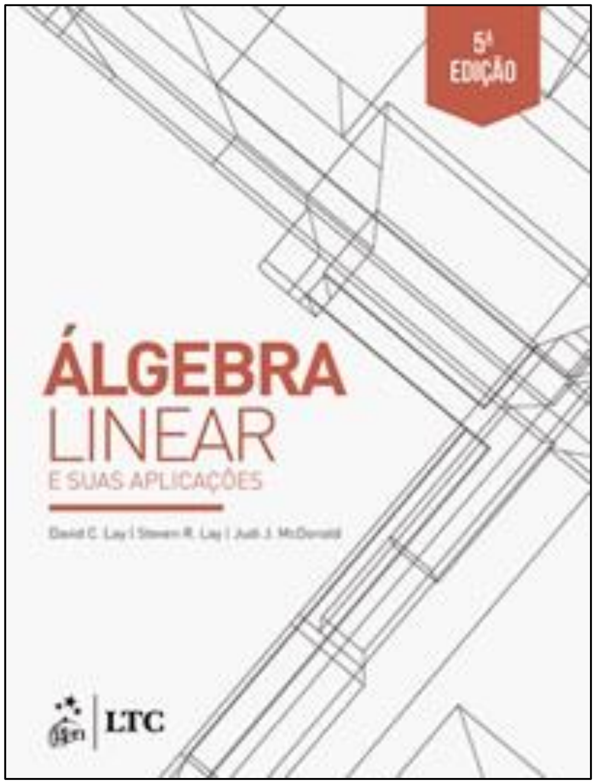
Álgebra Linear
Sistemas de equações lineares algébricas
Formas escalonada e método de eliminação de Gauss-Jordan

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR
PROFA. MS.MAGDA MANTOVANI LORANDI

Período 2022-4

LIVRO-TEXTO



Capítulo 1- Seção 1.2
págs. 10 a 19

LAY, David C. *Álgebra linear e suas aplicações.* 5 ed. Rio de Janeiro: LTC,2018.

FORMAS ESCALONADAS

Matrizes na Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{-1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{7} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Cada número na cor vermelha é um elemento líder ou pivô

O elemento líder ou pivô é o primeiro elemento não nulo de cada linha

FORMAS ESCALONADAS

(1) Forma ESCALONADA (ou forma escalonada por linhas)

Uma matriz A está na forma escalonada quando:

(I) Todas as linhas nulas estão na parte inferior da matriz

(II) O primeiro elemento não-nulo de cada linha (elemento líder ou pivô) está em uma coluna à esquerda de qualquer outro elemento pivô das linhas abaixo dele

O método de Eliminação de Gauss para resolução de sistemas lineares, transforma a matriz aumentada do sistema, em uma matriz na forma escalonada

FORMAS ESCALONADAS

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A não está na forma escalonada

Para transformar a matriz A na forma escalonada, devemos trocar a linha 3 pela linha 4 (L3↔ L4), **pois todas as linhas nulas devem estar na parte inferior da matriz:**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É uma forma escalonada da matriz A

FORMAS ESCALONADAS

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz B não está na forma escalonada

Para transformar a matriz B na forma escalonada, devemos trocar a linha 2 pela linha 3 ($L2 \leftrightarrow L3$) **, pois o primeiro elemento não-nulo de cada linha (elemento líder ou pivô) deve se localizar em uma coluna à esquerda de qualquer outro elemento pivô das linhas abaixo dele.**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

É uma forma escalonada da matriz B

FORMAS ESCALONADAS

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz C não está na forma escalonada

Para transformar a matriz C na forma escalonada, devemos trocar a linha 1 pela linha 2 (L1$\leftrightarrow$ L2) **, pois o número "0" não pode ser elemento líder ou pivô.**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix}$$

É uma forma escalonada da matriz C

FORMAS ESCALONADAS

(2) Forma ESCALONADA REDUZIDA

Uma matriz A está na forma escalonada reduzida quando:

(I) Está na forma escalonada

(II) Os elementos pivôs são unitários e são os únicos elementos não nulos de suas colunas.

FORMAS ESCALONADAS

Exemplo

Transforme a matriz abaixo na forma ESCALONADA REDUZIDA

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{7} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 \end{bmatrix}$$

É importante observar que esta matriz já está na forma escalonada.

Falta então, transformar os pivôs em elementos unitários, sendo os únicos não nulos de suas colunas.

FORMAS ESCALONADAS

Matriz na FORMA ESCALONADA

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad L4 \leftarrow \frac{1}{5} L4$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L1 \leftarrow -5L4 + L1 \\ L3 \leftarrow -L4 + L3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L3 \leftarrow \frac{1}{2} L3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L1 \leftarrow 1L3 + L1 \\ L2 \leftarrow -7L3 + L2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L1 \leftarrow -L1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz na forma ESCALONADA REDUZIDA

CONSIDERAÇÕES **IMPORTANTES**

- Uma matriz A tem infinitas matrizes na forma escalonada

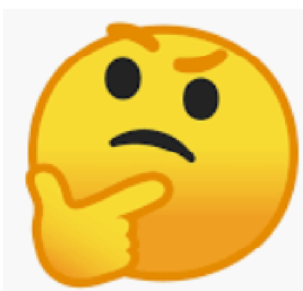
- Uma matriz A tem uma única matriz na forma escalonada reduzida

- Uma matriz na forma escalonada reduzida é uma matriz escalonada (pois os elementos abaixo dos pivôs são nulos)

Exemplo 3 – página 13

Aplique as operações elementares para transformar a matriz a seguir em primeiro lugar para uma forma escalonada e, depois, para a forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$



Vamos resolver juntos?

Depois..... Vamos conferir com a solução do livro:
Podemos obter uma forma escalonada distinta da ilustrada no livro, pois a matriz escalonada da matriz dada não é única, já a matriz escalonada reduzida tem que ser igual a ilustrada no livro, pois ela é única!!

ELIMINAÇÃO DE GAUSS X GAUSS-JORDAN

Exemplo 1 – página 4

- **Rever a resolução pelo Método de Eliminação de Gauss.**

- **Resolver pelo Método de Eliminação de Gauss-Jordan**

Exemplo 1 – página 4 – Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Sistema original

Matriz aumentada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$ L3 = - 5 L1+L3

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$ L2 = (1/2) L2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$ L3 = - 10L2+L3

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{bmatrix}$$ L3 = (1/30) L3

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Sistema equivalente ao sistema original

Resolvendo por retrosubstituição:

$x_3 = -1$

$x_2 - 4(-1) = 4 \longrightarrow x_2 = 0$

$x_1 - 2(0) + (-1) = 0 \longrightarrow x_1 = 1$

S={(1, 0, -1)}

RESOLUÇÃO POR ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Exemplo 1 – página 4

A partir da matriz escalonada obtida pela eliminação de Gauss (anteriormente)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

L1= - L3+L1
L2= 4 L3+L2

Continuamos o escalonamento zerando os elementos acima dos pivôs, de forma a obter a matriz escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

L1=2L2+L1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz na forma escalonada reduzida

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -1$$

S={(1, 0, -1)}

RESOLUÇÃO POR ELIMINAÇÃO DE GAUSS – JORDAN

O **MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS – JORDAN** é eficiente, principalmente para determinar a solução geral de sistemas com infinitas soluções.

Exemplo, página 14

Suponha, por exemplo, que a matriz aumentada de um sistema linear tenha sido transformada na forma escalonada *reduzida* equivalente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Existem três variáveis porque a matriz aumentada tem quatro colunas.

O sistema de equações associado é

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + \quad x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

As variáveis x_1 e x_2, correspondentes às colunas pivôs da matriz, são chamadas **variáveis dependentes ou básicas**. A outra variável, x_3, é denominada **variável livre**.

A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA pode ser escrita de forma explícita, expressando as variáveis dependentes em função das variáveis livres.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ é livre} \end{cases}$$

Assim, podemos determinar **soluções particulares** do sistema origina, atribuindo valores para as variáveis livres.

Por exemplo, quando $x_3 = 0$, a solução é $(1, 4, 0)$; quando $x_3 = 1$, a solução é $(6, 3, 1)$.

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS – JORDAN é eficiente, principalmente para resolver sistemas com infinitas soluções.

Exemplo 4, página 15

Determine a solução geral do sistema linear cuja matriz aumentada foi reduzida para $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

queremos obter a forma escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L1=2L3+L1 \\ L2=1L3+L2 \end{array} \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad L2=(1/2)L2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad L1= - 2L2+L1 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

As colunas pivôs da matriz são 1, 3 e 5, de modo que as:

- variáveis dependentes são x_1, x_3 e x_5 .
- variáveis x_2 e x_4, são livres.

Solução geral do Sistema

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ é livre} \\ x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_4 \text{ é livre} \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

Observe que o valor de x_5 já foi fixado pela terceira equação do sistema

O símbolo ~ antes de uma matriz indica que a matriz é equivalente por linhas à matriz anterior.

Exemplo 5, página 17

Determine a existência e a unicidade de soluções do sistema

$$\begin{aligned} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema foi escalonada para $\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

As variáveis dependentes são x_1, x_2 e x_5; as variáveis livres são x_3 e x_4. Não existe nenhuma equação da forma 0 = 1 que indicaria um sistema inconsistente, de modo que podemos aplicar a substituição de trás para a frente para determinar uma solução. Mas a *existência* de uma solução já está clara em (8). Além disso, a solução *não é única* porque existem variáveis livres. Cada escolha de x_3 e x_4 determina uma solução diferente. Portanto, o sistema admite infinitas soluções.

Observe que para fins de classificação do sistema, basta obtermos a matriz escalonada, sendo desnecessário obter a forma escalonada reduzida.

EXERCÍCIOS SUGERIDOS

- Págs. 11-14

  Estudar e compreender os exemplos 2 e 3

  Exemplo 2 - esclarece as posições dos pivôs

  Exemplo 3 - realizamos juntos!

- Pág. 18 - Exercícios 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19