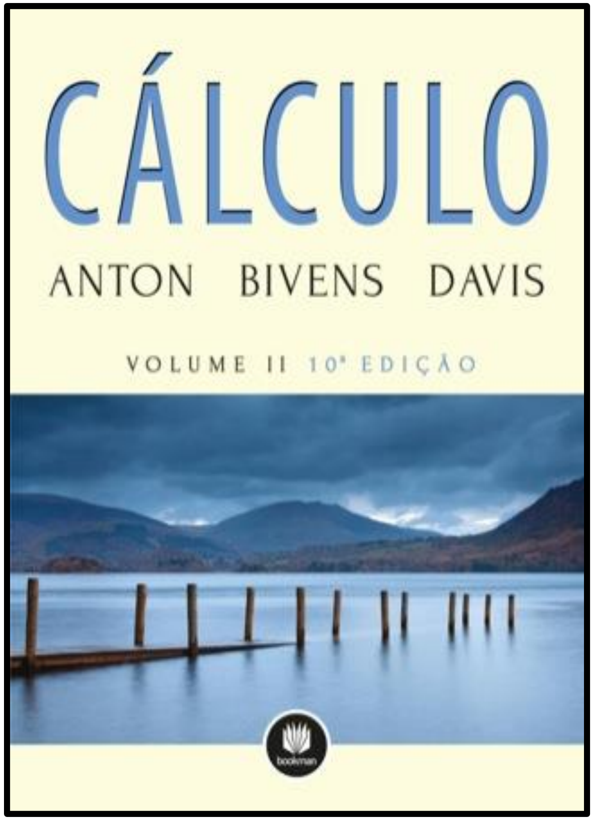
Geometria Analítica

Superfícies Quádricas

PROFA. MAGDA MANTOVANI LORANDI
(MATERIAL DA PROF. ADRIANA MIORELLI ADAMI – ADAPTADO)

Período 2022-4

LIVRO-TEXTO



Capítulo 11- Seção 11.7
págs. 821 a 831

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen L. Cálculo. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS SEÇÃO 11.7 (PÁGS. 821-831)

FBX5007AA

Geometria Analítica e Álgebra Linear

ONDE ENCONTRAMOS ESTAS SUPERFÍCIES?

Em torres de refrigeração em usinas nucleares

Na forma de objetos

Na forma de objetos

Como elementos de Arquitetura (Catedral de Brasília também é um exemplo)

Fonte: https://br.pinterest.com/

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS (PÁG. 822)

Na discussão da Fórmula (2) da Seção 10.5, observamos que uma equação de segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

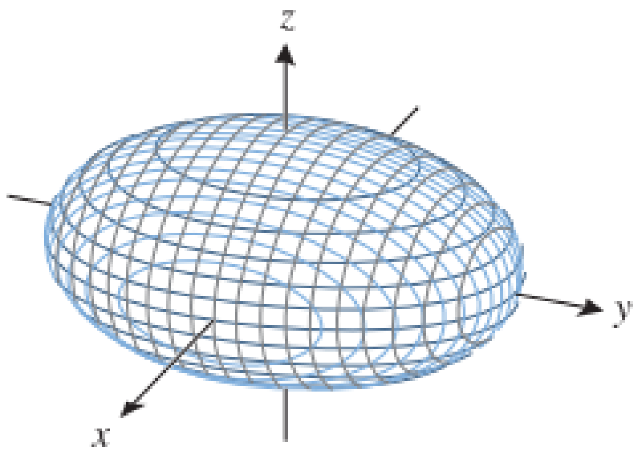
representa uma seção cônica (possivelmente degenerada). A equação análoga em um sistema de coordenadas xyz é

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{4}$$

que é chamada ***equação de segundo grau em x, y e z***. Os gráficos de tais equações são denominados ***superfícies quádricas*** ou, simplesmente, ***quádricas.***

Ver Tabela 11.7.1 na pág. 823

ELIPSOIDE (PÁG. 823)

SUPERFÍCIE	EQUAÇÃO
ELIPSOIDE 	$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Os traços nos planos coordenados são elipses, como também são elipses os traços em planos paralelos aos planos coordenados, que intersectam a superfície em mais de um ponto.

Exemplo 1 – pág. 824

ESFERA

- Quando a = b = c, o elipsóide se torna uma ESFERA centrada na origem do espaço tridimensional, e cuja equação é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

- Quando o centro é o ponto (x_0, y_0, z_0), a equação da esfera de raio r fica:

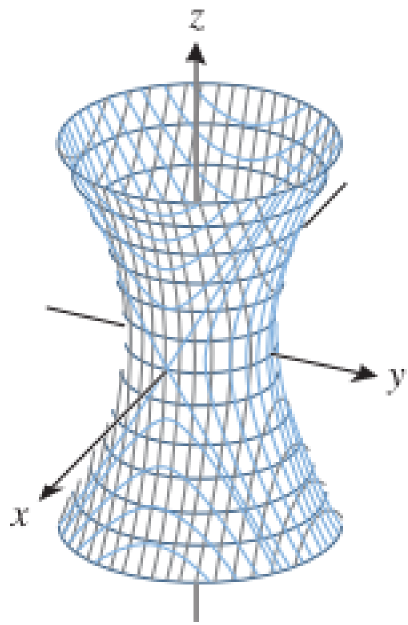
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Exemplos

EQUAÇÃO	GRÁFICO
$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$	Esfera com centro (3, 2, 1) e raio 3
$(x+1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 5$	Esfera com centro (−1, 0, −4) e raio $\sqrt{5}$
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	Esfera com centro (0, 0, 0) e raio 1

HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA (PÁG. 823)

HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA



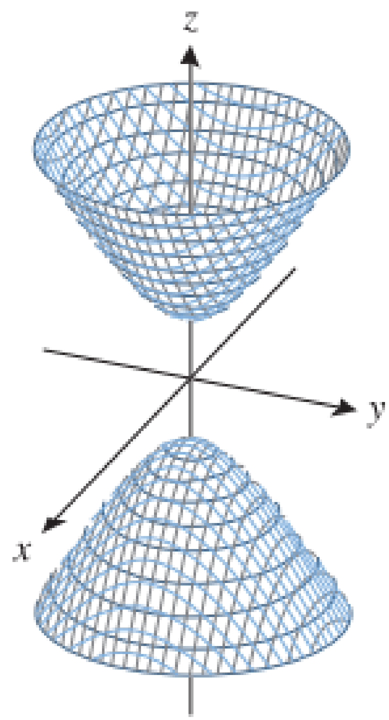
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

O traço no plano xy é uma elipse, como são os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a eles que não passam pelos cortes com os eixos x e y. Nesses pontos, os traços são pares de retas concorrentes.

Exemplo 2 – pág. 824

HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS (PÁG. 823)

HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS

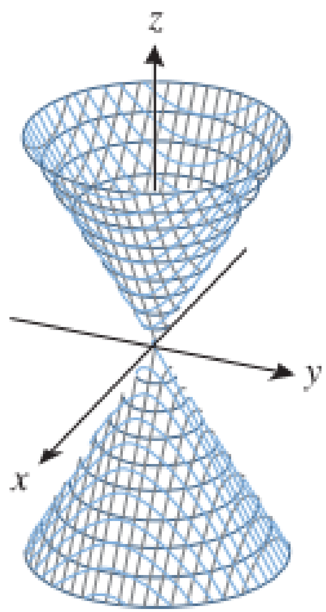


$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Não há traço no plano xy. Em planos paralelos ao plano xy que intersectam a superfície em mais do que um ponto, os traços são elipses. Os traços nos planos yz e xz, bem como em planos paralelos a eles, são hipérboles.

Exemplo 3 – Pág. 825

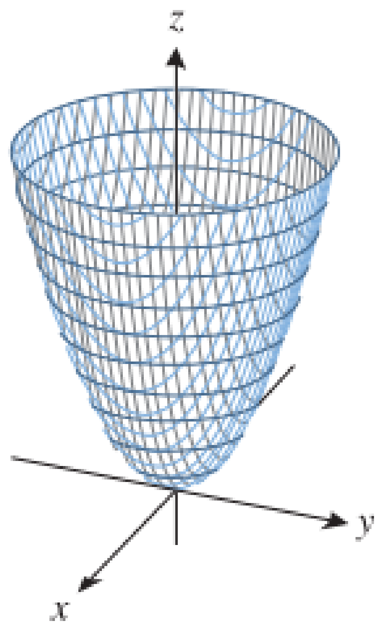
CONE ELÍPTICO (PÁG. 823)

SUPERFÍCIE	EQUAÇÃO
CONE ELÍPTICO 	$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$ O traço no plano xy é um ponto (a origem), e os traços em planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xz são pares de retas que se intersectam na origem. Os traços em planos paralelos a esses são hipérboles.

Exemplo 4 – pág. 825

PARABOLOIDE ELÍPTICO (PÁG. 823)

PARABOLOIDE ELÍPTICO



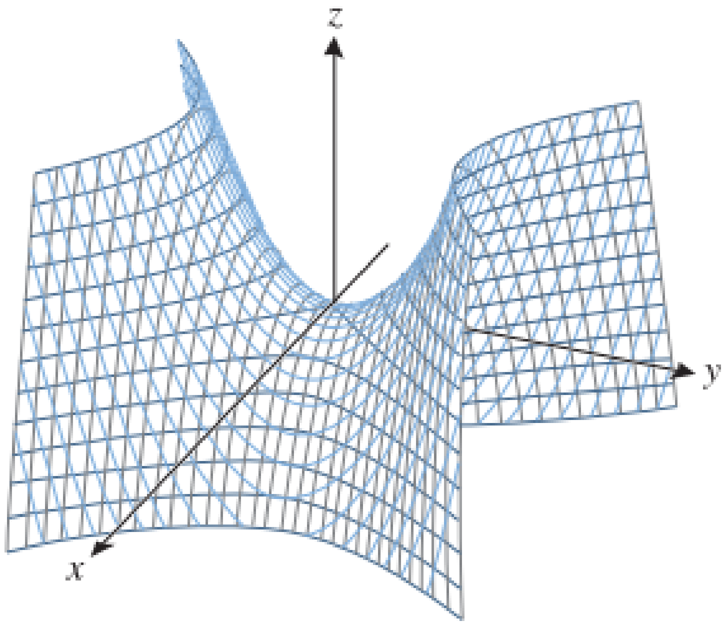
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

O traço no plano xy é um ponto (a origem), e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos yz e xz, bem como em planos paralelos a eles, são parábolas.

Exemplo 5 – pág. 826

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (PÁG. 823)

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO



$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

O traço no plano xy é um par de retas que se cruzam na origem. Os traços em planos paralelos ao plano xy são hipérboles. As hipérboles acima do plano xy abrem-se na direção y e as abaixo, na direção x. Os traços nos planos yz e xz, bem como em planos paralelos a eles, são parábolas.

COMPARANDO AS EQUAÇÕES DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS (PÁG.829)

Tabela 12.7.2

EQUAÇÃO	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$z^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$z-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$z-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=0$
CARACTERÍSTICA	Nenhum sinal de menos	Um sinal de menos	Dois sinais de menos	Nenhum termo linear	Um termo linear; dois termos quadráticos com o mesmo sinal	Um termo linear; dois termos quadráticos com sinais opostos
CLASSIFICAÇÃO	Elipsóide	Hiperbolóide de uma folha	Hiperbolóide de duas folhas	Cone elíptico	Parabolóide elíptico	Parabolóide hiperbólico

EXERCÍCIOS PÁGS. 829-831

ELIPSOIDE, HIPERBOLOIDE DE UMA E DUAS FOLHAS
CONE ELÍPTICO, PARABOLÓIDE ELÍPTICO, PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

Exercícios de Compreensão 11.7: 1, 2, 3, 4 (a, b, c, d, e, f)

Exercícios 11.7:

1- a, b, c, d, e, f – somente identificar as superfícies quádricas que estudou em aula de acordo com a equação dada.

5 - a, b, c, d, e, f

7 - a, b, c determinar os traços nos planos e esboçar as quádricas como realizado em aula.

8 Opcional - a, b, c

15, **17**, **19**, **21**, **23**, **25**, **27**- identificar as superfícies quádricas e esboçar **15**, **17**, **19**, **21** e **25**

9 Em cada item classifique a superfície quádrica, obtenha a equação do traço da superfície no plano dado e afirme se é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.