space theory

1.space

- 1.1 : 集合 $\boldsymbol{X}$,若 $\exists\, d : \boldsymbol{X}^2 \to \mathbb{R}^2 \cup \{0\}$, 且满足:
$$1）\forall x,y \in \boldsymbol{X}, \quad d(x,y) \geq 0, \quad \text{iff } x=y$$
$$2）\forall x,y \in \boldsymbol{X}, \quad d(x,y) = d(y,x)$$
$$3）\forall x,y,z \in \boldsymbol{X}, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
则称 $\boldsymbol{d}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的一个度量，而 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$ 称为一个度量空间，记作 $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$

- 1.2 : $\boldsymbol{Y}$ 是 $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$ 的一个子集，则限制 $\boldsymbol{d}$ 的定义域到 $\boldsymbol{Y}^2$，并记作 $\boldsymbol{d_Y}$,
得到 $ms(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{d_Y})$ ，称为 $\boldsymbol{X}$ 的子度量空间，$\boldsymbol{d_Y}$ 称为由 $\boldsymbol{d}$ 诱导的度量

- 1.3 : 若 $\boldsymbol{d}_1$,$\boldsymbol{d}_2$ 分别为 $\boldsymbol{X}$ 上的度量，若 $\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+, s.t. \forall\, x,y \in \boldsymbol{X}$
都有:
$$d_2(x,y) \leq C_1\, d_1(x,y), \quad d_1(x,y) \leq C_2\, d_2(x,y)$$
则称 d_1与d_2 等价

- 1.4 : $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$ 若序列 $\{x_n\} \subseteq \boldsymbol{X}$ ，满足 $\exists\, N \in \mathbb{N}^+$ ，$\forall\, m,n > 0, \epsilon > 0$
总有:
$$d(x_n, x_m) < \epsilon \text{，则称 } \{x_n\} \text{ 为一个} Cauchy \text{列}$$
若 $\exists\, x \in \boldsymbol{X}\ s.t. \exists\, N \in \boldsymbol{N}^+, \forall\, n > N, \forall\, \epsilon > 0$
均有:
$$d(x_n, x) > 0 \text{，则称 } \{x_n\} \text{收敛到 } x \text{，记作 } \{x_n\} \to x \text{ (或 } \lim_{n\to\infty} x_n = x\text{)}$$

- 1.5 : 重要性质：若 $Cauchy$列有收敛子列，则其必收敛
特别地，如果 $\boldsymbol{X}$ 中所有$Cauchy$列都收敛，则称其是完备度量空间，记作 $cms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$

> proof:
>
> $$\text{设} Cauchy\text{列 } \{x_n\}. \text{ 并设 } \{x_{n_k}\} \to x$$
> $$\text{根据定义:} \exists\, k_0 \in \boldsymbol{N}, s.t. \forall\, k > k_0\,, n_k > n_{k_0}\,, \forall\, \epsilon_1 > 0\,, d(x_{n_k}, x_0) < \epsilon_1$$
> $$\exists\, N \in \boldsymbol{N}, s.t. \forall\, m,n > N\,, \forall\, \epsilon_2 > 0\,, d(x_m, x_n) < \epsilon_2$$
> $$\text{取} N_0 = \max\{n_{k_0}, N\}\text{，则} \forall\, n_k, n > N_0\,, \forall \epsilon \doteq \epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$$
> $$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k} + x_0) = \epsilon$$
> $$\text{此即} \lim_{n\to\infty} x_n = x \ \square$$

- 1.6 : $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d})$，$\forall x_0\in\boldsymbol{X},\delta\in\mathbb{R}^+$定义：

  $\boldsymbol{B}(x_0,\delta):=\{x\in\boldsymbol{X}|d(x,x_0)<\delta\}$，称为 x_0的一个开球

  $\dot{\boldsymbol{B}}(x_0,\delta):=\boldsymbol{B}(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$，称为去心开球

- 1.7 : $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d}),ms(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{h}),f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ ，取定 $x_0\in\boldsymbol{X}$，若满足：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x\in\ \boldsymbol{B_d}(x_0,\delta)$

  都有：

  $f(x)\in\boldsymbol{B_h}(f(x_0),\epsilon)$，则称 f 在 x_0 处连续

  若 f 在 $\boldsymbol{X}$ 处处连续，则称 f 为 $\boldsymbol{X}$ 上的连续映射，$\boldsymbol{X}$ 上的全体连续映射记作 $C(x)$

- 1.8 : $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d}),ms(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{h}),f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$，若满足：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in\boldsymbol{X}$

  只要 $d(x,y)<\delta$，就有:

  $h(f(x),f(y))<\epsilon$，则称 f 一致连续

- 1.9 : $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d}),ms(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{h}),f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$，若满足：$\exists H\in\mathbb{R}^+,\alpha\in\mathbb{N},s.t.\forall x_1,x_2\in\boldsymbol{X}$

  都有:

  $\boldsymbol{h}(f(x_1),f(x_2))\le H\cdot\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{\alpha}}(x_1,x_2)$

  则称 f 为 α 阶$H\ddot{o}lder$连续

  特别地，$\alpha=1$时称为Lip连续，并称 H 为Lip常数，记作L

- 1.10 $Heine$定理 : $ms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d}),ms(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{h}),f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$，取 $x_0\in\boldsymbol{X}$,则：

  f 在 a 处连续 $\Longleftrightarrow$ 任取 $\{x_n\}\subseteq\boldsymbol{X}$,若 $x_n\to x_0$,则 $\{f(x_n)\}\to f(x_0)$

> proof:

- 1.11 $Banach$不动点定理 : 若 $cms(\boldsymbol{X},\boldsymbol{d}),f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$ 是一个 Lip 常数小于 1 的 Lip 函数，即满足：

  $\exists 0<\tau<1,\forall x_1,x_2\in\boldsymbol{X}$，均有：$\boldsymbol{d}(f(x_1),f(x_2))\le\tau\boldsymbol{d}(x_1,x_2)$

  则 $\exists!x_0<\boldsymbol{X},s.t.\ f(x_0)=x_0$，称 x_0 为 f 的一个不动点，而 f 称为一个压缩映射

> proof: