

模型研究系列 截长补短模型

一粒沙整理
安徽省霍邱县龙潭中学

2020 年 7 月 4 日

文章导航

1 引入	1
2 截长补短模型	1
3 例题学习	2
4 模型应用	2

1 引入

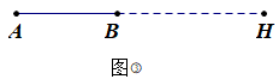
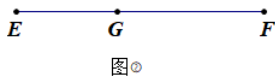
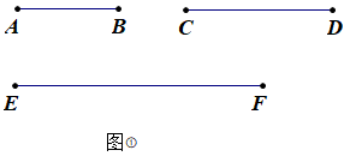
截长补短法，是初中几何题中一种添加辅助线的方法，也是把几何题化难为易的一种策略。截长补短的方法适用于求证线段的和差倍分关系。截长，指在长线段中截取一段等于已知线段；补短，指将短线段延长，延长部分等于已知线段。该类题目中常出现等腰三角形、角平分线等关键词句，可以采用截长补短法构造全等三角形来完成证明过程。

2 截长补短模型

如图①，若证明线段 AB 、 CD 、 EF 之间存在 $EF = AB + CD$ ，可以考虑截长补短法。

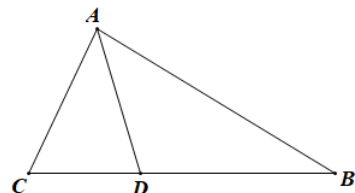
截长法：如图②，在 EF 上截取 $EG = AB$ ，再证明 $GF = CD$ 即可。

补短法：如图③，延长 AB 至 H 点，使 $BH = CD$ ，再证明 $AH = EF$ 即可。

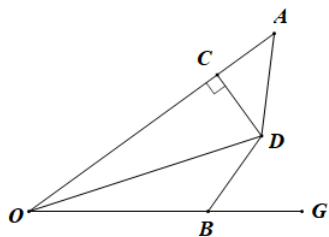


3 例题学习

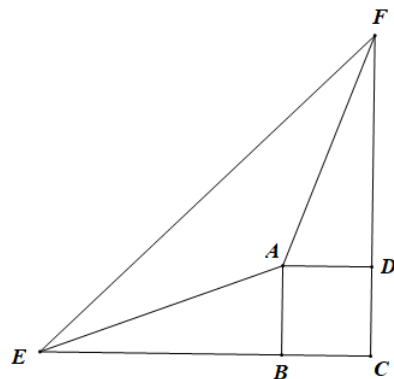
✓例 1: 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 2\angle B$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D .
求证: $AB = AC + CD$.



✓例 2: 如图, 已知 OD 平分 $\angle AOB$, $DC \perp OA$ 于点 C , $\angle A = \angle GBD$.
求证: $AO + BO = 2CO$.

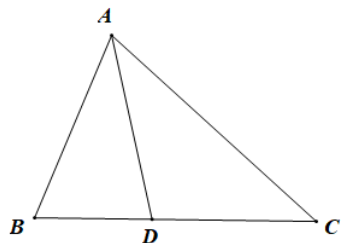


✓例 3: 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, E, F 分别在 CB, CD 的延长线上, $\angle EAF = 135^\circ$.
证明: $BE + DF = EF$.

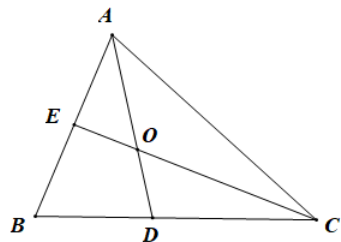


4 模型应用

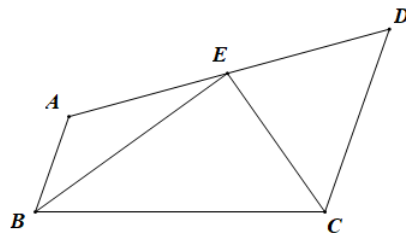
1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 且 $AC = AB + BD$. 求 $\angle ABC$ 的度数.



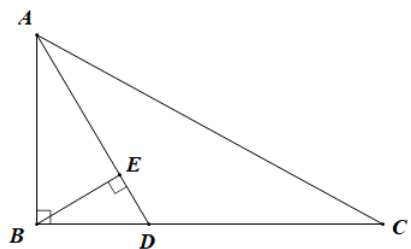
2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, AD, CE 分别平分 $\angle BAC, \angle ACB$.
求证: $AC = AE + CD$.



3. 如图, $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$, BE, CE 分别平分 $\angle ABC, \angle BCD$. 求证: $AB + CD = BC$.

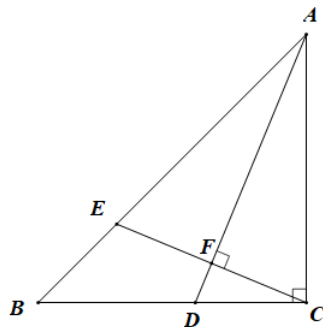


4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , $\angle C = 30^\circ$, $BE \perp AD$ 于点 E .
求证: $AC - AB = 2BE$.



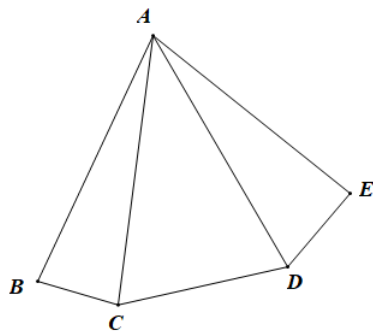
5. 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , $CE \perp AD$ 交 AD 于 F 点, 交 AB 于点 E .

求证: $AD = 2DF + CE$.



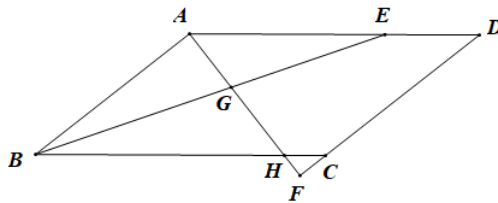
6. 如图, 五边形 $ABCDE$ 中, $AB = AC$, $BC + DE = CD$, $\angle B + \angle E = 180^\circ$.

求证: AD 平分 $\angle CDE$.

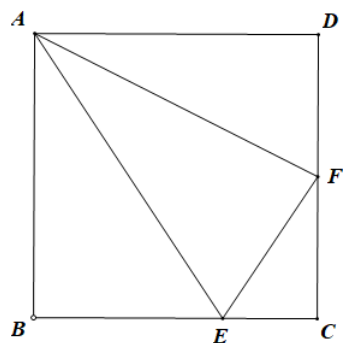


7. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 E , 过点 A 作 $AF \perp DC$, 交 DC 的延长线于点 F , 分别交 BE, BC 于点 G, H , 且 $AB = AF$.

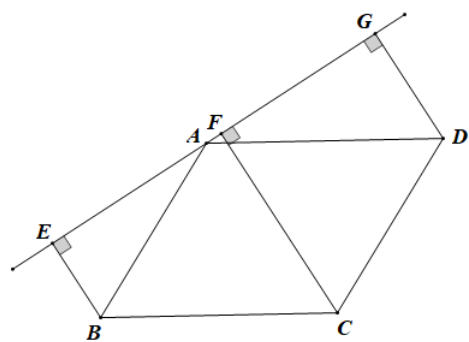
求证: $ED - AG = FC$.



8. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, F 是 CD 的中点, E 是 BC 边上的一点, 且 AF 平分 $\angle DAE$. 求证: $AE = EC + CD$.



9. 如图, 过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 的直线 l (形外), 分别过 B, C, D 作直线 l 的垂线, E, F, G 为垂足。求证: $CF = BE + DG$ 。



10.(1) 如图 1, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 点 D 是边 BC 下方一点, $\angle BDC = 120^\circ$, 探索线段 DA, DB, DC 之间的数量关系。

解题思路: 延长 DC 到点 E , 使 $CE = BD$, 根据 $\angle BAC + \angle BDC = 120^\circ$, 可证 $\angle ABD = \angle ACE$, 易证 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 得出 $\triangle ADE$ 是等边三角形, 所以 $AD = DE$, 从而解决问题。根据上述解题思路, 三条线段 DA, DB, DC 之间的数量关系是 _____ (直接写出结果);

(2) 如图 2, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D 是边 BC 下方一点, $\angle BDC = 90^\circ$, 探索三线段 DA, DB, DC 之间的等量关系, 并证明你的结论。

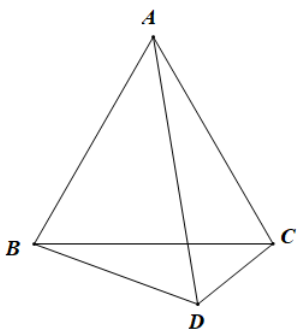


图1

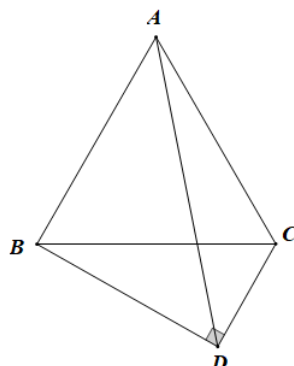
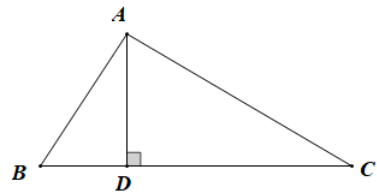


图2

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = CD - BD$, $AD \perp BC$. 求证: $\angle B = 2\angle C$.



12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $A = 105^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 D . 求证: $BC = AC + CD$.

