,CD 分别为外角 $\angle CBM,\angle BCN$ 的平分线，$DE//BC$ 交 AB 延长线于点 E，交 AC 延长线于点 F，直接写出线段 EF 与 BE,CF 有什么数量关系？

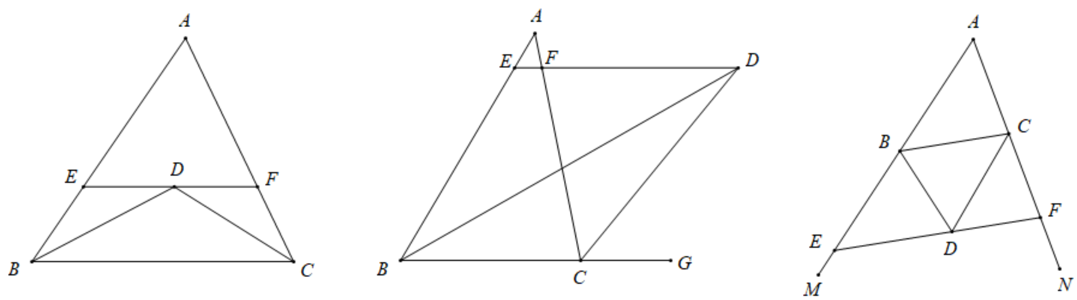
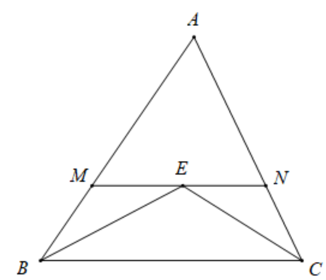


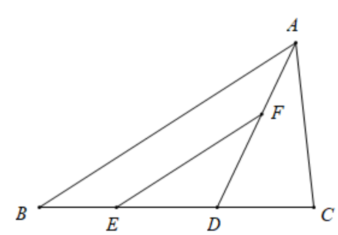
图1　图2　图3

【模型精炼】

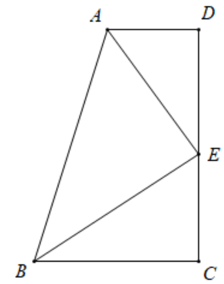
1．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC,\angle ACB$ 的平分线交于点 E，过点 E 作 $EF//BC$，交 AB 于点 M，交 AC 于点 N. 若 $BM+CN=9$，则线段 MN 的长为 ________.



2．如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，点 E,F 分别在 BD,AD 上，$EF//AB$，且 $DE=CD$.
求证：$EF=AC$.



3．如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，点 E 在 CD 上，且 AE 平分 $\angle BAD$，BE 平分 $\angle ABC$.
求证：$AD = AB - BC$.



4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，交 DC 的延长线于点 F，点 G 是 EF 的中点，求 $\angle BDG$ 的度数。