Geometria Analítica

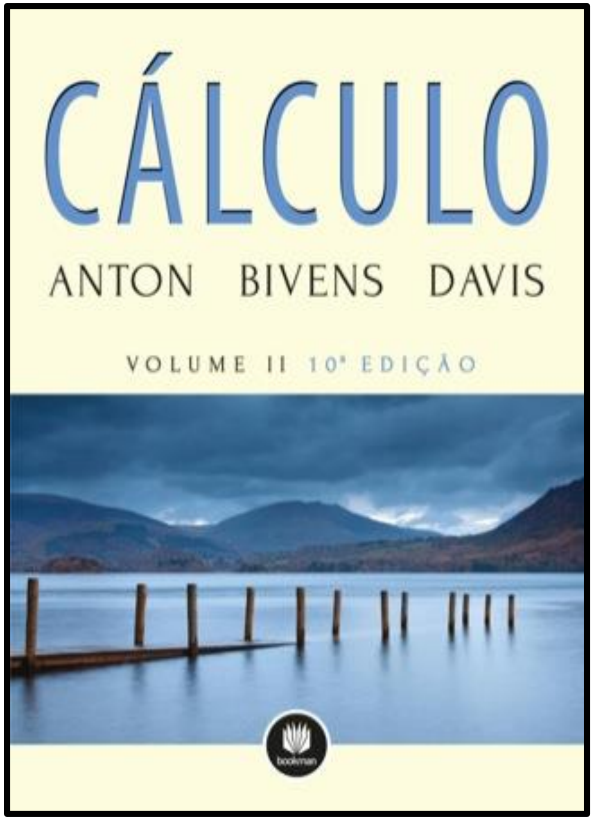
A reta no espaço tridimensional

FBX5007-Geometria analítica e álgebra linear
Profa. Ms. Magda Mantovani Lorandi

Período 2022-4

COMO SÃO AS EQUAÇÕES DE UMA RETA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL?

LIVRO-TEXTO



Capítulo 11- Seção 11.5
págs. 805 a 812

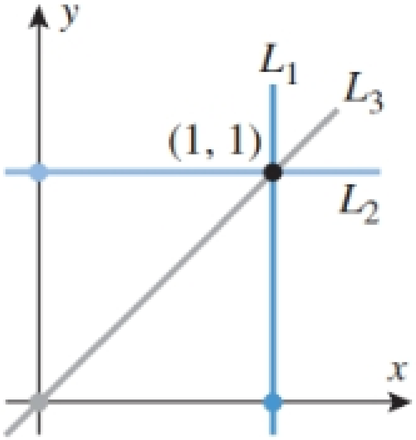
Link do livro: ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen L. Cálculo. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

ESTUDO DA RETA NO R^2

- Retas em R^2 são descritas por equações do primeiro grau a duas variáveis x e y
  - Uma reta pode ser representada na forma reduzida pela equação $y = mx + b$
  - Da equação obtemos informação sobre:
    - a direção da reta - mediante o coeficiente angular ou inclinação m
    - um ponto da mesma - pelo intercepto vertical (0, b)

Exercício 1a), pág. 810

Equações reduzidas das retas



$L_1 : x = 1$ (reta vertical)

$L_2 : y = 1$ (reta horizontal)

$L_3 : y = x$ (reta identidade)

A reta L_3 pode ser obtida a partir dos 2 pontos (1, 1) e (0, 0):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

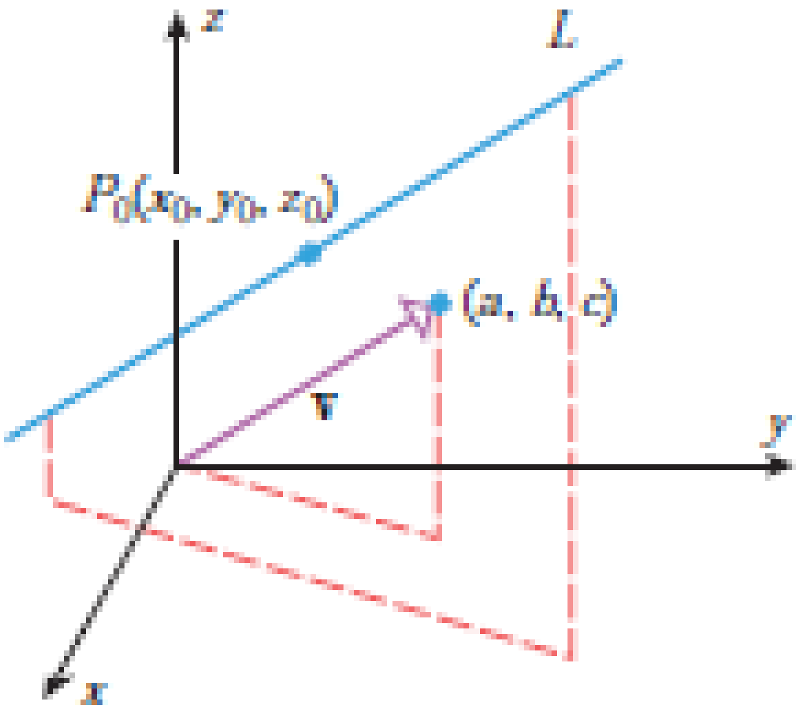
Com o coeficiente angular da reta m = 1 e qualquer um de seus pontos, por exemplo (0, 0), determinamos a equação da reta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 0)\text{, que resulta:}$$

$$y = x$$

ESTUDO DA RETA NO R^3 (PÁG. 806)



Considere um vetor v no espaço.

Existem infinitas retas paralelas no espaço que têm a mesma direção deste vetor.

- Dado um ponto P_o no espaço, existe uma única reta passando por este ponto e que tem a mesma direção deste vetor.
- No R^3 uma reta é definida através de um vetor (que dará a sua direção) e por um ponto da mesma.

TEOREMA 11.5.1 (PÁG. 806)

12.5.1 TEOREMA

(a) *A reta no espaço bidimensional que passa pelo ponto* $P_0(x_0, y_0)$ *e é paralela ao vetor não-nulo* $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ *tem equações paramétricas*

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt \tag{1}$$

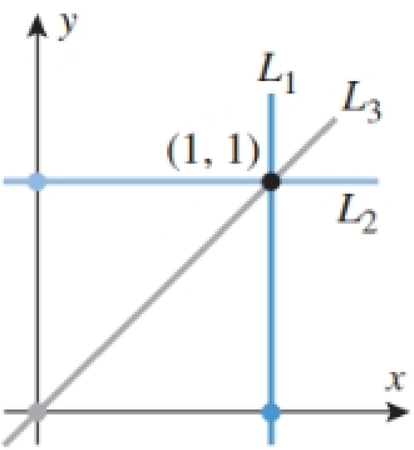
(b) *A reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e é paralela ao vetor não-nulo* $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ *tem equações paramétricas*

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \tag{2}$$

Conjunto de equações da reta na forma paramétrica (recebem esse nome em função dependência do parâmetro t, que pode assumir qualquer valor real)

Ver https://www.geogebra.org/m/jeaytkxn

Exercício 1a), pág. 810 **Equações paramétricas das retas**



No $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$A(x_0, y_0)$ - ponto conhecido
$\vec{v}(a, b)$ - vetor que dará a direção da reta

- L_1: $\left.\begin{matrix} A(1,0)^* \\ B(1,1) \end{matrix}\right\}$ $\vec{v} = \vec{AB} = B - A \Rightarrow \vec{v} = (1,1) - (1,0)$
  $\vec{v} = (0,1)$

Com $\vec{v} = (0,1)$, $A = (1,0)$ $\Rightarrow L_1: \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 0 + 1t \end{cases} \Rightarrow L_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$

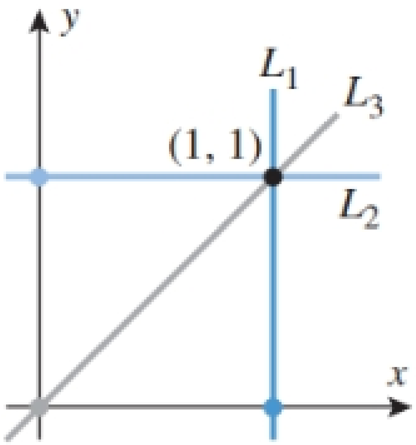
- L_2: $\left.\begin{matrix} A(0,1) \\ B(1,1) \end{matrix}\right\}$ $\vec{v} = \vec{AB} = B - A \Rightarrow \vec{v} = (1,1) - (0,1)$
  $\vec{v} = (1,0)$

Com $\vec{v} = (1,0)$, $A = (0,1)$ $\Rightarrow L_2: \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \end{cases} \Rightarrow L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$

- L_3: $\left.\begin{matrix} A(0,0) \\ B(1,1) \end{matrix}\right\}$ $\vec{v} = \vec{AB} = B - A \Rightarrow \vec{v} = (1,1) - (0,0)$
  $\vec{v} = (1,1)$

Com $\left.\begin{matrix} \vec{v} = (1,1) \\ A = (0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow L_3: \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 1t \end{cases} \Rightarrow L_3: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$

Exercício 1a) – pág. 810



Reta	Equações reduzidas	Equações paramétricas
L1	$x = 1$	$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$
L2	$y = 1$	$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$
L3	$y = x$	$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

Exercício de compreensão 2, pág. 810

2) Equações paramétricas da reta que passa por $(5,3,7)$ é paralela a reta

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 \\ z = 8 + 4t \end{cases} \quad \vec{v} = (-1,04) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$

Obs. retas paralelas tem vetores diretores iguais ou múltiplos

Exercício de compreensão 4, pág. 810

4) Reta que passa pelos pontos $(-3,8,-4)$ e $(1,0,8)$ intercepta o plano yz no ponto ...

$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (1,0,8) - (-3,8,-4) = (4,-8,12)$

$\vec{v}$ pode ser $\vec{v} = (4,-8,12)$ ou $\vec{v}(1,-2,3)$

$P(1,0,8)$

$\vec{v}(1,-2,3)$

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 8 + 3t \end{cases}$$

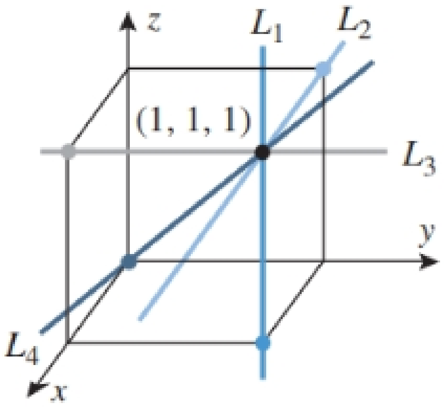
Se a reta intercepta o plano yz então $x = 0$

p/ $x = 0$ $\quad 0 = 1 + t \Rightarrow t = -1$

$$\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -2(-1) = 2 \\ z = 8 + 3(-1) = 5 \end{cases}$$

$P(0,2,5)$

Exercício b), pág. 810 **Equações paramétricas das retas**



$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Equações paramétricas da reta no espaço tridimensional

Seção 11.5 Retas

Pág 810

1b) L_1 $A(1,1,0)^*$, $B(1,1,1)$ $\quad \vec{v} = \vec{AB} = B - A = (0,0,1)$

$$\begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 1 + 0t \\ z = 0 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

L_2 $A(0,1,1)$, $B(1,1,1)$ $\quad \vec{v} = \vec{AB} = B - A = (1,0,0)$

$$\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 + 0t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

L_3 $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ $\quad v = \vec{AB} = B - A = (0,1,0)$

$$\begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 0 + 1t \\ z = 1 + 0t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

L_4 $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$ $\quad \vec{v} = (1,1,1)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

- ✓ Estudar os exemplos 1 e 2, págs. 807-808
- ✓ Exercícios 15, 19, 21, 23(a), 23(b), 25, 33; pág. 811
- ✓ Após desenvolver o exercício 33, pense e apresente as equações paramétricas de duas retas r e s, que sejam perpendiculares.