

模型研究系列 半角模型

一粒沙整理

安徽省霍邱县龙潭中心校

2020 年 7 月 4 日

文章导航

1 什么是半角模型？	1
2 半角模型“破解”策略	1
3 “半角模型”的类型	2
3.1 $90^\circ + 45^\circ$ 的半角模型	2
3.1.1 正方形中含半角及其变型	2
3.1.2 等腰直角三角形内含半角	4
3.2 $120^\circ + 60^\circ$ 的半角模型	5
3.3 一般情况半角模型 $\alpha + 2\alpha$	5
4 习题演练	5

1 什么是半角模型？

所谓“半角模型”指的是题目中出现了两个角，小角等于大角的一半，故称为“半角模型”，有最普通的半角问题，但是多数“半角模型”问题都是特殊角之间的“半角模型”。常见的有“ 30° 与 60° ”、“ 45° 与 90° ”、“ 60° 与 120° ”等类型。

2 半角模型“破解”策略

记住一句话：“半角模型，必旋转”

注意：

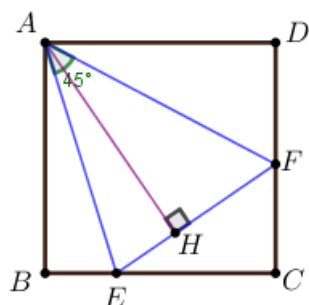
- (1) 旋转角度通常为大角的角度；
- (2) 旋转后，往往涉及三点共线问题（须简单证明）；
- (3) 旋转后，一般需要再证一对共旋转点的三角形全等（SAS）。

3 “半角模型”的类型

3.1 $90^\circ + 45^\circ$ 的半角模型

3.1.1 正方形中含半角及其变型

如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别为边 BC, CD 上点, 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 连接 EF , $AH \perp EF$.



- 结论①: $EF = BE + DF$;
 结论②: $\triangle CEF$ 的周长 $C = 2AB$;
 结论③: AE 平分 $\angle BEF$, AF 平分 $\angle DFE$;
 结论④: $AH = AB$;
 结论⑤: $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$.

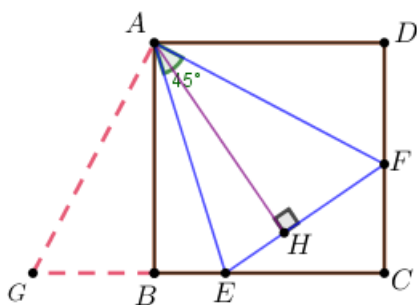


图 1

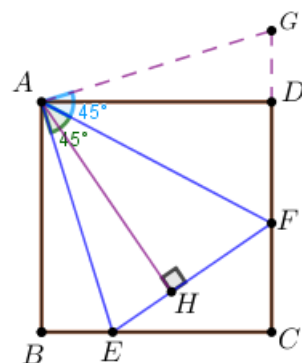


图 2

证法①: (旋转法)

如图 1, 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$. (亦可旋转 $\triangle ABE$)

易得 $\triangle ADF \cong \triangle ABG \rightarrow AG = AF, DF = BG, \angle 1 = \angle 2$;

再证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF \rightarrow EF = EG$;

综上: $EF = EG = BE + BG = BE + DF$. (结论①得证)

$\triangle CEF$ 的周长 $C = EF + CE + CF = BE + DF + CE + CF = BC + DC = 2AB$. (结论②得证)

由 $\triangle AEG \cong \triangle AEF \rightarrow AE$ 平分 $\angle BEF$, 同理可证 AF 平分 $\angle AFE$. (结论③得证)

利用结论③易证 $\triangle ABE \cong \triangle AHE$ (AAS) $\rightarrow AB = AH$. (结论④得证)

由①易证 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}EF \cdot AB$, 而 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}EF \cdot AH$, 由④易得 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$. (结论⑤得证)

证法②: (截长补短法)

如图 2, 延长 CD 至点 G 使得 $DG = BE$.

易证: $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS) $\rightarrow AE = AG, \angle GAF = 45^\circ$;

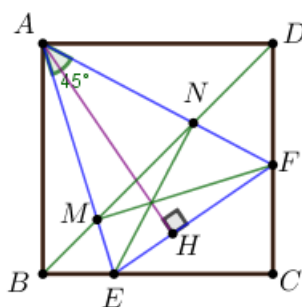
易证: $\triangle AFE \cong \triangle AFG$ (SAS) $\rightarrow EF = GF$;

综上: $EF = GF = GD + DF = BE + DF$.

其它结论证法同证法①.

进一步地, 连接对角线后还可以得出下面 8 个结论:

如图, 连接 BD , 分别交 AE, AF 于点 M, N .



- 结论①: $MN^2 = BM^2 + DN^2$;
 结论②: $2AM^2 = BM^2 + DM^2, 2AN^2 = DN^2 + BN^2$;
 结论③: $\triangle AEN$ 为等腰直角三角形, $\triangle AFM$ 为等腰直角三角形;
 结论④: $\triangle ANM \sim \triangle DNF \sim \triangle BEM \sim \triangle AEF \sim \triangle BNA \sim \triangle DAM$;
 结论⑤: $\sqrt{2}BN = AB + BE, \sqrt{2}DM = AD + DF$;
 结论⑥: $\sqrt{2}DN = CE, \sqrt{2}BM = CF, \sqrt{2}MN = EF$;
 结论⑦: $S_{\triangle AMN} = S_{\text{四边形} MNFE}$ (即 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}S_{AEF}$);
 结论⑧: A, M, F, D 四点共圆; A, B, E, N 四点共圆; M, N, F, C, E 五点共圆.

下面我们来证明, 对于结论①, 我们用两种方法证明:

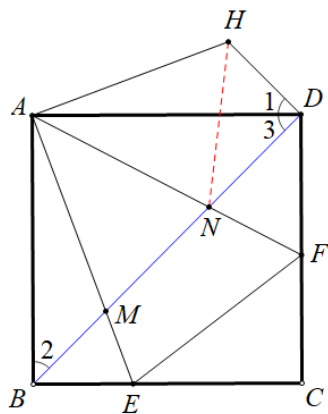


图1

证法①:

将 $\triangle AMB$ 逆时针 90° 旋转到 $\triangle AHD$, 如图 1.

则 $\angle 2 = \angle 1 = \angle 3 = 45^\circ$

$\therefore \angle HDN = \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$

$\therefore \triangle HDN$ 是直角三角形

\therefore 易证 $\triangle ANH \cong \triangle ANM$

$\therefore NH = NM$

在 $Rt\triangle HDN$ 中, $HD^2 + DN^2 = HN^2$

又 $\therefore NH = NM, HD = MB$

$\therefore BM^2 + DN^2 = MN^2$

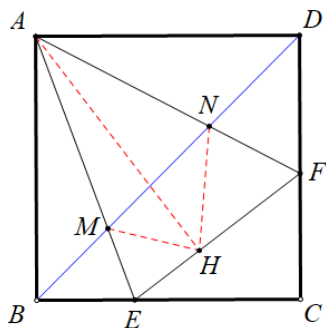


图2

证法②:

过 A 作 AH 垂直 EF 于 H , 连接 MH, NH , 如图 2.

易证, $\triangle ABM \cong \triangle AHM, \triangle ADN \cong \triangle AHN$

$\therefore \angle AHM = \angle ABM = 45^\circ, \angle AHN = \angle ADN = 45^\circ$

$\therefore \angle MHN = 90^\circ$

$MH^2 + NH^2 = MN^2$

又 $\therefore MH = MB, NH = ND$

$\therefore BM^2 + DN^2 = MN^2$

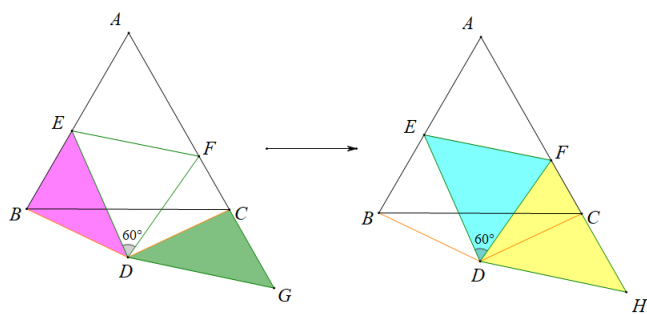
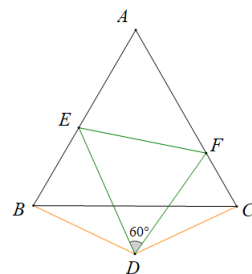
结论②, 我们也用两种方法予以证明, 过程如下:

3.2 $120^\circ + 60^\circ$ 的半角模型

如图, 已知 $\triangle ABC$ 是正三角形, 点 D 是 $\triangle ABC$ 外一点, $DB = DC$ 且 $\angle BDC = 120^\circ$, $\angle EDF = 60^\circ$, DE, DF 分别交 AB, AC 于点 E, F . 此时可以推导出以下结论:

结论①: $EF = BE + CF$;

结论②: $C_{\triangle AEF} = 2AB$.



3.3 一般情况半角模型 $\alpha + 2\alpha$

4 习题演练