



BE COMMANDE AVANCÉE

## Régulation d'une turbine à gaz

### Auteurs :

MARTIN PETROV

*mpetrov@etud.insa-toulouse.fr*

JULIEN MAFFRE

*maffre@etud.insa-toulouse.fr*

### Enseignants :

CHARLES POUSSOT VASSAL

*contact : charles.poussot-vassal@onera.fr*

TODO TODO

*contact : todo@laas.fr*

INSA Toulouse - 5 SEC-Automatique Avancée

19 janvier 2014

*version 1.0*

---

### RESUME DU RAPPORT

Ce compte-rendu explique en détails le bureau d'étude de Commande Avancée effectué au cours de la mineure Automatique Avancée en 5ème année.

Nous présentons la modélisation et l'asservissement d'une turbine à gaz avec les justifications des choix et des différentes stratégies de contrôle. Nous suivrons une démarche industrielle en respectant les spécifications données.

L'ensemble des sources du projet est disponible en ligne.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Modélisation du système</b>	<b>3</b>
1.1 Présentation du problème et notations utilisées . . . . .	3
1.2 Modélisation du système . . . . .	3
1.2.1 Doseur de carburant . . . . .	3
1.2.2 Arbre générateur . . . . .	4
1.2.3 Turbine libre . . . . .	5
<b>2 Linéarisation du modèle</b>	<b>7</b>
2.1 Calcul du point d'équilibre . . . . .	7
2.2 Linéarisation . . . . .	7
<b>3 Observateur du Kalman</b>	<b>10</b>
3.1 Équations du filtre de Kalman . . . . .	10
3.2 Calcul du gain de Kalman . . . . .	10
<b>4 Commande par retour d'état</b>	<b>11</b>
4.1 Performances du système linéarisé . . . . .	11
4.2 Cahier des charges . . . . .	11
4.3 Placement de pôles . . . . .	11
4.4 Retour d'état augmenté . . . . .	11
4.5 Pire échelon de charge . . . . .	11
<b>5 Commande robuste</b>	<b>12</b>
5.1 Calcul du retour d'état $K_{lmi}$ stabilisant . . . . .	12
5.2 Vérification de la stabilité du système . . . . .	13
<b>Conclusion</b>	<b>14</b>

# Introduction

## SUJET

Dans ce bureau d'étude nous considérons le système d'une turbine à gaz. Ce type de système est choisi afin d'appliquer une démarche industrielle de conception.

## ETAPES

L'objectif est de concevoir une commande pour la turbine qui va respecter un cahier des charges. Plusieurs compétences théoriques sont nécessaires pour la résolution du problème posé. Dans un premier temps, nous modéliserons le système avec un modèle mathématique décrivant son comportement. Ensuite, nous allons linéariser autour d'un point de fonctionnement et choisir les différentes solutions possibles pour la stratégie de contrôle afin de mieux satisfaire les spécifications. Nous expliquerons l'utilité d'un filtre de Kalman pour mieux estimer le modèle. Une commande par retour d'état et une discussion introductive aux techniques de commande robuste seront enfin présentées.

## SUPPORT

*L'ensemble des sources du projet (Matlab/Simulink) est disponible à l'adresse suivante : <https://github.com/mape1991/BEcommandeAA>*

# Chapitre 1

## Modélisation du système

### 1.1 Présentation du problème et notations utilisées

Dans ce bureau d'étude, nous considérons un système composé d'une **turbine génératrice de gaz** et d'une charge (par exemple, le rotor d'un hélicoptère ou un alternateur pour générer de l'électricité).

La turbine se compose de plusieurs étages dans lesquels des processus thermodynamiques interviennent pour apporter de l'énergie à l'air ambiant et ainsi enclencher la rotation d'un arbre. Le premier étage consiste en la compression de l'air ambiant (et donc de sa température). Une partie de ces gaz participe alors à la combustion du carburant du second étage. Les gaz arrivent alors dans le troisième étage avec une très forte énergie potentielle, sont détendus (diminution de pression) et actionnent alors la rotation d'un axe mécanique. Les gaz possédant encore une très forte énergie, ils sont détendus une deuxième fois dans la **turbine libre** qui transforme cette énergie en énergie mécanique fournie sur l'axe de sortie.

Les variables du problème qui nous intéressent sont :

- $N_g$ , la vitesse de rotation de l'arbre générateur de gaz.
- $N_{tl}$ , **la vitesse de rotation de la turbine libre (grandeur à réguler)**.
- $P_3$ , la pression en sortie du compresseur.
- $T_{45}$ , la température inter-turbine (avant d'être détendu dans la turbine libre).
- $W_f$ , **débit de carburant dans le second étage (grandeur de commande du problème)**.

Intuitivement, on comprend que plus le débit de carburant  $W_f$  est grand et plus la vitesse de rotation  $N_{tl}$  de l'arbre de sortie sera grande. Les variables du problème sont toutes observables mais pas toutes commandables ( $P_3$  et  $T_{45}$  ne l'étant pas).

L'objectif de ce bureau d'étude est donc d'assurer la **régulation de la vitesse de rotation en sortie**  $N_{tl}$ , en prenant en compte les charges mécaniques qui peuvent s'appliquer sur l'axe de sortie.

### 1.2 Modélisation du système

Dans cette partie, nous allons modéliser l'ensemble du système turbine, qui sera décomposé en sous-systèmes dont les fonctions de transfert sont connues.

#### 1.2.1 Doseur de carburant

Le doseur de carburant permet d'augmenter le débit de carburant  $W_f$  circulant dans le second étage de la turbine. Le débit de consigne  $W_f^*$  est envoyée à un moteur pas à pas actionnant le doseur. La dynamique

du doseur a été identifiée par un système du premier ordre tel que :

$$t_{dos} \frac{dW_f}{dt} = -W_f + W_f^* \quad (1.1)$$

$$T_{doseur}(s) = \frac{1}{1 + t_{dos}s} \quad (1.2)$$

Ce sous-système est donc la première fonction de transfert que la consigne  $W_f^*$  rencontre. La vitesse de variation de la consigne étant limitée par la dynamique du moteur du doseur, un limiteur *slew-rate* est imposé sur la consigne.

### 1.2.2 Arbre générateur

L'arbre générateur de gaz est le coeur du système. C'est lui qui fait le lien entre le débit de carburant  $W_f$  et la force mécanique nécessaire à la rotation de l'arbre de sortie. Ainsi, en notant :

- $I_g$ , l'inertie de l'arbre générateur.
- $C_c$ , le couple résistant entraînant le compresseur.
- $C_{thp}$ , le couple généré par la détente des gaz.
- $C_g$ , le couple résultant tel que  $C_g = C_{thp} - C_c$ .

Nous avons,

$$I_g \dot{N}_g(t) = C_{thp}(t) - C_c(t) = C_g(t) \quad (1.3)$$

Plusieurs séries de données (fournies sous la forme de maillage - cf Fig. 1.1) nous sont fournies pour calculer  $C_g$ ,  $T_{45}$  et  $C_{tl}$  en fonction de  $W_f$  et  $N_g$ .

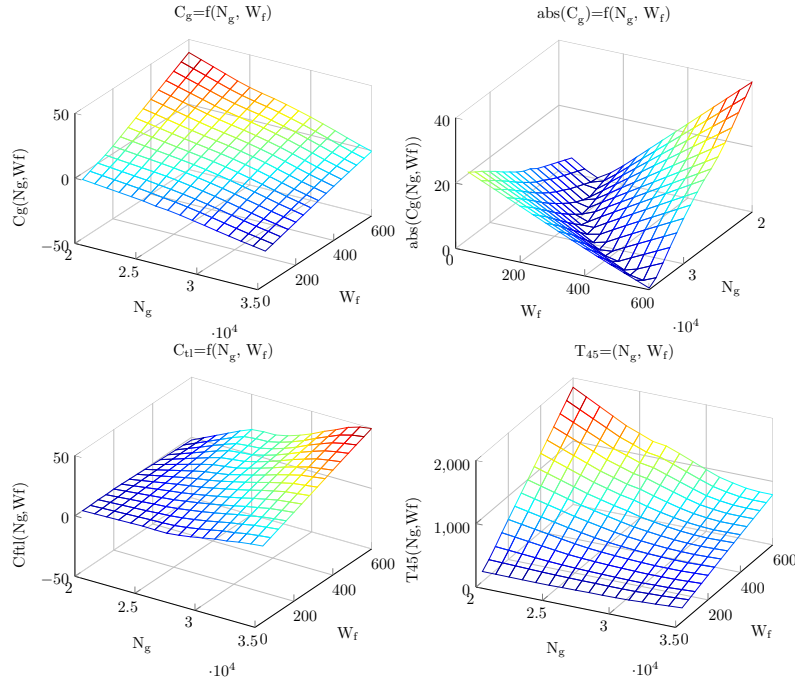


FIGURE 1.1 – Maillages des données fournies en fonction de  $W_f$  et  $N_g$

Lorsque le couple résultant  $C_g > 0$ , l'arbre générateur est en phase d'accélération. De ce principe, on en déduit qu'en partant d'un état d'équilibre ( $C_g = 0$ ) et en augmentant progressivement le débit de carburant,

la vitesse de l'arbre  $N_g$  va augmenter jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre. L'équation dynamique de l'arbre générateur est donc non-linéaire :

$$I_g \dot{N}_g(t) = C_g(W_f, N_g) \quad (1.4)$$

### 1.2.3 Turbine libre

Les gaz issus du générateur sont détendus dans la turbine libre qui se chargera du transfert d'énergie mécanique vers l'arbre de sortie et donc la charge utile. Ainsi, en notant :

- $I_{tot}$ , l'inertie totale de la turbine libre (somme de son inertie propre et de l'inertie de la charge).
- $C_{tl}$ , le couple moteur récupéré par la détente des gaz.
- $C_{charge}$ , le couple résistant dû à la charge.

Nous avons,

$$I_{tot} \dot{N}_{tl}(t) = C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl}) - C_{charge} \quad (1.5)$$

En réalité, les données fournies ne nous donnent que  $C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl}^{nom})$  (c'est-à-dire le couple moteur autour du point de fonctionnement  $N_{tl} = N_{tl}^{nom}$ ). L'équation dynamique de la turbine libre peut s'exprimer comme suit :

$$I_{tot} \dot{N}_{tl}(t) = C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl}^{nom}) + \frac{dC_{tl}}{dN_{tl}}(N_g) \Delta N_{tl} - C_{charge} \quad (1.6)$$

Avec deux maillages, 2D et 3D décrits sur la figure 1.2.

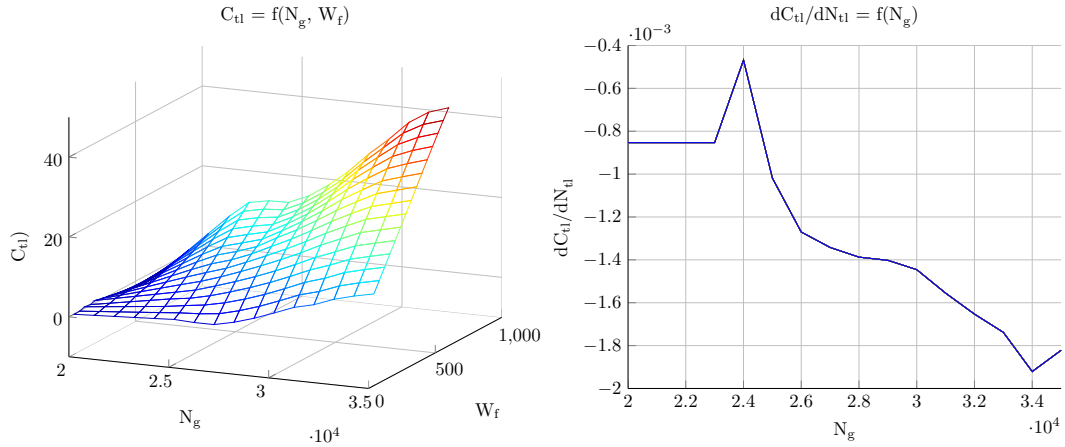


FIGURE 1.2 – Maillages de  $C_{tl}$  et  $\frac{dC_{tl}}{dN_{tl}}$  en fonction de  $W_f$  et  $N_g$

Le schéma Simulink du système complet est alors (cf Fig. 1.3) :

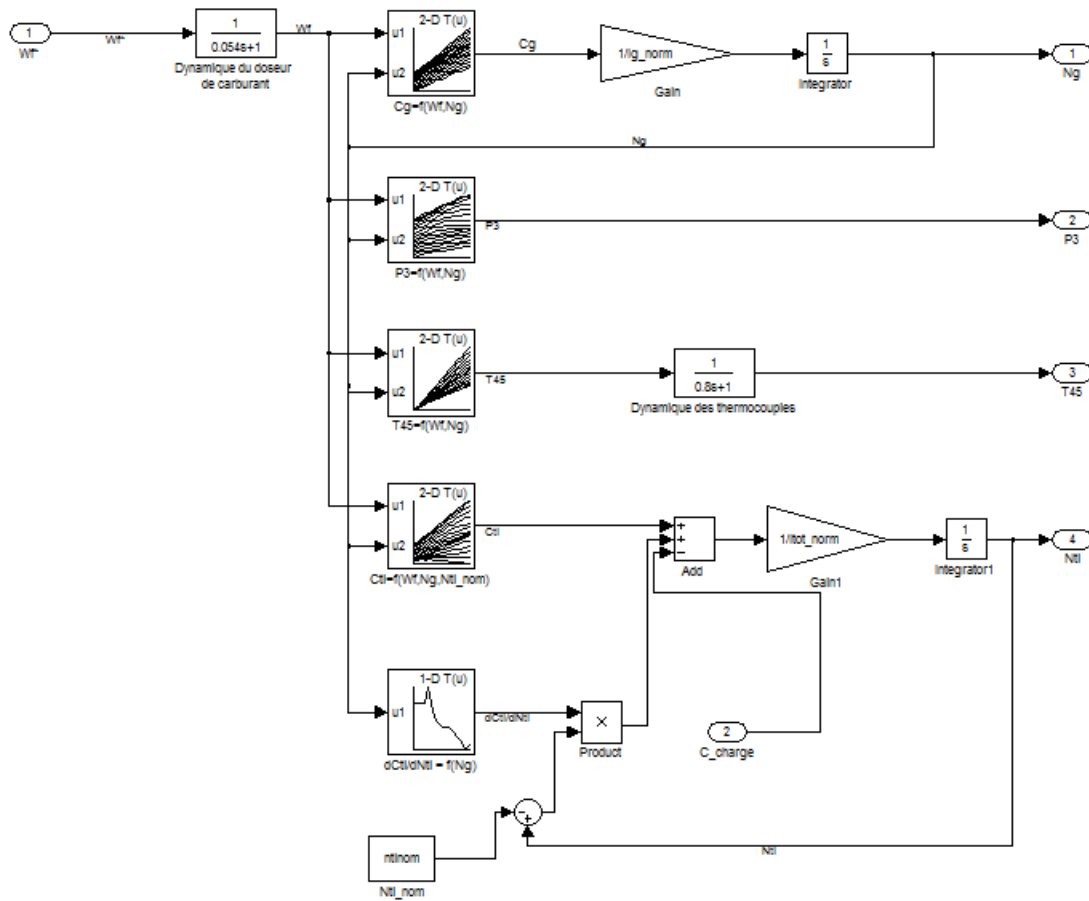


FIGURE 1.3 – Schéma Simulink du système turbine complet (non-linéaire)

## Chapitre 2

# Linéarisation du modèle

Le système global « turbine à gaz » étant désormais modélisé à partir de tables de mesures (grandement non-linéaires) sur le système, il est désormais nécessaire de linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Le but est d'obtenir une fonction de transfert globale sur laquelle les techniques de contrôle connues pourront être appliquées.

Le vecteur d'état  $X$  que nous allons considérer est tel que :  $X = [W_f \quad N_g \quad N_{tl}]^t$ . Le système comporte une entrée de consigne  $W_f$  (débit de carburant) et une entrée de perturbation  $C_{charge}$  (couple charge sur l'arbre de sortie).

### 2.1 Calcul du point d'équilibre

L'objectif de la linéarisation est de fixer un point de fonctionnement  $X_0 = [W_f^0 \quad N_g^0 \quad N_{tl}^0]^t$ ,  $U_0 = [W_f^0 \quad C_{charge}^0]^t$  et de n'étudier le système que pour de petites variations de l'état autour de ce point statique. L'objectif de la régulation étant de fixer  $N_{tl}$  à  $N_{tl}^{nom}$ , on aura donc  $N_{tl}^0 = N_{tl}^{nom} = 22800 \text{ tr/min}$ . Les autres variables d'état du système étant dépendantes l'une de l'autre, il est alors nécessaire de fixer l'une des deux pour calculer complètement le point d'équilibre.  $N_g$  étant mesurée de manière fiable, c'est cette dernière que nous fixerons telle que  $N_g^0 = 28000 \text{ tr/min}$ .

D'après l'équation 1.4, nous avons :

$$I_g \dot{N}_g(t) = C_g(W_f, N_g) \quad (2.1)$$

Comme  $N_g$  est considérée constante autour du point d'équilibre, alors  $\dot{N}_g(t) = 0$ . Pour déterminer  $W_f^0$ , il suffit alors de trouver l'abscisse  $W_f$  pour laquelle le couple résultant  $C_g$  s'annule, soit (cf Fig. 1.1) :

$$W_f^0 = \arg(\min |C_g(W_f, N_g^0)|) \quad (2.2)$$

La fonction Matlab `fminsearch` retourne alors  $W_f^0 = 259.64 \text{ L/h}$ .

Le couple de charge  $C_{charge}^0$  est alors déterminé par la lecture du maillage de  $C_{tl}(W_f^0, N_g^0)$  (cf Fig. 1.1), soit donc  $C_{charge}^0 = 13.6025 \text{ m.daN}$ .

### 2.2 Linéarisation

Le point d'équilibre ( $X_0, U_0$ ) étant désormais déterminé, les équations dynamiques régissant l'évolution des états au cours du temps doivent être calculées. Il suffit alors d'effectuer un changement de variable de



type  $X(t) = \Delta X(t) + X_0$ .

On obtient alors l'équation d'état dynamique du système sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\Delta X} = & J_f|_{X=X_0} \cdot \Delta X \\ & + \frac{\delta g}{\delta W_f^*}|_{W_f^{*0}} \cdot \Delta W_f^* \\ & + \frac{\delta h}{\delta C_{charge}}|_{C_{charge}^0} \cdot \Delta C_{charge} \\ & + f(X_0) + g(W_f^{*0}) + h(C_{charge}^0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avec  $J_f$ , jacobienne de la matrice dynamique du système non-linéaire, telle que, d'après les équations 1.1, 1.4 et 1.5 :

$$J_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_{dos}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_g} \frac{\delta C_g(W_f, N_g)}{\delta W_f} & \frac{1}{I_g} \frac{\delta C_g(W_f, N_g)}{\delta N_g} & 0 \\ \frac{1}{I_{tot}} \frac{\delta C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl})}{\delta N_g} & \frac{1}{I_{tot}} \frac{\delta C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl})}{\delta N_{tl}} & \frac{1}{I_{tot}} \frac{\delta C_{tl}(W_f, N_g, N_{tl})}{\delta N_{tl}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18.5185 & 0 & 0 \\ 65.5871 & -1.9835 & 0 \\ 17.1650 & 0.8011 & -0.5289 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Par conséquent, la matrice dynamique  $A_{lin}$  du système linéarisé est telle que :  $A_{lin} = J_f$ . On remarque que cette matrice est triangulaire et donc que ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale. Ceci prouve directement la stabilité asymptotique du système linéaire puisque ses éléments diagonaux sont tous réels négatifs. En considérant maintenant le vecteur d'entrée  $U$  tel que  $U = [W_f \ C_{charge}]^t$ , alors la matrice d'entrée  $B_{lin}$  du système linéarisé est telle que :

$$B_{lin} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t_{dos}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{tot}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.5185 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -381.2529 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

En considérant maintenant le vecteur de sortie  $Y = [N_g \ P_3 \ T_{45} \ N_{tl}]^t$  du système (toujours autour du point d'équilibre), la matrice de sortie  $C_{lin}$  du système est alors définie comme :

$$C_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\delta P_3(W_f, N_g)}{\delta W_f} & \frac{\delta P_3(W_f, N_g)}{\delta N_g} & 0 \\ \frac{\delta T_{45}(W_f, N_g)}{\delta W_f} & \frac{\delta T_{45}(W_f, N_g)}{\delta N_g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.0020 & 0.0002 & 0 \\ 1.6012 & -0.0228 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La figure 2.1 montre les différences entre les performances du système complet non-linéaire et celles du système linéarisé. L'allure des réponses est sensiblement la même (régime transitoire identique). Cependant, en régime permanent, une erreur d'environ 10% persiste sur la réponse de la vitesse de l'arbre générateur de gaz  $N_g$ .

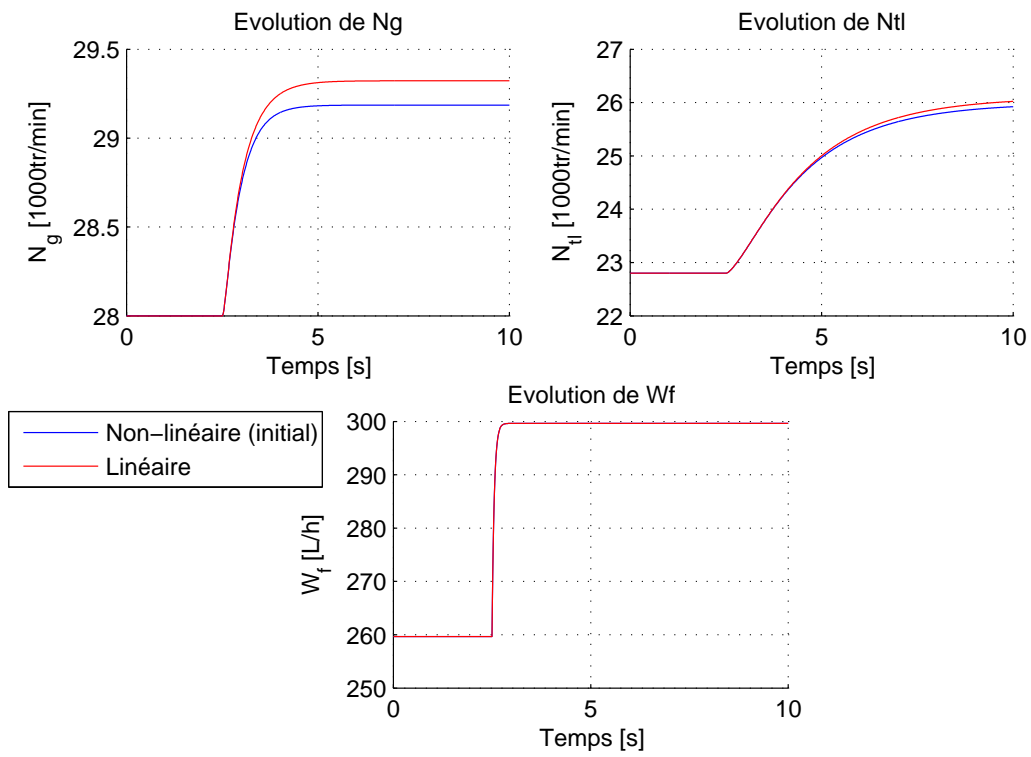


FIGURE 2.1 – Comparaison des performances entre le système initial (non-linéaire) et le système linéarisé

## Chapitre 3

# Observateur du Kalman

Petrov

### 3.1 Équations du filtre de Kalman

### 3.2 Calcul du gain de Kalman

## Chapitre 4

# Commande par retour d'état

Petrov

- 4.1 Performances du système linéarisé
- 4.2 Cahier des charges
- 4.3 Placement de pôles
- 4.4 Retour d'état augmenté
- 4.5 Pire échelon de charge

## Chapitre 5

# Commande robuste

Un retour d'état  $K$  stabilisant le système et rejetant, au mieux, les perturbations (couple résistant  $C_{charge}$ ) ayant été calculé pour le point de fonctionnement  $(X_0, U_0)$  considéré, il est maintenant nécessaire de vérifier la stabilité du système bouclé pour des points de fonctionnement différents. En effet, le point d'équilibre peut être en réalité légèrement différent de celui calculé dans le chapitre 2.

Nous utiliserons pour cela des méthodes de calcul *LMI* (Linear Matrix Inequalities) (toolbox `lmi` de Matlab).

### 5.1 Calcul du retour d'état $K_{lmi}$ stabilisant

Nous allons tout d'abord recalculer un gain de retour d'état stabilisant le système (noté  $K_{lmi}$ ). Cet exercice est bien entendu redondant par rapport à la partie précédente mais il permet d'introduire les *LMI*.

La théorie des *LMI* que l'existence d'une matrice symétrique  $P$  satisfaisant la théorie de Lyapunov est une condition nécessaire et suffisante de stabilité pouvant être décrite par l'équation :

$$\begin{aligned} PA^T + AP &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

La matrice dynamique  $A$  d'un système bouclé avec un gain de retour d'état  $u = -Kx$  étant égale à  $A_{boucl} = (A - BK)$ , on aura alors la *LMI* suivante comme condition nécessaire et suffisante de stabilité :

$$\begin{aligned} P(A - BK)^T + (A - BK)P &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Cette *LMI* étant non-linéaire, il est nécessaire d'effectuer le changement de variable  $K = LP^{-1}$  pour assurer sa linéarité.

$$\begin{aligned} PA^T + AP + L^T B + BL &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

La matrice  $K_{lmi}$  retournée par le script Matlab est alors telle que :

$$K_{lmi} = [1.0042 \quad -4.0059 \quad -2.3667 \quad -1.9401] \tag{5.4}$$

Et permet d'assurer la stabilité du système en plaçant les pôles dans le demi-plan gauche du plan complexe. Cependant, comme aucune autre spécification sur le placement des pôles n'est donnée, le solveur *LMI* se contente de trouver un seul gain qui stabilise le système. Autrement dit, la dernière itération correspond à l'itération à laquelle le solveur a trouvé pour la première fois un gain stabilisant.

L'objectif est maintenant de spécifier des régions *LMI* (à l'aide par exemple de la commande `lmireg`) pour que les pôles en boucle fermée appartiennent à l'intersection de ces régions. Ces régions correspondent à :

- Un demi-plan dont la partie réelle est inférieure à une valeur négative  $x_0$  donnée, spécifiant alors le **temps de réponse du système**.
- Un demi-plan dont la partie réelle est supérieure à une valeur négative  $x_1$  (telle que  $x_1 < x_0$ ) donnée, pour **rester dans la bande passante** du système.
- Un secteur conique dont la pointe est située à l'origine du plan complexe, pour fixer l'amortissement et donc **limiter le dépassement**.

## 5.2 Vérification de la stabilité du système

La stabilité du système étant prouvée autour du point d'équilibre  $(X_0, U_0)$  (avec les performances souhaitées), il est maintenant nécessaire de vérifier au moins la stabilité du système bouclé autour d'autres points de fonctionnement (les performances pouvant être dégradées).

Nous allons maintenant utiliser une des propriétés des *LMI* qui spécifie que rajouter d'une équation à la *LMI* correspond à l'ajout d'une contrainte pour la solution finale.

Nous allons donc conserver le gain stabilisant  $K$  calculé dans le chapitre 4 et changer le point d'équilibre (c'est-à-dire la matrice  $A_{lin}$ ). L'objectif est de vérifier si la *LMI* précédente peut-être résolue pour tous les points d'équilibre. La nouvelle *LMI* s'écrit alors (avec  $n$ , le nombre de points d'équilibre connus) :

$$\begin{aligned}
 &P(A_1 - BK)^T + (A_1 + BK)P < 0 \\
 &P(A_2 - BK)^T + (A_2 + BK)P < 0 \\
 &\quad \dots \\
 &P(A_n - BK)^T + (A_n + BK)P < 0 \\
 &\quad P > 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Le calcul sous Matlab (en utilisant la toolbox `lmi`) consiste en l'ajout successif des contraintes à la *LMI* de base (eq. 5.2). Le solveur indique alors que la *LMI* peut-être résolue (en 3 itérations) et fournit une matrice  $P$  (de dimension (4,4)) vérifiant le système d'équations précédent.

*Remarque : Bien entendu, vérifier l'appartenance des pôles des systèmes bouclés considérés au demi-plan complexe gauche aurait suffi pour s'assurer de la bonne stabilisation du système. La technique présentée ici a cependant l'avantage d'être générique et moins fastidieuse.*

# Conclusion

## OBJECTIF

Durant ce bureau d'étude nous avons mis en application différentes notions vues en cours d'Automatique Avancée afin de designer la commande d'une turbine à gaz. Le problème a consisté à réduire l'influence du couple de charge (typiquement, un alternateur) sur la vitesse de rotation de l'arbre en sortie (commande robuste). L'objectif a été de suivre une démarche industrielle, à partir de la modélisation jusqu'à la conception de la loi de commande.

## BILAN

Nous avons tout d'abord modélisé la turbine à l'aide des équations fondamentales de la mécanique (en rotation). Le modèle a été ensuite linéarisé autour du point de fonctionnement nominal. Des techniques de commande par placement de pôles ont été mises en place pour maintenir la vitesse de rotation  $N_{tl}$  constante quelque soit la charge en entrée du système. Des méthodes d'automatique plus avancées (nécessitant l'usage de *LMI*) ont été ensuite testées pour vérifier la stabilité du système pour tous les points de fonctionnement considérés.

## FUTUR

Ce bureau d'étude nous a donc permis de mettre en place sur un cas concret des stratégies de commande robuste, de nous rendre compte des difficultés qu'elles impliquent (notamment au niveau du calcul des paramètres) mais aussi de leur efficacité et de leur grande utilité.

Le sujet choisi pour mettre en oeuvre ce bureau d'étude est très parlant et a le mérite d'être complet. Nous regrettons cependant le trop grand nombre de séances passées sur la modélisation du système, au détriment de la conception d'un contrôleur  $H_\infty$ , qui aurait été très intéressant et pertinent pour le problème posé.

# Table des figures

1.1	Maillages des données fournies en fonction de $W_f$ et $N_g$ . . . . .	4
1.2	Maillages de $C_{tl}$ et $\frac{dC_{tl}}{dN_{tl}}$ en fonction de $W_f$ et $N_g$ . . . . .	5
1.3	Schéma <b>Simulink</b> du système turbine complet (non-linéaire) . . . . .	6
2.1	Comparaison des performances entre le système initial (non-linéaire) et le système linéarisé . . . . .	9