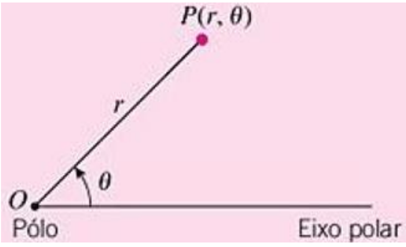
ESTUDO DIRIGIDO SOBRE COORDENADAS POLARES

Representação geométrica de pontos em coordenadas polares

Para representar pontos no plano, conhecemos o sistema cartesiano, porém há outros sistemas, e um deles é o SISTEMA POLAR.

O sistema de coordenadas polares consiste em um ponto fixo O, chamado de polo (ou origem), e de uma reta que parte do polo chamada de reta ou eixo polar.

Cada ponto P nesse sistema é representado por um par de coordenadas polares (r,θ) que definem a distância r de P ao polo, e o ângulo θ entre o eixo polar e o segmento OP.

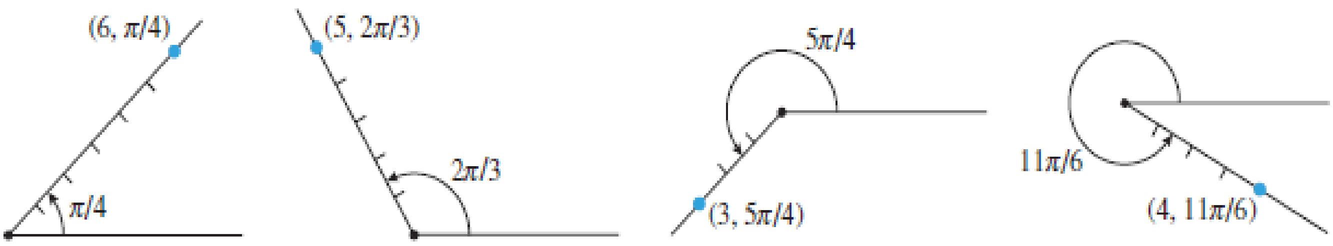


Sobre o sistema polar, recomendo o vídeo do Professor Gustavo Viegas, a seguir:

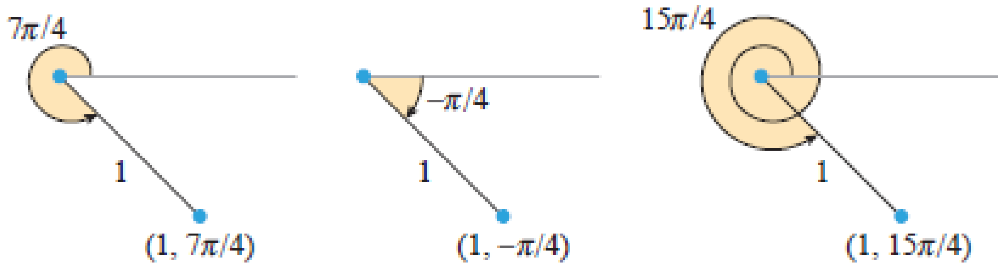
Vídeo recomendado: https://youtu.be/4jUyBiB1Uy4

Após assistir o vídeo, segue mais exemplos de representação de pontos em coordenadas polares:

Exemplos (pág. 706)

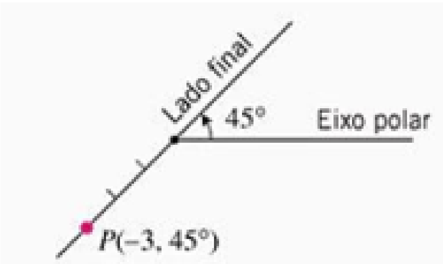


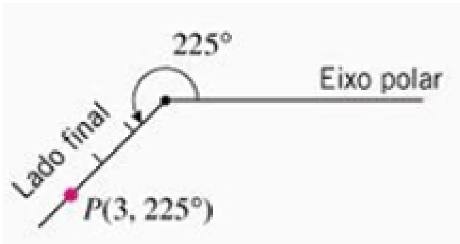
Note que as coordenadas polares de um ponto não são únicas. Por exemplo, as coordenadas $\left(1, \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(1, \frac{15\pi}{4}\right)$ representam todas o mesmo ponto.



O raio “r” não é negativo pois é a distância de P ao polo, porém algumas vezes é conveniente que “r” seja negativo. **Quando r < 0, o ponto está sobre a outra extremidade do ângulo**

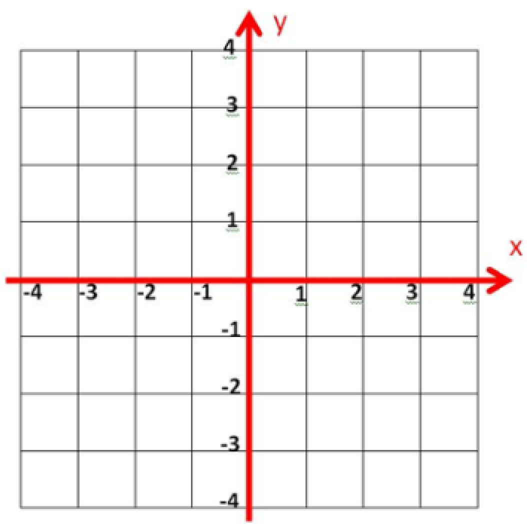
$$(-r, \theta) \quad \text{e} \quad (r, \theta + 180°)$$



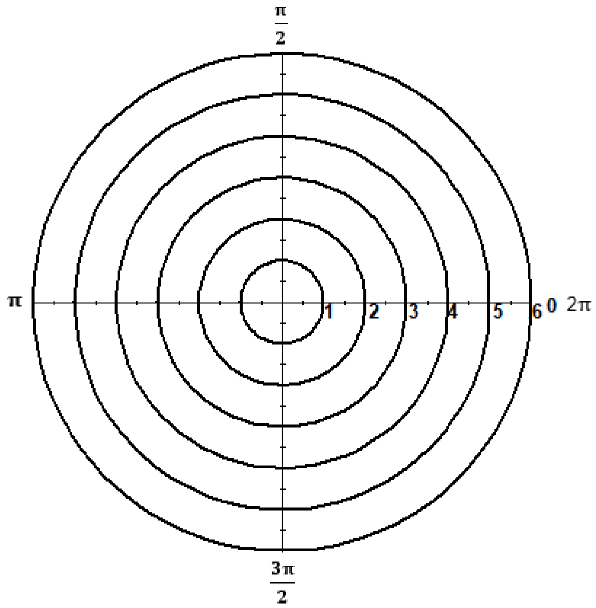


No sistema de coordenadas cartesianas usamos uma malha quadriculada ou reticulada e no sistema de coordenadas polares, usamos uma malha de círculos concêntricos interceptados por raios radiais.

Visão de um plano pelo sistema de coordenadas cartesianas



Visão de um plano pelo sistema de coordenadas polares



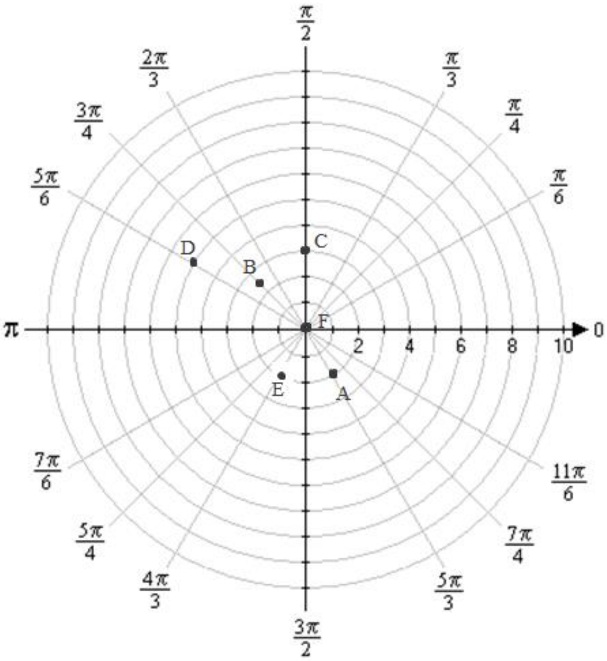
Exemplo

Esboce os pontos em coordenadas polares.

A $(2, -\pi/3)$ B $(5/2, -5\pi/4)$

C $(-3, 3\pi/2)$ D $(-5, -\pi/6)$

E $(2, 4\pi/3)$ F $(0, \pi)$

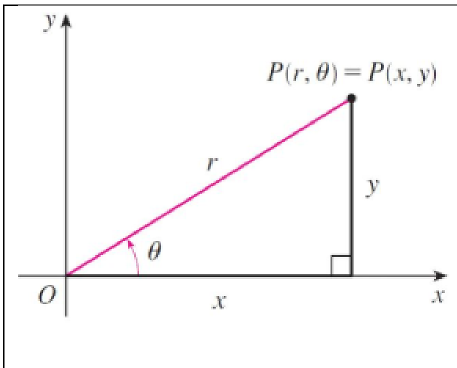


<u>Atividade 1:</u> Exercícios 10.1 (pág. 716) : 1

<u>*Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares*</u>

(pág. 706 – Livro-texto)

O quadro abaixo ilustra a dedução das fórmulas para converter um ponto dado em coordenadas polares para coordenadas cartesianas, e para converter um ponto dado em coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

 $cos\theta = \frac{x}{r}$ $sen\theta = \frac{y}{r}$	**Fórmulas para converter coordenadas polares em cartesianas:** $x = r\cos\theta$ $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$	**Fórmulas para converter coordenadas cartesianas em polares:** $r^2 = x^2 + y^2$ $\mathrm{tg}\ \theta = \frac{y}{x}$

No vídeo sugerido a seguir, além da explicação da dedução das fórmulas de conversão que consta na tabela anterior, o professor Gustavo Viegas apresenta dois exemplos. O Exemplo 1, ilustra como encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto dado em coordenadas polares e o Exemplo 2, ilustra como encontrar as coordenadas polares de um ponto dado em coordenadas cartesianas.

Vídeo recomendado: https://www.youtube.com/watch?v=vpl9lZTyznU

Atividade 2:

Exemplos 1 e 2 (pág. 707): Ler e compreender

Exercícios 10.2 (pág. 716): 3 e 5

Representação de curvas por equações cartesianas e equações polares

Em geral, diante de uma equação em coordenadas cartesianas, podemos transformá-la em coordenadas polares e diante de uma equação em coordenadas polares podemos transformá-la em coordenadas cartesianas. Essas duas situações são ilustradas a seguir, por exemplos neste texto e também no vídeo do Khan Academy recomendado:

Vídeo recomendado: https://www.youtube.com/watch?v=roSG9V3zApM&t=327s

- *Convertendo equações cartesianas em equações polares*

Exemplo

Encontre uma equação polar para o círculo $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

Solução

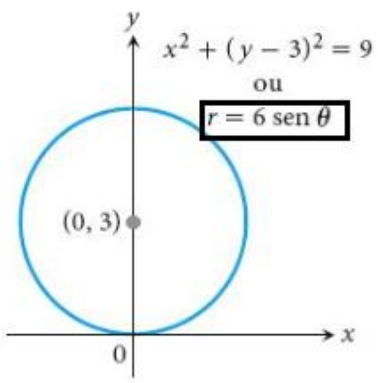
Expanda $(y-3)^2$ $\quad x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$x^2 + y^2 = r^2, \quad y = r \operatorname{sen} \theta$ $\quad r^2 - 6r \operatorname{sen} \theta = 0$

$$r = 0 \text{ ou } r - 6 \operatorname{sen} \theta = 0$$

A equação $r = 6 \operatorname{sen} \theta$ inclui a possibilidade de que $r = 0$.



Atividade 3 : Exercícios 10.2 (págs. 716-717): 11 e 12 (a,b,c)

- ***Convertendo equações polares em equações cartesianas***

Exemplo

Encontre uma equação cartesiana para a equação polar e identifique o gráfico

$$r = \frac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

Solução:

$$\begin{aligned} r(2cos\theta - sen\theta) &= 4 \\ 2\,rcos\theta - r\,sen\theta &= 4 \qquad (\,x = rcos\theta \;\text{ e }\; y = rsen\theta) \\ 2x - y &= 4 \\ -y &= -2x + 4 \end{aligned}$$

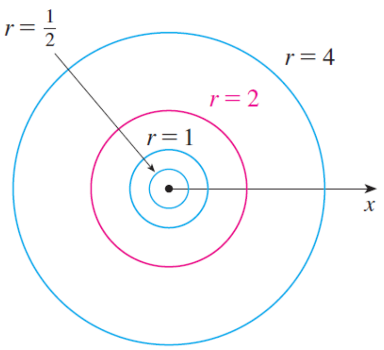
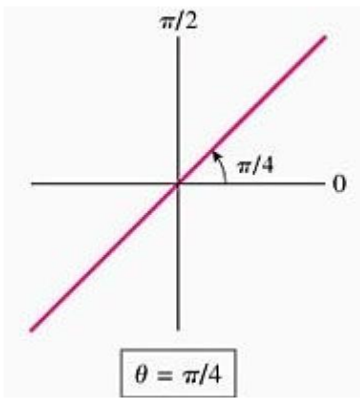
$$\boxed{y = 2x - 4}$$

O gráfico é uma reta com coeficiente angular m = 2 que intercepta o eixo y em b = - 4

<u>Atividade 4:</u> Exercícios 10.2 (pág. 716): 9, 10

<u>*Gráficos em coordenadas polares*</u> *(pág. 706 – Livro-texto)*

Exemplos:

A equação em coordenadas polares r = 2 é uma circunferência de raio 2 com centro no pólo, pois todos os seus pontos são do tipo (2,θ)	
A equação em coordenadas polares θ = π/4 é uma **reta** que faz um ângulo de π/4 com o eixo polar, pois todos os seus pontos são do tipo (r, π/4)	

- ***Família de circunferências de raio "a"*** *(pág. 713 – Livro-texto)*

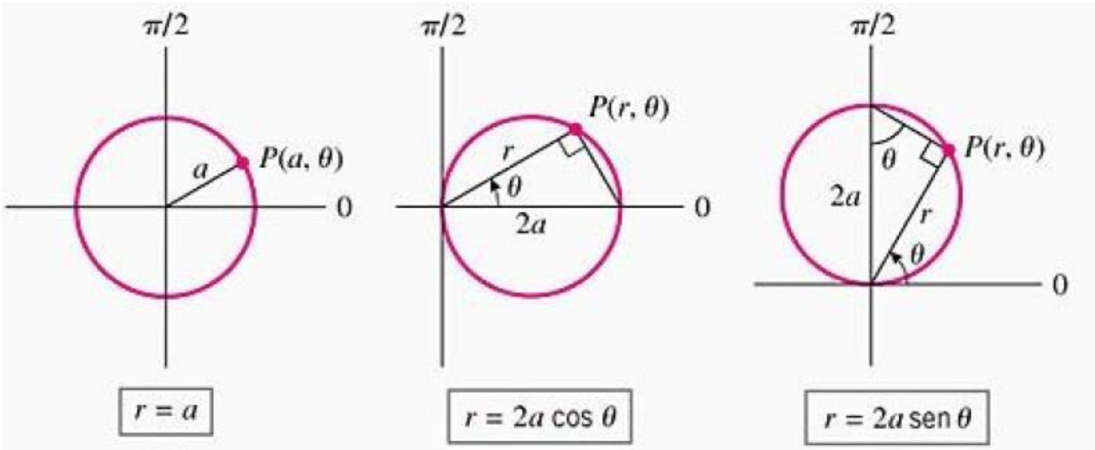
Para ilustrar os três casos de circunferências de raio medindo "a", descritos abaixo, recomendo assistir o vídeo do professor Gustavo Viegas.

Vídeo recomendado:
https://www.youtube.com/watch?v=2kdTIAs_al0&list=PLbVzJTKmXUibqJc41urupQLZIPpwvti2G&idex=3

✓ **Caso 1** - Circunferência centrada no pólo

✓ **Caso 2** - Circunferência com centro sobre o eixo x , tangente ao eixo θ = π/2

✓ **Caso 3** - Circunferência com centro sobre o eixo y, tangente ao eixo polar

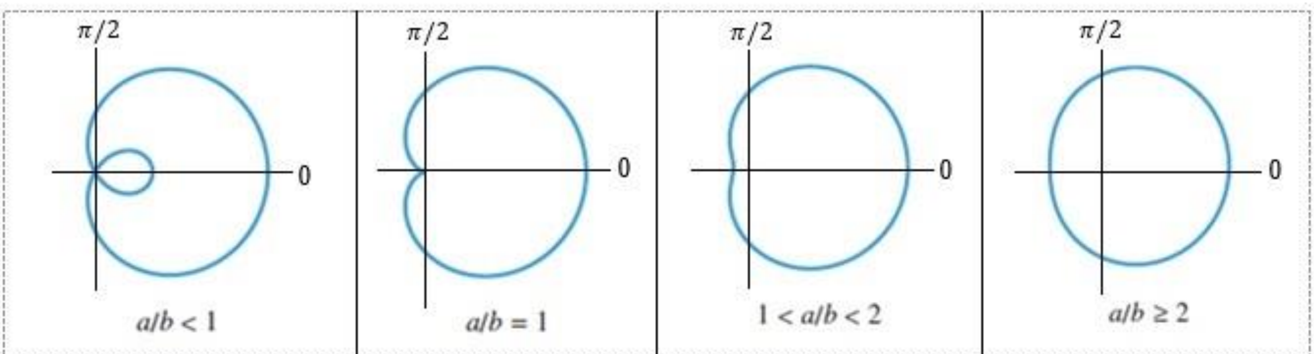


Atividade 5: Exercícios 10.2 (pág 717): 17(a-b); 18(b), 20(c), 21 a 25

- ***Família dos Limaçons*** *(pág. 713 – Livro-texto)*

✓ Equações da forma r = a ± bsen(θ) e r = a ± bcos(θ), com a > 0 e b > 0

✓ A forma do limaçon é determinada pela razão a/b



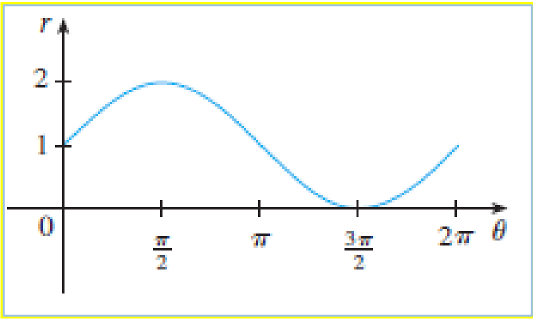
Limaçon com laço interno	Cardioide	Limaçon com covinha	Limaçon convexa

A seguir, uma simulação da formação do limaçon na plataforma Desmos:

https://www.desmos.com/calculator/rayzacuktw?lang=pt-BR

Exemplo

A figura a seguir ilustra o gráfico de r = 1 + sen(θ), no sistema cartesiano:



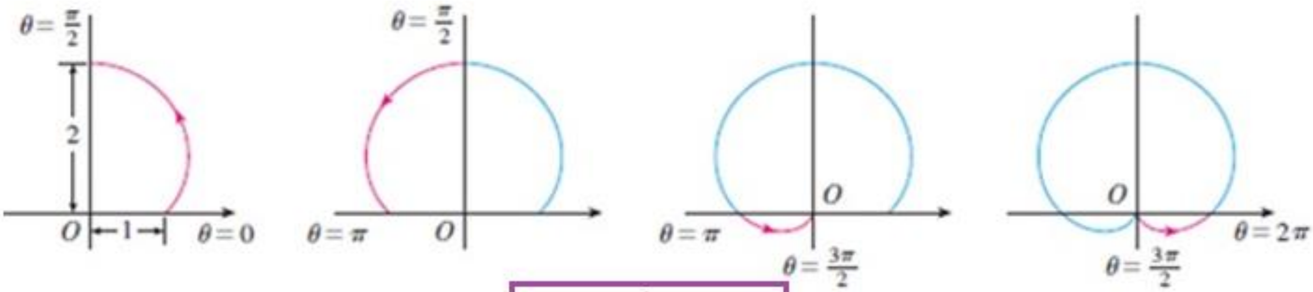
No sistema polar, r = 1 + sen(θ), tem $a = 1$ e $b = 1 \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$. Assim, classificamos esse limaçon como um cardioide.

Para obter os pontos do gráfico construímos a seguinte tabela:

(Observe os valores que devem ser atribuídos para θ)

θ	$r = 1 + \sin(\theta)$	(r, θ)
0	$r = 1 + \sin(0) = 1$	$(1{,}0)$
$\frac{\pi}{2}$	$r = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$	$\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$
π	$r = 1 + \sin(\pi) = 1$	$(1, \pi)$
$\frac{3\pi}{2}$	$r = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$	$\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$
2π	$r = 1 + \sin(2\pi) = 1$	$(1, 2\pi)$

Com os pontos obtidos na tabela anterior, observamos a seguir, a formação da cardioide:



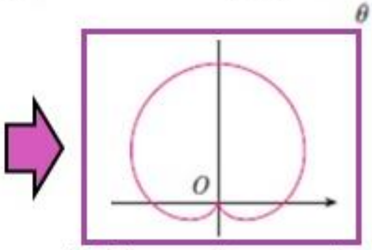


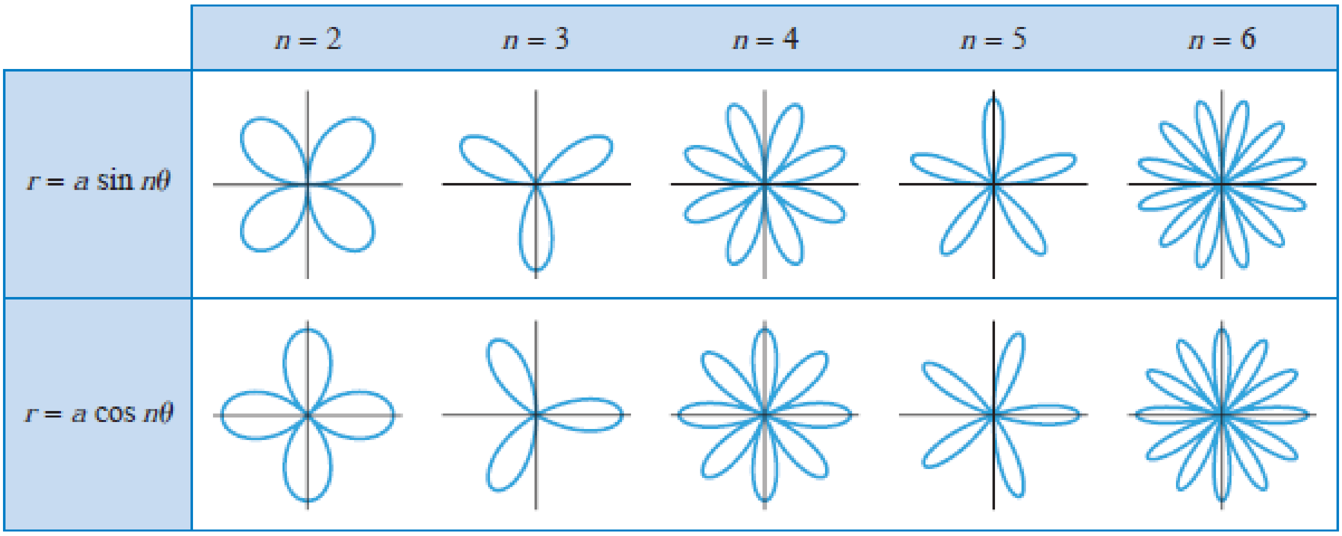
Gráfico no sistema polar

Para visualizar outros gráficos de limaçons, sugiro o vídeo:

Vídeo recomendado: https://www.youtube.com/watch?v=gtklvfhWCy8

Atividade 6: Exercícios 10.2 (pág 717): 18(a); 19(b), 20(a), 26 a 36

- ***Família de Rosáceas*** *(pág. 713 – Livro-texto)*



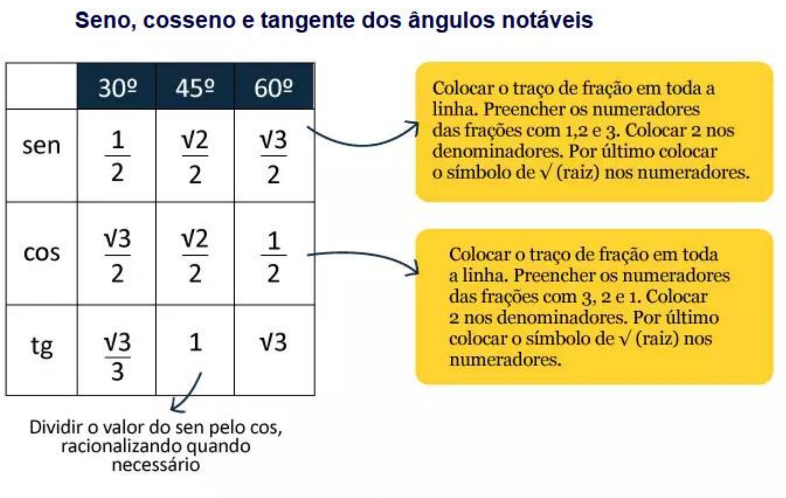
▲ **Figure 10.2.19**

- ✓ A constante positiva **a** mede o **raio de cada pétala**
- ✓ O **número de pétalas** igualmente espaçadas de uma rosácea é determinado pelo valor atribuído a n:
    - se n é par, então, a rosácea possui 2n pétalas;
    - se n é ímpar, então, a rosácea possui n pétalas
- ✓ O **ângulo** que a **primeira pétala da rosácea r = a cos(nθ) forma com o eixo polar** é igual é 0 (zero).
- ✓ O **ângulo** que a **primeira pétala da rosácea r = a sen(nθ) forma com o eixo polar** é igual a π/2n.

Atividade 7

Exercícios 10.2 (pág 717): 18(c); 19(a), 20(b), 43 a 46

FORMULÁRIO



Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ângulos notáveis. (Foto: Educa Mais Brasil)

Algumas identidades trigonométricas que possam ser úteis:

$\cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$

$sen(2\theta) = 2\, sen(\theta)\, .\, cos(\theta)$

$sec^2(\theta) = tg^2(\theta) + 1$

$cossec^2(\theta) = cotg^2(\theta) + 1$