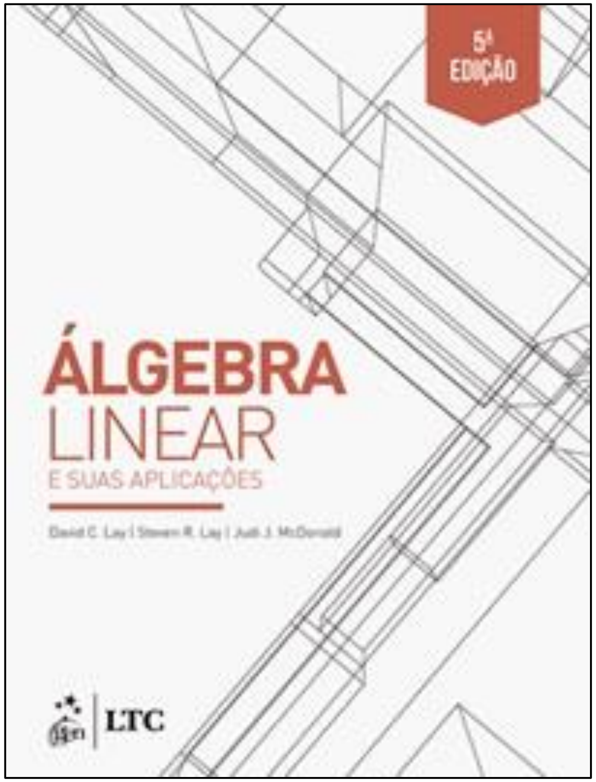
Álgebra Linear
Equação vetorial, equação matricial e combinação linear

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR

PROFA. MS.MAGDA MANTOVANI LORANDI

Período 2022-4

LIVRO-TEXTO



Capítulo 1- Seções 1.3 e 1.4 págs. 20 a 35

LAY, David C. *Álgebra linear e suas aplicações.* 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

VETORES EM $\mathbb{R}^2$

Podemos nomear uma matriz com apenas uma coluna, por **vetor coluna** ou somente **vetor.**

Exemplos

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

em que w_1 e w_2 são números reais arbitrários.

- **Igualdade entre vetores:** Dois vetores são iguais se, e somente se suas componentes correspondentes forem iguais.

Assim, os vetores $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ não são iguais,

pois o vetores em $\mathbb{R}^2$ são pares ordenados de números reais.

VETORES EM $\mathbb{R}^2$

Algumas vezes, por conveniência (e também para economizar espaço), escrevemos um vetor coluna como $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ na forma $(3, -1)$. Nesse caso, usamos parênteses e uma vírgula para distinguir o vetor $(3, -1)$ da matriz linha $[3 \quad -1]$, escrita com colchetes e sem vírgula. Assim,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$$

pois as matrizes são de tamanhos diferentes, apesar de terem os mesmos elementos.

DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DE $\mathbb{R}^2$

Considere um sistema de coordenadas cartesianas no plano. Como cada ponto do plano fica determinado por um par ordenado de números, *podemos identificar um ponto geométrico* (a, b) *com o vetor coluna* $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Podemos considerar, então, $\mathbb{R}^2$ como o conjunto de todos os pontos do plano. Veja a Figura 1.

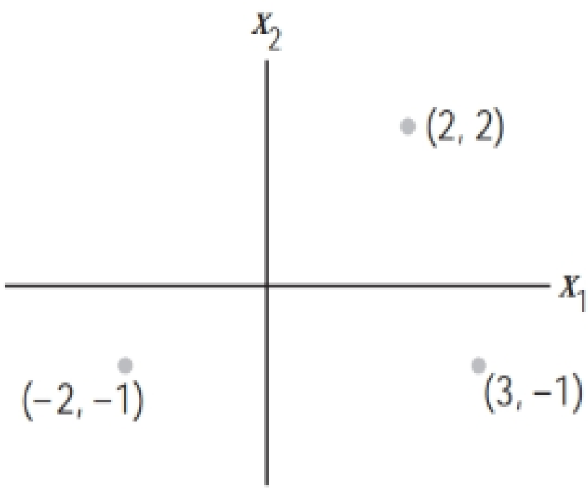


FIGURA 1 Vetores como pontos.

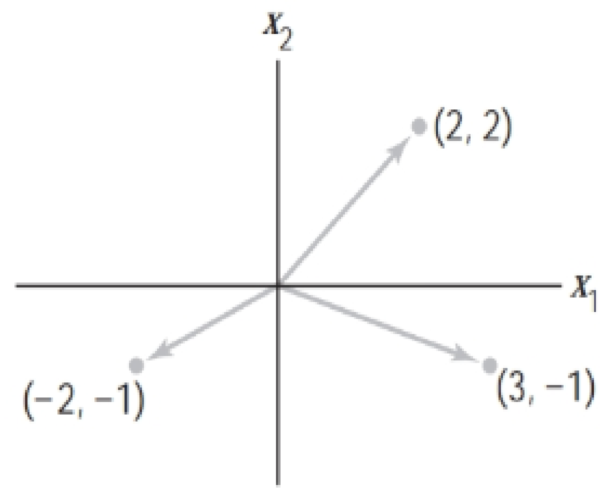


FIGURA 2 Vetores com setas.

A visualização geométrica de um vetor como $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ é auxiliada pela inclusão de uma seta (um segmento de reta orientado) da origem (0, 0) até o ponto (3, –1), como na Figura 2.

VETORES EM $\mathbb{R}^2$

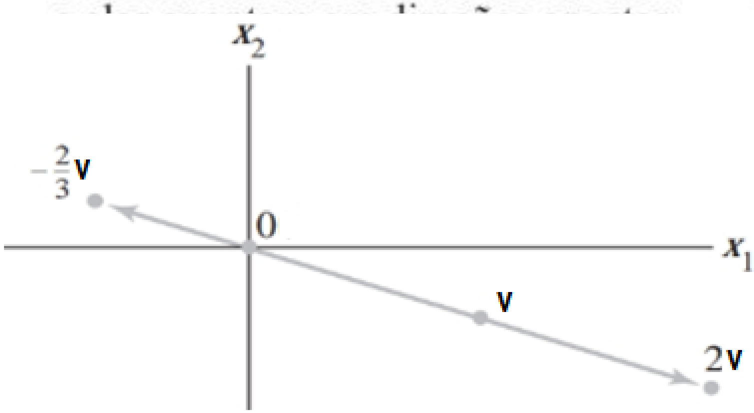
- **Multiplicação de um vetor por um escalar:** Dado um vetor v e um número real c, o múltiplo escalar de v por c é o vetor cv, obtido multiplicando-se cada componente de v por c.

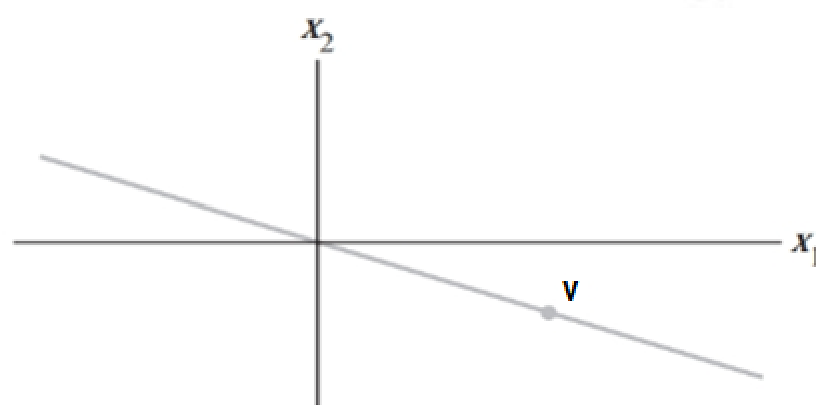
Exemplo 3 - pág. 22

EXEMPLO 3 Seja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Represente graficamente os vetores $\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}$ e $-\frac{2}{3}\mathbf{v}$.

SOLUÇÃO Veja a Figura na qual $\mathbf{v}$, $2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $-\frac{2}{3}\mathbf{v} \begin{bmatrix} -2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ estão representados graficamente.

A seta que representa $2\mathbf{v}$ tem o dobro do comprimento da seta que representa $\mathbf{v}$, e elas apontam na mesma direção. A seta que representa $-\frac{2}{3}\mathbf{v}$ é dois terços do comprimento da seta que representa $\mathbf{v}$,





VETORES EM $\mathbb{R}^2$

- **Adição de vetores:**

Regra do paralelogramo para a soma de vetores

A Regra do Paralelogramo para a Soma

Se **u** e **v** em $\mathbb{R}^2$ forem representados como pontos no plano, então **u** + **v** corresponderá ao quarto vértice do paralelogramo cujos outros vértices serão **u**, **0** e **v**. Veja a Figura 3.

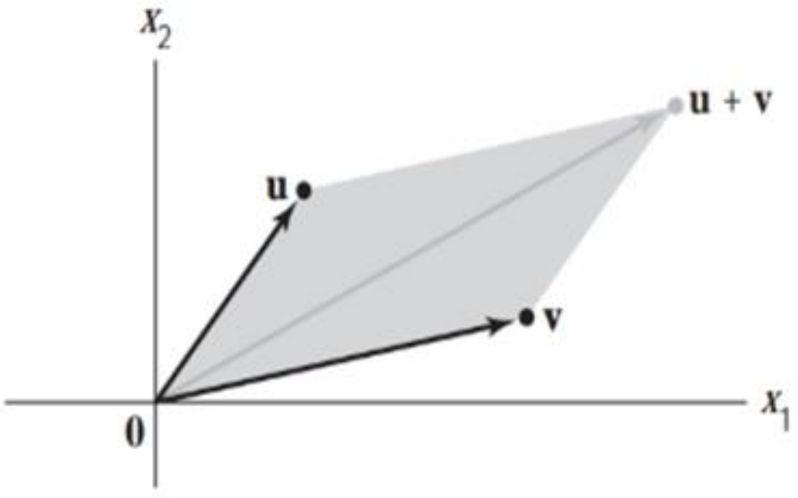


FIGURA 3 A regra do paralelogramo.

VETORES EM $\mathbb{R}^2$

- **Adição de vetores:** Dados dois vetores u e v, o vetor u+v é obtida, somando-se as componentes correspondentes de u e v

Exemplo 2 - pág. 21

EXEMPLO 2 Os vetores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ estão representados graficamente

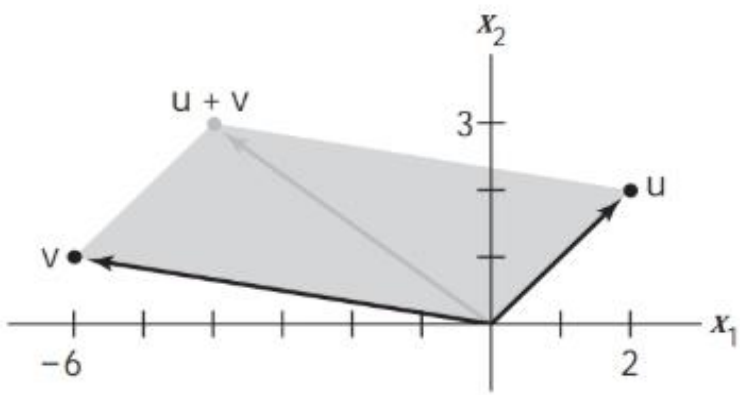


FIGURA 4 Soma de vetores

A figuras 4 ilustra a regra do paralelogramo.

VETORES EM $\mathbb{R}^2$

A subtração de vetores é um caso particular da adição, pois (pág. 22) $u - v = u + (-v)$

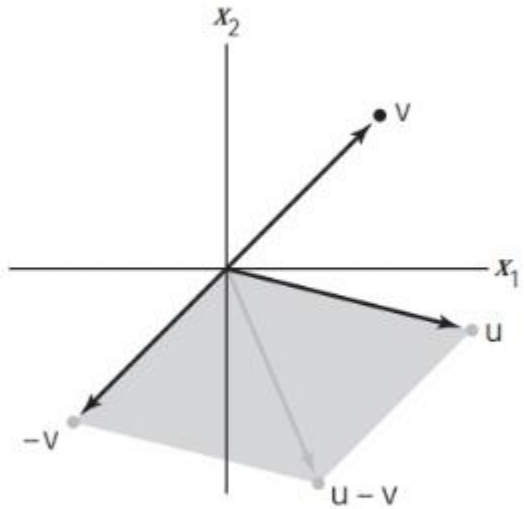


FIGURA 7 Subtração de vetores.

A subtração de vetores é um caso particular da adição de vetores, pois a diferença u-v é igual a soma de u com o oposto de v

A Figuras 7 ilustra a regra do paralelogramo.

COMBINAÇÃO LINEAR

Dados os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ em $\mathbb{R}^n$ e dados os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$, o vetor $\mathbf{y}$ definido por

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

é denotado uma **combinação linear** de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ com **pesos** $c_1, \ldots, c_n$. Os pesos de uma combinação linear podem ser quaisquer números reais, incluindo o zero. Por exemplo, algumas combinações lineares dos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são

$$\sqrt{3}\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 \; (= \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{0} \; (= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2)$$

COMBINAÇÃO LINEAR

Exemplo 4 , pág. 23

EXEMPLO 4 A Figura 8 identifica algumas combinações lineares de $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Observe os conjuntos de retas paralelas do reticulado traçadas por múltiplos inteiros de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.) Faça uma estimativa das combinações lineares de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ que geram os vetores **u** e **w**.

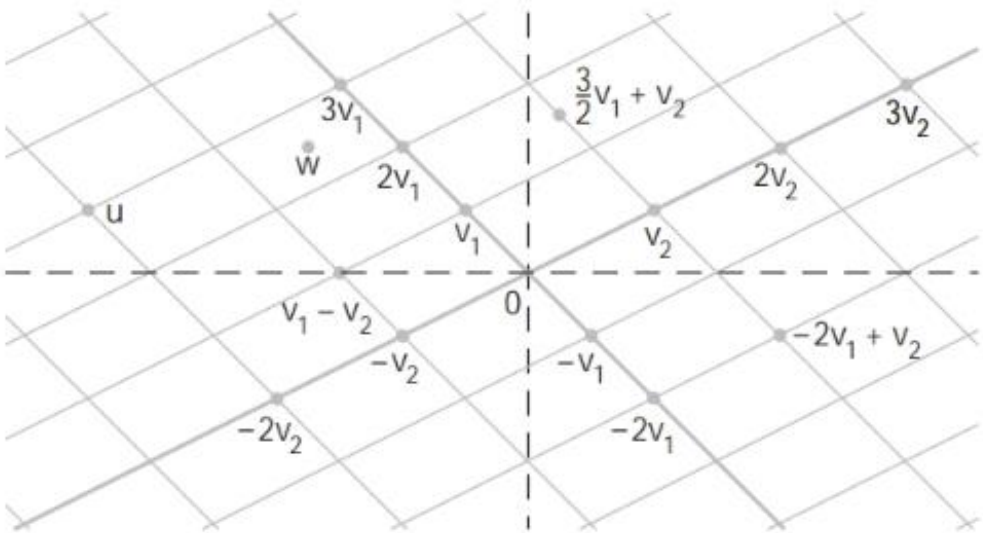


FIGURA 8 Combinações lineares de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

COMBINAÇÃO LINEAR

A equação vetorial

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

tem o mesmo conjunto solução que o sistema linear cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Em particular, **b** pode ser gerado por uma combinação linear de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ se e somente se existir solução para o sistema linear correspondente à matriz

Exemplo 5 - pág. 23

EXEMPLO 5 Sejam $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Determine se **b** pode ser gerado (ou escrito) como uma combinação linear de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. Em outras palavras, determine se existem pesos x_1 e x_2 tais que

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

Se a equação vetorial (1) tiver solução, encontre-a.

Dica: Use as definições de multiplicação por escalar e de soma de vetores para reescrever a equação vetorial.

Exercícios 5, 9 e 13 - págs. 26,27

COMBINAÇÃO LINEAR

Definição - pág. 25

Dados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ em $\mathbb{R}^n$, o conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ é denotado por $\mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ e é chamado **subconjunto de $\mathbb{R}^n$ gerado por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$**. Ou seja, $\mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é a coleção de todos os vetores que podem ser escritos na forma

$$\boxed{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p}$$

com $c_1, \ldots, c_p$ escalares.

COMBINAÇÃO LINEAR

Perguntar se um vetor **b** está em $\mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ significa perguntar se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{b}$$

tem solução ou, de forma equivalente, perguntar se o sistema linear cuja matriz aumentada é $[\mathbf{v}_1 \ \ldots \ \mathbf{v}_p \ \mathbf{b}]$ tem solução.

Observe que $\mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ contém todo múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$ (por exemplo), já que $c\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \ldots + 0\mathbf{v}_p$. Em particular, o vetor nulo pertence a $\mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.

COMBINAÇÃO LINEAR

Dizer que

$$\boxed{\text{O vetor } \mathbf{b} \text{ está em } \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}}$$

significa dizer que

- o vetor b é combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$

ou

- o vetor b é gerado por

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$$

Exercício 25 - pág. 27

UMA DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA PARA $\mathscr{L}\{v\}$ – PÁG. 25

Seja $\mathbf{v}$ um vetor não nulo do $\mathbb{R}^3$. Então $\mathcal{L}\{\mathbf{v}\}$ é o conjunto de todos os múltiplos escalares de $\mathbf{v}$ e pode ser visualizado como o conjunto dos pontos na reta em $\mathbb{R}^3$ contendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{O}$

Veja a Figura 10.

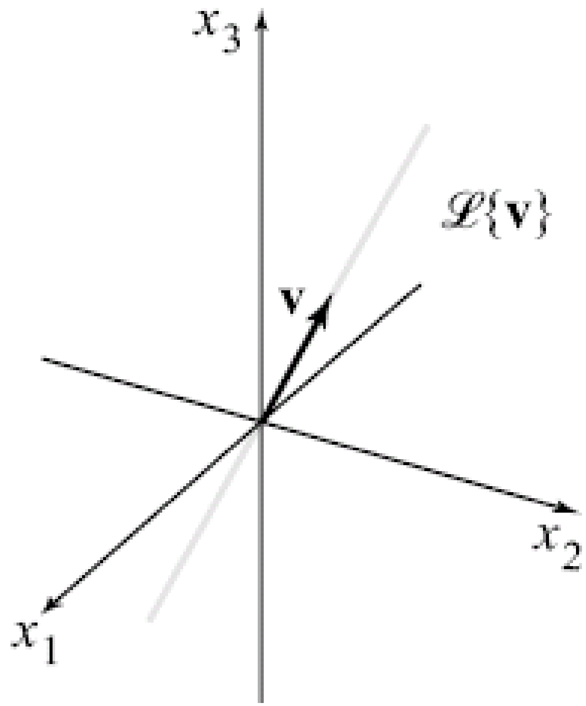


FIGURA 10 $\mathscr{L}\{\mathbf{v}\}$ é uma reta contendo a origem.

UMA DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA PARA $\mathscr{L}\{u,v\}$ (PÁG.25)

Se **u** e **v** forem vetores não nulos em $\mathbb{R}^3$ e se **v** não for um múltiplo de **u**, então $\mathscr{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ será o plano em $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos **u**, **v** e **0**. Em particular, $\mathscr{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contém a reta em $\mathbb{R}^3$ contendo **u** e **0** e a reta contendo **v** e **0**.

Veja a Figura 11.

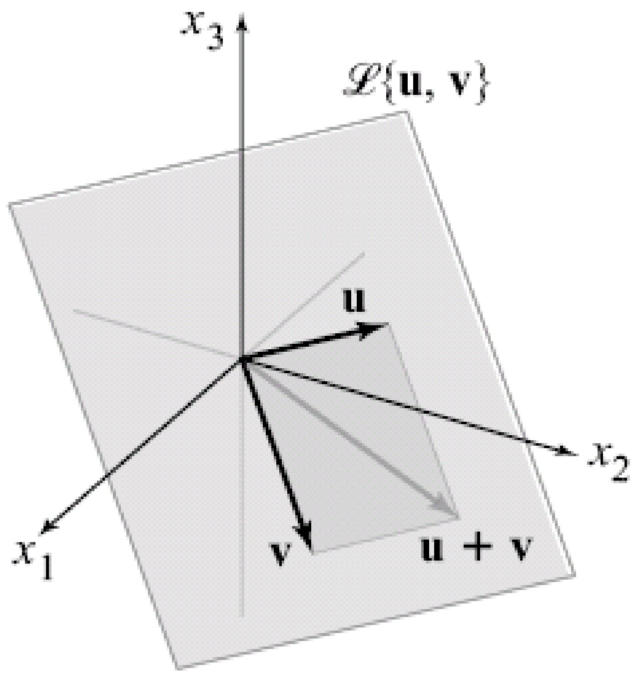


FIGURA 11 $\mathscr{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é um plano contendo a origem.

Pense....

como resolver o Exemplo 6 – pág. 25, e verifique se o seu raciocínio está de acordo com o livro:

EXEMPLO 6 Sejam $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então $\mathscr{L}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ contendo a origem. O vetor b pertence a esse plano?

SOLUÇÃO A equação $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ tem solução? Para responder, escalonamos a matriz aumentada $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{b}]$:

EQUAÇÃO MATRICIAL AX = B (PÁG. 29)

Se A for uma matriz $m \times n$ com colunas $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ e se $\mathbf{x}$ pertencer a $\mathbb{R}^n$, então o **produto de A e $\mathbf{x}$**, denotado por $A\mathbf{x}$, **será a combinação linear das colunas de A usando as componentes correspondentes de x como pesos**, ou seja,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

EQUAÇÃO MATRICIAL AX = B

Teorema 3 - pág. 30

Se A for uma matriz $m \times n$ com colunas $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ e se $\mathbf{b}$ pertencnca $\mathbb{R}^m$, a equação matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4}$$

terá o mesmo conjunto solução que a equação vetorial

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{5}$$

que, por sua vez, terá o mesmo conjunto solução que o s sema de equações lineares cuja matriz aumentada será

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{6}$$

A equação AX = b tem solução, se e somente se, b for uma combinação linear das colunas de A

EXERCÍCIOS SUGERIDOS

- págs. 26 a 28 - 7, 11, 13, 15, 17, 19, 32
- pág. 26 - Problema prático 2
- pág. 33 - 9, 13, 14