UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

FBX5007 – Geometria Analítica e Álgebra Linear - Período 2022-4

Trabalho Discente Efetivo - Professora Magda M. Lorandi

ESTUDO DIRIGIDO SOBRE BASES E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Para melhor compreender o que são bases e dimensão de um espaço vetorial, é importante termos ideia do que são espaços e subespaços vetoriais. Para isso, recomendo os vídeos do Professor Gustavo Viegas, a seguir:

Vídeo 1: Espaço Vetorial Link: https://youtu.be/nqT61GEL1e8

Vídeo 2: Subespaço Vetorial Link: https://youtu.be/blOHuYLmc8Q

RESUMINDO....

Um espaço vetorial é um conjunto de vetores, onde para dois vetores quaisquer de um espaço vetorial V, a soma deles deve ser um terceiro vetor que ainda faz parte de V. Se multiplicarmos um vetor de V por um escalar, o resultante também deve ser elemento de V. Além disso, as 8 propriedades como vimos no vídeo são satisfeitas, sendo quatro delas relacionadas com a operação de adição entre vetores e as outras quatro relacionadas com a operação de multiplicação de um vetor por um escalar.

O espaço vetorial V é constituído por elementos como vetores, independente de sua natureza. Chamamos também vetores os polinômios (quando V for constituído por polinômios), as matrizes, (quando V for constituído por matrizes), os números (quando V for constituído por um conjunto numérico), e assim por diante. Isso se justifica pelo fato desses elementos de natureza tão distinta se comportarem de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

VAMOS FOCAR NOSSO ESTUDO NOS ESPAÇOS VETORIAIS EM $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots . \mathbb{R}^n$$

Dado um espaço vetorial V, há subconjuntos de V, tais que eles próprios também são espaços vetoriais, só que menores. Esses subconjuntos são chamados de subespaços de V. Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não-vazio, será um **subespaço vetorial de V**, se e somente se satisfaz as condições:

(i) *O elemento neutro (vetor nulo) de V está em W,*

(ii) *A operação de Adição definida em V é fechada em W, ou seja, $u + v \in W$, $\forall u, v \in W$;*

(iii) *A operação de Multiplicação por escalar de V é fechada em W, ou seja, $\alpha u \in W$, $\forall u \in W$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

Diante dessas condições satisfeitas em W, não é necessário verificar as oito propriedades dos vetores para dizer que W é espaço vetorial, pois elas já são válidas em V, que contém W.

Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (que são chamados triviais):

1. O conjunto formado somente pelo vetor nulo (a origem).

2. O próprio espaço vetorial: V é subconjunto de si mesmo.

Todo subespaço vetorial tem como elemento o vetor nulo, pois ele é necessário à condição de multiplicação por escalar: $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha\vec{u} = \vec{0}$.

Vamos ver alguns subespaços vetoriais:

Seja $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{H} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{V}; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\}$,

H representa as retas que passam pela origem. H é um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$

Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, $W = \{(x, y) \in V; y = 2x\}$ **,**

W é um subespaço vetorial do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, pois W é uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

Se de $W = \{(x, y) \in V; y = 2x + 1\}$, W não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$, pois W é uma reta que não passa pela origem.

Como **0** = (0,0) $\notin W$, W não é um subespaço vetorial do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$

Seja $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{H} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{V}; \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{z} = \mathbf{0};\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}\}$,

H representa os planos que passam pela origem. H é um subespaço do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$

Exemplo 2

$V = \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, $W = \{(x, y, z) \in V; x - 2y + 3z = 0\}$

W é um subespaço vetorial do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, pois W é um plano que passa pela origem.

Se $W = \{(x, y, z) \in V; y = x - 2y + 3z + 5 = 0\}$, W não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$, Pois W é um plano que não passa pela origem.

Como **0** = (0,0,0) $\notin W$, W não é um subespaço vetorial do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$

CONJUNTOS LINEARMENTE INDEPENDENTES; BASES

Relembrando o que são conjuntos linearmente independentes.....

(Definição Livro – texto, página 46)

Um conjunto indexado de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ em $\mathbb{R}^n$ é dito **linearmente independente** se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

tiver apenas a solução trivial. O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é dito **linearmente dependente** se existirem constantes $c_1, \ldots, c_p$, nem todas nulas, tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \qquad (2)$$

BASES DE ESPAÇOS E SUBESPAÇOS VETORIAIS

Para compreender o que é uma base de um espaço vetorial, é imprescindível que você assista o vídeo do professor Gustavo Viegas

Vídeo 3: Base de um espaço vetorial Link: https://youtu.be/E8JYnpsCZFo

Atenção: No *vídeo 3* , o professor Paulo Viegas usa a notação Span$\{v_1, v_2,\ v_3, \dots, v_p\}$ ao invés de $\mathscr{L}\{v_1, v_2,\ v_3, \dots, v_p\}$, ambas representando o espaço gerado pelos vetores $v_1, v_2,\ v_3, \dots, v_p$ ou o conjunto de todas as combinações lineares com os vetores $v_1, v_2,\ v_3, \dots, v_p$.

RESUMINDO...

Um conjunto de vetores é uma base de um Espaço Vetorial V se satisfaz simultaneamente as condições

(i) gera V e;

(ii) é Linearmente independentes (LI)

Atenção:

- ✓ Uma base é um conjunto gerador "eficiente" que não contém vetores desnecessários.
- ✓ Uma base pode ser obtida de um conjunto gerador descartando-se os vetores desnecessários.

Teorema do Conjunto Gerador (Teorema 5 do Livro – texto, página 46)

Seja $S = \{\mathbf{v}_1, x. \dots, \mathbf{v}_p\}$ um conjunto em V e seja $H = \mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$.

a. Se um dos vetores de S — digamos, $\mathbf{v}_k$ — for uma combinação linear dos demais vetores de S, então o conjunto obtido de S removendo-se $\mathbf{v}_k$ ainda gerará H.

b. Se $H \neq \{\mathbf{0}\}$, então algum subconjunto de S é uma base para H.

O ***vídeo 3***, mostra alguns exemplos de bases, incluindo as bases, que chamamos de bases canônicas. Para complementar, segue mais alguns exemplos.

Exemplo 3

Verifique em cada item, se os conjuntos do(s) vetor(es) dados, são bases do $\mathbb{R}^2$, justificando a sua resposta.

(É necessário saber que uma base do $\mathbb{R}^2$ tem que ter 2 vetores LI.)

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1\}$ é LI, mas não gera $\mathbb{R}^2$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^2$**.

O espaço gerado por v_1 é uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^2$, que é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LD (v_1 e v_2 são múltiplos!) e não gera o $\mathbb{R}^2$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^2$**.

O espaço gerado pelos vetores v_1 e v_2 é uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^2$, que é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.

c) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI (v_1 e v_2 não são múltiplos) e gera o $\mathbb{R}^2$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$**.

d) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ gera o $\mathbb{R}^2$, mas é LD . Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^2$**.

e) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é LI e gera o $\mathbb{R}^2$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$**.

Uma base do $\mathbb{R}^2$, constituída por esses vetores é denominada base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4

Verifique em cada item, se os conjuntos do(s) vetor(es) dados, são bases do $\mathbb{R}^3$, justificando a sua resposta.

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1\}$ é LI e não gera $\mathbb{R}^3$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$**.

O espaço gerado por v_1 é uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$, que é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LD (v_1 e v_2 são múltiplos!) e não gera o $\mathbb{R}^3$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$**.

O espaço gerado pelos vetores v_1 e v_2 é uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$, que é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

c) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI (v_1 e v_2 não são múltiplos!), mas não gera o $\mathbb{R}^3$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$**.

O espaço gerado pelos vetores v_1 e v_2 é um plano que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$, de equação $9x + 5z = 0$ (verifique!) , que é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

d) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

(Note que acrescentamos o vetor v_3 aos mesmo vetores do item anterior.)

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD e não gera o $\mathbb{R}^3$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$**.

O espaço gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3 é um plano que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$, de equação $9x + 5z = 0$ (verifique!). O mesmo plano é gerado por quaisquer 2 vetores desse conjunto.

Podemos dizer que $\mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathscr{L}\{v_1, v_2\} = \mathscr{L}\{v_1, v_3\} = \mathscr{L}\{v_2, v_3\}$

Os conjuntos $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$ são bases distintas deste plano.

(Todas as bases do correspondente espaço vetorial tem o mesmo número de vetores.)

e) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI (verifique!) e gera o $\mathbb{R}^3$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$**.

f) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(Note que acrescentamos o vetor v_4 aos vetores do item anterior.)

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ gera o $\mathbb{R}^3$, mas é LD (verifique!) , logo $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$.

g) **(Exemplo 7 – página 170 do Livro-texto)**

Como veremos, uma base é um conjunto gerador "eficiente" que não contém vetores desnecessários. De fato, uma base pode ser obtida de um conjunto gerador descartando-se vetores desnecessários.

Sejam $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $H = \mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Note que $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$ e mostre que $\mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Depois, determine uma base para o subespaço H.

Solução:

Como $v_3 = 5v_1 + 3v_2$, o vetor v_3 é combinação linear de v_1 e v_2 e está no conjunto $\mathscr{L}\{v_1, v_2\}$. Concluímos então que *H* e $\mathscr{L}\ \{v_1, v_2\}$ são, na verdade o mesmo conjunto de vetores, isto é, $\mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathscr{L}\ \{v_1, v_2\}$. Segue que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de *H*, pois $\{v_1, v_2\}$ é LI.

Atenção:

É importante observar que nesse exemplo, também é possível escrever v_2 como combinação linear de v_1 e v_3 e, escrever v_1 como combinação linear de v_2 e v_3. Logo $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$ também são bases de *H*. Assim,

$\mathscr{L}\ \{v_1, v_2, v_3\} = \mathscr{L}\ \{v_1, v_2\} = \mathscr{L}\ \{v_1, v_3\} = \mathscr{L}\ \{v_2, v_3\}$

h) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

O conjunto $\{e_1, e_2,\ e_3\}$ é LI e gera o $\mathbb{R}^3$. Logo, **o conjunto $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$. Uma base do $\mathbb{R}^3$, constituída por esses vetores é denominada base canônica do $\mathbb{R}^3$.**

Exemplo 5

Encontre uma base para o plano $x - y + z = 0$:

Sabemos que um plano tem infinitas bases, todas elas com 2 vetores LI.

Assim, $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base deste plano.

Exemplo 6

Encontre uma base para areta $y = -3x$:

Sabemos que uma reta tem infinitas bases, todas ela com 1 vetor LI.

Assim, $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base desta reta.

Exemplo 7 (Exercício 15 - página 173 do Livro-texto)

Encontre uma base para o espaço gerado pelos vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix},\ v_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}:$$

É importante saber que:

- O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é LD
- Se, dos 5 vetores, 4 deles forem LI, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é um gerador de todo o $\mathbb{R}^4$.
- Se, dos 5 vetores menos que 4 deles forem LI, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ será um gerador de um subespaço do $\mathbb{R}^4$ e não de todo o $\mathbb{R}^4$.

O exemplo pede para encontrar uma base para o espaço gerado pelos vetores do conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Então o que queremos é selecionar deste conjunto, vetores LI. Para isso, devemos procurar as posições pivôs na matriz escalonada do sistema homogêneo AX = 0 :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & v_3 & \boldsymbol{v_4} & v_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right] \end{array} \text{matriz associada ao sistema AX = 0}$$

$$\vdots$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{matriz escalonada associada ao sistema AX = 0,}$$

com as posições pivôs selecionadas em amarelo.

Os vetores dados que apresentarem pivôs nas suas respectivas colunas da matriz escalonada do sistema AX = 0 são os vetores LI . Esses vetores LI serão os vetores da base. A Base é:

$$\beta = \{\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_4}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO DO LIVRO-TEXTO

Página 172 – Problemas práticos 1, 2 e 3

Página 173 – 1, 3, 5, 7, 11, 12, 19, 20 e 23

As respostas dos problemas práticos e os exercícios de numeração ímpar estão no Livro-texto.

Respostas dos pares:

12) Há infinitas bases (todas com 1 vetor). Uma delas pode ser: $\beta = \left\{\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right\}$

20) Hámais de uma resposta. Pode ser $\beta = \{v_1, v_2\}$ ou $\beta = \{v_1, v_3\}$ ou $\beta = \{v_2, v_3\}$.

DIMENSÃO DE ESPAÇOS E SUBESPAÇOS VETORIAIS

Seja V um espaço vetorial que tenha uma base formada por um conjunto finito de vetores. Todas as bases de V vão possuir o mesmo número de elementos (vetores). Esse número é chamado de **dimensão de** $\boldsymbol{V}$ e é denotado por **dim** $\boldsymbol{V}$**.**

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8

Dim$\mathbb{R}^2 = 2$ (pois todas as bases do $\mathbb{R}^2$ tem 2 vetores (LI))

Dim$\mathbb{R}^3 = 3$ (pois todas as bases do $\mathbb{R}^3$ tem 3 vetores (LI))

Dim$\mathbb{R}^4 = 4$ (pois todas as bases do $\mathbb{R}^4$ tem 4 vetores (LI))

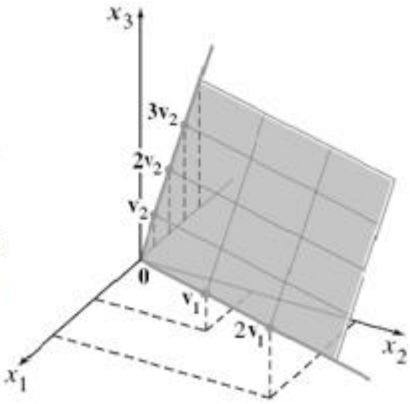
$\vdots$

Dim$\mathbb{R}^n = n$ (pois todas as bases do $\mathbb{R}^n$ tem n vetores (LI))

Exemplo 9 (Exemplo 2 – página 183 do Livro-texto)

Seja $H = \mathscr{L}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, em que $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Então H é um plano, já que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ não são múltiplos escalares u do outro e são, portanto, linearmente independentes. Uma base para H é $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ Assim, dim $H = 2$.



Exemplo 10 (Exemplo 3 – página 183 do Livro-texto)

Determine a dimensão do subespaço

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{bmatrix} : a, b, c, d \text{ em } \mathbb{R} \right\}$$

Solução:

Escrevemos os elementos de H como uma combinação linear

$$\begin{bmatrix} a-3b+6c \\ 5a+4d \\ b-2c-d \\ 5d \end{bmatrix} = a\underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + b\underset{v_2}{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + c\underset{v_3}{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}} + d\underset{v_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}}$$

Queremos selecionar do conjunto $\{v_1, v_2, v_3\,, v_4\}$ os vetores que são LI. Vamos excluir o v_3, pois é múltiplo de v_2. Vamos verificar quais vetores são LI dentre os vetores v_1, v_2 e v_4. Para isso devemos procurar as posições pivôs na matriz escalonada do sistema homogêneo AX = 0 :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_4} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$ matriz associada ao sistema AX = 0

$$\vdots$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ matriz escalonada associada ao sistema AX = 0,

com as posições pivôs selecionadas em amarelo.

Os vetores dados que apresentarem pivôs nas suas respectivas colunas da matriz escalonada do sistema AX = 0 são os vetores LI . Esses vetores LI serão os vetores da base. A Base é:

$$\beta = \{\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_4}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$$ e dim *H* = 3

Exemplo 11 (Exemplo 4 – página 183 do Livro-texto)

Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ podem ser classificados pela dimensão. Veja a Figura 1.

- *Subespaços zero-dimensionais*. Apenas o subespaço trivial.
- *Subespaços unidimensionais*. Todo subespaço gerado por um único vetor. Esses subespaços são retas contendo a origem.
- *Subespaços bidimensionais*. Todo subespaço gerado por dois vetores linearmente independentes. Esses subespaços são planos contendo a origem.
- *Subespaços tridimensionais*. Apenas o próprio $\mathbb{R}^3$. Quaisquer três vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$ geram todo $\mathbb{R}^3$ pelo Teorema da Matriz Invertível.

Exemplo 12

Encontre a dimensão do subespaço *H* de todos os vetores em $\mathbb{R}^3$

a) Que tem a primeira componente igual à segunda:

Vamos escrever um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$ com a primeira componente igual à segunda como uma combinação linear e extrair os vetores LI dessa combinação para constituir a base:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

Como os vetores v_1 e v_2 são LI , uma base é constituida por eles.

A dimensão do subespaço de todos os vetores em $\mathbb{R}^3$ que tem a primeira componente igual à segunda é 2, ou seja, dim*H* = 2.

b) Que tem todas as componentes iguais:

Vamos escrever um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$ com todas as componentes iguais como uma combinação linear e extrair os vetores LI dessa combinação para constituir a base:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

O vetor v_1 é LI e uma base é constituida por ele.

A dimensão do subespaço de todos os vetores em $\mathbb{R}^3$ que tem as tr~es componentes iguais é 1, ou seja dim *H* = 1.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO DO LIVRO-TEXTO

Página 185 – 1, 3, 5, 10, 11, 12

As respostas dos exercícios de numeração ímpar estão no Livro-texto.

Respostas dos pares:

10) 2

12) 3