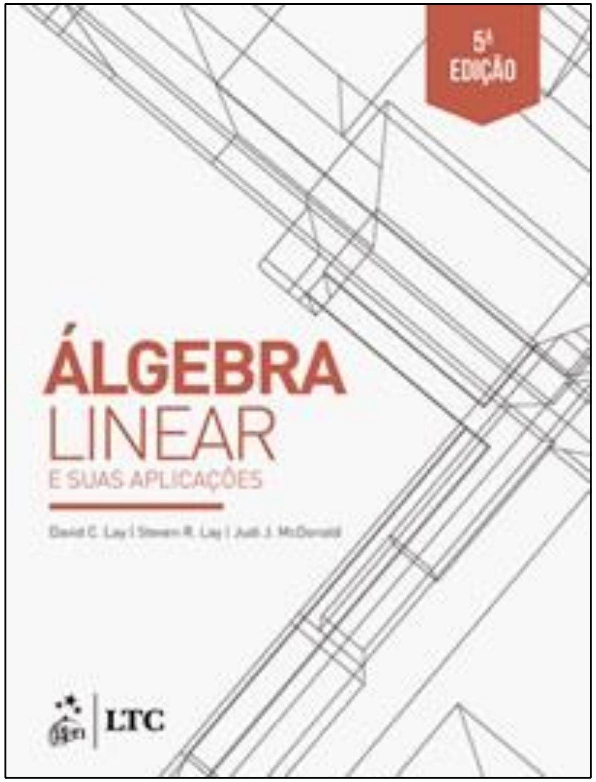
Álgebra Linear
Sistemas de equações lineares algébricas
Método de eliminação de Gauss

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR
PROFA. MS.MAGDA MANTOVANI LORANDI

Período 2022-4

LIVRO-TEXTO



Capítulo 1- Seção 1.1
págs. 1 a 9

LAY, David C. *Álgebra linear e suas aplicações.* 5 ed. Rio de Janeiro: LTC,2018.

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Algumas aplicações na Engenharia

- As tensões e as correntes elétricas de um circuito elétrico

- A posição e velocidade de um sistema de mola presa à parede com uma partícula de massa m, presa na sua extremidade

- deslocamento dos andares de um edifício, devido a um terremoto

São modeladas por um Sistema Linear

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Uma **equação linear** nas variáveis x_1, x_2, ..., x_n é uma equação na forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \qquad (1)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ - coeficientes das variáveis da equação (números reais ou complexos)

b - termo independente

Exemplos de equações lineares

$$4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 \quad \text{e} \quad x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$$

pois ambas podem ser escritas na forma da equação (1):

$$3x_1 - 5x_2 = -2 \quad \text{e} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6}$$

Exemplos de equações não lineares

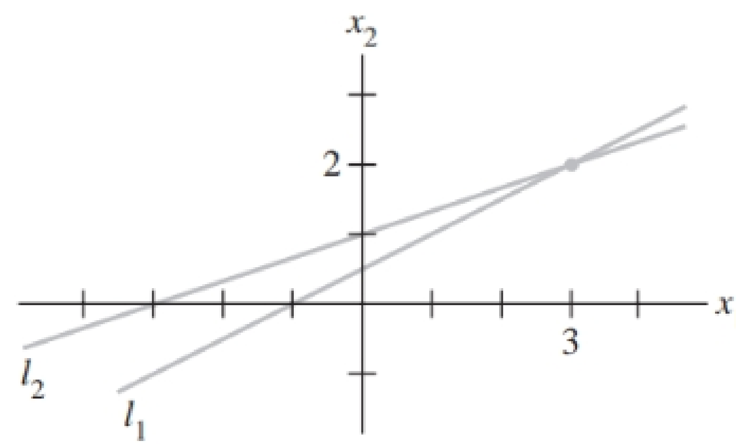
$$4x_1 - 5x_2 = x_1x_2 \quad \text{e} \quad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$$

pois na primeira, há a presença x_1x_2 e na segunda há a presença $\sqrt{x_1}$,de modo que não podem serem escritas na forma da equação (1)

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES (PÁG.2)

Um **sistema de equações lineares** é um conjunto de equações lineares envolvendo as mesmas variáveis, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Exemplo 1 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$



Os gráficos dessas equaçõ são retas. As retas são concorrentes.

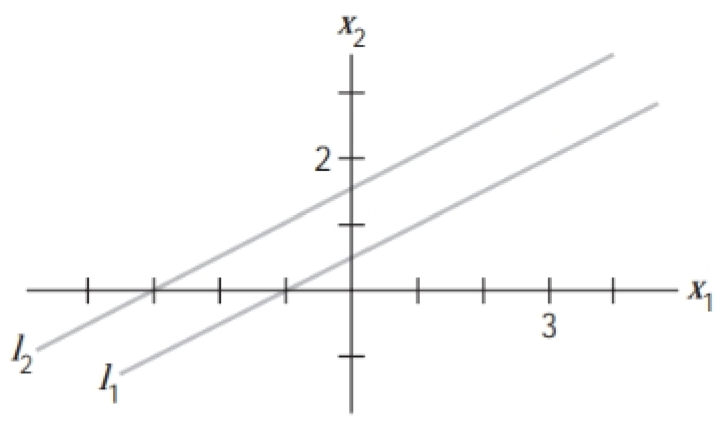
O sistema tem solução única S = {(3,2)}

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Exemplo 2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = \ \ 3 \end{cases}$

Os gráficos dessas equações são retas. As retas são paralelas.

O sistema não tem solução

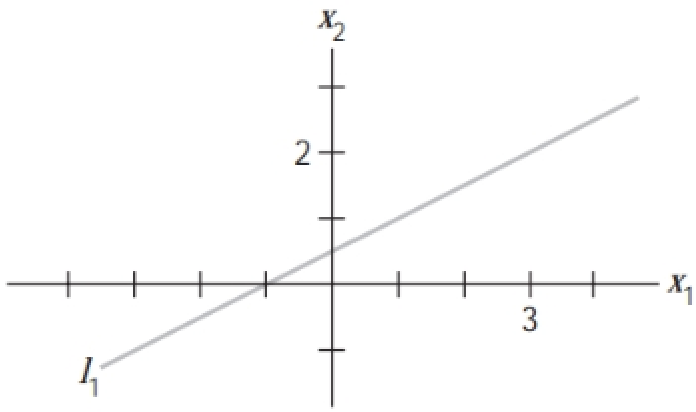


SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Exemplo 3 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = \ \ 1 \end{cases}$

Os gráficos dessas equações são retas. As retas são coincidentes (se intercectam em todos os pontos).

O sistema tem infinitas soluções



SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Classificação quanto ao tipo de solução:

Consistente

- Uma única solução (Sistema Possível Determinado – SPD)
- Infinitas soluções (Sistema Possível Indeterminado – SPI)

Inconsistente

- Nenhuma solução (Sistema Impossível – SI)

REPRESENTAÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

1) Forma algébrica

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ são os coeficientes da incógnitas

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ são os termos independentes

2) Forma matricial $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Amxn – matriz dos coeficientes das incógnitas

x – vetor das incógnitas

b – vetor dos termos independentes

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

O método de Eliminação de Gauss, consiste em determinar um sistema de equações equivalente ao sistema original (um sistema com o mesmo conjunto solução), porém de mais fácil resolução

Como obter um sistema de equações equivalente?

A partir das operações elementares aplicadas sobre linhas a matriz completa associada ao sistema (ou sobre equações do sistema)

(I) Multiplicação de uma linha (uma equação) por uma constante não nula

(II) Permutação de linhas (permutação de equações)

(III) Substituição de uma linha (uma equação) por ela mesma somada com um múltiplo da outra

RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

ETAPA 1 Obter a matriz aumentada [A|b] do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matriz aumentada do sistema}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

ETAPA 2 Transformar a matriz aumentada do sistema [A|b] em uma matriz equivalente, na forma escalonada.

Sistema original

Matriz aumentada [A|b]

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Matriz aumentada do sistema $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$ $L1 \longleftrightarrow L3$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L2 \longleftarrow -3L1 + L2 \\ L3 \longleftarrow -2L1 + L3 \end{array}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -7y + z = -5 \\ -3y + 3z = 3 \end{cases} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right] \quad L3 \longleftarrow (-1/3)\, L3$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -7y + z = -5 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad L2 \longleftrightarrow L3$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ -7y + z = -5 \end{cases} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \end{array}\right] \quad L3 \longleftarrow 7L2 + L3$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ -6z = -12 \end{cases} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{array}\right]$$

Sistema equivalente ao original

Matriz escalonada

Elemento LÍDER ou PIVÔ

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

ETAPA 3

Quando obtemos a matriz aumentada na forma escalonada, temos um sistema equivalente. Resolvemos o sistema equivalente por retrosubstituição

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - z = -1 \\ -6z = -12 \end{cases} \qquad \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente ao original

Matriz escalonada

$-6z = -12$	$y - z = -1$	$x + 2y - z = 1$
$Z = 12/6$	$y - 2 = -1$	$x + 2(1) - 2 = 1$
$Z = 2$	$y = -1 + 2$	$x = 1$
	$y = 1$	

Ao resolver o sistema por retrosubstituição, obtemos a seguinte solução: $S = \{(1, 1, 2)\}$

Elemento LÍDER ou PIVÔ

- **Exemplo 1**, pág.4 – Resolução pelo **método de eliminação de Gauss**, cuja matriz na forma escalonada é a última matriz da página 4. A partir desta matriz, determinamos a solução do sistema.

- **Exemplos 2, pág. 6 –** Determine se o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

é consistente:

A matriz aumentada do sistema na forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Já nos diz que **o sistema é consistente** (com uma única solução)

Ao voltar na forma de equações

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

vemos que por retrosubstituição, vamos obter uma única solução.

➢ Exemplos 3, págs. 6-7

Determine se o sistema $\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 1 \end{cases}$ é consistente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix} \text{L1} \leftrightarrow \text{L2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix} \text{L3} \leftarrow (-2)\text{L1} + \text{L3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix} \text{L3} \leftarrow 2\text{L2} + \text{L3}$$

Que resulta: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$, cuja notação de equações é $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 0 = 15 \end{cases}$

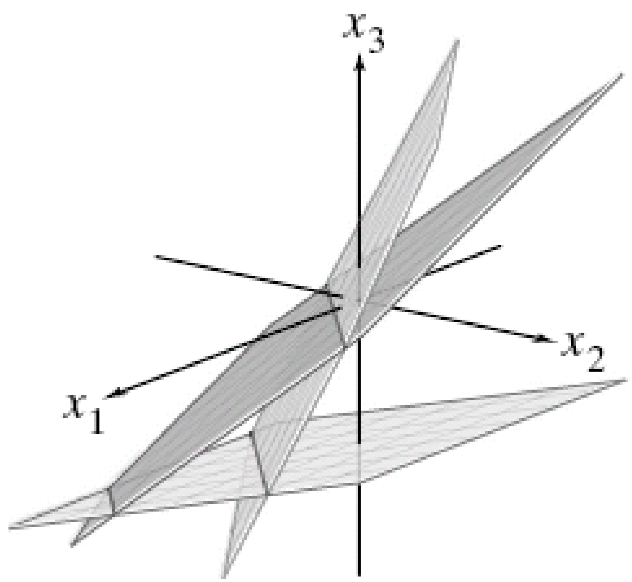
A equação $0 = 15$ é uma forma resumida de $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 15$

Não existem valores de x_1, x_2, x_3 que satisfaçam simultaneamente as equações.

O sistema é inconsistente!

Interpretação geométrica do Exemplos 3, págs. 6-7

- As equações do sistema são planos no espaço tridimensional
- A representação geométrica dessas equações nos mostram três planos sem ponto(s) comum.



EXERCÍCIOS SUGERIDOS

- pag. 7 - Problemas práticos 2, 3, 4
- pág. 8 - 1, 3, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 32