$$
\frac{dT}{dt} = \frac{\epsilon\sigma}{mc}(T^4 - C)
$$
$$
\int \frac{1}{(T^4 - C)} dT = \int \frac{\epsilon\sigma}{mc} adt
$$
$$
\int \frac{dT}{(T - C^{\frac{1}{4}})(T + C^{\frac{1}{4}})(T^2 + C^{\frac{1}{2}})} = \int \frac{\epsilon\sigma}{mc} adt
$$
$$
\int (\frac{\alpha_1}{C^{\frac{1}{4}} - T} + \frac{\alpha_2}{C^{\frac{1}{4}} + T} + \frac{\alpha_3}{C^{\frac{1}{2}} + T^2}) dT = \int \frac{\epsilon\sigma}{mc} dt
$$

ただし、$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-1}{4C^{\frac{3}{4}}}, \alpha_3 = \frac{-1}{2C^{\frac{1}{2}}}$ とする。また、単位に絶対温度を用いているため暗に C が 0 より大きいことを用いた。積分を実行すると

$$
\alpha_1 \ln \frac{C^{\frac{1}{4}} + T}{C^{\frac{1}{4}} - T} + \alpha_3 C^{\frac{-1}{4}} \arctan(\frac{T}{C^{\frac{1}{4}}}) = \frac{\epsilon\sigma}{mc} t
$$

ゆえに微分方程式の解は t(T) の逆関数となる。これを T(t) の形で書き下すのは困難であろうからこのままにして、数値計算の妥当性を確認するために使ってみる。試しに $\sigma = 1.0$ とし、その他の係数も 1 にしてしまって、数値計算する。微分方程式を解いて得られた関数と数値計算で得た関数を合成すれば恒等写像 (入力と出力が同じ関数) になることは逆関数の定義より明らかである。よって、この解析解は計算フローの妥当性を確認するために使える。

プログラムで数値計算した結果を吐き出させて、スプシに貼った（ぺたー）それを理論解の逆関数に入れたのがとなりのセルで、更にその隣が恒等写像になっていてそれとの誤差をみた。時間の刻み幅が 0.001 の時は誤差が単調増加し、最大でも 0.04 % 以内に収まった。刻み幅が 0.01 の時には誤差が振動した。誤差の絶対値を取り、その最大値は 2.55 % になった。それぞれの結果は timestep1c.csv と timestep1m.csv に入れておく。

見た感じいい近似になっていそうなので以降この計算フローを基本として論を進める。

1　2 物体間の相互作用がある系

次は 2 つの物体が相互作用する場合…パイロットとフェアリングをモデル化し、どのように温度変化していくかを見ていこう。ここでは 2 物体間の輻射のみ考える。簡単のため、物体から放出される電磁波はすべてもう片方の物体に当たると仮定する。これは、物体の形状・位置関係としては平板 2 枚が十分近づいている状態 (無限に大きい平板と考えてもよい) に相当する。

物体をそれぞれ物体 1、物体 2 と呼ぶことにし、その温度を T_1, T_2 とする。するとこの系は連立非線形常微分方程式に支配される系となり、その方程式は

$$
m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = \varepsilon_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4) + q_{in1}(t)
$$
$$
m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = \varepsilon_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4) + q_{in2}(t)
$$

となる。この解析解を求めるのは（たぶん）かなり難しい。そのため、ここからは数値計算に頼ってやっていくことになる。

まず、2 物体の熱容量が等しく、それぞれの初期温度 $T_1(0) = 360, T_2(0) = 300$ とし、外部との熱のやり取りがない $(q_{1in} = q_{2in} = 0)$ という条件で計算した結果が以下である。

さて、この結果の妥当性について検証してみよう。この系は熱的に閉じた系である。そのため系の熱量の総和は時間によらない。

$$
\begin{aligned}
Q_{sum}(0) &= m_1c_1T_1(0) + m_2c_2T_2(0) \\
&= 360 + 300 = 660 \\
Q_{sum}(\infty) &= m_1c_1T_1(\infty) + m_2c_2T_2(\infty) \\
&= 330 + 330 = 660
\end{aligned}
$$

という訳で、大丈夫そうである。またこの結果から、同じような条件下では t->∞ で 2 つの物体の温度が等しくなりそうだ。以降これを仮定した上で話を進めていこう。では、任意の物質の質量、比熱ではどうだろうか？ Q_{sum} が一定であること、$T_1(\infty) = T_2(\infty)$ から以下の式を導出できる。

$$
\begin{pmatrix} m_1c_1 & m_2c_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(\infty) \\ T_0(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1c_1T_1(0) + m_2c_2T_2(0) \\ 0 \end{pmatrix}
$$

ここから直ちに $T_0(\infty) = T_1(\infty) = \dfrac{m_1c_1T_1(0) + m_2c_2T_2(0)}{m_1c_1 + m_2c_2}$ ここまでは高校で扱うような「水の中に熱した鉄球を入れる」ような問題とそう変わらない。(厳密なことを書けば、例に挙げたようなものは熱伝達であるのでニュートンの冷却法則に従う。そのため温度は指数関数の線形和で表されるような関数となって、曲線の形は変わるだろう。) しかし、真に輻射の面白い性質はここからである。

2 輻射による系が持つ特異な平衡状態

結論から書けば、あるパラメータを導入することで、輻射伝熱によって熱をやりとりしている系は定常状態でそれぞれの物体が異なる温度を取りうる。つまり、$T_1(\infty) \neq T_2(\infty)$ が許されるのである！

そのパラメータは、形態係数と呼ばれる。これは、物体の形状や他の物体との距離によって算出される値で、雑に書けば放出される電磁波の届きやすさのパラメータである。記号は F で表すのが一般的であり、定義としては、物体 i から輻射により放出される単位時間当たりの熱量を Q_{i-out} とし、物体 j が吸収する輻射のうち物体 i からでたものを Q_{ij} と書いたときその比となる。つまり、

$$
F_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_{i-out}}
$$

である