模型研究系列　角平分线交角模型

一粒沙整理
安徽省霍邱县龙潭中心校

2020 年 7 月 4 日

文章导航

1 知识储备：与中点有关的概念

1. 三角形中线的定义：三角形顶点和对边中点的连线.
2. 三角形中线的相关定理：直角三角形斜边的中线等于斜边的一半；等腰三角形底边的中线三线合一 (底边的中线、顶角的角平分线、底边的高重合).
3. 三角形中位线定义：连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线.
4. 三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边并且等于它的一半.
5. 中位线判定定理：经过三角形一边中点且平行于另一边的直线必平分第三边.
6. 直角三角形斜边中线：直角三角形斜边中线等于斜边的一半.
7. 斜边中线判定：若三角形一边上的中线等于该边的一半，则这个三角形是直角三角形.

2 中点有关的模型

2.1 倍长中线或类倍长中线（与中点有关的线段）构造全等三角形

【模型基础】

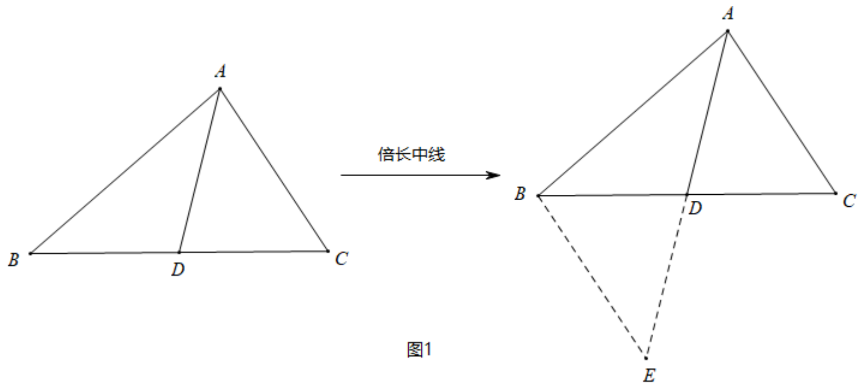


图1

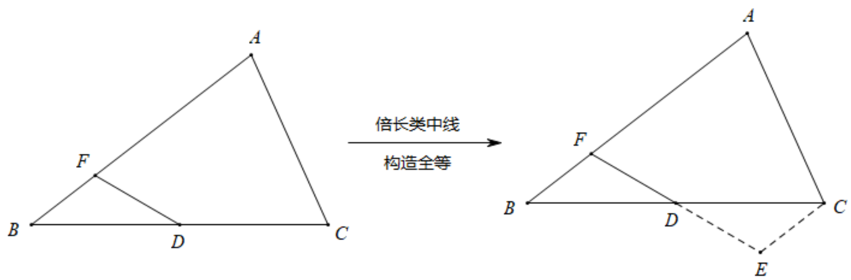


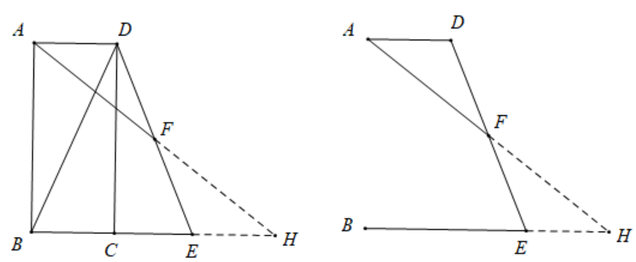
图2

【模型分析】

如图 1，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，延长 AD 至点 E 使 $DE = AD$，易证：$\triangle ADC \cong \triangle EDB(SAS)$. 如图 2，$D$ 是 BC 中点，延长 FD 至点 E 使 $DE = FD$，易证：$\triangle FDB \cong EDC(SAS)$.

当遇见中线或者中点的时候，可以尝试倍长中线或类中线，构造全等三角形，目的是对已知条件中的线段进行转移。

换个马甲也要认识哦，如下情形中 F 为 DE 的中点，请自证.

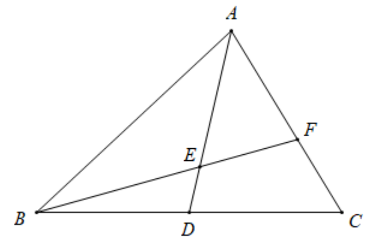


点评：(1) 倍长中线：即延长三角形的中线，使得延长后的线段是原中线的两倍．(2) 其目的是构造一对对顶的全等三角形；(3) 其本质是转移边和角．

难点：有些几何题在利用“倍长中线”证完一次全等三角形后，还需要再证一次全等三角形，即“二次全等”。在证明第二次全等时，难点通常体现在倒角上，常见的倒角方法有：①“8”字型；②平行线；③180°（平角、三角形内角和）；④360°（周角、四边形内角和）；⑤小旗子（三角形外角）；⑥90°（互余角）.

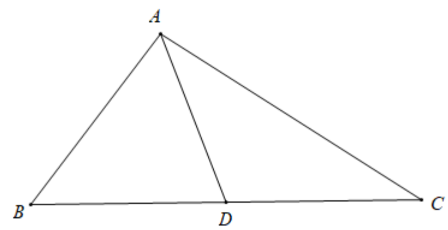
【模型实例】

✔例 1:　如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，E 是 AD 上一点，连接 BE 并延长 AC 于点 F，$AF = EF$。求证：$AC = BE$。

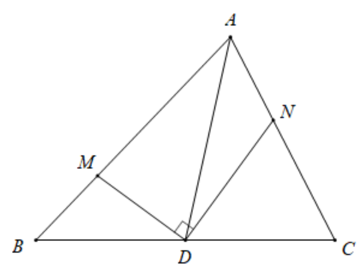


【模型精炼】

1．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$AC=20$，求 BC 边上中线 AD 的范围。

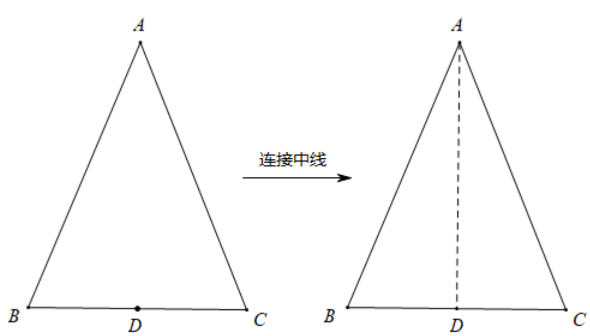


2．如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DM\perp DN$，如果 $BM^2+CN^2=DM^2+DN^2$。求证：$AD^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2\right)$。



2.2 已知等腰三角形底边中点，可与顶点连接用“三线合一”

【模型基础】

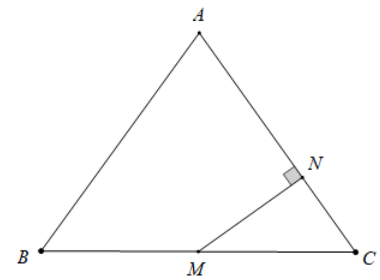


【模型分析】

等腰三角形中有底边中点时，常作底边的中线，利用等腰三角形“三线合一”的性质得到角相等或边相等，为解题创造更多的条件，当看见等腰三角形的时候，就应想到：“边等、角等、三线合一”。

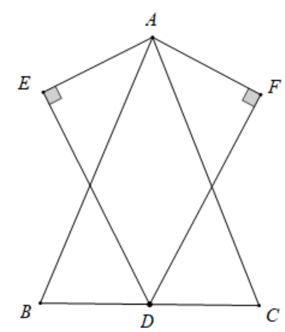
【模型实例】

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 5$，$BC = 6$，M 为 BC 的中点，$MN \perp CC$ 于点 N，求 MN 的长度。



【模型精炼】

1．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 是 BC 的中点，$AE \perp DE$，$AF \perp DF$，且 $AE = AF$。求证：$\angle EDB = \angle FDC$.



2．已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，$\angle C = 90°$，D 为 AB 边的中点，$\angle EDF = 90°$，$\angle EDF$ 绕点 D 旋转，它的两边分别交 AC, CB（或它们的延长线）于 E, F.

(1) 当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 $DE \perp AC$ 于 E 时（如图 1），求证：$S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \dfrac{1}{2} S_{\triangle ABC}$；

(2) 当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 DE 和 AC 不垂直时，在图 2 和图 3 这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，$S_{\triangle DEF}, S_{\triangle CEF}, S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明。

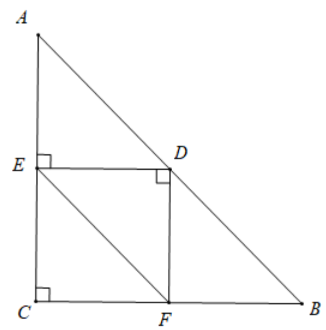


图1

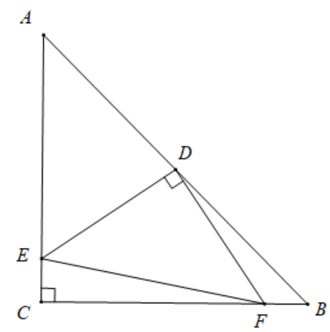


图2

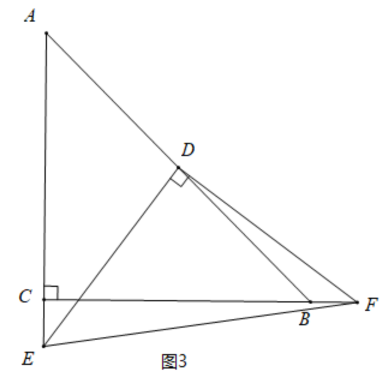
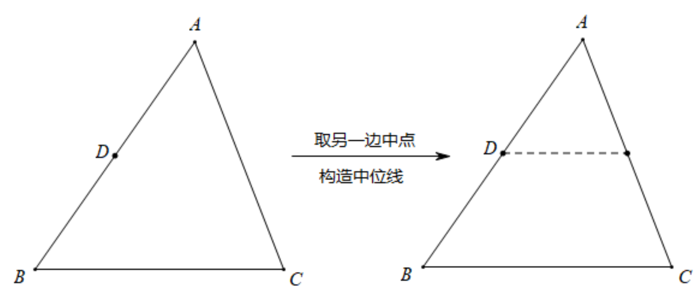


图3

2.3　已知三角形一边的中点，可考虑中位线定理

【模型基础】

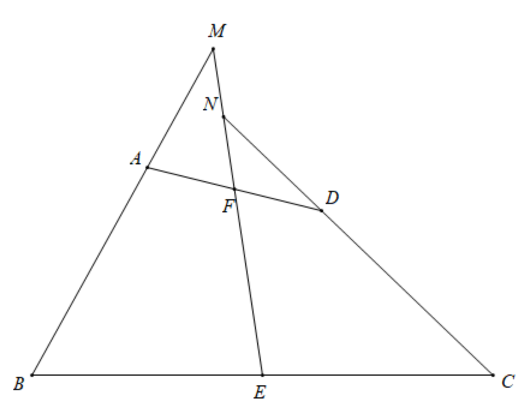


【模型分析】

在三角形中，如果有中点，可构造三角形的中位线，利用三角形中位线的性质定理：$DE//BC$，且 $DE \frac{1}{2}BC$ 来解题．中位线定理中既有线段之间的位置关系又有数量关系，该模型可以解决角问题，线段之间的倍半、相等及平行问题．

【模型实例】

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，E,F 分别是 BC,AD 的中点，连接 EF 并延长，分别与 BA,CD 的延长线交于点 M,N. 求证：$\angle BME=\angle CNE$.



【模型精炼】

1. (1) 如图 1，BD, CE 分别是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，过点 A 作 $AD \perp BD, AE \perp CE$，垂足分别为 D, E，连接 DE. 求证：$DE//BC$，$DE = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$；

(2) 如图 2，BD, CE 分别是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，其它条件不变。上述结论是否成立？

(3) 如图 3，BD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，CE 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，其它条件不变。DE 与 BC 还平行吗？它与 $\triangle ABC$ 三边又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并对其中一种情况进行证明。

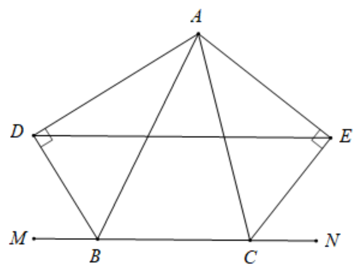


图1

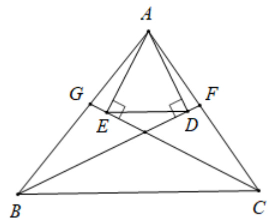


图2

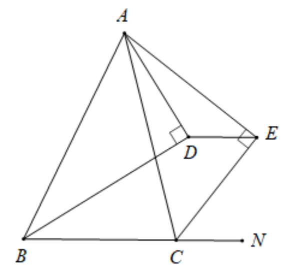


图3

2. 问题一：如图 1，在四边形 $ACBD$ 中，AB 与 CD 相交于点 O，$AB = CD$，E, F 分别是 BC, AD 的中点，连接 EF 分别交 DC, AB 于点 M, N，判断 $\triangle OMN$ 的形状，请直接写出结论；

问题二：如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$AC > AB$，点 D 在 AC 上，$AB = CD$，E, F 分别是 BC, AD 的中点，连接 EF 并延长，与 BA 的延长线交于点 G，若 $\angle EFC = 60°$，连接 GD，判断 $\triangle AGD$ 的形状并证明。

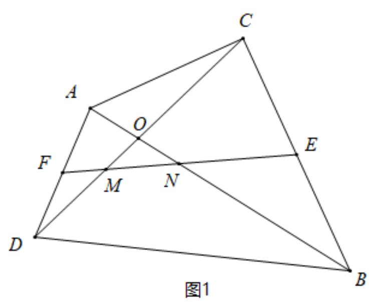


图1

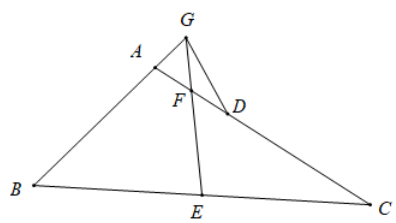
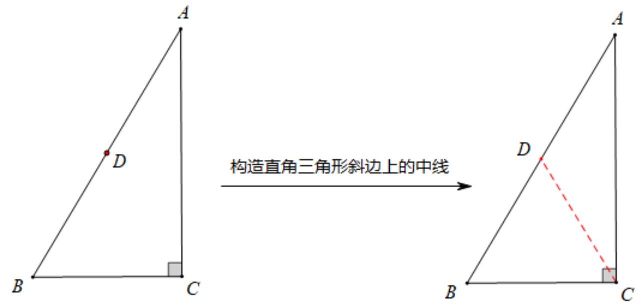


图2

2.4 已知直角三角形斜边中点，可以考虑构造斜边中线

【模型基础】

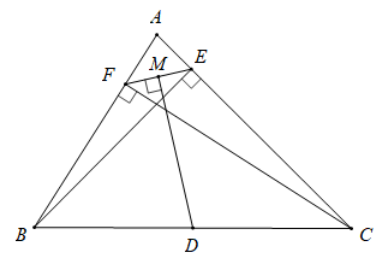


【模型分析】

在直角三角形中，当遇见斜边中点时，经常会作斜边上的中线，利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即 $CD=\frac{1}{2}AB$，来证明线段间的数量关系，而且可以得到两个等腰三角形：$\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$，该模型经常会与中位线定理一起综合应用。

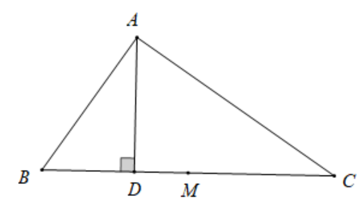
【模型实例】

如图，在 $\triangle ABC$ 中，BE,CF 分别为 AC,AB 上的高，D 为 BC 的中点，$DM\perp EF$ 于点 M。求证：$FM=EM$。

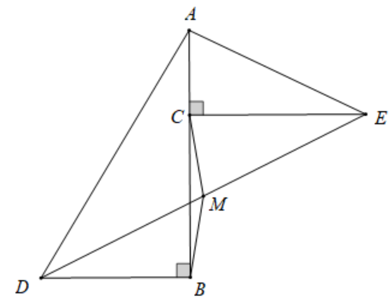


【模型精炼】

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，$AD\perp BC$ 于点 D，M 为 BC 的中点，$AB=10$。求 DM 的长度。



2. 已知，$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是直角三角形，且 $\angle ABD=\angle ACE=90^\circ$，连接 DE，M 为 DE 的中点，连接 MB,MC。求证：$MB=MC$。



3. 问题 1：如图 1，，$\triangle ABC$ 中，点 D 是 AB 边的中点，$AE \perp BC$，$BF \perp AC$，垂足分别为点 E, F，AE, BF 交于点 M，连接 DE, DF。若 $DE = kDF$，则 k 的值为 ________；

问题 2：如图 2，，$\triangle ABD$ 中，$CB = CA$，点 D 是 AB 边的中点，点 M 在，$\triangle ABD$ 内部，且 $\angle MAC = \angle MBC$。过点 M 分别作 $ME \perp BC$，$MF \perp AC$，垂足分别为点 E, F，连接 DE, DF。若 $DE = DF$；

问题 3：如图 3，若将上面问题 2 中的条件 $CB = CA$ 变为 $CB \neq CA$，其它条件不变，试探究 DE 与 DF 之间的数量关系，并证明你的结论。

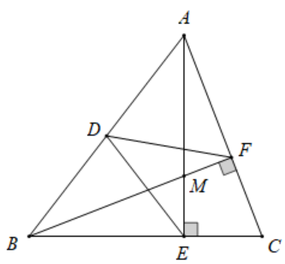


图1

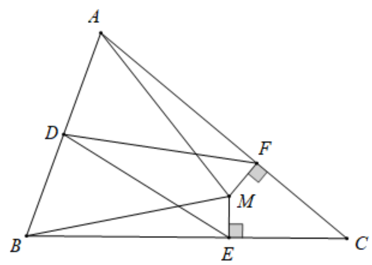


图2

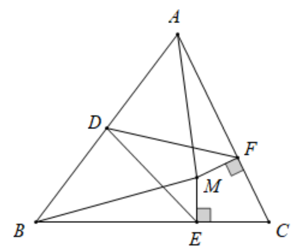


图3