初中数学必学的数学模型

目录

[初中数学必学的数学模型 1](#_Toc12175)

[第一讲 8字模型与飞镖模型 2](#_Toc30372)

[第二讲 角平分线四大模型 6](#_Toc5289)

[第三讲 截长补短 12](#_Toc9470)

[第四讲 手拉手模型 16](#_Toc10302)

[第五讲 三垂直全等模型 18](#_Toc26486)

[第六讲 将军饮马 21](#_Toc24024)

[第七讲 蚂蚁行程 28](#_Toc29122)

[第八讲 中点五大模型 31](#_Toc22341)

[第九讲 半角模型 37](#_Toc28578)

[第十讲 相似模型 41](#_Toc1484)

[第十一讲 圆中的辅助线 51](#_Toc14273)

[第十二讲 辅助圆 58](#_Toc19957)

[第十三讲 角平分线交角模型 62](#_Toc10954)

[第十四讲 胡不归 62](#_Toc2794)

[第十五讲 阿氏圆 62](#_Toc18400)

[第十六讲 费马点问题 62](#_Toc30063)

[第十七讲 十字架模型 62](#_Toc2586)

[第十八讲 对角互补 62](#_Toc21506)

# 第一讲 8字模型与飞镖模型

**模型1 角的“8”字模型**

**如图所示，*AB*、*CD*相交于点*O*，连接*AD*、*BC*。**

**结论：∠*A*+∠*D*=∠*B*+∠*C*。**

****

**模型分析**

**8字模型往往在几何综合题目中推导角度时用到。**

**模型实例**

**观察下列图形，计算角度：**

**（1）如图①，∠*A*+∠*B*+∠*C*+∠*D*+∠*E*= ；**

**（2）如图②，∠*A*+∠*B*+∠*C*+∠*D*+∠*E*+∠*F*= 。**

****

**热搜精练**

**1．（1）如图①，求∠*CAD*+∠*B*+∠*C*+∠*D*+∠*E*= ；**

**（2）如图②，求∠*CAD*+∠*B*+∠*ACE*+∠*D*+∠*E*= 。**

****

**2．如图，求∠*A*+∠*B*+∠*C*+∠*D*+∠*E*+∠*F*+∠*G*+∠*H*= 。**

****

**模型2 角的飞镖模型**

**如图所示，有结论：**

**∠*D*=∠*A*+∠*B*+∠*C*。**

****

**模型分析**

**飞镖模型往往在几何综合题目中推导角度时用到。**

**模型实例**

**如图，在四边形*ABCD*中，*AM*、*CM*分别平分∠*DAB*和∠*DCB*，*AM*与*CM*交于*M*。探究∠*AMC*与∠*B*、∠*D*间的数量关系。**

****

**热搜精练**

**1．如图，求∠*A*+∠*B*+∠*C*+∠*D*+∠*E*+∠*F*= ；**

****

**2．如图，求∠*A*+∠*B*+∠*C*+∠*D* = 。**

****

**模型3 边的“8”字模型**

**如图所示，*AC*、*BD*相交于点*O*，连接*AD*、*BC*。**

**结论：*AC*+*BD*>*AD*+*BC*。**

****

**模型实例**

**如图，四边形*ABCD*的对角线*AC*、*BD*相交于点*O*。**

**求证：（1）*AB*+*BC*+*CD*+*AD*>*AC*+*BD*；**

**（2）*AB*+*BC*+*CD*+*AD*<2*AC*+2*BD*.**

****

**模型4 边的飞镖模型**

**如图所示有结论：**

***AB*+*AC*>*BO*+*CO*。**

****

**模型实例**

**如图，点*O*为三角形内部一点。**

**求证：（1）2（*AO*+*BO*+*CO*）>*AB*+*BC*+*AC*；**

**（2）*AB*+*BC*+*AC*>*AO*+*BO*+*CO*.**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，*D*、*E*在*BC*边上，且*BD*=*CE*。**

**求证：*AB*+*AC*>*AD*+*AE*。**

****

**2．观察图形并探究下列各问题，写出你所观察得到的结论，并说明理由。**

**（1）如图①，△*ABC*中，*P*为边*BC*上一点，请比较*BP*+*PC*与*AB*+*AC*的大小，并说明理由；**

**（2）如图②，将（1）中的点*P*移至△*ABC*内，请比较△*BPC*的周长与△*ABC*的周长的大小，并说明理由；**

**（3）图③将（2）中的点*P*变为*P*1、*P*2，请比较四边形*BP*1*P*2*C*的周长与△*ABC*的周长的大小，并说明理由。**

****

# 第二讲 角平分线四大模型

**模型1 角平分线上的点向两边作垂线（双垂模型）**

**如图，*P*是∠*MON*的平分线上一点，过点*P*作*PA*⊥*OM*于点*A*，*PB*⊥*ON*于点*B*。**

**结论：*PB*=*PA*。**

****

**模型分析**

**利用角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等，构造模型，为边相等、角相等、三角形全等创造更多的条件，进而可以快速找到解题的突破口。**

**模型实例**

**（1）如图①，在△*ABC*中，∠*C*=90°，*AD*平分∠*CAB*，*BC*=6，*BD*=4，那么点*D*到直线*AB*的距离是 ；**

**（2）如图②，∠1=∠2，+∠3=∠4。 求证：*AP*平分∠*BAC*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，在四边形*ABCD*中，*BC*>*AB*，*AD*=*DC*，*BD*平分∠*ABC*。求证：∠*BAD*+∠*BCD*=180°。**

****

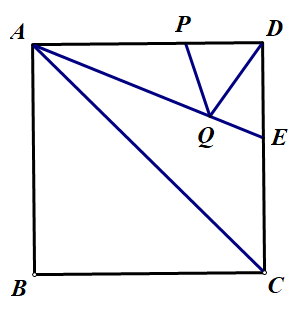
**2．如图，△*ABC*的外角∠*ACD*的平分线*CP*与内角∠*ABC*的平分线*BP*交于点*P*，若∠*BPC*=40°，则∠*CAP*= 。**

****

1. **如图，正方形ABCD的边长为4，∠DAC的平分线交DC于点E，若点P、Q分别是AD和AE上的动点，则PQ+PD的最小值是 。**

**法①：双垂模型**

**法②：双等模型、将军饮马、垂线段最短**



**模型2 截取构造对称全等 （双等模型）**

**如图，*P*是∠*MON*的平分线上一点，点*A*是射线*OM*上任意一点，在*ON***

**上截取*OB*=*OA*，连接*PB*。**

**结论：△*OPB*≌△*OPA*。**

****

**模型分析**

**利用角平分线图形的对称性，在角的两边构造对称全等三角形，可以得到对应边、对应角相等。利用对称性把一些线段或角进行转移，这是经常使用的一种解题技巧。**

**模型实例**

**（1）如图①所示，在△*ABC*中，*AD*是△*ABC*的外角平分线，*P*是*AD*上异于点*A*的任意一点，试比较*PB*+*PC*与*AB*+*AC*的大小，并说明理由；**

**（2）如图②所示， *AD*是△*ABC*的内角平分线，其他条件不变，试比较*PC*-*PB*与*AC*-*AB*的大小，并说明理由。**

****

**热搜精练**

**1．已知，在△*ABC*中，∠*A*=2∠*B*，*CD*是∠*ACB*的平分线，*AC*=16，*AD*=8。 求线段*BC*的长。**

****

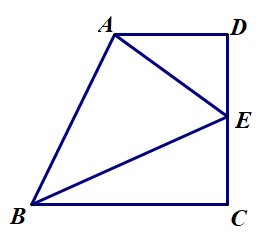
**2．已知，在△*ABC*中，*AB*=*AC*，∠*A*=108°，*BD*平分∠*ABC*。 求证：*BC*=*AB*+*CD*。**

****

**3．如图所示，在△*ABC*中，∠*A*=100°，∠*A*=40°，*BD*是∠*ABC*的平分线，延长*BD*至*E*，*DE*=*AD*。求证：*BC*=*AB*+*CE*。**

****

1. **如图，梯形ABCD中，AD//BC,点E在CD上，且AE平分∠BAD,BE平分∠ABC,求证：AD=AB-BC**

法①：双等模型+截长

法②：双平模型+补短

**模型3 角平分线+垂线构造等腰三角形（单垂模型）**

**如图，*P*是∠*MO*的平分线上一点，*AP*⊥*OP*于*P*点，延长*AP*于点*B*。**

**结论：△*AOB*是等腰三角形。**

****

**模型分析**

**构造此模型可以利用等腰三角形的“三线合一”，也可以得到两个全等的直角三角形，进而得到对应边、对应角相等。这个模型巧妙地把角平分线和三线合一联系了起来。**

**模型实例**

**如图，已知等腰直角三角形*ABC*中，∠*A*=90°，*AB*=*AC*，*BD*平分∠*ABC*，**

***CE*⊥*BD*，垂足为*E*。**

**求证：*BD*=2*CE*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，*BE*是角平分线，*AD*⊥*BE*，垂足为*D*。**

**求证：∠2=∠1+∠*C*。**

****

**2．如图，在△*ABC*中，∠*ABC*=3∠*C*，*AD*是∠*BAC*的平分线，*BE*⊥*AD*于点*E*。**

**求证：*BE*=（*AC*-*AB*）。**

****

**模型4 角平分线+平行线（双平模型）**

**如图，*P*是∠*MO*的平分线上一点，过点*P*作*PQ*∥*ON*，交*OM*于点*Q*。**

**结论：△*POQ*是等腰三角形。**

****

**模型分析**

**有角平分线时，常过角平分线上一点作角的一边的平行线，构造等腰三角形，为证明结论提供更多的条件，体现了角平分线与等腰三角形之间的密切关系。**

**模型实例**

**解答下列问题：**

**（1）如图①所示，在△*ABC*中，*EF*∥*BC*，点*D*在*EF*上，*BD*、*CD*分别平分∠*ABC*、∠*ACB*，写出线段*EF*与*BE*、*CF*有什么数量关系；**

**（2）如图②所示，*BD*平分∠*ABC*、*CD*平分∠*ACG*，*DE*∥*BC*交*AB*于点*E*，交*AC*于点*F*，线段*EF*与*BE*、*CF*有什么数量关系？并说明理由。**

**（3）如图③所示，*BD*、*CD*分别为外角∠*CBM*、∠*BCN*的平分线，，*DE*∥*BC*交*AB*延长线于点*E*，交*AC*延长线于点*F*，直接写出线段*EF*与*BE*、*CF*有什么数量关系？**

****

**热搜精练**

1. **如图，在△*ABC*中，∠*ABC*、∠*ACB* 的平分线交于点*E*，过点*E*作*EF*∥*BC*，交*AB*于点*M*，交*AC*于点*N*。若*BM*+*CN*=9，则线段*MN*的长为 。**

****

**2．如图，在△*ABC*中，*AD*平分∠*BAC*，点*E*、*F*分别在*BD*、*AD*上，*EF*∥*AB*，且*DE*=*CD*。**

**求证：*EF*=*AC*。**

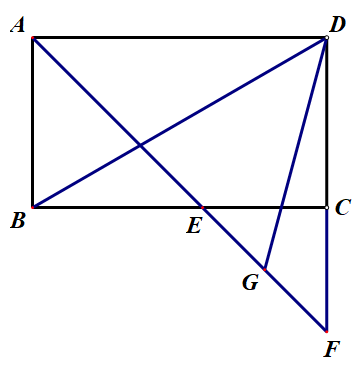
****

**3．如图，梯形*ABCD*中，*AD*∥*BC*，点*E*在*CD*上，且*AE*平分∠*BAD*，*BE*平分∠*ABC*。**

**求证：*AD*=*AB*-*BC*。**

****

**4.如图，在矩形ABCD中，∠BAD的平分线交BC于点E，交DC的延长线于点F，点G是EF的中点，求∠BDG的度数。**



# 第三讲 截长补短

**模型 截长补短**

**如图①，若证明线段*AB*、*CD*、*EF*之间存在*EF*=*AB*+*CD*，可以考虑截长补短法。**

**截长法：如图②，在*EF*上截取*EG*=*AB*，再证明*GF*=*CD*即可。**

**补短法：如图③，延长*AB*至*H*点，使*BH*=*CD*，再证明*AH*=*EF*即可。**

****

**模型分析**

**截长补短法，是初中几何题中一种添加辅助线的方法，也是把几何题化难为易的一种策略。截长补短的方法适用于求证线段的和差倍分关系。截长，指在长线段中截取一段等于已知线段；补短，指将短线段延长，延长部分等于已知线段。该类题目中常出现等腰三角形、角平分线等关键词句，可以采用截长补短法构造全等三角形来完成证明过程。**

**模型实例**

**例1．如图，已知在△*ABC*中，∠*C*=2∠*B*，*AD*平分∠*BAC*交*BC*于点*D*。**

**求证：*AB*=*AC*+*CD*。**

****

**例2．如图，已知*OD*平分∠*AOB*，*DC*⊥*OA*于点*C*，∠*A*=∠*GBD*。**

**求证：*AO*+*BO*=2*CO*。**

****

1. **如图，四边形ABCD是正方形，E,F分别在CB,CD的延长线上，∠EAF=135°。证明：BE+DF=EF**

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，∠*BAC*=60°，*AD*是∠*BAC*的平分线，且*AC*=*AB*+*BD*。**

**求∠*ABC*的度数。**

****

**2．如图，在△*ABC*中，∠*ABC*=60°，*AD*、*CE*分别平分∠*BAC*、∠*ACB*。**

**求证：*AC*=*AE*+*CD*。**

****

**3．如图，∠*ABC*+∠*BCD*=180°，*BE*、*CE*分别平分∠*ABC*、∠*BCD*。**

**求证：*AB*+*CD*=*BC*。**

****

**4．如图，在△*ABC*中，∠*ABC*=90°，*AD*平分∠*BAC*交*BC*于点*D*，∠*C*=30°， *BE*⊥*AD*于点*E*。**

**求证：*AC*-*AB*=2*BE*。**

****

**5．如图，*Rt*△*ABC*中，*AC*=*BC*，*AD*平分∠*BAC*交*BC*于点*D*，*CE*⊥*AD*交*AD*于*F*点，交*AB*于点*E*。**

**求证：*AD*=2*DF*+*CE*。**

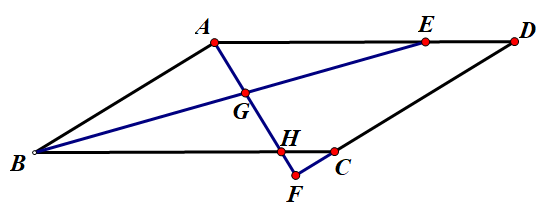
****

**6．如图，五边形*ABCDE*中，*AB*=*AC*，*BC*+*DE*=*CD*，∠*B*+∠*E*=180°。**

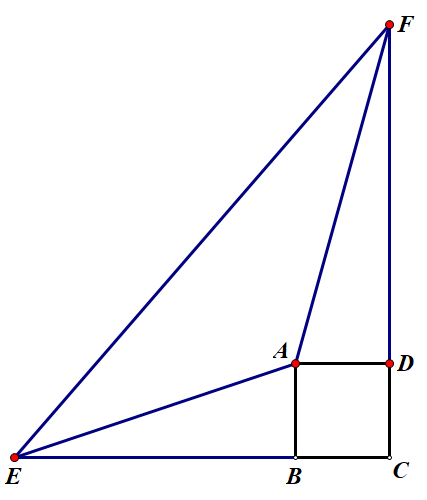
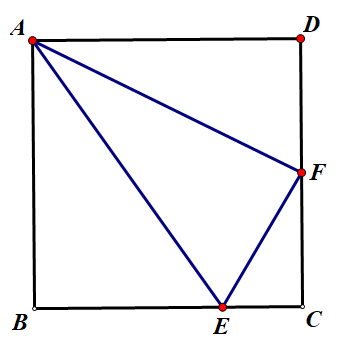
**求证：*AD*平分∠*CDE*。**

****

**7.如图，在□ABCD中，BE平分∠ABC交AD于点E，过点A作AF⊥DC,交DC的延长线于点F，分别交BE，BC于点G,H，且AB=AF。求证：ED-AG=FC**

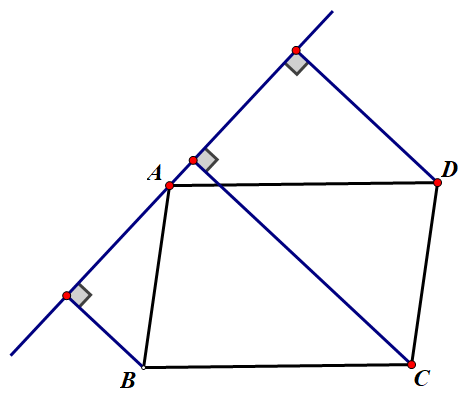


**8.如图，四边形ABCD是正方形，E,F分别在CB,CD的延长线上，∠EAF=135°。证明：BE+DF=EF**

**9.如图，在正方形ABCD中，F是CD的中点，E是BC边上的一点，且AF平分∠DAE.求证：AE=EC+CD**

**10.如图，过平行四边形ABCD的顶点A的直线l(形外)，分别过B,C,D作直线L的垂线，E,F,G为垂足。求证：CF=BE+DG**



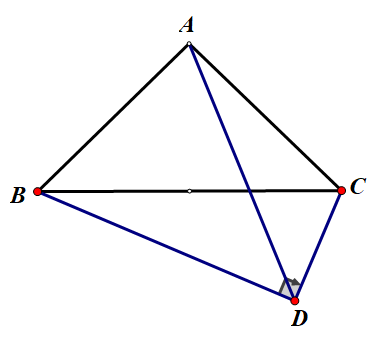
法①：截长补短

法②：三角形中位线+梯形中位线

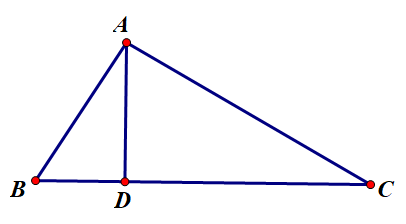
**11.（1）如图，△*ABC*为等边三角形，点D是边BC下方一点，∠BDC=120°，探索线段DA,DB,DC之间的数量关系.**

**解题思路：延长DC到点E，使CE=BD，根据∠BAC+∠BDC=120°，可证∠ABD=∠ACE，易证△ABD≌△ACE，得出△ADE是等边三角形，所以AD=DE，从而解决问题。根据上述解题思路，三条线段DA,DB,DC之间的数量关系是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_（直接写出结果）**

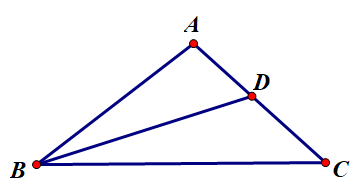
1. **如图，Rt△ABC中，∠BAC=90°，AB=AC,点D是边BC下方一点，∠BDC=90°，探索三线段DA,DB,DC之间的等量关系，并证明你的结论。**



**12.如图，在△ABC中，AB=CD-BD,AD⊥BC.求证：∠B=2∠C.**



**13.如图，在△ABC中，AB=AC,∠A=105°，BD平分∠ABC交AC于D.求证：BC=AC+CD**



# 第四讲 手拉手模型

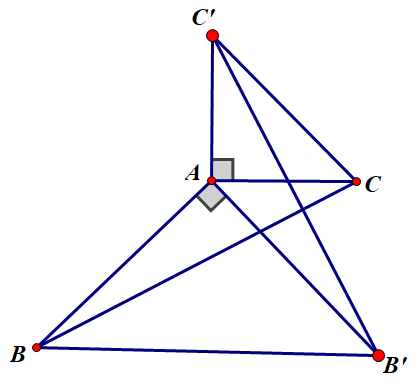
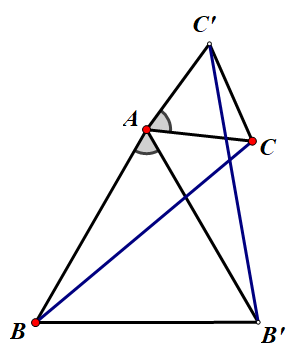
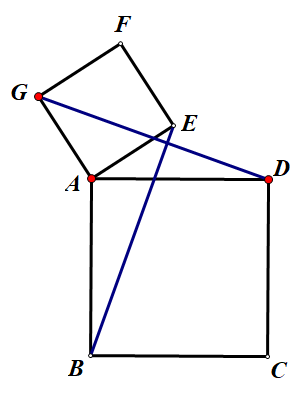
**模型 手拉手**

**如图，△*ABC*是等腰三角形、△*ADE*是等腰三角形，*AB*=*AC*，*AD*=*AE*，∠*BAC*=∠*DAE*=。**

**结论：①△*BAD*≌△*CAE②BD=CE③∠BOC=∠BAC=α④OA平分∠BOE⑤△ABM∽△OCM,△AEN∽△ODN⑥点A,B,C,O四点共圆，点A,E,D,O四点共圆***

****

**手拉手的特殊模型：**

**模型分析**

**手拉手模型常和旋转结合，在考试中作为几何综合题目出现。**

**模型实例**

**例1．如图，△*ADC*与△*EDC*都为等腰直角三角形，连接*AG*、*CE*，相交于点*H*，问（1）*AG*与*CE*是否相等？**

**（2）*AG*与*CE*之间的夹角为多少度？**

****

**例2．如图，直线*AB*的同一侧作△*ABD*和△*BCE*都为等边三角形，连接*AE*、*CD*，二者交点为*H*。求证：**

**（1）△*ABE*≌△*DBC*；**

**（2）*AE*=*DC*；**

**（3）∠*DHA*=∠EHC=60°；**

**（4）△*AGB*≌△*DFB*；**

**（5）△*EGB*≌△*CFB*；**

**（6）连接*GF*，*GF*∥*AC*；**

**（7）连接*HB*，*HB*平分∠*AHC*。**

**（8）△BFG是等边三角形**

**（9）AH=DH+BH,CH=HB+HE**

**(10)△ABG∽△DHG,△BCF∽△HEF**

**(11)点A,D.B.H四点共圆**

**点B,C,E,H四点共圆**

**点G,B,F,H四点共圆**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，*AB*=*CB*，∠*ABC*=90°，*F*为*AB*延长线上一点，点*E*在*BC*上，且*AE*=*CF*。**

**（1）求证：*BE*=*BF*；**

**（2）若∠*CAE*=30°，求∠*ACF*度数。**

****

**2．如图，△*ABD*与△*BCE*都为等边三角形，连接*AE*与*CD*，延长*AE*交*CD*于点*H*．证明：**

**（1）*AE*=*DC*；**

**（2）∠*AHD*=60°；**

**（3）连接*HB*，*HB*平分∠*AHC*。**

****

**3．在线段*AE*同侧作等边△*CDE*（∠*ACE*<120°），点*P*与点*M*分别是线段*BE*和*AD*的中点。求证：△*CPM*是等边三角形。**

****

**4.如图，△ABC与△ADE都是等腰直角三角形，∠BAC=∠DAE=90°，连接CE交AD于点F,连接BD交CE于点G，连接BE，下列结论中：**

**①CE=BD②∠ADC=90°③S四边形BCDE=1/2 BD·CE④BC2+DE2=BE2+CD2其中正确的是（ ）**

**A①②③④B①②③C①④D①③④**

**5．将等腰*Rt*△*ABC*和等腰*Rt*△*ADE*按图①方式放置，∠*A*=90°，*AD*边与*AB*边重合，*AB*=2*AD*=4。将△*ADE*绕点*A*逆时针方向旋转一个角度（0°<>180°），*BD*的延长线交*CE*于*P*。**

**（1）如图②，证明：*BD*=*CE*，*BD*⊥*CE*；**

**（2）如图③，在旋转的过程中，当*AD*⊥*BD*时，求出*CP*的长。**

****

# 第五讲 三垂直全等模型

**模型1 K型三垂直全等模型**

**如图，∠*D*=∠*BCA*=∠*E*=90°，*BC*=*AC*。 结论：*AE+BD=DE***

****

**模型分析**

**说到三垂直模型，不得不说一下弦图，弦图的运用在初中直角三角形中占有举足轻重的地位，很多利用垂直倒角，勾股定理求边长，相似求边长都会用到从弦图中支离出来的一部分几何图形去求解。图①和图②就是我们经常会见到的两种弦图。**

****

**三垂直图形变形如下图③、图④，这也是由弦图演变而来的。**

**模型实例**

**例1．如图，*AB*⊥*BC*，*CD*⊥*BC*，*AE*⊥*DE*，*AE*=*DE*。**

**求证：*AB*+*CD*=*BC*。**

****

**例2．如图，∠*ACB*-90°，*AC*=*BC*，*BE*⊥*CE*于点*D*，*AD*=2.5*cm*，*BE*=0.8*cm*。**

**求*DE*的长。**

**模型2 L型三垂直模型**

****

**例3．如图，在平面直角坐标系中，等腰*Rt*△*ABC*有两个顶点在坐标轴上， 求第三个顶点的坐标。**

****

**模型3 十字架三垂直模型**

**1．如图，正方形*ABCD*，*BE*=*CF*。求证：（1）*AE*=*BF*；**

**（2）*AE*⊥*BF*。**

****

**热搜精练**

**2．直线上有三个正方形*a*、*b*、*c*，若*a*、*c*的面积分别是5和11，则*b*的面积是 。**

****

**3．已知，△*ABC*中，∠*BAC*-90°，*AB*=*AC*，点*P*为*BC*上一动点（*B* *P*<*CP*），分别过*B*、*C*作*BE*⊥*AP*于点*E*、*CF*⊥*AP*于点*F*。**

**（1）求证：*EF*=*CF*-*BE*；**

**（2）若*P*为*BC*延长线上一点，其它条件不变，则线段*BE*、*CF*、*EF*是否存在某种确定的数量关系？画图并直接写出你的结论。**

****

**4．如图，在直角梯形*ABCD*中，*AD*∥*BC*，*AB*⊥*BC*，*AD*=2，*BC*=3，设∠*BCD*=，以*D*为旋转中心，将腰*DC*绕点*D*逆时针旋转90°至*DE*。**

**（1）当=45°时，求△*EAD*的面积；**

**（2）当=30°时，求△*EAD*的面积；**

**（3）当0°<<90°时，猜想△*EAD*的面积与大小有无关系？若有关，写出△*EAD*的面积*S*与的关系式；若无关，请证明结论。**

****

**5．如图，向△*ABC*的外侧作正方形*ABDE*、正方形*ACFG*，过点*A*作*AH*⊥*BC*于*H*，*AH*的反向延长线与*EG*交于点*P*。求证：*BC*=2*AP*。**

****

# 第六讲 将军饮马

**“将军饮马”问题主要利用构造对称图形解决求两条线段和差、三角形周长、四边形周长等一类最值问题，会与直线、角、三角形、四边形、圆、抛物线等图形结合，在近年的中考和竞赛中经常出现，而且大多以压轴题的形式出现。**

**模型1 定直线与两定点**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **模型** | **作法** | **结论** |
| **当两定点*A*、*B*在直线异侧时，在直线上找一点*P*，使*PA*+*PB*最小。** | **连接*AB*交直线于点*P*，点*P*即为所求作的点。** | ***PA*+ *PB*的最小。** |
| **当两定点*A*、*B*在直线同侧时，在直线上找一点*P*，使*PA*+*PB*最小。** | **作点*B*关于直线的对称点*B*′，连接*AB*′交直线于点*P*，点*P*即为所求作的点。** | ***PA*+*PB*的最小值为*AB*′。** |
| **当两定点*A*、*B*在直线同侧时，在直线上找一点*P*，使最大。** | **连接*AB*并延长交直线于点*P*，点*P*即为所求作的点。** | **的最大值为*AB*。** |
| **当两定点*A*、*B*在直线同侧时，在直线上找一点*P*，使最大。** | **作点*B*关于直线的对称点*B*′，连接*AB*′并延长交直线于点*P*，点*P*即为所求作的点。** | **的最大值为*AB*′。** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **当两定点*A*、*B*在直线同侧时，在直线上找一点*P*，使最小。** | **连接*AB*，作*AB*的垂直平分线交直线于点*P*，点*P*即为所求作的点。** | **的最小值为0。** |

**模型实例**

**例1．如图，正方形*ABCD*的面积是12，△*ABE*是等边三角形，点*E*在正方形*ABCD*内，在对角线*AC*上有一点*P*，则*PD*+*PE*的最小值为 。**

****

**例2．如图，已知△*ABC*为等腰直角三角形，*AC*=*BC*=4，∠*BCD*=15°，*P*为*CD*上的动点，则的最大值是多少？**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，*AC*=*BC*=2，∠*ACB*-90°，*D*是*BC*边的中点，*E*是*AB*边上一动点，则*EC*+*ED*的最小值是 。**

****

**2．如图，点*C*的坐标为（3，），当△*ABC*的周长最短时，求的值。**

****

**3．如图，正方形*ABCD*中，*AB*-7，*M*是*DC*上的一点，且*DM*-3，*N*是*AC*上的一动点，求的最小值与最大值。**

****

**模型2 角到定点**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **模型** | **作法** | **结论** |
| **点*P*在∠*AOB*的内部，在*OB*上找点*D*，在*OA*上找点*C*，使得△*PCD*周长最小。** | **分别作点*P*关于*OA*、*OB*的对称点*P*′、*P*"，连接**  ***P*′*P*"，交*OA*、*OB*于点*C*、*D*，点*C*、*D*即为所求。** | **△*PCD*周长最小为*P*′*P*"。** |
| **点*P*在∠*AOB*的内部，在*OB*上找点*D*，在*OA*上找点*C*，使得*PD*+*CD*最小。** | **作点*P*关于*OB*的对称点*P*′，过点*P*′作*P*′*C*⊥*OA*交*OB*于点*C*，点*C*、*D*即为所求。** | ***PC*+*CD*的最小值为*P*′*C*。** |
| **点*P*、*Q*在∠*AOB*的内部，在*OB*上找点*D*，在*OA*上找点*C*，使得四边形*PQDC*周长最小。** | **分别作点*P*、*Q*关于*OA*、*OB*的对称点*P*′、*Q*′，连接*P*′*Q*′，交*OA*、*OB*于点*C*、*D*，点*C*、*D*即为所求。** | ***PC*+*CD*+*DQ*的最小值为*P*′*Q*′，所以四边形*PQDC*的周长的最小值为*P*′*Q*′+*PQ*。** |

**模型实例**

**例1．如图，∠*AOB*=30°，∠*AOB*内有一定点*P*，且*OP*=10，在*OA*上有一点*Q*，*OB*上有一点*R*。若△*PQR*周长最小，则最小周长是多少？**

****

**热搜精练**

**1．如图，∠*MON*=40°，*P*为∠*MON*内一定点，*A*为*OM*上的点，*B*为*ON*上的点，当△*PAB*的周长取最小值时：**

**（1）找到*A*、*B*点，保留作图痕迹；**

**（2）求此时∠*APB*等于多少度。如果∠*MON*=，∠*APB*又等于多少度？**

****

**2．如图，四边形*ABCD*中，∠*BAD*=110°，∠*B*=∠*D*=90°，在*BC*、*CD*上分别找一点*M*、*N*，使△*AMN*周长最小，并求此时∠*AMN*+∠*ANM*的度数。**

****

**3．如图，在轴上找一点*C*，在轴上找一点*D*，使*AD*+*CD*+*BC*最小，并求直线*CD*的解析式及点*C*、*D*的坐标。**

****

**4．如图∠*MON*=20°，*A*、*B*分别为射线*OM*、*ON*上两定点，且*OA*=2，*OB*=4，点*P*、*Q*分别为射线*OM*、*ON*上两动点，当*P*、*Q*运动时，线段*AQ*+*PQ*+*PB*的最小值是多少？**

****

**模型3 两定点一定长**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **模型** | **作法** | **结论** |
| **如图，在直线上找*M*、*N*两**  **点（*M*在左），使得*AM*+*MN*+*NB*最小，且*MN*=。** | **将点*A*向右平移个单位到*A*′，作*A*′关于直线的对称点*A*"，连接*A*"*B*交直线于点*N*，将点*N*向左平移个单位到*M*，点*M*、*N*即为所求。** | ***AM*+*MN*+*NB*最小为*A*"*B* 。** |
| **如图，∥，，之间距离为，在，分别找*M*、*N*两点，使得*MN*⊥，且*AM*+*MN*+*NB*最小。** | **将点*A*向下平移个单位到*A*′，连接*A*′*B*交直线于点*N*，将点*N*向上平移个单位到*M*，点*M*、*N*即为所求。** | ***AM*+*MN*+*NB*的最小值为*A*′*B*+。** |

**模型实例**

**例1．在平面直角坐标系中，矩形*OABC*如图所示，点*A*在轴正半轴上，点*C*在轴正半轴上，且*OA*=6，*OC*=4，*D*为*OC*中点，点*E*、*F*在线段*OA*上，点*E*在点*F*左侧，*EF*=2。当四边形*BDEF*的周长最小时，求点*E*的坐标。**

****

**热搜精练**

**1．在平面直角坐标系中，矩形*OACB*的顶点*O*在坐标原点，顶点*A*、*B*分别在，轴、轴的正半轴上，*A*（3，0），*B*（0，4），*D*为边*OB*的中点。**

**（1）若*E*为边*OA*上的一个动点，求△*CDE*的周长最小值；**

**（2）若*E*、*F*为边*OA*上的两个动点，且*EF*=1，当四边形*CDEF*的周长最小时，求点*E*、*F*的坐标。**

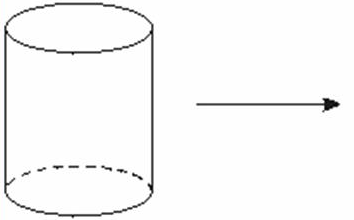
****

**2．村庄*A*和村庄*B*位于一条小何的两侧，若河岸彼此平行，要架设一座与河岸垂直的桥，桥址应如何选择，才使*A*与*B* 之间的距离最短？**

****

# 第七讲 蚂蚁行程

**模型1 立体图形展开的最短路径**

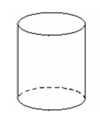
****

**模型分析**

**上图为无底的圆柱体侧面展开图，如图蚂蚁从点*A*沿圆柱表面爬行一周。到点*B*的最短路径就是展开图中*AB*′的长，。做此类题日的关键就是，正确展开立体图形，利用“两点之间线段最短”或“两边之和大于第三边”准确找出最短路径。**

**模型实例**

**例1．有一圆柱体油罐，已知油罐底面周长是12*m*，高*AB*是5*m*，要从点*A*处开始绕油罐一周建造房子，正好到达*A*点的正上方*B*处，问梯子最短有 多长？**

****

**例2．如图，一直圆锥的母线长为*QA*=8，底面圆的半径， 若一只小蚂蚁从*A*点出发，绕圆锥的侧面爬行一周后又回到*A*点，则蚂蚁爬行的最短路线长是 。**

****

**例3．已知长方体的长、宽、高分别为30*cm*、20*cm*、10*cm*，一只蚂蚁从*A*处出发到*B*处觅食，求它所走的最短路径。（结果保留根号）**

****

**热搜精练**

**1．有一个圆锥体如图，高4*cm*，底面半径5*cm*，*A*处有一蚂蚁，若蚂蚁欲沿侧面爬行到*C*处，求蚂蚁爬行的最短距离。**

****

**2．如图，圆锥体的高为8*cm*，底面周长为4*cm*，小蚂蚁在圆柱表面爬行，从*A*点到*B*点，路线如图，则最短路程为 。**

****

**3．桌上有一个圆柱形无盖玻璃杯，高为12厘米，底面周长18厘米，在杯口内壁离杯口距离3厘米的*A*处有一滴蜜糖，一只小虫22 杯子外壁，当它正好在蜜糖相对方向离桌面3厘米的*B*处时，突然发现了蜜糖，问小虫至少爬多少厘米才能到达蜜糖所在的位置。**

****

**4．已知*O*为圆锥顶点，*OA*、*OB*为圆锥的母线，*C*为*OB*的中点，一只小蚂蚁从点*C*开始沿圆锥侧面爬行到点*A*，另一只小蚂蚁也从*C*点出发绕着圆锥侧面爬行到点*B*，它们所爬行的最短路线的痕迹如图所示，若沿*OA*剪开，则得到的圆锥侧面展开图为 （ ）**

**5．如图，一只蚂蚁沿着边长为2的正方体表面从点*A*出发，经过3个面爬行到点*B*，如果它运动的路径是最短的，则最短距离为 。**

****

**6．如图是一个边长为6的正方体木箱，点*Q* 在上底面的棱上，*AQ*=2，一只蚂蚁从*P*点出发沿木箱表面爬行到点*Q*，求蚂蚁爬行的最短路线。**

****

**7．如图，是一个三级台阶，它的每一级的长、宽和高分别等于5*cm*、3*cm*和1*cm*，*A*和*B*是这个台阶的两个相对的端点，*A*点上有一只蚂蚁，想到*B*点去吃可口的食物。请你想一想，这只蚂蚁从*A*点出发，沿着台阶面爬到*B*点的最短路程是多少？**

****

# 第八讲 中点五大模型

**模型1 倍长中线或类中线（与中点有关的线段）构造全等三角形**

****

**模型分析**

**如图①，*AD*是△*ABC*的中线，延长*AD*至点*E*使*DE*=*AD*，易证：△*ADC*≌△*EDB*（*SAS*）。如图②，*D*是*BC*中点，延长*FD*至点*E*使*DE*=*FD*，易证：**

**△*FDB*≌△*FDC*（*SAS*）。当遇见中线或者中点的时候，可以尝试倍长中线或类中线，构造全等三角形，目的是对已知条件中的线段进行转移。**

**模型实例**

**例1．如图，已知在△*ABC*中，*AD*是*BC*边上的中线，*E*是*AD*上一点，连接 *BE*并延长*AC*于点*F*，*AF*=*EF*。求证：*AC*=*BE*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，*AB*=12，*AC*=20，求*BC*边上中线*AD*的范围。**

****

**2．如图，在△*ABC*中，*D*是*BC*的中点，*DM*⊥*DN*，如果。求证：。**

****

**模型2 已知等腰三角形底边中点，可以考虑与顶点连接用“三线合一”**

****

**模型分析**

**等腰三角形中有底边中点时，常作底边的中线，利用等腰三角形“三线合一”的性质得到角相等或边相等，为解题创造更多的条件，当看见等腰三角形的时候，就应想到：“边等、角等、三线合一”。**

**模型实例**

**例1．如图，在△*ABC*中，*AB*=*AC*-5，*BC*=6，*M*为*BC*的中点，*MN*⊥*AC*于点*N*， 求*MN*的长度。**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，*AB*=*AC*，*D*是*BC*的中点，*AE*⊥*DE*，*AF*⊥*DF*，且*AE*=*AF*。求证：∠*EDB*=∠*FDC*。**

****

**2．已知*Rt*△*ABC*中，*AC*=*BC*，∠*C*=90°，*D*为*AB*边的中点，∠*EDF*=90°，∠*EDF*绕点*D*旋转，它的两边分别交*AC*、*CB*（或它们的延长线）于*E*、*F*。**

**（1）当∠*EDF*绕点*D*旋转到*DE*⊥*AC*于*E*时（如图①），**

**求证：；**

**（2）当∠*EDF*绕点*D*旋转到*DE*和*AC*不垂直时，在图②和图③这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，、、又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明。**

****

**模型3 已知三角形一边的中点，可以考虑中位线定理**

****

**模型分析**

**在三角形中，如果有中点，可构造三角形的中位线，利用三角形中位线的性质定理：*DE*∥*BC*，且来解题，中位线定理既有线段之间的位置关系又有数量关系，该模型可以解决相等，线段之间的倍半、相等及平行问题。**

**模型实例**

**例1．如图，在四边形*ABCD*中，*AB*=*CD*，*E*、*F*分别是*BC*、*AD*的中点，连接*EF*并延长，分别与*BA*、*CD*的延长线交于点*M*、*N*。求证：∠*BME*=∠*CNE*。**

****

**热搜精练**

**1．（1）如图①，*BD*、*CE*分别是△*ABC*的外角平分，过点*A*作*AD*⊥*BD*、**

***AE*⊥*CE*，垂足分别为*D*、*E*，连接*DE*。**

**求证：*DE*∥*BC*，；**

**（2）如图②，*BD*、*CE*分别是△*ABC*的内角平分，其它条件不变。上述结论是否成立？**

**（3）如图③，*BD*是△*ABC*的内角平分，*CE*是△*ABC*的外角平分，其它条件不变。*DE*与*BC*还平行吗？它与△*ABC*三边又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并对其中一种情况进行证明。**

****

**2．问题一：如图①，在四边形*ACBD*中，*AB*与*CD*相交于点*O*，*AB*=*CD*，*E*、*F*分别是*BC*、*AD*的中点，连接*EF*分别交*DC*、*AB*于点*M*、*N*，判断△*OMN*的形状，请直接写出结论；**

**问题二：如图②，在△*ABC*中，*AC*>*AB*，点*D*在*AC*上，*AB*=*CD*，*E*、*F*分别是*BC*、**

***AD*的中点，连接*EF*并延长，与*BA*的延长线交于点*G*，若 ∠*EFC*=60°，**

**连接*GD*，判断△*AGD*的形状并证明。**

****

**模型4 已知直角三角形斜边中点，可以考虑构造斜边中线**

****

**模型分析**

**在直角三角形中，当遇见斜边中点时，经常会作斜边上的中线，利用直**

**角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即，来证明线段间的数量关系，而且可以得到两个等腰三角形：△*ACD*和△*BCD*，该模型经常会与中位线定理一起综合应用。**

**模型实例**

**例1．如图，在△*ABC*中，*BE*、*CF*分别为*AC*、*AB*上的高，*D*为*BC*的中点，*DM*⊥*EF*于点*M*。求证：*FM*=*EM*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，∠*B*=2∠*C*，*AD*⊥*BC*于点*D*，*M*为*BC*的中点，*AB*=10。求*DM*的长度。**

****

**2．已知，△*ABD*和△*ACE*都是直角三角形，且∠*ABD*=∠*ACE*=90°，连接*DE*，*M*为*DE*的中点，连接*MB*、*MC*。求证：*MB*=*MC*。**

****

**3．问题1：如图①，△*ABC*中，点*D*是*AB*边的中点，*AE*⊥*BC*，*BF*⊥*AC*，垂足分别为点*E*、*F*，*AE*、*BF*交于点*M*，连接*DE*、*DF*。若，则的值为 ；**

**问题2：如图②，△*ABC*中，*CB*=*CA*，点*D*是*AB*边的中点，点*M*在△*ABC*内部，且∠*MAC*=∠*MBC*。过点*M*分别作*ME*⊥*BC*，*MF*⊥*AC*，垂足分别为点*E*、*F*，连接*DE*、*DF*。若*DE*=*DF*；**

**问题3：如图③，若将上面问题②中的条件“*CB*=*CA*”变为“*CB*≠*CA*”，其它条件不变，试探究*DE*与*DF*之间的数量关系，并证明你的结论。**

****

**模型5 平行线夹中点模型（构造8字形）**

# 第九讲 半角模型

**模型1 倍长中线或类中线（与中点有关的线段）构造全等三角形**

**已知如图：∠2=∠*AOB*；*OA*=*OB*。连接*F*′*B*，将△*FOB*绕点*O*旋转至△*FOA*的位置，连接*F*′*E*、*FE*，可得△*OEF*′≌△*OEF*。**

****

**模型分析**

**（1）半角模型的命名：存在两个角度是一半关系，并且这两个角共顶点；**

**（2）通过先旋转全等再轴对称全等，一般结论是证明线段和差关系；**

**（3）常见的半角模型是90°含45°，120°含60°。**

**模型实例**

**例1．如图，已知正方形*ABCD*中，∠*MAN*=45°，它的两边分别交线段*CB*、*DC*于点*M*、*N*。**

**（1）求证：*BM*+*DN*=*MN*；**

**（2）作*AH*⊥*MN*于点*H*，求证：*AH*=*AB*。**

****

**例2．在等边△*ABC*的两边*AB*、*AC*上分别有两点*M*、*N*，*D*为△*ABC*外一点，且∠*MDN*=60°，∠*BDC*=60°，*BD*=*DC*。探究：当*M*、*N*分别在线段*AB*、*AC***

**上移动时，*BM*、*NC*、*MN*之间的数量关系。**

**（1）如图①，当*DM*=*DN*时，*BM*、*NC*、*MN*之间的数量关系是 ；**

**（2）如图②，当*DM*≠*DN*时，猜想（1）问的结论还成立吗？写出你的猜想并加以证明。**

****

**例3．如图，在四边形*ABCD*中，∠*B*+∠*ADC*=180°，*E*、*F*分别是*BC*、*CD*延长线上的点，且∠*EAF*=∠*BAD*。求证：*EF*=*BE*-*FD*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，正方形*ABCD*，*M*在*CB*延长线上，*N*在*DC*延长线，∠*MAN*=45°。求证：*MN*=*DN*-*BM*。**

****

**2．已知，如图①，在*Rt*△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*AB*=*AC*，点*D*、*E*分别为线段*BC*上两动点，若∠*DAE*=45°。探究线段*BD*、*DE*、*EC*三条线段之间的数量关系。小明的思路是：把△*AEC*绕点*A*顺时针旋转90°，得到△*ABE*′，连接*E*′*D*，使问题得劲解决。请你参考小明的思路探究并解决以下问题：**

**（1）猜想*BD*、*DE*、*EC*三条线段之间的数量关系式，并对你的猜想给予证明；**

**（2）当动点*E*在线段*BC*上，动点*D*运动到线段*CB*的延长线上时，如图②，其它条件不变，（1）中探究的结论是否发生改变？请说明你的猜想并给予证明。**

****

**3．已知，在等边△*ABC*中，点*O*是边*AC*、*BC* 的垂直平分线的交点，*M*、*N*分别在直线*AC*、*BC*上，且∠*MON*=60°。**

**（1）如图①，当*CM*=*CN*时，*M*、*N*分别在边*AC*、*BC*上时，请写出*AM*、*CN*、*MN*三者之间的数量关系；**

**（2）如图②，当*CM*≠*CN*时，*M*、*N*分别在边*AC*、*BC*上时，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请你加以证明；若不成立，请说明理由；**

**（3）如图③，当点*M*在边*AC*上，点*N*在*BC*的延长线上时，请直接写出线段*AM*、*CN*、*MN*三者之间的数量关系。**

****

**4．如图，在四边形*ABCD*中，∠*B*+∠*D*=180°，*AB*=*AD*，*E*、*F*分别是线段*BC*、*CD*上的点，且*BE*+*FD*=*EF*。求证：∠*EAF*=∠*BAD*。**

****

**5．如图①，已知四边形*ABCD*，∠*EAF*的两边分别与*DC*的延长线交于点*F*，与*CB*的延长线交于点*E*连接*EF*。**

**（1）若四边形*ABCD*为正方形，当∠*EAF*=45°时，*EF*与*DF*、*BE*之间有怎样的数量关系？（只需直接写出结论）**

**（2）如图②，如果四边形*ABCD*中，*AB*=*AD*，∠*ABC*与∠*ADC*互补，当∠*EAF*=∠*BAD*时，*EF*与*DF*、*BE*之间有怎样的数量关系？请写出结论并证明；**

**（3）在（2）中，若*BC*=4，*DC*=7，*CF*=2，求△*CEF*的周长（直接写出结论即可）。**

****

# 第十讲 相似模型

**模型1 *A*、8模型**

**已知：∠1=∠2**

**结论：△*ADE*∽△*ABC***

****

**模型分析**

**如图，在相似三角形的判定中，我们常通过作平行线，从而得出*A*型或8型相似，在做题时，我们也常常关注题目中由平行线所产生的相似三角形。**

**模型实例**

**例1．如图，在△*ABC*中，中线*AF*、*BD*、*CE*相交于点*O*。**

**求证：。**

****

**例2．如图，点*E*、*F*分别在菱形*ABCD*的边*AB*、*AD*上，且*AE*=*DF*，*BF*交*DE*于**

**点*G*，延长*BF*交*CD*的延长线于*H*，若。求的值。**

****

**热搜精练**

**1.如图，*D*、*E*分别是△*ABC*的边*AB*、*BC*上的点，且*DE*∥*AC*，*AE*、*CD*相交 于点*O*，若*S*△*DOE*：*S*△*COA*=1：25，则*S*△*BDE*与*S*△*CDEE*的比是 。**

****

**2.如图所示，*□ABCD*中，*G*是*BC*延长线上的一点，*AG*与*BD*交于点*E*，与*DC* 交于点*F*，此图中的相似三角形共有 对。**

**3．如图，在△*ABC*中，中线*BD*、*CE*相交于点*O*，连接*AO*并延长，交*BC***

**于点*F*。求证：点*F*是*BC*的中点。**

****

**4．在△*ABC*中，*AD*是角平分线，求证：。**

****

**5．如图，△*ABC*为等腰直角三角形，∠*ACB*-90°，*D*是边*BC*的中点，*E*在*AB*上，且 *AE*：*BE*=2：1。求证：*CE*⊥*AD*。**

****

**模型2 共边共角型**

**已知：∠1=∠2**

**结论：△*ACD*∽△*ABC***

****

**模型分析**

**上图中，不仅要熟悉模型，还要熟记模型的结论，有时候题目中会给出**

**三角形边的乘积或比例关系，我们要能快速判断题中的相似三角形，模型中由△*ACD*∽△*ABC*，进而可以得到。**

**模型实例**

**例1．如图，*D*是△*ABC*边*BC*上的一点，*AB*=4， *AD*=2，∠*DAC*=∠*B*，如果△*ABD*的面积为15，那么△*ACD*的面积为 。**

****

**例2．如图，在*Rt*△*ABC*中，∠*BAC*-90°，*AD*⊥*BC*于*D*。**

**（1）图中有多少对相似三角形？写出来；**

**（2）求证：**

****

**热搜精练**

**1．如图所示，能判定△*ABC*∽△*DAC*的有 ；**

**①∠*B*=∠*DAC*；②∠*BAC*=∠*ADC*；**

**③；④。**

****

**2．已知△*AMN*是等边三角形，∠*BAC*=120°。求证：**

**（1）；**

**（2）；**

**（3）。**

****

**3．如图，*AB*是半圆*O*的直径，*C*是半圆上的一点，过*C*作*CD*⊥*AB*于*D*，**

**，*AD*：*DB*=4：1。求*CD*的长。**

****

**4．如图①，*Rt*△*ABC*中，∠*ACB*-90°，*CD*⊥*AB*，我们可以利用△*ABC*∽△*ACD*证明，这个结论我们称之为射影定理，结论运用：如图②，正方形*ABCD*的边长为6，点*O*是对角线*AC*、*BD*的交点，点*E*在*CD*上，过点*C*作*CE*⊥*BE*，垂足为*F*，连接*OF*。**

**（1）试利用射影定理证明△*BOF*∽△*BED*；**

**（2）若*DE*=2*CE*，求*OF*的长。**

****

**模型3 一线三角型**

****

**已知，如图①②③中：∠*B*=∠*ACE*=∠*D*。**

**结论：△*ABC*∽△*CDE***

**模型分析**

**在一线三等角的模型中，难点在于当已知三个相等的角的时候，容易忽略隐含的其它相等的角，此模型中的三垂直相似应用较多，当看见该模型的时候，应立刻能看出相应的相似三角形。**

**模型实例**

**例1．如图在等边△*ABC*中，*P*为*BC*上一点，*D*为*AC*上一点，且∠*APD*=60°，**

***BP*=1，*CD*=，则△*ABC*的边长为 。**

****

**例2．如图，∠*A*=∠*B*=90°，*AB*=7，*AD*=2，*BC*=3，在边*AB*上取一点*P*，使得**

**△*PAD*民△*PBC*相似，则这样的*P*点共有 个。**

****

**热搜精练**

**1．如图，△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*AB*=*AC*=1，点*D*是*BC*边上的一个动点**

**（不与*B*、*C*点重合），∠*ADE*=45°。**

**（1）求证：△*ABD*∽△*DCE*；**

**（2）设*BD*=，*AE*=，求关于的函数关系式；**

**（3）当△*ADE*是等腰三角形时，求*AE*的长。**

****

**2．如图，在△*ABC*中，*AB*=*AC*=10，点*D*是边*BC*上一动点（不与*B*、*C*重合），**

**∠*ADE*=∠*B*=，*DE*交*AC*于点*E*，且，下列结论。**

**①△*ADE*∽△*ACD*；②当*BD*=6时，△*ABD*与△*DCE*全等；**

**③△*DCE*为直角三角形时，*BD*等于8或12.5；④0<*CE*≤6.4.**

**其中正确的结论是 。（把你认为正确结论的序号都填上）**

****

**3．如图，已知矩形*ABCD*的一条边*AD*=8，将矩形*ABCD*折叠，使得顶点*B***

**落在*CD*边上 的*P*点外，折痕与边*BC*交于*O*，连接*AP*、*OP*、*OA*。**

**（1）求证：△*OCP*∽△*PDA*；**

**（2）若△*OCP*与△*PDA*的面积比为1：4，求边*AB*的长。**

****

**模型4 倒数型**

**条件：*AF*∥*DE*∥*BC***

**结论：**

****

**模型分析**

**仔细观察，会发现该模型中含有两个*A*型相似模型，它的结论是由两个*A***

**型相似的结论相加而得到的，该模型的练习有助于提高综合题能力水平。**

**模型实例**

**例1．如图，*AF*∥*BC*，*AC*、*BF*相交于点*E*，过*D*作*ED*∥*AF*交*AB*于点*D*。**

**求证：。**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，*CD*⊥*AB*于点*D*，正方形*EFGH*的四个顶点都在△*ABC***

**的边上。求证：。**

****

**2．正方形*ABCD*中，以*AB*为边作等边三角形*ABE*，连接*DE*交*AC*于*F*，交*AB***

**于*G*，连接*BF*。求证：**

**（1）*AF*+*BF*=*EF*；**

**（2）。**

****

**模型5 与圆有关的简单相似**

**图①中，由同弧所对的圆周角相等，易得△*PAC*∽△*PDB*；**

**图②中，由圆的内接四边形的一个外角等于它的内对角，易得△*PAC*∽△*PDB*；**

**图③中，通过作辅助线构造，易得△*PAC*∽△*PCB*。**

****

**模型实例**

**例1．如图，点*P*在⊙*O*外，*PB*交⊙*O*于*A*、*B*两点，*PC*交⊙*O*于 *D*、*C*两点。**

**求证：。**

****

**热搜精练**

**1．如图，*P*是⊙*O*内的一点，*AB*是过点*P*的一条弦，设圆的半径为*r*，*OP*=*d*。**

**求证：。**

****

**2．如图，已知*AB*是⊙*O*的直径，*C*、*D*是半圆的三等分点，延长*AC*、*BD*交于点*E*。**

**（1）求∠*E*的度数；**

**（2）点*M*是*BE*上一点，且满足，连接*CM*，求证：*CM*是⊙*O*的切线。**

****

**模型6 相似与旋转**

**如图①，已知*DE*∥*BC*，将△*ADE*绕点*A*旋转一定的角度，连接*BD*、*CE*，得到如图②，结论：△*ABD*∽△*ACE*。**

****

**模型分析**

**该模型难度较大，常出现在压轴题中，以直角三角形为背景出题，对学生的综合能力要求较高，考察知识点有相似、旋转、勾股定理、三角函数等，是优等生必须掌握的一种题型。**

**模型实例**

**例1．如图，在*Rt*△*ABC*中，∠*BAC*=60°，点*P*在△*ABC*内，且，**

***PB*=5，*PC*=2。求*S*△*ABC*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，△*ABC*和△*CEF*均为等腰三角形，*E*在△*ABC*内，∠*CAE*+∠*CBE*=90°，连接*BF*。**

**（1）求证：△*CAE*∽△*CBF*；**

**（2）若*BE*=1，*AE*=2，求*CE*的长。**

****

**2．已知，在△*ABC*中，∠*BAC*=60°。**

**（1）如图①，若*AB*=*AC*，点*P*在△*ABC*内，且∠*APC*=6150°，*PA*=3，*PC*=4，把△*APC*绕着点*A*顺时针旋转，使点*C*旋转到点*B*处，得到△*ADB*，连接*DP*。①依题意补全图1；②直接写出*PB*的长；**

**（2）如图②，若*AB*=*AC*，点*P*在△*ABC*外，且*PA*=3，*PB*=5，*PC*=4，求∠*APC*的度数；**

**（3）如图③，若*AB*=2*AC*，点*P*在△*ABC*内，且，*PB*=5，**

**∠*APC*=120°，请直接写出*PC*的长。**

****

# 第十一讲 圆中的辅助线

**模型1 连半径构造等腰三角形**

**已知*AB*是⊙*O*的一条弦，**

**连接*OA*、*OB*，则∠*A*=∠*B*。**

****

**模型分析**

**在圆的相关题目中，不要忽略隐含的已知条件，我们通常可以连接半径构造等腰三角形，利用等腰三角形的性质及圆中的相关定理，解决角度的计算问题。**

**模型实例**

**例1．如图，*CD*是⊙*O*的直径，∠*EOD*=84°，*AE*交⊙*O*于点*B*，且*AB*=*OC*，求∠*A*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，*AB*经过⊙*O*的圆心，点*B*在⊙*O*上，若*AD*=*OB*，且∠*B*=54°。试求∠*A*的度数。**

****

**2．如图，*AB*是⊙*O*的直径，弦*PQ*交*AB*于*M*，且*PM*=*MO*。求证：弧弧*BQ*。**

****

**模型2 构造直角形**

**图①，已知*AB*是⊙*O*的直径，点*C*是圆上一点，连接*AC*、*BC*，则∠*ACB*=90°。**

**如图②，已知*AB*是⊙*O*的一条弦，过点*O*作*OE*⊥*AB*，则。**

****

**模型分析**

**（1）如图①，当图形中含有直径时，构造直径所对的圆周角是解决问题的重要思路，在证明有关问题中注意90°的圆周角的构造。**

**（2）如图②，在解决求弦长、弦心距、半径问题时，在圆中常作弦心距或连接半径作为辅助线，利用弦心距、半径和半弦组成一个直角三角形，再利用勾股定理进行计算。**

**模型实例**

**例1．如图，已知⊙*O*的直径*AB*和弦*CD*相交于点*E*， *AE*=2，*BE*=6，∠*DEB*=60°，求*CD*的长。**

****

**例2．如图，*AB*是⊙*O*的直径，*AB*=*AC*，*BC*交⊙*O*于点*D*，*AC*交⊙*O*于点*E*，∠*BAC*=45°。**

**（1）求∠*EBC*的度数；**

**（2）求证：*BD*=*CD*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，⊙*O*的弦*AB*、*CD*互相垂直，垂足为*E*，且*AE*=5，*BE*=13，点*O*到*AB***

**的距离为，求点*O*到*CD*距离，线段*OE*的长及⊙*O*的半径。**

****

**2．已知，*AB*和*CD*是⊙*O*的两条弦，且*AB*⊥*CD*于点*H*，连接*BC*、*AD*，作**

***OE*⊥*AD*于点*E*。求证：。**

****

**3．如图，直径*AB*=2，*AB*、*CD*交于点*E*且夹角为45°，**

**则 。**

****

**模型3 与圆的切线有关的辅助线**

**（1）切线的性质；**

**（2）切线的判定方法。**

****

**模型实例**

**例1．如图，*OA*、*OB*是⊙*O*的半径，且*OA*⊥*OB*，*P*是*OA*上任意一点，*BP*的延长线交⊙*O*于*Q*，过*Q*点的切线交*OA*的延长线于*R*。求证：*RP*=*RQ*。**

****

**例2．如图，△*ABC*内接于⊙*O*，过*A*点作直线*DE*，当∠*BAE*=∠*C*，试确定直线**

***DE*与⊙*O*的位置关系，并证明你的结论。**

****

**热搜精练**

**1．如图，在△*ABC*中，以*AB*为直径的⊙*O*分别于*BC*、*AC*相交于点*D*、*E*，*BD*=*CD*，过点*D*作⊙*O*的切线交*AC*于点*F*。求证：*DF*⊥*AC*。**

****

**2．如图，*AB*是⊙*O*的直径，*AC*是它的切线，*CO*平分∠*ACD*。求证：*CD*是⊙*O*的切线。**

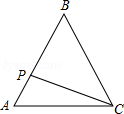
****

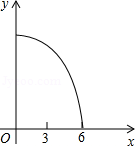
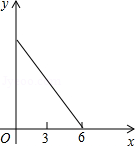
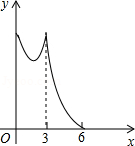
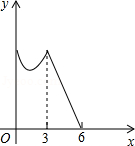
**3．如图，直线*AC*与⊙*O*相交于*B*、*C*两点，*E*是弧*BC*的中点，*D*是⊙*O*上一点，若∠*EDA*=∠*AMD*。求证：*AD*是⊙*O*的切线。**

****

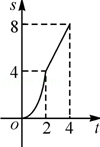
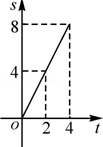
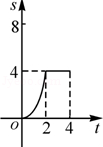
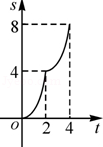
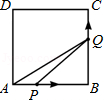
**补充：**

**1、如图，正△*ABC*的边长为3*cm*，动点*P*从点*A*出发，以每秒1*cm*的速度，沿*A*→*B*→*C*的方向运动，到达点*C*时停止，设运动时间为*x*（秒），*y*=*PC*2，则*y*关于*x*的函数的图象大致为（　　）**

****

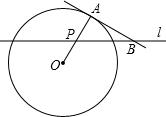
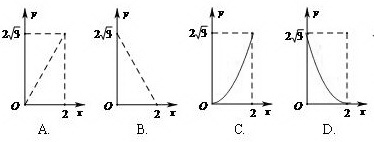
***A* *B*．*C*．  *D*．**

**2、如图，在边长为4的正方形*ABCD*中，动点*P*从*A*点出发，以每秒1个单位长度的速度沿*AB*向*B*点运动，同时动点*Q*从*B*点出发，以每秒2个单位长度的速度沿*BC*→*CD*方向运动，当*P*运动到*B*点时，*P*、*Q*两点同时停止运动．设*P*点运动的时间为*t*，△*APQ*的面积为*S*，则*S*与*t*的函数关系的图象是（　　）**

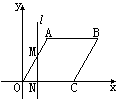
****

***A* *B* *C* *D***

**3、如图，*A*点在半径为2的⊙*O*上，过线段*OA*上的一点*P*作直线，与⊙*O*过*A*点的切线交于点*B*，且∠*APB*=60°，设*OP*= *x*，则△*PAB*的面积*y*关于*x*的函数图像大致是【 】**

** **

**4、如图，在平面直角坐标系中，四边形*OABC*为菱形，点*C*的坐标为(4,0)，∠*AOC*=60°，垂直于*x*轴的直线*l*从*y*轴出发，沿*x*轴正方向以每秒1个单位长度的速度运动，设直线*l*与菱形*OABC*的两边分别交于点*M*、*N*(点*M*在点*N*的上方).**

****

**1.求*A*、*B*两点的坐标；**

**2.设△*OMN*的面积为*S*，直线*l*运动时间为*t*秒(0≤*t*≤6)，试求*S*与*t*的函数表达式；**

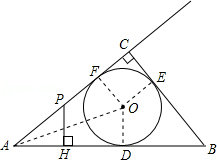
**3.在题(2)的条件下，*t*为何值时，*S*的面积最大？最大面积是多少？**

**5．如图，*Rt*△*ABC*的内切圆⊙*O*与*AB*、*BC*、*CA*分别相切于点*D*、*E*、*F*，且∠*ACB*=90°，*AB*=5，*BC*=3，点*P*在射线*AC*上运动，过点*P*作*PH*⊥*AB*，垂足为*H*．**

**（1）直接写出线段*AC*、*AD*及⊙*O*半径的长；**

**（2）设*PH*=*x*，*PC*=*y*，求*y*关于*x*的函数关系式；**

**（3）当*PH*与⊙*O*相切时，求相应的*y*值．**

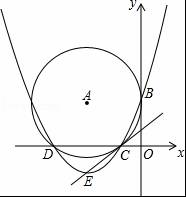
****

**6、如图，在平面直角坐标系中，⊙*A*与*x*轴相交于*C*（﹣2，0），*D*（﹣8，0）两点，与*y*轴相切于点*B*（0，4）．**

**（1）求经过*B*，*C*，*D*三点的抛物线的函数表达式；**

**（2）设抛物线的顶点为*E*，证明：直线*CE*与⊙*A*相切；**

**（3）在*x*轴下方的抛物线上，是否存在一点*F*，使△*BDF*面积最大，最大值是多少？并求出点*F*的坐标．**

****

# 第十二讲 辅助圆

**模型1 共端点，等线段模型（定点定长）**

****

**模型分析**

**（1）若有共端点的三条等线段，可考虑构造辅助圆；**

**（2）构造辅助圆是方便利用圆的性质快速解决角度问题。**

**模型实例**

**例1．如图，△*ABC*和△*ACD*都是等腰三角形，*AB*=*AC*，*AC*=*AD*，连接*BD*。**

**求证：∠1+∠2=90°。**

****

**精练**

**1．如图，△*ABC*为等腰三角形，*AB*=*AC*，在△*ABC*的外侧作直线*AP*，点*B*与点*D*关于*AP*轴对称，连接*BD*、*CD*，*CD*与*AP*交于点*E*。求证：∠1=∠2。**

****

**2．已知四边形*ABCD*，*AB*∥*CD*，且*AB*=*AC*=*AD*=*a*，*BC*=*b*，且2*a*>*b*，求*BD*的长。**

****

**模型2 直角三角形共斜边模型**

****

**模型分析**

**（1）共斜边的两个直角三角形，同侧或异侧，都会得到四点共圆；**

**（2）四点共圆后可以根据圆周角定理得到角度相等，完成角度等量关系的转化，是证明角相等重要的途径之一。**

**模型实例**

**例1．如图，*AD*、*BE*、*CF*为△*ABC*的三条高，*H*为垂心，问：**

**（1）图中有多少组四点共圆；**

**（2）求证：∠*ADF*=∠*ADE*。**

****

**例2．如图，*E*是正方形*ABCD*的边*AB*上的一点，过点*E*作*DE*的垂线交∠*ABC*的外角平分线于点*F*。求证：*EF*=*DE*。**

****

**热搜精练**

**1．如图，锐角△*ABC*中，*BD*、*CE*是高线，*DG*⊥*CE*于*G*，*EF*⊥*BD*于*F*。求证：*FG*∥*BC*。**

****

**2．如图，*BE*、*CF*为△*ABC*的高，且交于点*H*，连接*AH*并延长交*BC*于点*D*。求证：*AD*⊥*BC*。**

****

**3．如图，等边△*PQR*内接于正方形*ABCD*，其中点*P*、*Q*、*R*分别在边*AD*、*AB*、 *DC*上，*M*是*QR*的中点。求证：不论等边△*PQR*怎样运动，点*M*为不动点。**

****

**4．如图，已知△*ABC*中，*AH*是高，*AT*是角平分线，且*TD*⊥*AB*，*TE*⊥*AC*。求证：∠*AHD*=∠*AHE*。**

****

# 第十三讲 角平分线交角模型

# 第十四讲 胡不归

# 第十五讲 阿氏圆

# 第十六讲 费马点问题

# 第十七讲 十字架模型

# 第十八讲 对角互补