



BE COMMANDE AVANCÉE

# Régulation d'une turbine à gaz

## Auteurs :

MARTIN PETROV

*mpetrov@etud.insa-toulouse.fr*

JULIEN MAFFRE

*maffre@etud.insa-toulouse.fr*

## Enseignants :

CHARLES POUSSOT VASSAL

*contact : charles.poussot-vassal@onera.fr*

THOMAS LOQUEN

*contact : Thomas.Loquen@onera.fr*

INSA Toulouse - 5 SEC-Automatique Avancée

20 janvier 2014

*version 1.0*

---

## RESUME DU RAPPORT

Ce compte-rendu explique en détails le bureau d'étude de Commande Avancée effectué au cours de la mineure Automatique Avancée en 5ème année.

Nous présentons la modélisation et l'asservissement d'une turbine à gaz avec les justifications des choix et des différentes stratégies de contrôle. Nous suivrons une démarche industrielle en respectant les spécifications données.

L'ensemble des sources du projet est disponible en ligne.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Modélisation du système</b>	<b>3</b>
1.1 Présentation du problème et notations utilisées . . . . .	3
1.2 Modélisation du système . . . . .	3
1.2.1 Doseur de carburant . . . . .	3
1.2.2 Arbre générateur . . . . .	4
1.2.3 Turbine libre . . . . .	5
<b>2 Linéarisation du modèle</b>	<b>7</b>
2.1 Calcul du point d'équilibre . . . . .	7
2.2 Linéarisation . . . . .	7
<b>3 Observateur du Kalman</b>	<b>10</b>
3.1 Équations du filtre de Kalman . . . . .	10
3.1.1 Incertitudes sur les données . . . . .	11
3.2 Calcul du gain de Kalman . . . . .	12
<b>4 Commande par retour d'état</b>	<b>14</b>
4.1 Performances du système linéarisé . . . . .	14
4.2 Cahier des charges . . . . .	14
4.3 Placement de pôles . . . . .	15
4.4 Retour d'état augmenté . . . . .	15
4.5 Pire échelon de charge . . . . .	17
<b>5 Commande robuste</b>	<b>18</b>
5.1 Calcul du retour d'état $K_{lmi}$ stabilisant . . . . .	18
5.2 Vérification de la stabilité du système . . . . .	19
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>

# Introduction

## SUJET

Dans ce bureau d'étude nous considérons le système d'une turbine à gaz. Ce type de système est choisi afin d'appliquer une démarche industrielle de conception.

## ETAPES

L'objectif est de concevoir une commande pour la turbine qui va respecter un cahier des charges. Plusieurs compétences théoriques sont nécessaires pour la résolution du problème posé. Dans un premier temps, nous modéliserons le système avec un modèle mathématique décrivant son comportement. Ensuite, nous allons linéariser autour d'un point de fonctionnement et choisir les différentes solutions possibles pour la stratégie de contrôle afin de mieux satisfaire les spécifications. Nous expliquerons l'utilité d'un filtre de Kalman pour mieux estimer le modèle. Une commande par retour d'état et une discussion introductive aux techniques de commande robuste seront enfin présentées.

## SUPPORT

*L'ensemble des sources du projet (Matlab/Simulink) est disponible à l'adresse suivante : <https://github.com/mape1991/BEcommandeAA>*

# Chapitre 1

## Modélisation du système

### 1.1 Présentation du problème et notations utilisées

Dans ce bureau d'étude, nous considérons un système composé d'une **turbine génératrice de gaz** et d'une charge (par exemple, le rotor d'un hélicoptère ou un alternateur pour générer de l'électricité).

La turbine se compose de plusieurs étages dans lesquels des processus thermodynamiques interviennent pour apporter de l'énergie à l'air ambiant et ainsi enclencher la rotation d'un arbre. Le premier étage consiste en la compression de l'air ambiant (et donc de sa température). Une partie de ces gaz participe alors à la combustion du carburant du second étage. Les gaz arrivent alors dans le troisième étage avec une très forte énergie potentielle, sont détendus (diminution de pression) et actionnent alors la rotation d'un axe mécanique. Les gaz possédant encore une très forte énergie, ils sont détendus une deuxième fois dans la **turbine libre** qui transforme cette énergie en énergie mécanique fournie sur l'axe de sortie.

Les variables du problème qui nous intéressent sont :

- $N_g$ , la vitesse de rotation de l'arbre générateur de gaz.
- $N_{tl}$ , **la vitesse de rotation de la turbine libre (grandeur à réguler)**.
- $P_3$ , la pression en sortie du compresseur.
- $T_{45}$ , la température inter-turbine (avant d'être détendu dans la turbine libre).
- $W_f$ , **débit de carburant dans le second étage (grandeur de commande du problème)**.

Intuitivement, on comprend que plus le débit de carburant  $W_f$  est grand et plus la vitesse de rotation  $N_{tl}$  de l'arbre de sortie sera grande. Les variables du problème sont toutes observables mais pas toutes commandables ( $P_3$  et  $T_{45}$  ne l'étant pas).

L'objectif de ce bureau d'étude est donc d'assurer la **régulation de la vitesse de rotation en sortie**  $N_{tl}$ , en prenant en compte les charges mécaniques qui peuvent s'appliquer sur l'axe de sortie.

### 1.2 Modélisation du système

Dans cette partie, nous allons modéliser l'ensemble du système turbine, qui sera décomposé en sous-systèmes dont les fonctions de transfert sont connues.

#### 1.2.1 Doseur de carburant

Le doseur de carburant permet d'augmenter le débit de carburant  $W_f$  circulant dans le second étage de la turbine. Le débit de consigne  $W_f^*$  est envoyée à un moteur pas à pas actionnant le doseur. La dynamique

du doseur a été identifiée par un système du premier ordre tel que :

$$t_{dos} \frac{dW_f}{dt} = -W_f + W_f^* \quad (1.1)$$

$$T_{doseur}(s) = \frac{1}{1 + t_{dos}s} \quad (1.2)$$

Ce sous-système est donc la première fonction de transfert que la consigne  $W_f^*$  rencontre. La vitesse de variation de la consigne étant limitée par la dynamique du moteur du doseur, un limiteur *slew-rate* est imposé sur la consigne.

### 1.2.2 Arbre générateur

L'arbre générateur de gaz est le coeur du système. C'est lui qui fait le lien entre le débit de carburant  $W_f$  et la force mécanique nécessaire à la rotation de l'arbre de sortie. Ainsi, en notant :

- $I_g$ , l'inertie de l'arbre générateur.
- $C_c$ , le couple résistant entraînant le compresseur.
- $C_{thp}$ , le couple généré par la détente des gaz.
- $C_g$ , le couple résultant tel que  $C_g = C_{thp} - C_c$ .

Nous avons,

$$I_g \dot{N}_g(t) = C_{thp}(t) - C_c(t) = C_g(t) \quad (1.3)$$

Plusieurs séries de données (fournies sous la forme de maillage - cf Fig. 1.1) nous sont fournies pour calculer  $C_g$ ,  $T_{45}$  et  $C_{tl}$  en fonction de  $W_f$  et  $N_g$ .

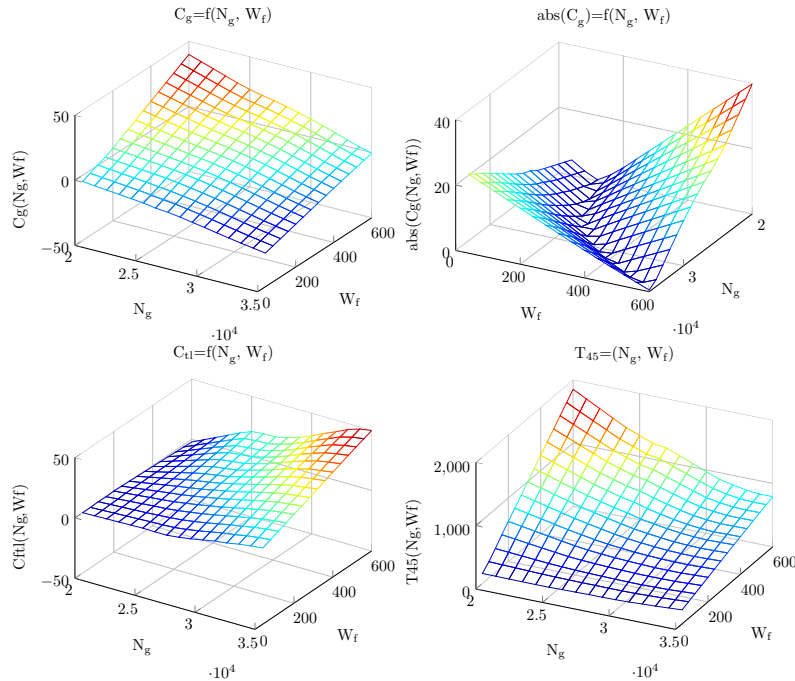


FIGURE 1.1 – Maillages des données fournies en fonction de  $W_f$  et  $N_g$

Lorsque le couple résultant  $C_g > 0$ , l'arbre générateur est en phase d'accélération. De ce principe, on en déduit qu'en partant d'un état d'équilibre ( $C_g = 0$ ) et en augmentant progressivement le débit de carburant,

la vitesse de l'arbre  $N_g$  va augmenter jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre. L'équation dynamique de l'arbre générateur est donc non-linéaire :

$$I_g \dot{N}_g(t) = C_g(W_f, N_g) \quad (1.4)$$

### 1.2.3 Turbine libre

Les gaz issus du générateur sont détendus dans la turbine libre qui se chargera du transfert d'énergie mécanique vers l'arbre de sortie et donc la charge utile. Ainsi, en notant :

- $I_{tot}$ , l'inertie totale de la turbine libre (somme de son inertie propre et de l'inertie de la charge).
- $C_{tl}$ , le couple moteur récupéré par la détente des gaz.
- $C_{charge}$ , le couple résistant dû à la charge.

Nous avons,

$$I_{tot} \dot{N}_{tl}(t) = C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl}) - C_{charge} \quad (1.5)$$

En réalité, les données fournies ne nous donnent que  $C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl}^{nom})$  (c'est-à-dire le couple moteur autour du point de fonctionnement  $N_{tl} = N_{tl}^{nom}$ ). L'équation dynamique de la turbine libre peut s'exprimer comme suit :

$$I_{tot} \dot{N}_{tl}(t) = C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl}^{nom}) + \frac{dC_{tl}}{dN_{tl}}(N_g) \Delta N_{tl} - C_{charge} \quad (1.6)$$

Avec deux maillages, 2D et 3D décrits sur la figure 1.2.

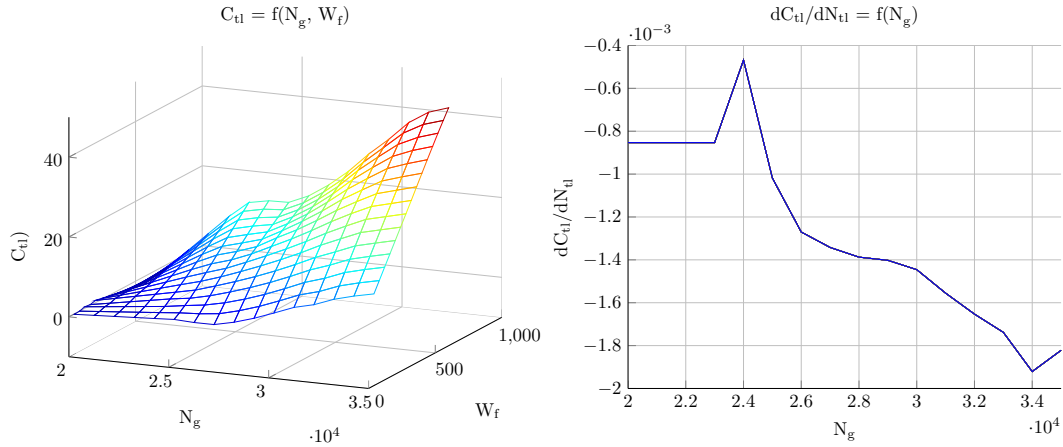


FIGURE 1.2 – Maillages de  $C_{tl}$  et  $\frac{dC_{tl}}{dN_{tl}}$  en fonction de  $W_f$  et  $N_g$

Le schéma Simulink du système complet est alors (cf Fig. 1.3) :

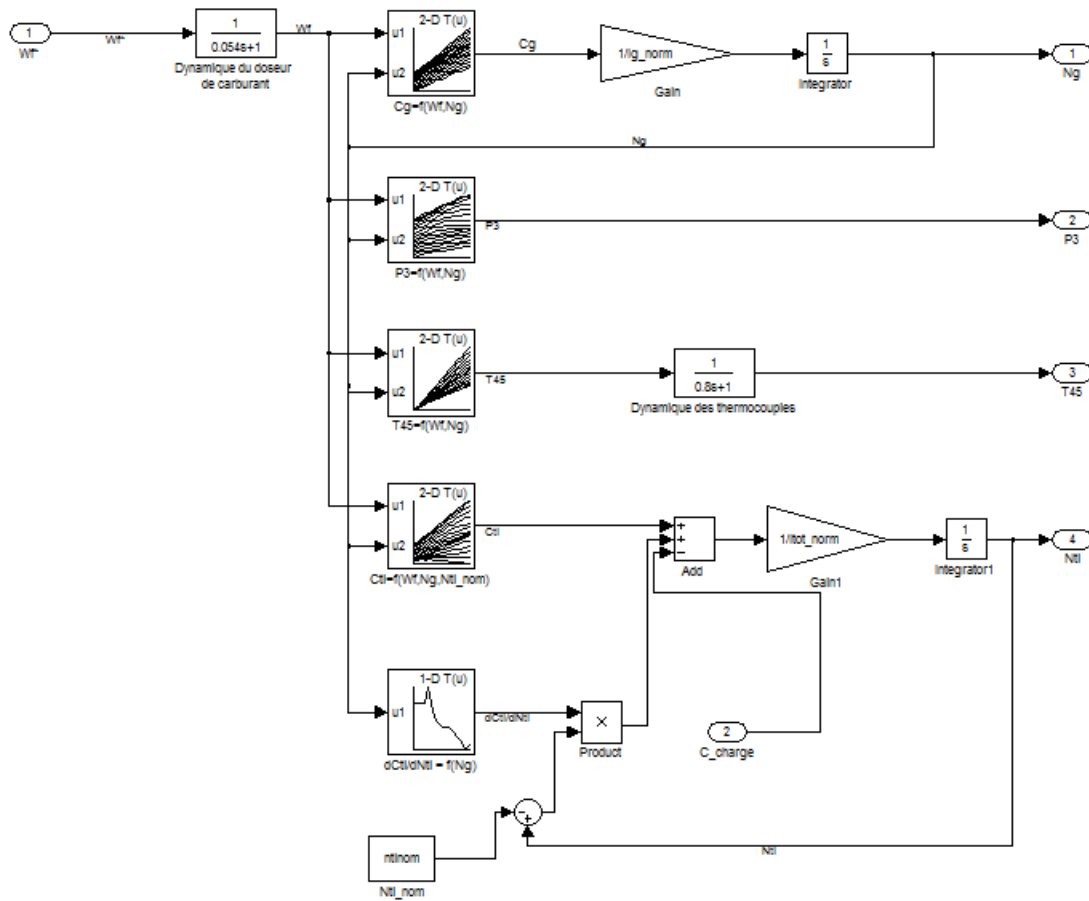


FIGURE 1.3 – Schéma Simulink du système turbine complet (non-linéaire)

## Chapitre 2

# Linéarisation du modèle

Le système global « turbine à gaz » étant désormais modélisé à partir de tables de mesures (grandement non-linéaires) sur le système, il est désormais nécessaire de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Le but est d'obtenir une fonction de transfert globale sur laquelle les techniques de contrôle connues pourront être appliquées.

Le vecteur d'état  $X$  que nous allons considérer est tel que :  $X = [W_f \quad N_g \quad N_{tl}]^t$ . Le système comporte une entrée de consigne  $W_f$  (débit de carburant) et une entrée de perturbation  $C_{charge}$  (couple charge sur l'arbre de sortie).

### 2.1 Calcul du point d'équilibre

L'objectif de la linéarisation est de fixer un point de fonctionnement  $X_0 = [W_f^0 \quad N_g^0 \quad N_{tl}^0]^t$ ,  $U_0 = [W_f^0 \quad C_{charge}^0]^t$  et de n'étudier le système que pour de petites variations de l'état autour de ce point statique. L'objectif de la régulation étant de fixer  $N_{tl}$  à  $N_{tl}^{nom}$ , on aura donc  $N_{tl}^0 = N_{tl}^{nom} = 22800 \text{ tr/min}$ . Les autres variables d'état du système étant dépendantes l'une de l'autre, il est alors nécessaire de fixer l'une des deux pour calculer complètement le point d'équilibre.  $N_g$  étant mesurée de manière fiable, c'est cette dernière que nous fixerons telle que  $N_g^0 = 28000 \text{ tr/min}$ .

D'après l'équation 1.4, nous avons :

$$I_g \dot{N}_g(t) = C_g(W_f, N_g) \quad (2.1)$$

Comme  $N_g$  est considérée constante autour du point d'équilibre, alors  $\dot{N}_g(t) = 0$ . Pour déterminer  $W_f^0$ , il suffit alors de trouver l'abscisse  $W_f$  pour laquelle le couple résultant  $C_g$  s'annule, soit (cf Fig. 1.1) :

$$W_f^0 = \arg(\min |C_g(W_f, N_g^0)|) \quad (2.2)$$

La fonction Matlab `fminsearch` retourne alors  $W_f^0 = 259.64 \text{ L/h}$ .

Le couple de charge  $C_{charge}^0$  est alors déterminé par la lecture du maillage de  $C_{tl}(W_f^0, N_g^0)$  (cf Fig. 1.1), soit donc  $C_{charge}^0 = 13.6025 \text{ m.daN}$ .

### 2.2 Linéarisation

Le point d'équilibre ( $X_0, U_0$ ) étant désormais déterminé, les équations dynamiques régissant l'évolution des états au cours du temps doivent être calculées. Il suffit alors d'effectuer un changement de variable de



type  $X(t) = \Delta X(t) + X_0$ .

On obtient alors l'équation d'état dynamique du système sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\Delta X} &= J_f|_{X=X_0} \cdot \Delta X \\ &+ \frac{\delta g}{\delta W_f^*}|_{W_f^{*0}} \cdot \Delta W_f^* \\ &+ \frac{\delta h}{\delta C_{charge}}|_{C_{charge}^0} \cdot \Delta C_{charge} \\ &+ f(X_0) + g(W_f^{*0}) + h(C_{charge}^0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avec  $J_f$ , jacobienne de la matrice dynamique du système non-linéaire, telle que, d'après les équations 1.1, 1.4 et 1.5 :

$$J_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_{dos}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_g} \frac{\delta C_g(W_f, N_g)}{\delta W_f} & \frac{1}{I_g} \frac{\delta C_g(W_f, N_g)}{\delta N_g} & 0 \\ \frac{1}{I_{tot}} \frac{\delta C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl})}{\delta N_g} & \frac{1}{I_{tot}} \frac{\delta C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl})}{\delta N_g} & \frac{1}{I_{tot}} \frac{\delta C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl})}{\delta N_{tl}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18.5185 & 0 & 0 \\ 65.5871 & -1.9835 & 0 \\ 17.1650 & 0.8011 & -0.5289 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Par conséquent, la matrice dynamique  $A_{lin}$  du système linéarisé est telle que :  $A_{lin} = J_f$ . On remarque que cette matrice est triangulaire et donc que ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale. Ceci prouve directement la stabilité asymptotique du système linéaire puisque ses éléments diagonaux sont tous réels négatifs. En considérant maintenant le vecteur d'entrée  $U$  tel que  $U = [W_f \ C_{charge}]^t$ , alors la matrice d'entrée  $B_{lin}$  du système linéarisé est telle que :

$$B_{lin} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_{dos}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{tot}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.5185 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -381.2529 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

En considérant maintenant le vecteur de sortie  $Y = [N_g \ P_3 \ T_{45} \ N_{tl}]^t$  du système (toujours autour du point d'équilibre), la matrice de sortie  $C_{lin}$  du système est alors définie comme :

$$C_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\delta P_3(W_f, N_g)}{\delta W_f} & \frac{\delta P_3(W_f, N_g)}{\delta N_g} & 0 \\ \frac{\delta T_{45}(W_f, N_g)}{\delta W_f} & \frac{\delta T_{45}(W_f, N_g)}{\delta N_g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.0020 & 0.0002 & 0 \\ 1.6012 & -0.0228 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La figure 2.1 montre les différences entre les performances du système complet non-linéaire et celles du système linéarisé. L'allure des réponses est sensiblement la même (régime transitoire identique). Cependant, en régime permanent, une erreur d'environ 10% persiste sur la réponse de la vitesse de l'arbre générateur de gaz  $N_g$ .

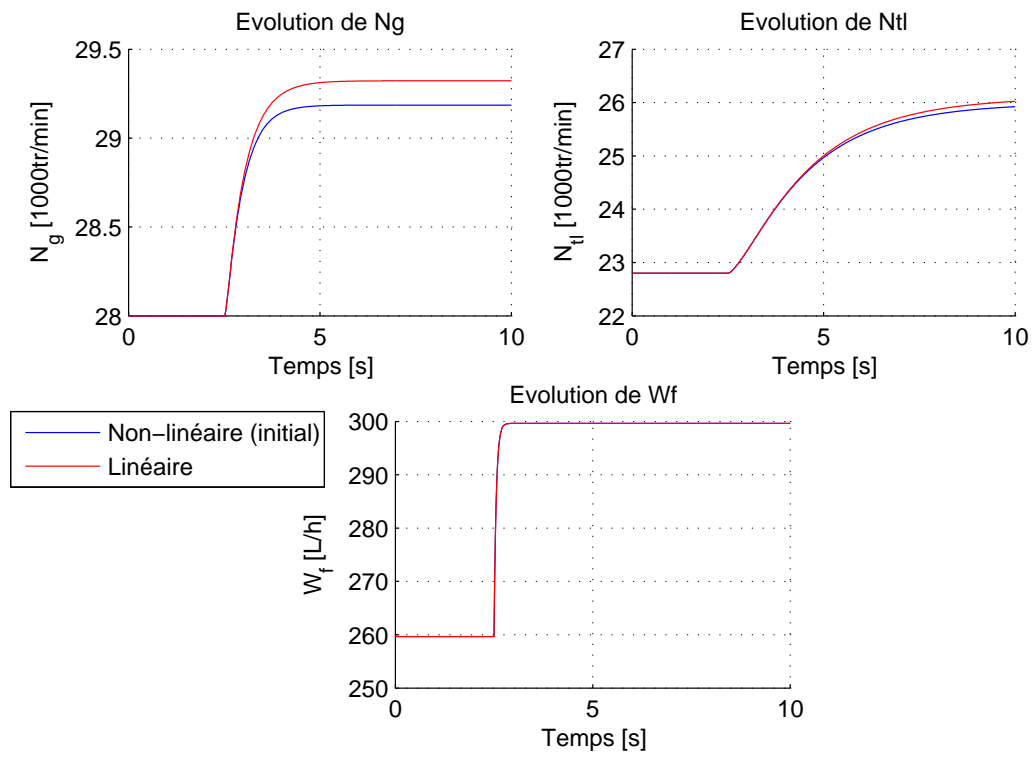


FIGURE 2.1 – Comparaison des performances entre le système initial (non-linéaire) et le système linéarisé

## Chapitre 3

# Observateur du Kalman

L'objectif du filtre de Kalman est d'estimer les états  $x(t)$  du système à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées. Cet estimé noté  $\hat{x}(t)$ , est la sortie du filtre de Kalman. Ce filtre suggère une relation entrées-sorties avec une optimisation des mesures. Le modèle d'état de Kalman prend en compte les bruits d'entrée (modèle) et les bruits des capteurs de mesure des sorties. La notation propre au Kalman d'un modèle avec bruit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A.x(t) + B.u(t) + M.w(t) \\ y &= C.x(t) + D.u(t) + v(t)\end{aligned}$$

Certains hypotheses doivent être respectées pour que la théorie du filtre Kalman soit valable :

- Le système et les bruits sont stationnaires (Les matrices du modèle d'état sont indépendantes du temps)
- La paire (A,C) est détectable, c'est à dire qu'il n'y a pas de mode instable et non observable dans le système
- Les signaux  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des bruits blancs gaussiens centrés.

L'objectif dans cette partie est de filtrer les mesures des capteurs  $N_g$ ,  $N_H$  et surtout offrir un estimé du débit réel de carburant  $W_f$ . Pour cela nous réalisons un estimateur/filtre de Kalman.

### Remarque :

Le filtre de Kalman était sujet de TP pendant deux séances dans ce Bureau d'étude. Les exercices faites nous ont permis d'approfondir les connaissances dans le principe et l'application du filtre de Kalman.

## 3.1 Équations du filtre de Kalman

Nous reprenons le modèle linéarisé présenté à la fin du chapitre Linéarisation. Nous supposons donc que notre système perturbé peut être modélisé par le modèle d'état de Kalman parce qu'il satisfait les hypothèses nécessaires. Nous avons utilisé les fonctions de Kalman proposé par le Toolbox Matlab parce que la solution obtenue est optimale.

Le modèle pris en compte pour calculer l'observateur de Kalman est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -18.5185 & 0 & 0 \\ 65.5871 & -1.9835 & 0 \\ 17.1650 & 0.8011 & -0.5289 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 18.5185 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.0020 & 0.0002 & 0 \\ 1.6012 & -0.0228 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

L'objectif est d'estimer l'entrée du débit réel de carburant  $W_f$ . Pour cela on diminue le modèle en prenant une seule entrée. L'entrée  $C_{charge}$  sera considéré comme une perturbation par la suite.

### 3.1.1 Incertitudes sur les données

Dans le cahier des charges les incertitudes relatives sont données pour chaque sortie. L'incertitude relative présente un nombre sans dimension qui caractérise la précision de la mesure. Ce nombre est le rapport entre l'incertitude et la valeur mesurée de la sortie. Pour chaque sortie estimée nous présenterons les intervalles de variation autour des valeurs nominales.

- $N_g = 0.1\%$
- $P_3 = 2\%$
- $N_{tl} = 0.1\%$
- $T_{45} = 2\%$

Sur la figure suivante on peut observer les quatre sorties avec le bruit associé. Dans le script simulink nous avons ajouté un bruit pour chaque sortie avec le block *Band Limited White noise*. Les valeurs de la densité spectrale sont obtenues avec un produit de la précision relative et une constante. La précision relative nous donne la valeur de l'intervalle pour la sortie. Pour  $N_{tl}$  la valeur nominale est 28000, dont l'intervalle des valeurs est :  $[28000 + \Delta N_g, 28000 - \Delta N_g]$ , avec  $\Delta N_g = Precision * 28000$ .

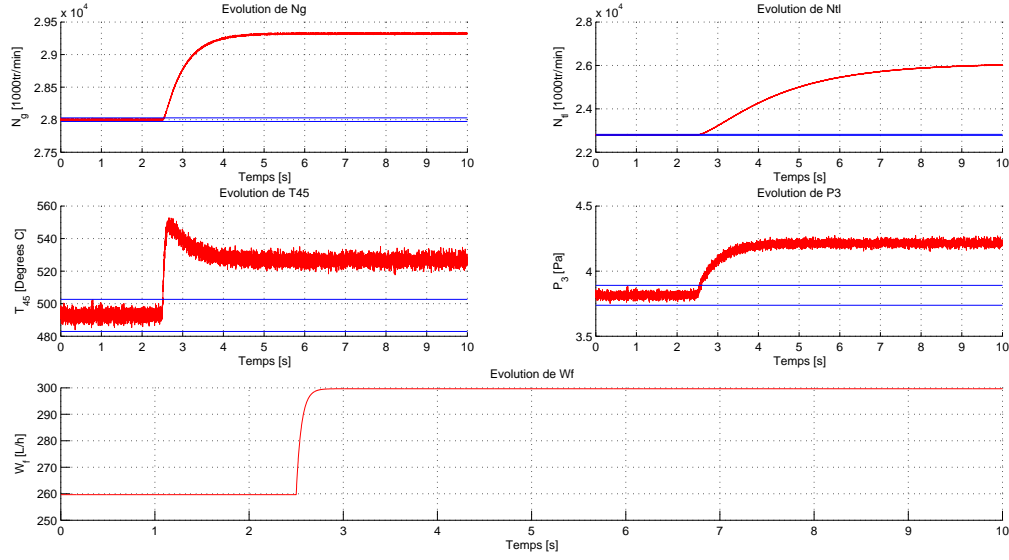


FIGURE 3.1 – Signaux bruités de sortie en entrée de l’observateur de Kalman

Dans le système nous considérons que les bruits du modèle ne sont pas très importants ( $10^{-5}$ ). Les bruits de mesure sont importants ( $10^{-3}$ ), autrement dit peu de confiance dans les capteurs. Les matrices suivantes présentent la confiance dans les mesures (capteurs) et la confiance dans le modèle respectivement (matrices de covariance) :

$$R_N = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_N = (0.00001) \quad (3.1)$$

Les termes sur la diagonale de la matrice  $R_N$  correspondent au carré des écart-types maximaux de l’erreur que l’on autorise pour chacun des paramètres à estimer. Les valeurs choisies correspondent à l’estimation sur les sorties et la valeur d’erreur autorisée. Il faut avoir conscience que si on définit des termes d’erreur trop petit par rapport à la réalité, le filtre de Kalman n’arrivera pas à rectifier les erreurs du modèle et fera des estimations biaisées. Si les erreurs sont trop importantes par rapport à la réalité, les estimations seront avec une covariance importante. Pour avoir la meilleure estimation nous avons choisi la même variance sur chaque paramètre en respectant les précisions réelles des capteurs.

## 3.2 Calcul du gain de Kalman

Avec la commande kalman sous *Matlab* on obtient le gain du filtre et aussi la solution de l’équation de Ricatti qui donne la matrice de covariance de l’estimation d’erreur. Ensuite on simplifie le modèle d’état et on garde que les entrées et les sorties du observateur qui sont demandées dans le cahier des charges. La formule utilisée pour calculer le modèle d’état est :

$$A_{kalman} = A_{lin} - K.C_{lin} \quad B_{kalman} = [B_{lin} \quad K] \quad C_{kalman} = I_3 \quad D_{kalman} = 0_3 \quad (3.2)$$

Le modèle obtenu du filtre de Kalman est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -18.74 & -0.2354 & -0.06749 \\ 65.11 & -5.711 & -1.564 \\ 17.05 & -0.7616 & -1.628 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 18.52 & 0.2386 & 0.0002408 & 0.1393 & 0.06749 \\ 0 & 3.735 & 0.001385 & 0.297 & 1.564 \\ 0 & 1.564 & 0.0005146 & 0.07243 & 1.099 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Ce modèle prend en entrée toutes les sorties du système linéaire et le débit du carburant  $W_f$ . En sortie du filtre de Kalman il donne les trois estimations :  $W_f$ ,  $N_g$  et  $N_{tl}$  (les trois états du système). La figure suivante montre l'estimation du filtre de Kalman sur le vecteur d'état. L'allure des réponses correspond à une évolution suite à un changement de la consigne  $W_f$ . Le filtre de Kalman estime bien ses sorties :  $W_f$ ,  $N_g$  et  $N_{tl}$ .

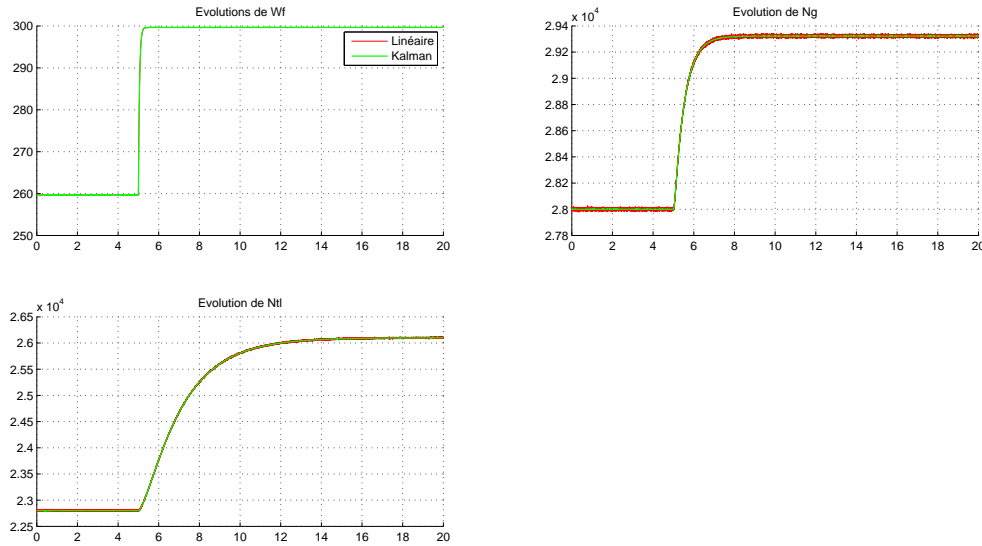


FIGURE 3.2 – Signaux bruités et filtrés en sortie de l'observateur de Kalman

### Observateur à gain variable

L'intérêt d'utiliser un observateur à gain variable est d'estimer un système non linéaire. Autrement dit on doit appliquer un filtre de Kalman étendu. Ce filtre permet en effet de linéariser localement le problème et donc d'appliquer les équations du filtre de Kalman classique. Parce qu'on doit localiser le système autour d'un point d'équilibre à chaque étape, ceci assure donc la convergence locale de l'erreur, mais non celle globale. Un surcoût de calcul est constaté par rapport au filtre de Kalman classique. En effet, outre les opérations non linéaires introduit dans les équations d'états et de transitions, il faut recalculer à chaque étape les Jacobiennes de ces équations.

Une autre avantage du gain variable est pour créer des résidus afin de détecter les pannes des capteurs. En appliquant un gain variable la dynamique du modèle change, et il peut perdre la stabilité asymptotique.

# Chapitre 4

## Commande par retour d'état

L'objectif de cette partie est de concevoir une commande par retour d'état qui respecte certains contraintes en prenant directement l'état mesuré sur le modèle linéarisé non bruité. La commande doit imposer une simple régulation de la turbine autour d'un point de fonctionnement. L'hypothèse est que le système est commandable et observable. La conception de cette commande permet de placer les pôles du système en boucle fermée. En fonction du cahier des charges (temps de réponse, dépassement, bande passante) on va placer les pôles afin d'avoir un système asymptotiquement stable et qui respecte les performances souhaitées.

### 4.1 Performances du système linéarisé

Avant d'appliquer la commande par retour d'état il faut vérifier les performances du système linéarisé. La première propriété est la stabilité. Les valeurs propres sont toutes à partie réelle négative, donc le système est asymptotiquement stable. Les valeurs propres de la matrice dynamique  $A_{lin}$  sont :

$$\lambda_1 = -0.5289 \quad \lambda_2 = -1.9835 \quad \lambda_3 = -18.5185 \quad (4.1)$$

Si on trace les réponses impulsionnelles du système linéarisé on peut remarquer que certaines sorties ne dépendent que d'une entrée.  $N_{tl}$  ne dépend que de  $C_{charge}$  et les autres dépendent que de  $W_f$ . Le temps de réponse est inférieur à 5s et le dépassement est négligeable. L'objectif de notre commande par retour d'état sera de respecter le cahier des charges et de ne pas trop modifier le fonctionnement nominal du système.

### 4.2 Cahier des charges

La loi de commande doit assurer un asservissement de la vitesse de la turbine libre  $N_{tl}$  autour de sa valeur nominale. L'erreur statique doit être nulle malgré les variations de la charge utile  $C_{charge}$ , que nous considérons comme une réelle perturbation. La stabilité du système sera démontrée et la dynamique sera optimisée par la suite.

Le correcteur de retour d'état doit respecter les contraintes suivantes :

- Erreur statique sur  $N_{tl}$  nulle sur toute la plage
- Respecter les capacités de la turbine : débit wf ne dépassant pas excessivement la limite du slew rate et le débit maximal
- Marge de phase de 60 degrés
- Protection de la turbine : Débit minimal  $W_f^{min} = 60 \frac{l}{h}$
- Débit de carburant maximum  $W_f^{max}(P3)$
- Slew rate  $\dot{W}_{f_{max}} = 100 \frac{l/h}{s}$

Ces contraintes doivent être respectées quand le pire échelon sera appliqué dans le système.

### 4.3 Placement de pôles

L'idée de placement de pôles est de simplifier la dynamique du système linéarisé en une dynamique d'un système de second ordre. On peut facilement calculer les pôles en fonction du temps de réponse et du dépassement souhaité. En partant de la fonction du transfert d'un système du second ordre :

$$G = \frac{K.\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n + \omega_n^2} \quad (4.2)$$

d'où les deux pôles en fonction de coefficient d'amortissement  $\zeta$  et de la pulsation propre  $\omega_n$  :

$$[p1; p2] = -\zeta.\omega_n \pm i.\omega_n.\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.3)$$

L'objectif est de limiter le dépassement de la réponse impulsionnelle dans le cas d'un pire échelon de charge. On impose un dépassement inférieur à 5%. Cela veut dire que le coefficient d'amortissement doit être supérieur à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation propre  $\omega_n$  est calculée avec la formule :

$$-\zeta.\omega_n \leq -\frac{4.5}{t_r} \quad (4.4)$$

Les valeurs obtenues pour les poles sont :

$$[p1; p2] = -4.5000 \pm i.3.9411 \quad p3 = -5 \quad (4.5)$$

Le troisième pôle est réel négatif et plus rapide que les deux pôles conjugués. Autrement dit les premiers deux pôles seront dominants et satisferont la performance du régime transitoire du système demandée dans le cahier des charges. Cette méthode permet de régler la dynamique du système en régime transitoire. On remarque que plus les pôles sont négatifs (rapides) plus le système consomme d'énergie afin d'établir la commande. Si le temps de réponse diminue, l'énergie consommée par la commande diminue.

L'objectif de la commande est d'avoir une erreur statique nulle qui ne dépend pas de la perturbation  $C_{charge}$ . Avec ces trois pôles la commande ne peut jamais satisfaire cette contrainte. Pour avoir une erreur statique nulle il faut ajouter un intégrateur dans le modèle d'état. Pour cela on va changer le modèle d'état.

### 4.4 Retour d'état augmenté

Pour mieux satisfaire la contrainte d'erreur statique nulle on ajoute l'intégrateur dans le modèle d'état. De cette façon on peut réutiliser ce modèle d'état pour l'observateur de Kalman. Si on ajoute un intégrateur en dehors du système il faut prévoir plusieurs calculs pour répondre aux mêmes contraintes.



On va ajouter un état supplémentaire dans la matrice dynamique qui est l'intégrale de  $N_{tl}$ . le modèle devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -18.5185 & 0 & 0 & 0 \\ 65.5871 & -1.9835 & 0 & 0 \\ 17.1650 & 0.8011 & -0.5289 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 18.5185 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -381.2529 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0020 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 1.6012 & -0.0228 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Pour le placement de pôle maintenant nous avons quatre pôles à placer. Nous allons utiliser la même méthode que précédemment. Les premiers deux pôles seront ceux qui fixent le régime transitoire. Les deux autres seront placés très loin avec un temps de réponse plus rapide. Les valeurs sont :

$$[p1;p2] = -0.3 \pm i.0.2 \quad p3 = -11 \quad p4 = -13 \quad (4.6)$$

Le gain du retour d'état est :

$$K = (0.1927 \quad 0.0816 \quad 0.0060 \quad 0.0116) \quad (4.7)$$

Avant de faire la simulation, nous ajoutons les saturateurs dans le schéma Simulink. On peut observer les variations de la réponse impulsionnelle de  $N_{tl}$  quand la consigne de la charge change de valeur. En régime statique l'erreur statique reste nulle. Le régime transitoire ne correspond pas aux performances souhaitées. Nous remarquons un dépassement assez important et en temps de réponse lent. L'objectif est de respecter la variation de la commande. Ça permet d'optimiser l'énergie consommée par la commande.

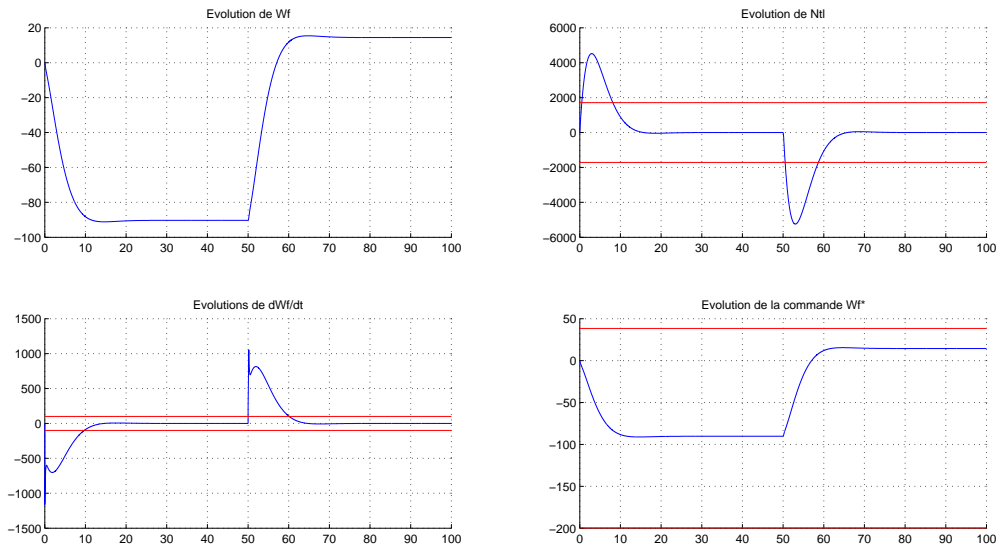


FIGURE 4.1 – Evolution des états et des variables limitées du système linéarisé (avec un retour d'état)

Nous n'avons pas réussi à obtenir les performances spécifiées par le cahier des charges, sur  $N_{tl}$  et sur la dérivée de la commande  $\frac{dW_f}{dt}$ . En effet, diminuer le temps de réponse du système pour limiter le dépassement sur  $N_{tl}$  se traduit par une augmentation significative de l'amplitude  $\frac{dW_f}{dt}$ . Un compromis a été trouvé ici et correspond à un dépassement sur  $N_{tl}$  de 19.8% et une amplitude de  $\frac{dW_f}{dt}$  de 814 L/h/s.

Si on diminue le temps de réponse le dépassement diminue également. Un autre moyen consiste à changer les saturateurs et augmenter les limites de variation. Pour respecter le cahier des charges nous devons faire une commande  $H_\infty$ . Cela optimise la commande en respectant son énergie.

## 4.5 Pire échelon de charge

Le pire échelon est défini par un échelon qui va de la charge minimale à la charge maximale (équilibré autour de  $(W_f)_{min}$  et  $(W_f)_{max} = isowf(end)$ ). La rapidité maximale est limitée à  $64m.\frac{daN}{s}$ . Les valeurs obtenues sont :

- $Wf_{min} = -199.6451$
- $Wf_{max} = 38.3780$
- $(C_{charge})_{min} = -10.3398$
- $(C_{charge})_{max} = 1.6522$

## Chapitre 5

# Commande robuste

Un retour d'état  $K$  stabilisant le système et rejetant, au mieux, les perturbations (couple résistant  $C_{charge}$ ) ayant été calculé pour le point de fonctionnement  $(X_0, U_0)$  considéré, il est maintenant nécessaire de vérifier la stabilité du système bouclé pour des points de fonctionnement différents. En effet, le point d'équilibre peut être en réalité légèrement différent de celui calculé dans le chapitre 2.

Nous utiliserons pour cela des méthodes de calcul *LMI* (Linear Matrix Inequalities) (toolbox `lmi` de Matlab).

### 5.1 Calcul du retour d'état $K_{lmi}$ stabilisant

Nous allons tout d'abord recalculer un gain de retour d'état stabilisant le système (noté  $K_{lmi}$ ). Cet exercice est bien entendu redondant par rapport à la partie précédente mais il permet d'introduire les *LMI*.

La théorie des *LMI* que l'existence d'une matrice symétrique  $P$  satisfaisant la théorie de Lyapunov est une condition nécessaire et suffisante de stabilité pouvant être décrite par l'équation :

$$\begin{aligned} PA^T + AP &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

La matrice dynamique  $A$  d'un système bouclé avec un gain de retour d'état  $u = Kx$  étant égale à  $A_{boucl} = (A - BK)$ , on aura alors la *LMI* suivante comme condition nécessaire et suffisante de stabilité :

$$\begin{aligned} P(A + BK)^T + (A + BK)P &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Cette *LMI* étant non-linéaire, il est nécessaire d'effectuer le changement de variable  $K = LP^{-1}$  pour assurer sa linéarité.

$$\begin{aligned} PA^T + AP + L^T B + BL &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

La matrice  $K_{lmi}$  retournée par le script Matlab est alors telle que :

$$K_{lmi} = [1.0042 - 4.0059 - 2.3667 - 1.9401] \tag{5.4}$$

Et permet d'assurer la stabilité du système en plaçant les pôles dans le demi-plan gauche du plan complexe. Cependant, comme aucune autre spécification sur le placement des pôles n'est donnée, le solveur *LMI* se contente de trouver un seul gain qui stabilise le système. Autrement dit, la dernière itération correspond à l'itération à laquelle le solveur a trouvé pour la première fois un gain stabilisant.

L'objectif est maintenant de spécifier des régions *LMI* (à l'aide par exemple de la commande `lmireg`) pour que les pôles en boucle fermée appartiennent à l'intersection de ces régions. Ces régions correspondent à :

- Un demi-plan dont la partie réelle est inférieure à une valeur négative  $x_0$  donnée, spécifiant alors le **temps de réponse du système**.
- Un demi-plan dont la partie réelle est supérieure à une valeur négative  $x_1$  (telle que  $x_1 < x_0$ ) donnée, pour **rester dans la bande passante** du système.
- Un secteur conique dont la pointe est située à l'origine du plan complexe, pour fixer l'amortissement et donc **limiter le dépassement**.

## 5.2 Vérification de la stabilité du système

La stabilité du système étant prouvée autour du point d'équilibre  $(X_0, U_0)$  (avec les performances souhaitées), il est maintenant nécessaire de vérifier au moins la stabilité du système bouclé autour d'autres points de fonctionnement (les performances pouvant être dégradées).

Nous allons maintenant utiliser une des propriétés des *LMI* qui spécifie que rajouter d'une équation à la *LMI* correspond à l'ajout d'une contrainte pour la solution finale.

Nous allons donc conserver le gain stabilisant  $K$  calculé dans le chapitre 4 et changer le point d'équilibre (c'est-à-dire la matrice  $A_{lin}$ ). L'objectif est de vérifier si la *LMI* précédente peut-être résolue pour tous les points d'équilibre. La nouvelle *LMI* s'écrit alors (avec  $n$ , le nombre de points d'équilibre connus) :

$$\begin{aligned}
 &P(A_1 - BK)^T + (A_1 - BK)P < 0 \\
 &P(A_2 - BK)^T + (A_2 - BK)P < 0 \\
 &\quad \dots \\
 &P(A_n - BK)^T + (A_n - BK)P < 0 \\
 &\quad P > 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Le calcul sous Matlab (en utilisant la toolbox `lmi`) consiste en l'ajout successif des contraintes à la *LMI* de base (eq. 5.2). Le solveur indique alors que la *LMI* peut-être résolue (en 3 itérations) et fournit une matrice  $P$  (de dimension (4,4)) vérifiant le système d'équations précédent.

*Remarque : Bien entendu, vérifier l'appartenance des pôles des systèmes bouclés considérés au demi-plan complexe gauche aurait suffi pour s'assurer de la bonne stabilisation du système. La technique présentée ici a cependant l'avantage d'être générique et moins fastidieuse.*

# Conclusion

## OBJECTIF

Durant ce bureau d'étude nous avons mis en application différentes notions vues en cours d'Automatique Avancée afin de designer la commande d'une turbine à gaz. Le problème a consisté à réduire l'influence du couple de charge (typiquement, un alternateur) sur la vitesse de rotation de l'arbre en sortie (commande robuste). L'objectif a été de suivre une démarche industrielle, à partir de la modélisation jusqu'à la conception de la loi de commande.

## BILAN

Nous avons tout d'abord modélisé la turbine à l'aide des équations fondamentales de la mécanique (en rotation). Le modèle a été ensuite linéarisé autour du point de fonctionnement nominal. Des techniques de commande par placement de pôles ont été mises en place pour maintenir la vitesse de rotation  $N_{tl}$  constante quelque soit la charge en entrée du système. Des méthodes d'automatique plus avancées (nécessitant l'usage de *LMI*) ont été ensuite testées pour vérifier la stabilité du système pour tous les points de fonctionnement considérés.

## FUTUR

Ce bureau d'étude nous a donc permis de mettre en place sur un cas concret des stratégies de commande robuste, de nous rendre compte des difficultés qu'elles impliquent (notamment au niveau du calcul des paramètres) mais aussi de leur efficacité et de leur grande utilité.

Le sujet choisi pour mettre en oeuvre ce bureau d'étude est très parlant et a le mérite d'être complet. Nous regrettons cependant le trop grand nombre de séances passées sur la modélisation du système, au détriment de la conception d'un contrôleur  $H_\infty$ , qui aurait été très intéressant et pertinent pour le problème posé.

# Table des figures

1.1	Maillages des données fournies en fonction de $W_f$ et $N_g$ . . . . .	4
1.2	Maillages de $C_{tl}$ et $\frac{dC_{tl}}{dN_{tl}}$ en fonction de $W_f$ et $N_g$ . . . . .	5
1.3	Schéma <b>Simulink</b> du système turbine complet (non-linéaire) . . . . .	6
2.1	Comparaison des performances entre le système initial (non-linéaire) et le système linéarisé . . . . .	9
3.1	Signaux bruités de sortie en entrée de l'observateur de Kalman . . . . .	12
3.2	Signaux bruités et filtrés en sortie de l'observateur de Kalman . . . . .	13
4.1	Evolution des états et des variables limitées du système linéarisé (avec un retour d'état) . . . . .	16