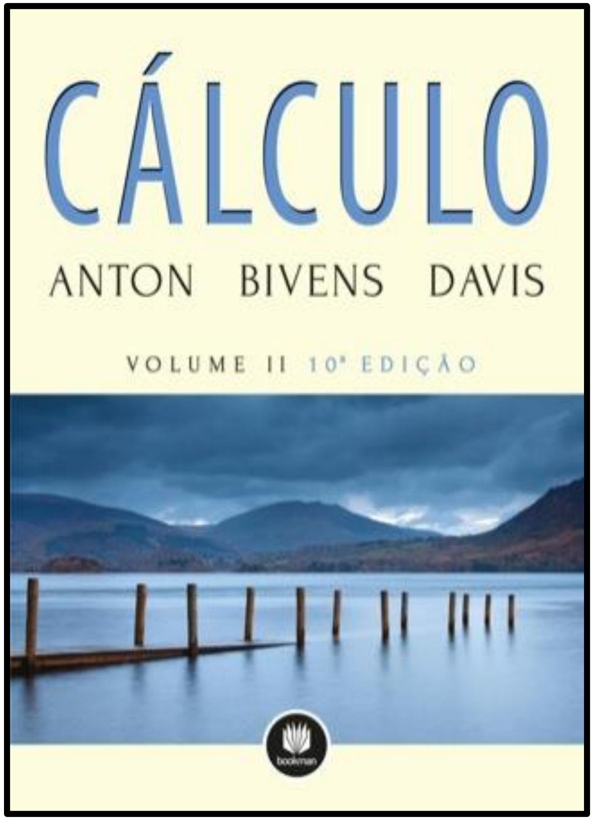
Geometria Analítica
Produto escalar, vetorial e misto

FBX5007-Geometria Analítica e Álgebra Linear

Profa. Ms.Magda Mantovani Lorandi Período 2022-4

LIVRO-TEXTO



Capítulo 11- Seção 11.3 e 11.4, págs. 785 a 805

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen L. Cálculo. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

Produtos entre Vetores

- **Produto Escalar** (ou produto interno)
  - ✓ Produto definido entre 2 vetores **u** e **v** no plano ou no espaço tridimensional
  - ✓ Produz um escalar

Este produto tem aplicação, por exemplo em Física, pois o trabalho calculado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento, quando a força aplicada é constante. A seguir também veremos que o produto escalar é utilizado para calcular o ângulo entre vetores.

Produtos entre Vetores

- **Produto Vetorial**
  - ✓ Produto definido entre 2 vetores **u** e **v** no espaço tridimensional
  - ✓ Produz um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores **u** e **v**

Este produto tem aplicação, por exemplo em Física, pois a força exercida sobre uma partícula com carga unitária mergulhada num campo magnético uniforme é o produto vetorial do vetor velocidade da partícula pelo vetor campo magnético.

É importante no ramo da computação gráfica e no desenvolvimento de jogos eletrônicos.

Na engenharia civil, o produto vetorial é utilizado no cálculo de uma área de um prédio a ser construído, nos seus momentos de força e nas definições de torque e de momento angular.

Produtos entre Vetores

- **Produto Misto**
  - Produto definido entre 3 vetores **u, v e w** no espaço tridimensional
  - Produz um escalar

O **produto misto** nada mais é do que uma operação de produto vetorial, seguida de uma operação de produto escalar. Dessa forma, o resultado final é um **escalar**.

Essa operação nos dá o volume do paralelepípedo formado com base em três vetores.

Produto escalar: Definição (Pág. 785)

11.3.1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ forem vetores no espaço bidimensional, então o ***produto escalar*** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é escrito como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e é definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Analogamente, se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então seu produto escalar é definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Sejam $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Então

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$

Logo $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

Exemplo 1, pág. 785

Outra Definição de Produto Escalar - Pág. 787

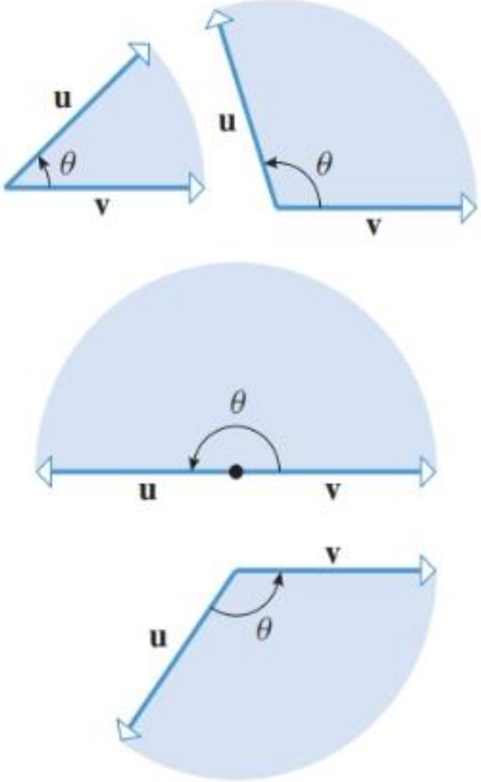
É freqüentemente conveniente expressar a Fórmula (2) como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \tag{4}$$

que dá o produto escalar de **u** e **v** em termos dos comprimentos desses vetores e do ângulo entre eles. Uma vez que **u** e **v** são vetores não-nulos, essa versão da fórmula torna claro que o sinal de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é o mesmo que o sinal de $\cos \theta$. Assim, do produto escalar podemos deduzir se o ângulo entre os dois vetores é agudo, obtuso ou se os vetores são perpendiculares (Figura 12.3.3).

Exercício 6, pág. 792

Ângulo entre Dois Vetores (Pág. 786)



θ é o ângulo entre **u** e **v**.

Suponha que **u** e **v** sejam vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional que estejam posicionados de modo que seus pontos iniciais coincidam. Definimos o ***ângulo entre* u *e* v** como sendo o ângulo θ determinado pelos vetores que satisfaz a condição $0 \leq \theta \leq \pi$ (Figura 12.3.1). No espaço bidimensional, θ é o menor ângulo no sentido anti-horário que um dos vetores pode ser girado até se alinhar com o outro.

O próximo teorema fornece uma maneira de calcular o ângulo entre dois vetores a partir de seus componentes.

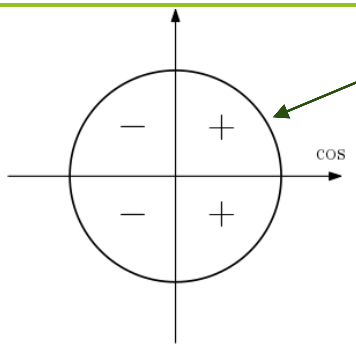
11.3.3 TEOREMA *Se* **u** *e* **v** *forem vetores não nulos no espaço bi ou tridimenssional e se θ for o ângulo entre eles, então*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

Exemplo 2, pág. 786

Observações:

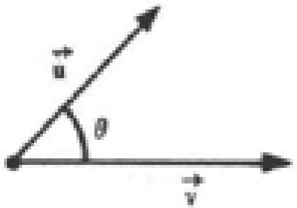
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$



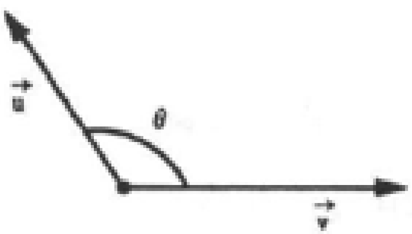
Sinal do cosseno

Teste de Ortogonalidade

$$\vec{u}.\vec{v} > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\boldsymbol{\theta} > 0$$
$$\Downarrow$$
$$0^{\circ} \leq \boldsymbol{\theta} < 90^{\circ}$$
$$\Downarrow$$
$\boldsymbol{\theta}$ *agudo ou nulo*



$$\vec{u}.\vec{v} < 0$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\boldsymbol{\theta} < 0$$
$$\Downarrow$$
$$90^{\circ} < \boldsymbol{\theta} \leq 180^{\circ}$$
$$\Downarrow$$
$\boldsymbol{\theta}$ *obtuso ou raso*



$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\boldsymbol{\theta} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{\theta} = 90^{\circ}$$
$$\Downarrow$$
$\boldsymbol{\theta}$ *reto*

Produto Vetorial (Pág. 795)

12.4.2 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então o ***produto vetorial*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Algoritmo do determinante

Sobre o determinante de uma matriz

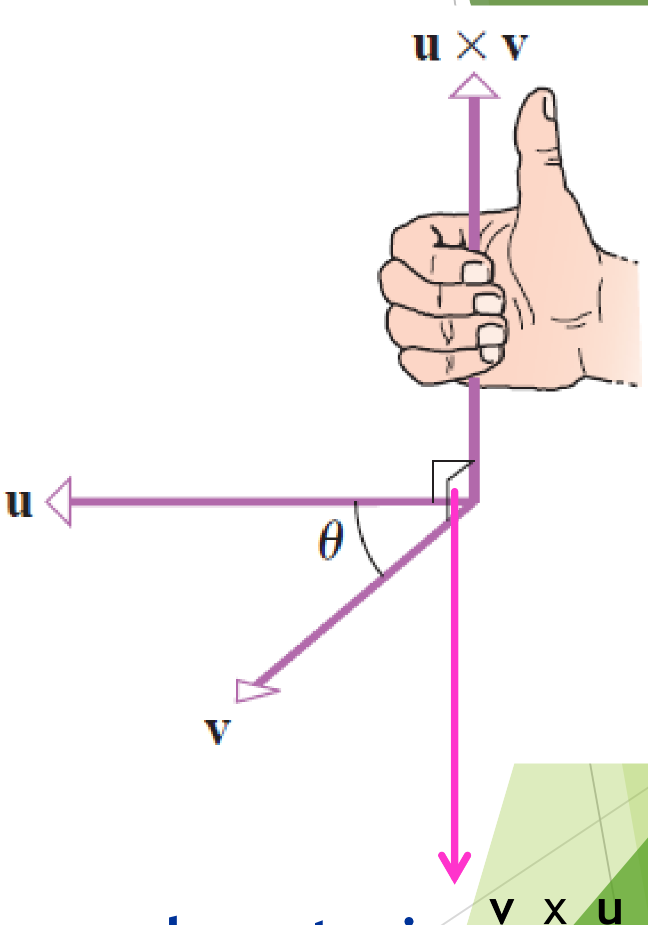
- O valor do determinante muda de sinal quando trocamos duas linhas da matriz de lugar

- O determinante de uma matriz é igual a ZERO se
    - Uma ou mais linhas ou colunas são nulas
    - Duas linhas ou colunas são iguais
    - Duas linhas ou colunas são múltiplas

Exemplo 1, pág. 796-797

Propriedades do produto vetorial (págs.797-798)

- Os vetores **u** x **v** e **v** x **u** têm sentidos opostos
- Os vetores **u** x **v** e **v** x **u** são simultaneamente ortogonais aos vetores **u** e **v**



Verifique tais propriedades no exemplo anterior
Exemplo 3, pág. 798

Propriedades Geométricas do Produto Vetorial (Pág. 799)

12.4.5 TEOREMA *Sejam* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *vetores não-nulos do espaço tridimensional, e seja* θ *o ângulo entre esses vetores quando estiverem posicionados de tal forma que os seus pontos iniciais coincidam.*

(*a*) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$

(*b*) *A área A do paralelogramo que tem* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *como lados adjacentes é*

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \tag{8}$$

(*c*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *se e somente se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *forem vetores paralelos, isto é, se e somente se eles forem múltiplos escalares um do outro.*

Exemplo 4, pág. 799

Produto Misto (Pág. 800)

Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então o número

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é chamado de ***produto misto*** de **u**, **v** e **w**. Não é necessário calcular o produto escalar e o vetorial para calcular o produto misto – o valor pode ser obtido diretamente da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Exemplo 5, pág. 800

Propriedades Geométricas do Produto Misto (Pág. 800)

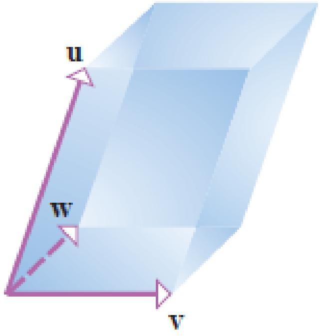
12.4.6 TEOREMA *Sejam* **u**, **v** *e* **w** *vetores não-nulos no espaço tridimensional.*

(*a*) *O volume V do paralelepípedo que tem* **u**, **v** *e* **w** *como arestas adjacentes é*

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \quad (10)$$

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ *se, e somente se,* **u**, **v** *e* **w** *estiverem situados no mesmo plano.*

Exercício 26, pág. 804

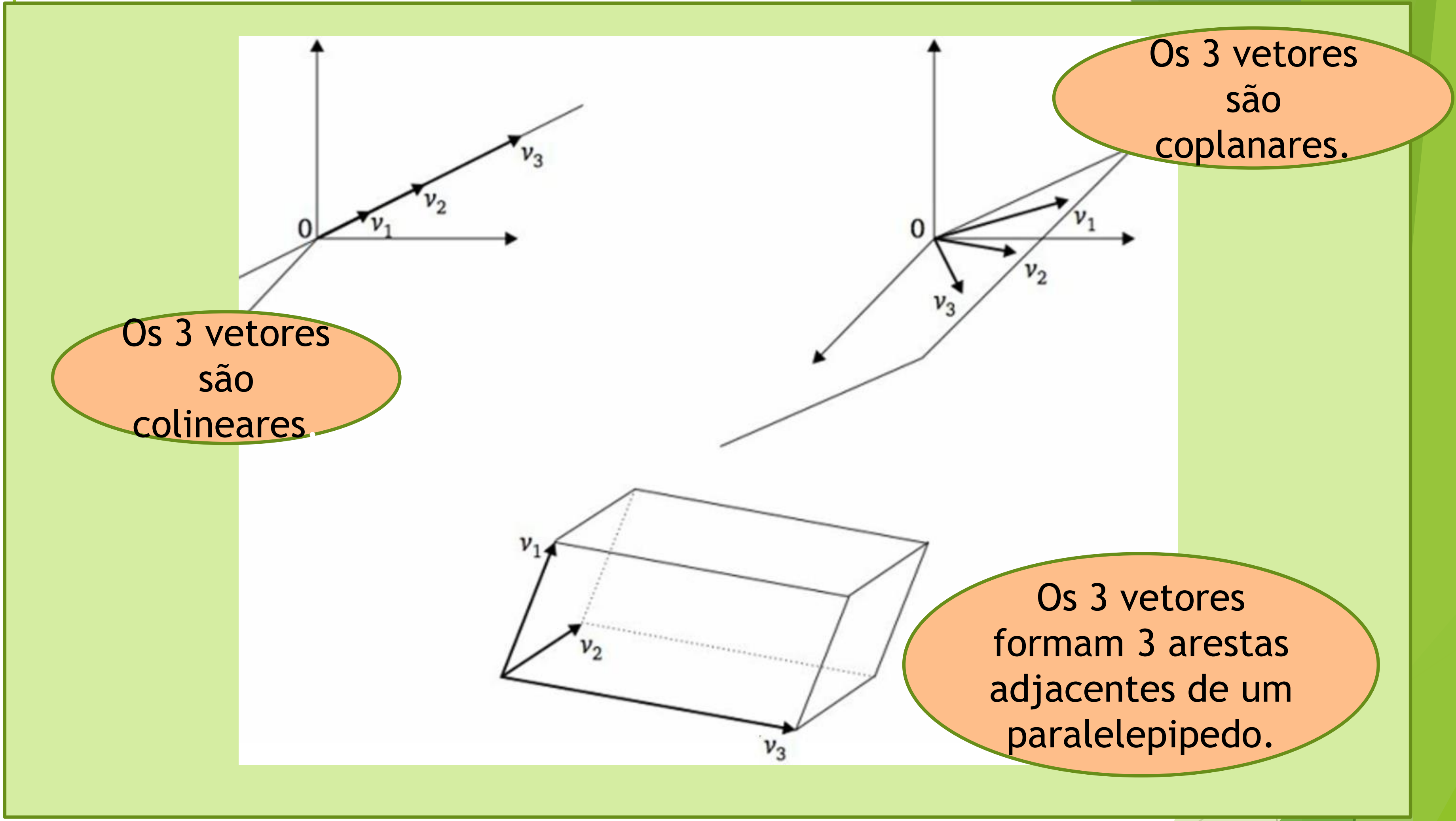


▲ Figure 11.4.5

It follows from Formula (10) that

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

The + occurs when **u** makes an acute angle with $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ and the − occurs when it makes an obtuse angle.



Disposição de 3 vetores no espaço tridimensional com posição inicial na origem

Referência: CONDE, Antonio. Geometria analítica, editora Atlas, 2004. Disponível em MinhA Biblioteca.

EXERCÍCIOS

- **Produto Escalar**
  Exercícios: 1, 3, 5, 9; pág. 792

- **Produto Vetorial**
  Exercícios: 3, 6, 11, 17, 19; págs.803-804

- **Produto Misto**
  Exercícios 21, 23, 25, 27; págs. 803-804