

Modelo de Capas

Química Nuclear

Martín Pérez Comisso

Modelos nucleares

- A bajas energías (< 2 MeV) los núcleos pueden considerarse sistemas cuánticos formados por muchos nucleones, que interactúan con un potencial N-N muy complejo.
- A altas energías (y en los núcleos pesados) se usan modelos de mecánica estadística para describir los nucleones.
- Características del núcleo: Z (número atómico); A (masa atómica)

$$R(A) = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1,2 \text{ fm}; \quad R < 7,5 \text{ fm}$$

$$\rho = 0,14 \text{ nucleones/fm}$$

Energía en el núcleo

- ϵ (energía de ligadura del nucleón) $\sim 8 \text{ MeV}$
- T (energía cinética) $\sim 33 \text{ MeV}$
- Se calcula el momentum $p\epsilon = 250 \text{ MeV}/c$

→ Los nucleones están en movimiento en el núcleo a muy altas velocidades

$$v = \sqrt{2T/m} = c \sqrt{2T/mc^2} \approx 0,3c$$

- Deben existir efectos relativistas

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar c}{mc^2\beta} \approx 4,5 \text{ fm}$$

- Deben existir efectos cuánticos por los pequeños tamaños. El modelo podrá ser descrito por la Ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

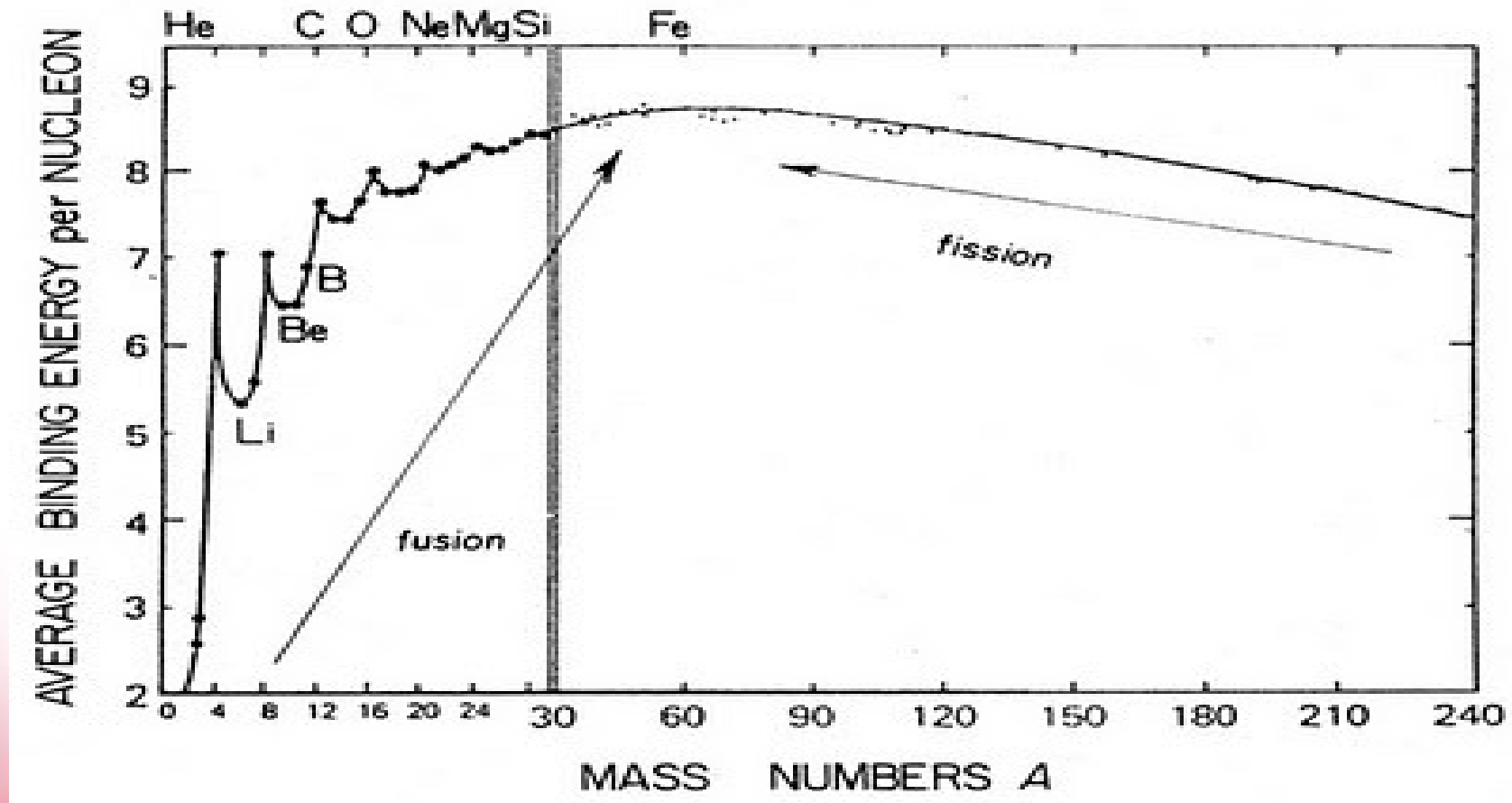
- Hay dos formas de plantear el problema:

→ **Microscopica:** Donde se observan los grados de libertad de los nucleones, las funciones de onda representan la posición, el espín y el isoespín y el Hamiltoniano de la ecuación de cada nucleón se le suma la interacción de 2 cuerpos (entre los nucleones)

Para $A > 4$ es difícil de resolver, por consecuencia se hace definiendo un potencial medio nuclear (modelo de partícula individual). Se establecen capas

→ **Macroscopica:** Los grados de libertad son las coordenadas, el centro de masas del núcleo y el momento cuadrupolar. Es el fundamento tras el modelo rotacional y vibracional.

Números mágicos



- **Observación experimental:** Hay ciertos núcleos más estables que otros.

- Los núcleos que tienen nucleones en cantidades de números mágicos presentan las siguientes características
 - Tienen una energía de ligadura muy elevada
 - Tienen discontinuidades energéticas en las partículas α emitidas
 - Presentan variaciones bruscas en las energías del primer estado excitado $2+$ de los núcleos par-par
 - Tienen energías de separación mayor que núcleos vecinos
 - Sus **momentos quadrapolares** son aproximadamente cero, por lo que son esféricos en estado fundamental.
 - Los átomos doblemente mágicos son los más estables y abundantes en el Universo (exceptuando el hidrógeno)

He-4, O-16, Ca-40, Zr-90, Pb-208

Modelo de capas esférico

- Tiene por objetivo encontrar un potencial que de lugar a una estructura de niveles energéticos cuantizados.
- Está pensado para núcleos de simetría esférica
- No contiene en su análisis las interacciones de apareamiento.
- *La función de onda debe ser antisimétrica bajo el intercambio de nucleones.*
- Los nucleones ocuparan la misma capa energética $2(2l + 1)$. Se puede hablar de orbitas nucleares formadas por capas y subcapas.

- El hamiltoniano que describe el núcleo como una partícula es

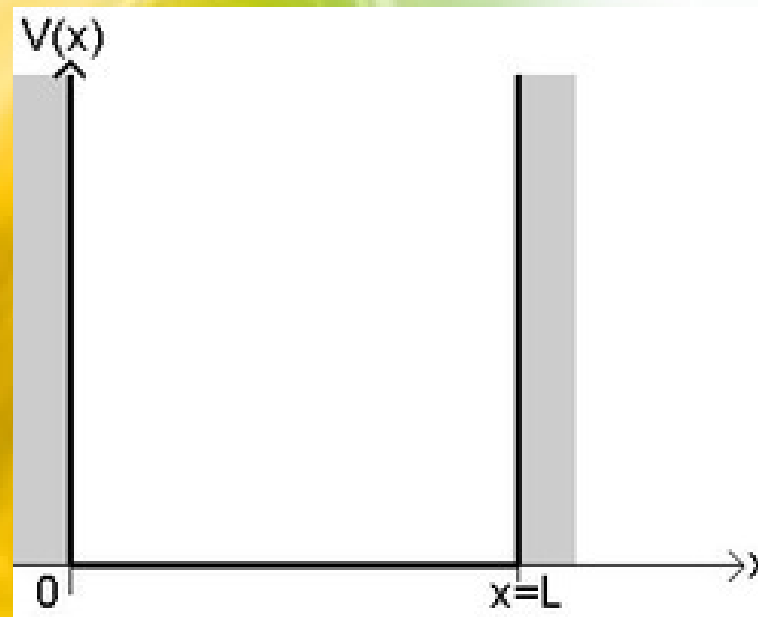
$$H = \sum_i^{\square} h_c(r_i), \text{ con } h_c(r_i) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_i + V(r_i)$$

- Entonces el problema es encontrar un potencial que explique los números mágicos y sea coherente para el modelo. Este debe ser un potencial central efectivo del tipo **Hartree-Fock**

a) Espectro Pozo esférico infinito

- Para un pozo esférico, el potencial es el mismo que para la partícula en una caja

$$V(r_i) = \begin{cases} -V_o, & 0 \leq r \leq R \\ \infty, & r \geq R \end{cases}$$



- Con ello, la solución de las energías, al resolver el hamiltoniano corresponde a:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2\mu} k_{nl}^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{X_{nl}^2}{R^2}$$

- Con este modelo, la ocupación por nivel queda definida por,

$$2(2l+1)$$

- Resultando una estructura con niveles 2,8,20,40,92... Lo que no describe los números mágicos

b) Espectro de Oscilador Armónico

- El potencial para un oscilador armónico está dado por

$$v(r_i) = \frac{1}{2} \mu_i \omega^2 r_i^2$$

- Siendo la solución para las energías definida por la ecuación

$$\mathcal{E}_N = \hbar \omega \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

- El modelo predice que para excitar un nucleón al nivel $N+1$ se requieren

$$\hbar \omega = \frac{41}{\sqrt[3]{A}} \text{ MeV}$$

- En este modelo los estados quedan caracterizados por los número N y l , siendo N el número cuántico del oscilador, característico de la capa y l el momento angular orbital.
- La ecuación que relaciona ambos números es

$$N = 2(n-1) + l$$

- Todos los estados del mismo nivel (N) tienen igual energía y paridad del momento angular orbital. La degeneración del sistema en ese contexto esta dada por

$$D_N = 2 \sum (l+1)$$

- La suma de la degeneración da el máximo de nucleones en una capa, quedando la serie

2,8,20,40,70,112,168

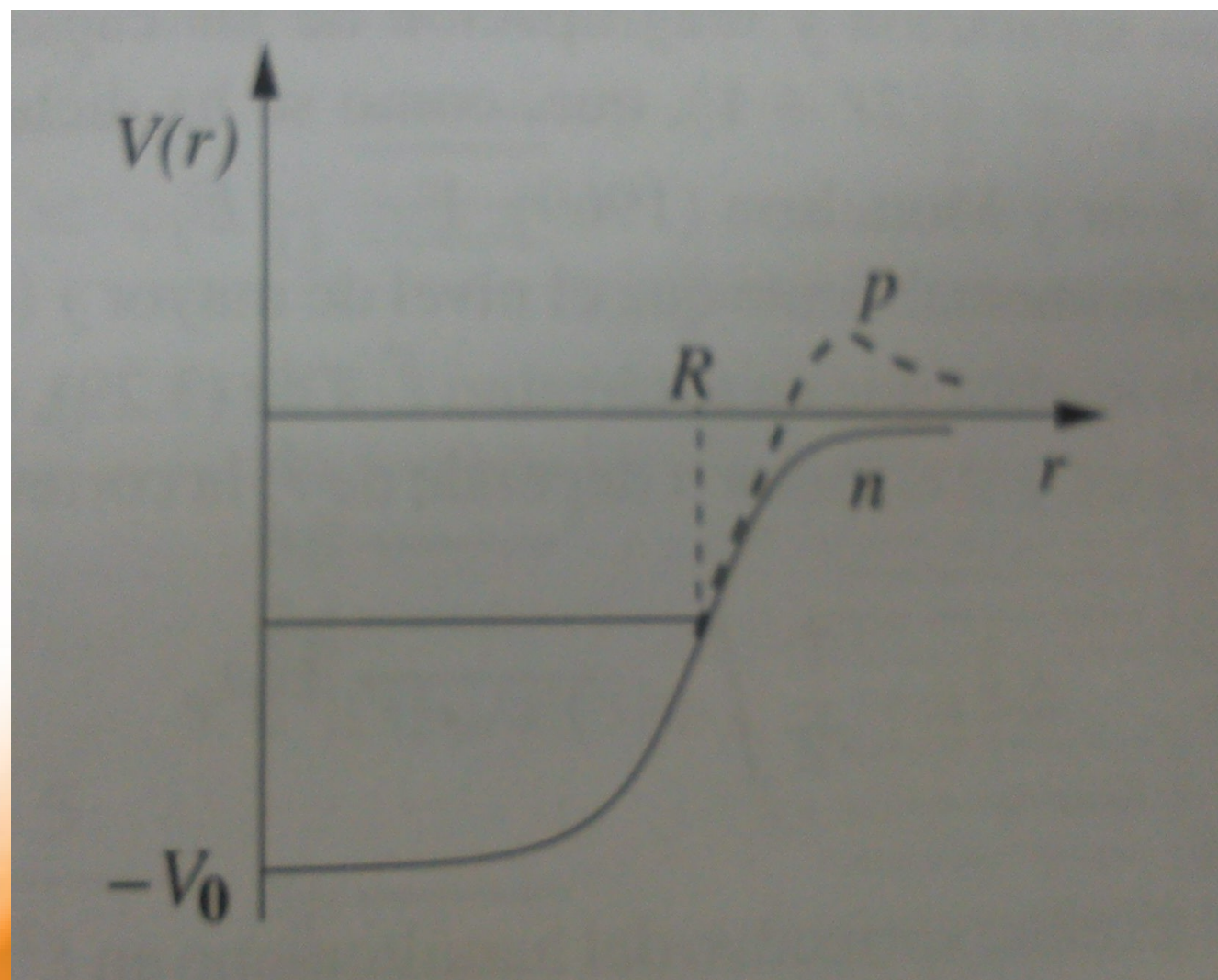
No siendo estos los números mágicos y teniendo que buscar un potencial mejor que aproxime el fenómeno

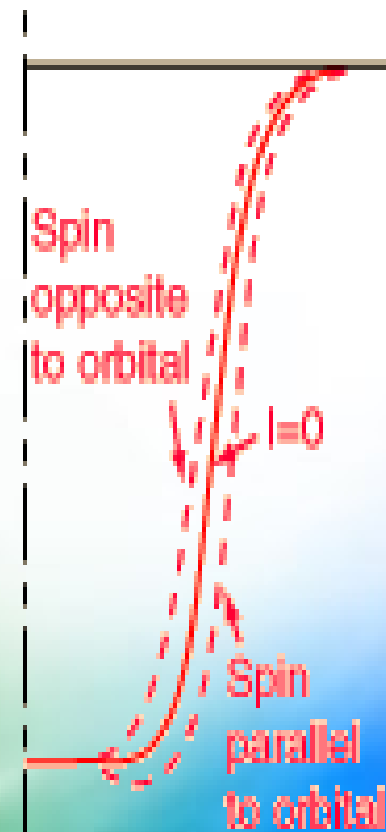
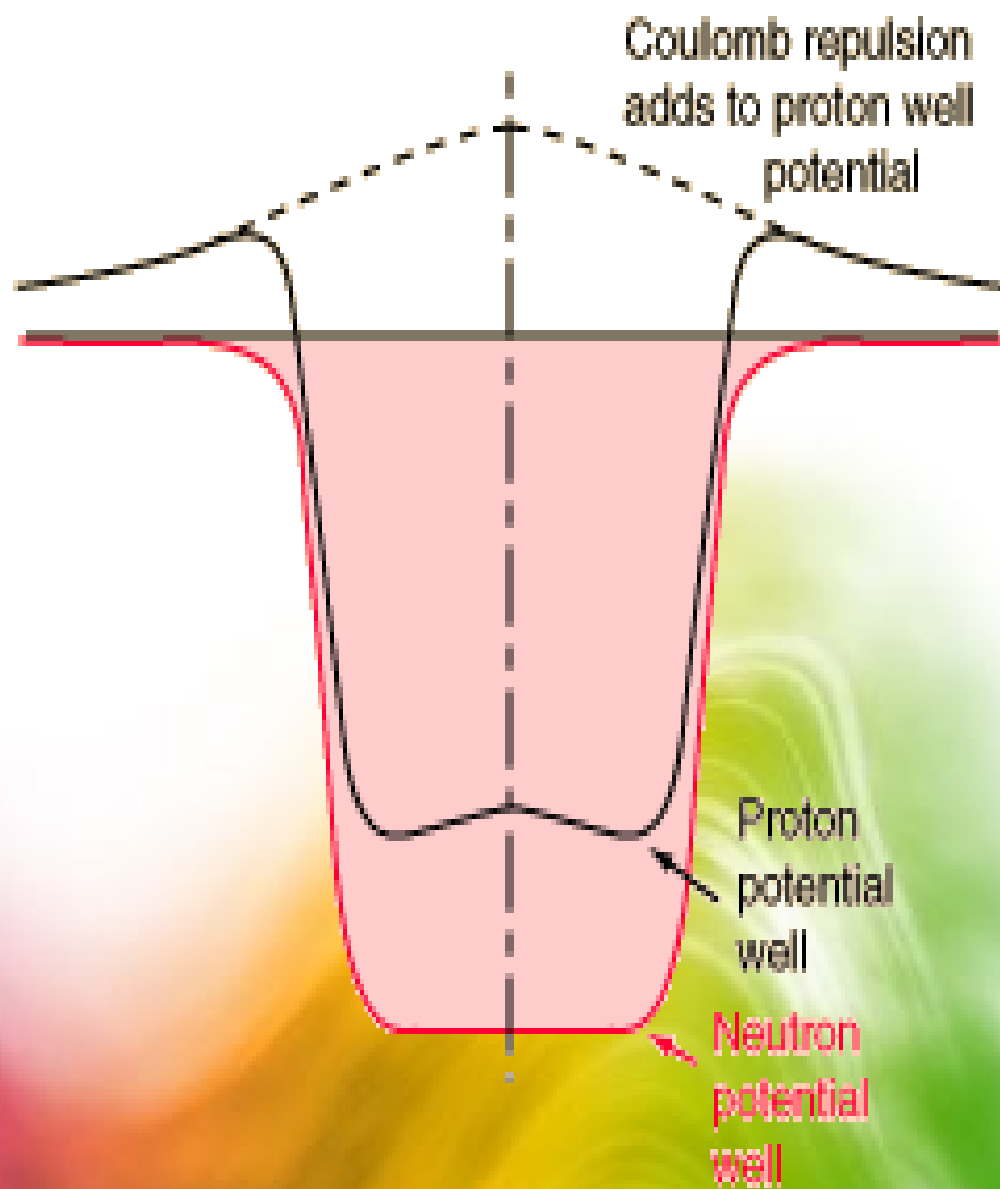
c) Potencial de Saxón-Woods

$$V = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R}{a}\right)}$$

$V_0 \approx 57 \text{ MeV} + \text{corrections}$
 $R \approx 1.25 A^{1/3} \text{ fermi}$
 $a \approx 0.65 \text{ fermi}$

- Corresponde a una mejor distribución energética para el sistema, mucho más precisa, pero no satisface los números mágicos





d) Interacción spin-orbita

- Si se agrega una corrección por el espín-orbital

$$h(r_i) = h_c(r_i) + a \frac{\vec{s} \cdot \vec{l}}{\hbar^2}$$

- Es más adecuado agregar una corrección por el momento angular cuadrado, que aproxima de mejor manera el potencial para Saxón-Woods

$$h(r_i) = h_c(r_i) + a \frac{\vec{s} \cdot \vec{l}}{\hbar^2} + b \frac{\vec{l}^2}{\hbar^2}$$

- Esto aumenta la energía de ligadura del nucleón individual cuando el espín y el momento angular son paralelos. Los estados del nucleón se desdoblarán según el momento angular total.

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

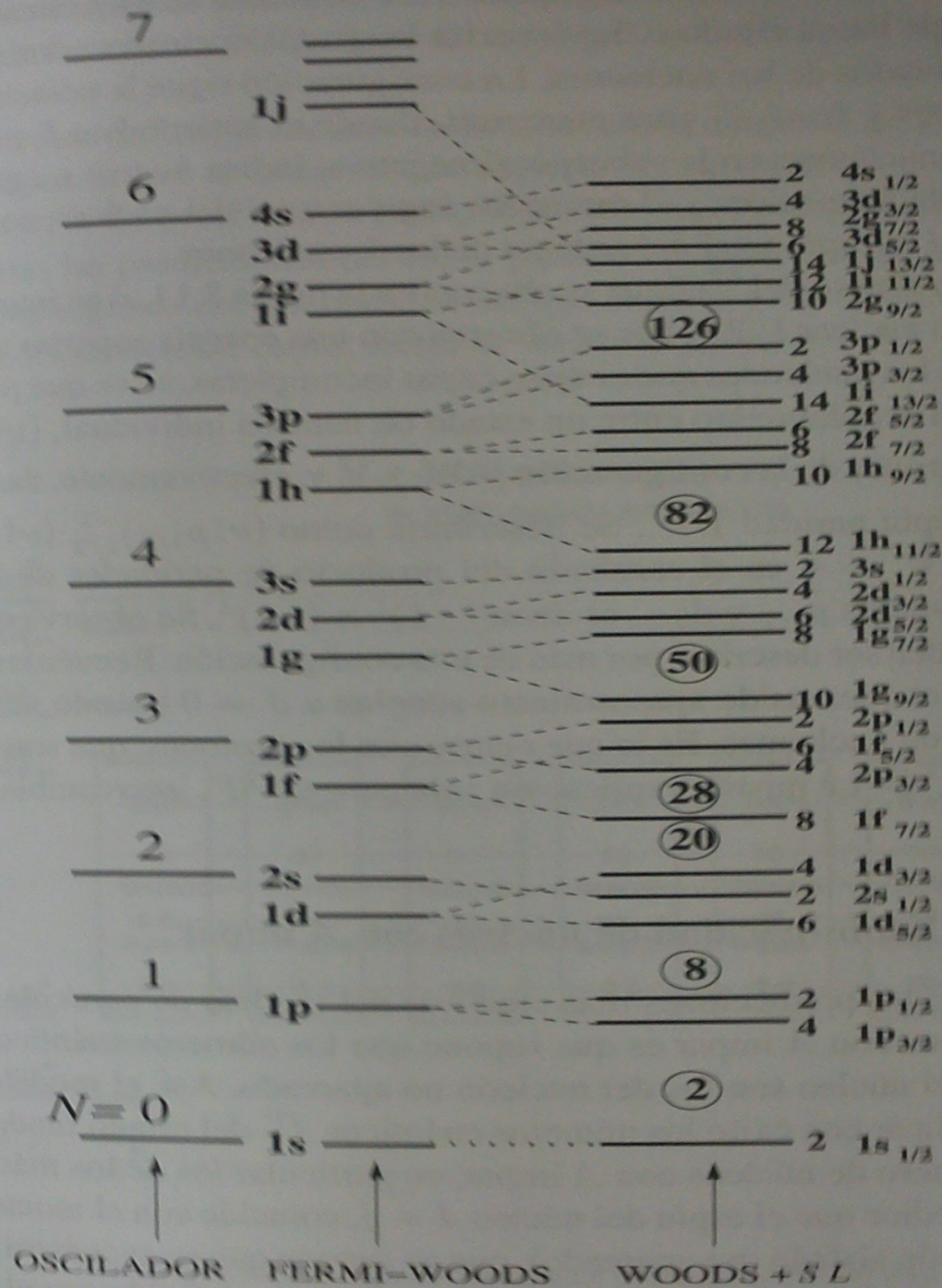
- La energía para este potencial será

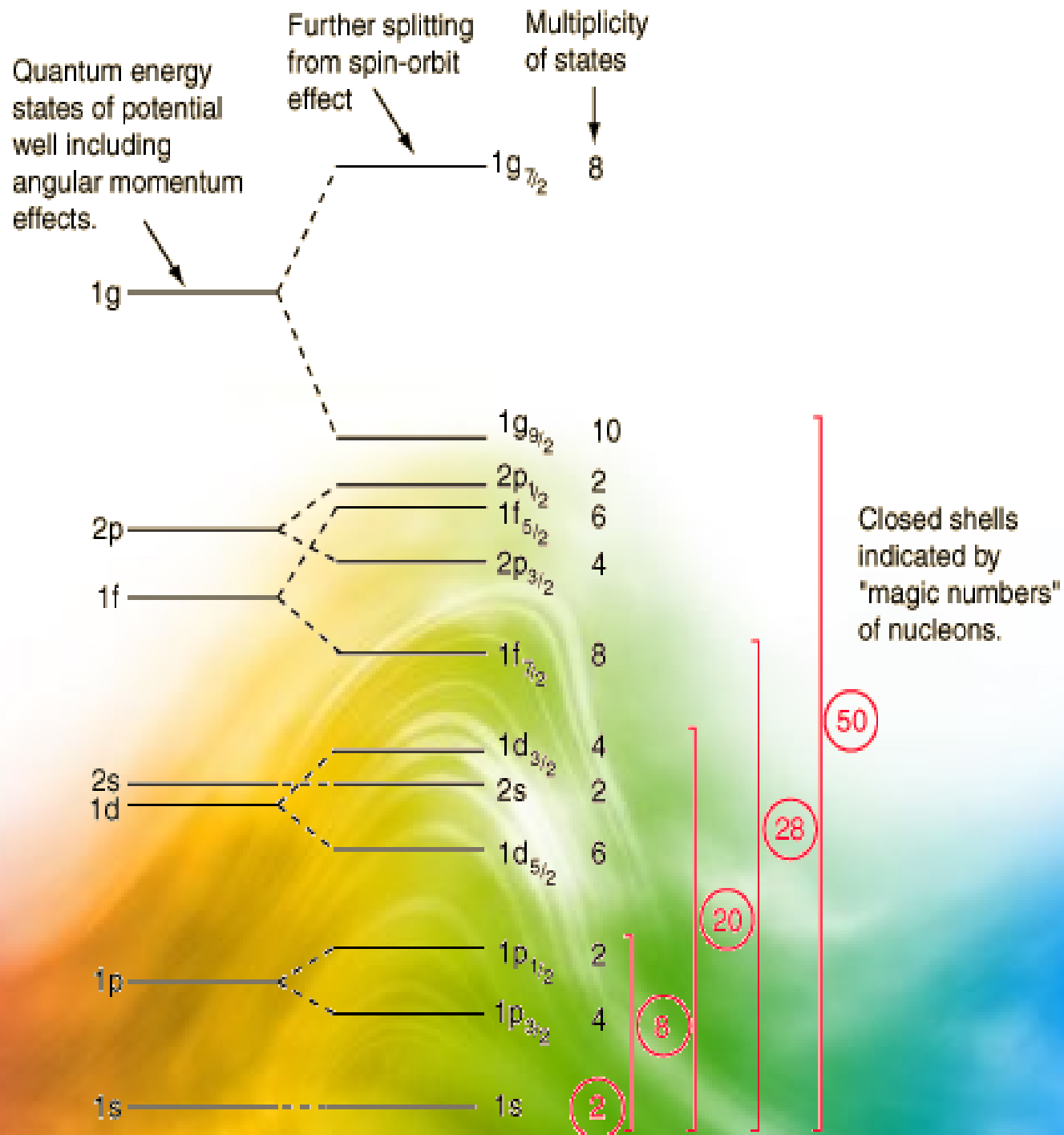
$$E_{nlj} = \mathcal{E}_N \begin{cases} +\frac{a}{2}l & j = l + 1/2 \\ -\frac{a}{2}(l+1) & j = l - 1/2 \end{cases}$$

- Los valores para $a = -20A^{-2/3}$ y $b = -0,03$
 $\hbar\omega/2\pi$
- Los números de estados posibles para este modelo serán

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 184$$

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 114, 126$$





Estados nucleares

- Para identificar los estados se recurre a la identificación por nucleones, con la siguiente notación.

$$(\pi n l_j)_J^k \quad (v n l_j)_J^k$$

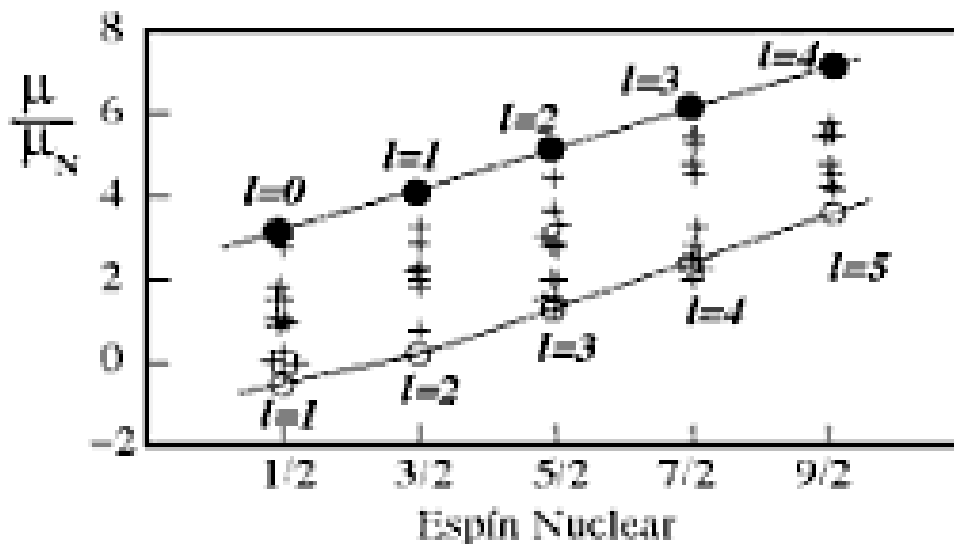
Donde,

k: número de ocupación. Si es negativo indica huecos en la estructura

j: momento angular total del nucleon con momento angular l

J: Espín total del sistema de k nucleones

Momento magnético



b) Z impar

Figura 3.12: Las líneas de Schmidt predicen los momentos magnéticos para núcleos con A impar, suponiendo que éste es el del nucleón no apareado. Para cada valor del espín nuclear se tienen dos valores del momento angular orbital posibles. Los valores medidos (+) están contenidos entre las líneas de Schmidt.

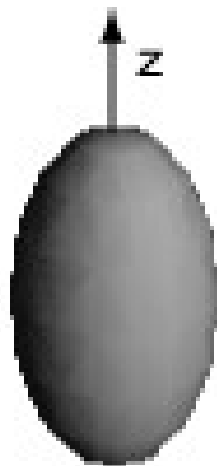
$$\mu_{sp} = j \left\{ g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2I + 1} \right\} \frac{\mu_N}{h}$$

TABLA 3.2: Valores teóricos y experimentales del momento dipolar magnético para varios núcleos. La configuración es la del modelo de capas.

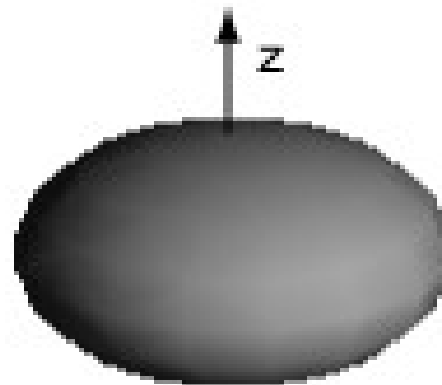
núcleo	configuración	J^P	$\mu_t (\mu_N)$	$\mu_{ex} (\mu_N)$
^{15}N	$(\pi 1p_{1/2})^{-1}$	$1/2^-$	-0,264	-0,283
^{15}O	$(\nu 1p_{1/2})^{-1}$	$1/2^-$	+0,638	+0,719
^{17}O	$(\nu 1d_{5/2})^1$	$5/2^+$	-1,913	-1,894
^{17}F	$(\pi 1d_{5/2})^1$	$5/2^+$	+4,722	+4,721

Momento cuadrupolar

- El Momento eléctrico cuadrupolar define la forma efectiva del elipsoide de la distribución de la carga nuclear. Un momento cuadrupolar distinto de cero indica que la carga no se ordena según una simetría esférica. Un valor de Q es positivo para un elipsoide “prolate” y negativo si es “Oblate”.



$Q > 0$
Prolate



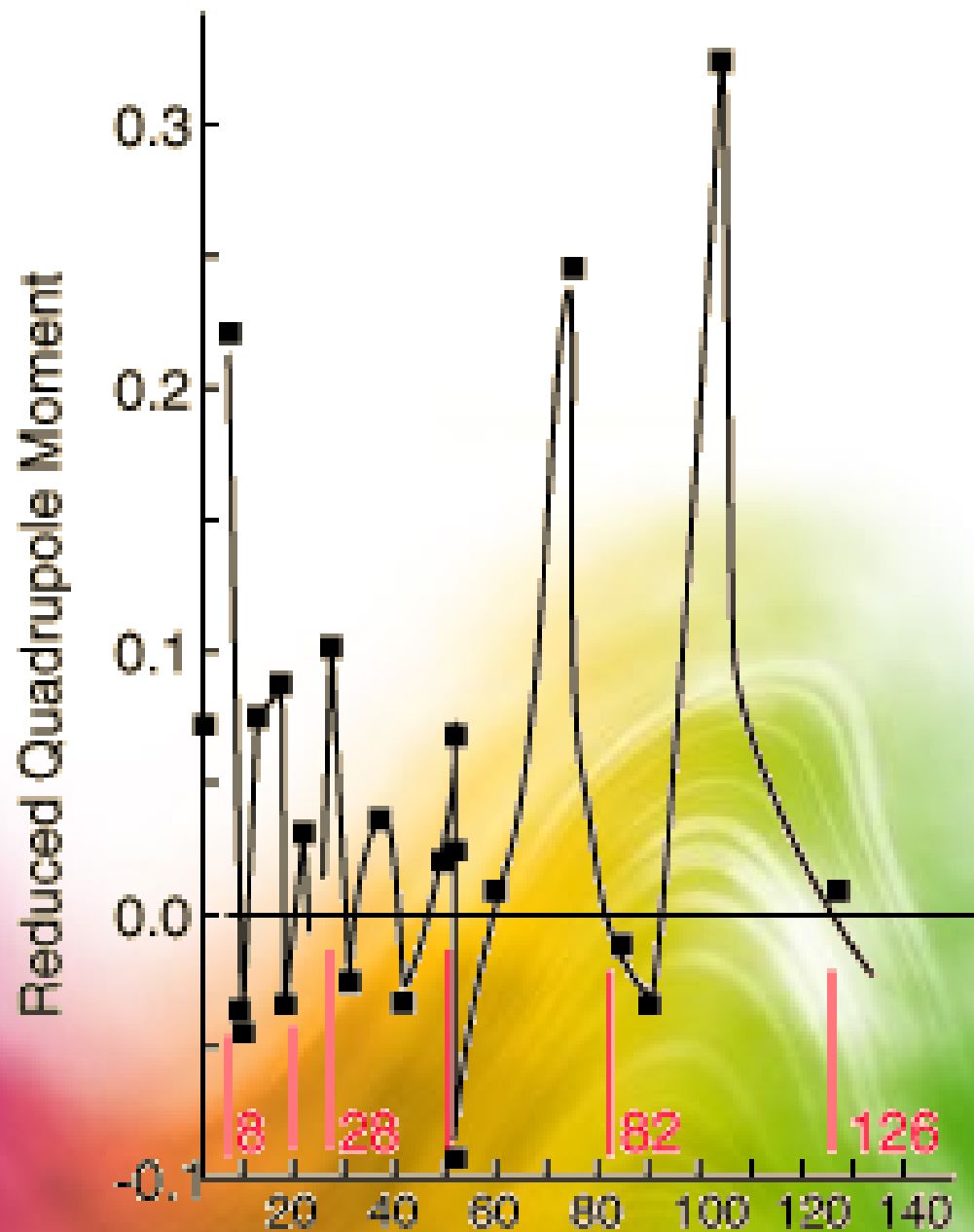
$Q < 0$
Oblate

Classical definition

$$Q_0 = \int \rho(3z^2 - r^2) dV$$

$$Q = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} Q_0$$

Quantum measurement



Quadrupole measurements for odd-A nuclei. The horizontal axis is either neutron number or proton number, whichever is odd.

For a shell model, those nuclei with closed shells should be spherically symmetric and have no quadrupole moment.

$$Q_{sp} = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle$$

Resumen

- El núcleo puede modelarse para comprender sus características en dos clases de modelos: colectivos e individuales.
- Los resultados experimentales muestran la existencia de núcleos muy estables energéticamente
- El modelo busca explicar las configuraciones muy estables del núcleo, por medio de niveles de energía o capas
- El potencial de Saxon-Woods con una corrección espín-orbital es el mejor para aproximar los niveles de energía de los números cuánticos.
- El modelo de capas sirve para determinar adecuadamente las propiedades de espín y paridad, pero no es muy precisa al describir los momentos dipolares magnéticos ni el momento cuadrupolar de los núcleos.