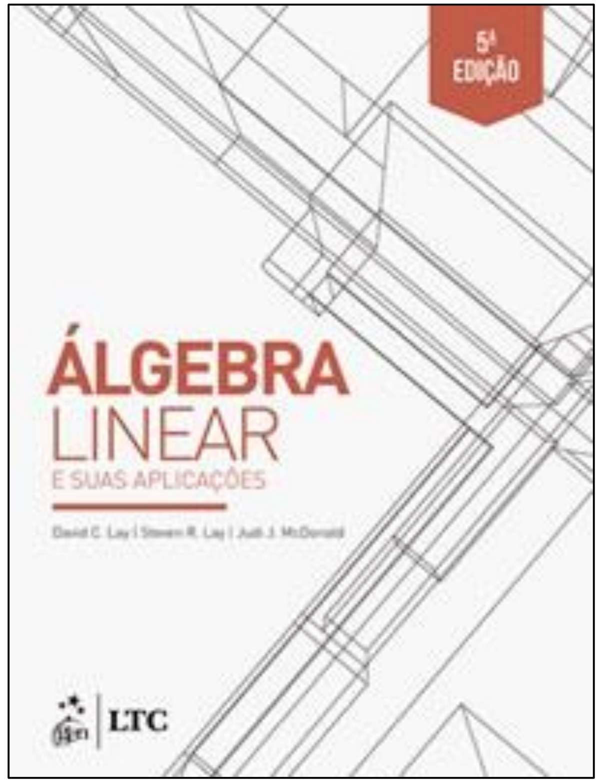
Álgebra Linear

Independência Linear
Conjuntos Linearmente Independentes

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR
PROFA. MS.MAGDA MANTOVANI LORANDI

Período 2022-4

LIVRO-TEXTO



LAY, David C. *Álgebra linear e suas aplicações.* 5 ed. Rio de Janeiro: LTC,2018.

INDEPENDÊNCIA LINEAR
SEÇÃO 1.7 (PÁGS. 46-52)

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Vimos por definição que um vetor b do R^n é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, vp$ quando

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_p v_p = b \qquad (1)$$

Vimos também que para verificar se o vetor b é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ devemos verificar se existem estes números reais $x_1, x_2, \ldots; x_p$ que satisfazem a equação vetorial (1) .

Para isso temos que resolver o sistema Ax = b, cuja matriz completa associada é

$$[v_1 \quad v_2 \ldots v_p \quad b]$$

Agora dizemos que um conjunto de vetores é **LINEARMENTE INDEPENDENTES (LI)** quando nenhum dos vetores do conjunto puder se escrito como combinação linear dos demais.

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição - pág. 46

Um conjunto indexado de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ em $\mathbb{R}^n$ é dito **linearmente independente** se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

tiver apenas a solução trivial. O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é dito **linearmente dependente** se existirem constantes $c_1, \ldots, c_p$, nem todas nulas, tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \qquad (2)$$

INDEPENDÊNCIA LINEAR

EXEMPLO 1 Sejam $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

pág. 46

a. Determine se o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.
b. Se possível, encontre uma relação de dependência linear entre $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

a) É preciso determinar se existe uma solução não trivial da equação (1) anterior. As operações elementares na matriz aumentada associada mostram que

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É claro que x_1 e x_2 são variáveis dependentes e x_3 é livre. Cada valor não nulo de x_3 determina uma solução não trivial de (1). Portanto, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são linearmente dependentes (e não linearmente independentes).

b) Para determinar uma relação de dependência linear para $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, complete o escalonamento da matriz aumentada e reescreva o novo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Assim, $x_1 = 2x_3$, $x_2 = -x_3$ e x_3 é livre. Escolha um valor não nulo para x_3, digamos, $x_3 = 5$. Então, $x_1 = 10$ e $x_2 = -5$. Substitua esses valores em (1) e obtenha

$$10\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Essa é uma dentre uma infinidade de relações de dependência linear possíveis para $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Independência Linear das Colunas de uma Matriz

As colunas de uma matriz A são linearmente independentes se e somente se a equação Ax = 0 tiver a solução trivial (solução nula)

Vejamos o **Exemplo 2 - pág. 47**

EXEMPLO 2 Determine se as colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes.

SOLUÇÃO Para estudar $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ escalone a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, está claro que existem três variáveis dependentes e nenhuma variável livre. Portanto, a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial, e as colunas de A são linearmente independentes. ■

Conjuntos com um vetor

Um conjunto com apenas UM VETOR NULO é LINEARMENTE DEPENDENTE

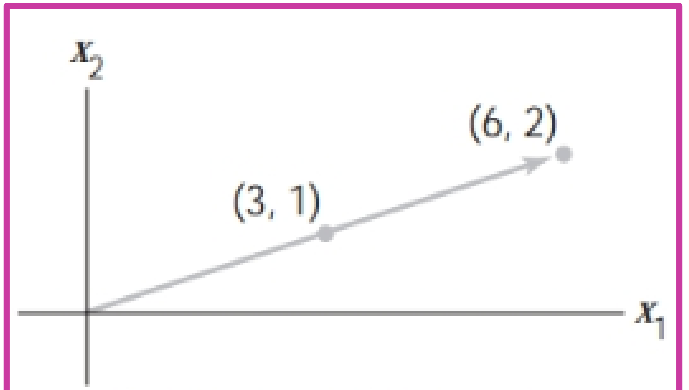
O vetor nulo é linearmente dependente porque $x_1 0 = 0$ tem muitas soluções não triviais

Um conjunto com apenas UM VETOR NÃO NULO é LINEARMENTE INDEPENDENTE

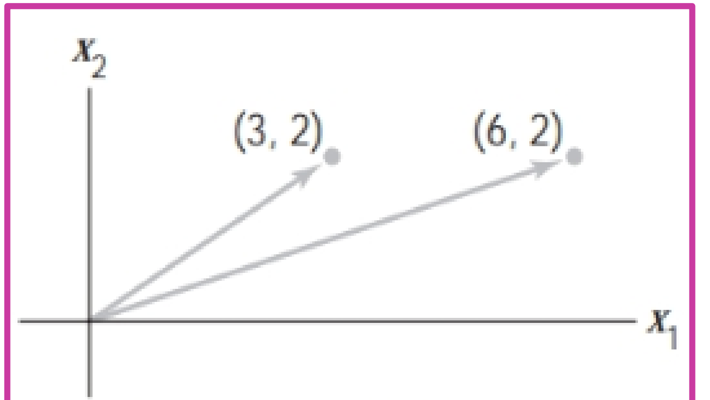
Isso ocorre porque a equação vetorial $x_1 v = 0$, tem apenas a solução trivial quando $v \neq 0$

Conjuntos com dois vetores

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2\}$ é LINEARMENTE DEPENDENTE, se e somente se eles forem múltiplo um do outro, portanto colineares. Caso contrário são Linearmente independentes.



Linearmente dependentes



Linearmente independentes

Exemplo 3 - pág. 47

EXEMPLO 3 Determine se os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.

a. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ b. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

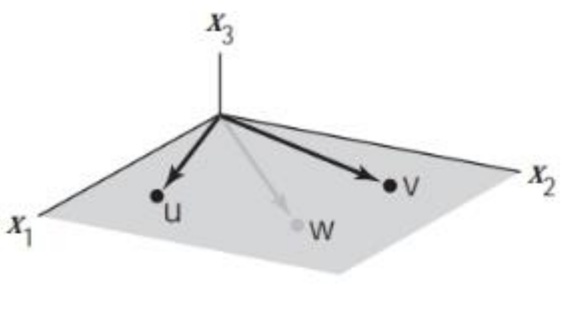
Conjuntos com dois ou mais vetores

Um conjunto de dois ou mais vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LINEARMENTE DEPENDENTE, se e somente se, pelo menos um dos vetores do conjunto for combinação linear dos demais

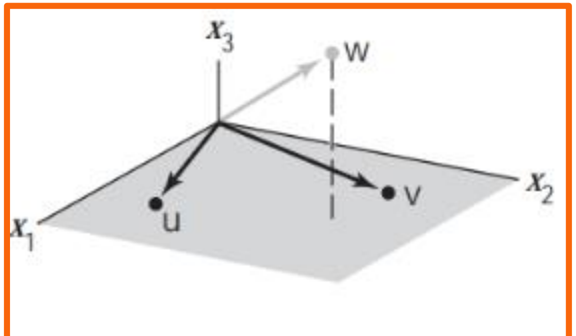
Exemplo 4 - pág. 48

EXEMPLO 4 Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$. Descreva o conjunto gerado por **u** e **v** e explique por que um vetor **w** pertence a $\mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ se e somente se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ for linearmente dependente.

SOLUÇÃO Os vetores **u** e **v** são linearmente independentes porque nenhum dos dois é múltiplo do outro e, portanto, eles geram um plano em $\mathbb{R}^3$. (Veja a Seção 1.3.) Na verdade, $\mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é o plano x_1x_2 (com $x_3 = 0$). Se **w** for uma combinação linear de **u** e **v**, então $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ será linearmente dependente



Linearmente dependentes, w pertence a $\mathcal{L}\{u, v\}$



Linearmente independentes, w *não* pertence a $\mathcal{L}\{u, v\}$

Conjuntos com dois ou mais vetores

Teorema - pág. 49

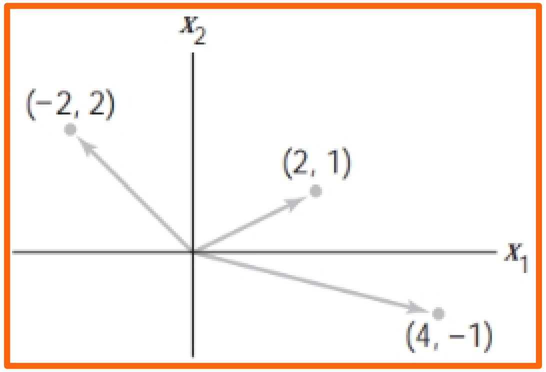
Se um conjunto contiver mais vetores que o número de componentes de cada vetor, então o conjunto será linearmente dependente. Em outras palavras, todo conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ em $\mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se $p > n$.

Exemplo 5 - pág. 49

EXEMPLO 5 Os vetores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes

existem três vetores no conjunto e apenas duas componentes em cada vetor. Observe, no entanto, que nenhum dos vetores é múltiplo de um dos outros.

FIGURA Um conjunto linearmente dependente em $\mathbb{R}^2$.



Conjuntos com dois ou mais vetores

Teorema - pág. 49

Se um conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ em $\mathbb{R}^n$ contiver o vetor nulo, então o conjunto será linearmente dependente.

Exemplo 6 - pág. 49

EXEMPLO 6 Determine, por simples inspeção, se o conjunto dado é linearmente dependente.

a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}$

Solução:

a. O conjunto é LD, pois TEM MAIS VETORES QUE COMPONENTES (4 vetores de 3 componentes)

b. O conjunto é LD, pois CONTEM O VETOR NULO

c. O conjunto é LI, pois os vetores NÃO SÃO MÚLTIPLOS

EXERCÍCIOS SUGERIDOS

- pág. 50 - Livro-texto

  1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 27, 31