DOI:10.16076/j.cnki.cjhd.1991.04.004

非定常不可压绕流的有限元-有限差分计算

赖国璋 刘 坚 刘建林
(大连理工大学工程力学研究所)

摘 要

本文用一种有限元-有限差分混合法解不可压非定常Navier-Stokes方程来模拟非定常绕流。在同一时间步的不同计算步中，用三阶迎风差分格式离散动量方程中的对流项，压力修正方程用有限元离散，离散后的方程用直接法求解。本文给出了雷诺数(Re)为1200时的圆柱绕流结果。模拟了突然起动过程中对称主涡和二次涡的发展过程，以及柱后涡街的发展过程中主涡和二次涡的形成、合并、脱落过程。

关键词：非定常流，不可压流体，有限差分法，有限元法。

一、前 言

不可压流体的钝体绕流问题是一个古典而又有实际意义的课题。以前实验的结果较多，高雷诺数时，数值计算的结果较少。近年来，随着计算机的发展和计算技术的提高，人们对这一经典问题的求解又产生了新的兴趣，开始数值求解Navier-Stokes方程来模拟高雷诺数钝体绕流。目前所用方法主要有有限差分法，有限元法，有限分析法。当雷诺数较高时，由于物理现象本身的复杂性及方程的稳定性要求，必须有较密的网格。同时由于流场的非定常性，必须进行长周期的计算以揭示瞬态流动演化的时间过程，这一切都要求较大的计算机存贮和较高的计算速度、导致较高的费用。这就促使人们寻求快速、稳定、存贮要求小的数值方法。在文献[1]中，曾用有限元法求解N-S方程，方法适应于复杂边界情况，在求解中应用了分裂步过程及集中质量法，减少了内存要求。对于修正压力的泊桑方程，由于其系数阵正定、对称、并不随时间变化，可用直接法求解，且该矩阵可只形成、分解一次，以后只须做回代计算，计算速度较快。但由于采用了Galerkin加权法离散动量方程，难于求解到较高的雷诺数。文献[2]中采用三阶迎风差分格式离散动量方法中的对流项，在雷诺数较高时仍稳定。本文把[1]、[2]的方法结合起来，用有限元一有限差分混合法解N-S方程。即在同一时间步的不同计算过程中，对动量方程采用差分法，并对其中的对流项用三阶迎风格式处理，修正压力的方程及其它过程用有限元法处理。用贴体坐标把有限元、有限差分法结合起来，使得求解较高雷诺数时仍稳定、高速、并能适应于复杂边界问题。

本文于1990年4月24日收到。国家自然科学基金资助课题。

二、基本方程及初边值条件

设所讨论的流动区域为Ω，其边界有两部分，一部分Γ_1上给定速度，另一部分Γ_2上给定力。无量纲形式的动量方程和连续方程为：

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=-\nabla P+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{V} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{V}=0 \tag{2}$$

在边界Γ_1上
$$\vec{V}=\vec{b}(x,\ y,\ t) \tag{3}$$

在边界Γ_2上
$$-P\vec{n}+\frac{1}{Re}\frac{\partial\vec{V}}{\partial n}=\vec{h} \tag{4}$$

其中$\vec{V}$，P，Re各为流速向量、压力和雷诺数$\left(Re=\dfrac{UL}{\nu}\right)$，$\vec{b}$，$\vec{n}$，$\vec{h}$各为边界上给定的流速值，边界的外法线单位向量及边界上给定的力。x，y为坐标值，t为时间。

初始条件为

$$\vec{V}(x,\ y,\ o)=\vec{V}_0(x,\ y) \tag{5}$$

$$P(x,\ y,\ o)=P_0(x,\ y) \tag{6}$$

其中$\vec{V}_0$、P_0为给定的初始流速、压力值。

三、求 解 过 程

由[1]，把方程(1)，(2)分为如下过程求解。设第n时刻步的速度、压力$\vec{V}^n$，P^n已知，第$(n+1)$时刻的速度、压力为$\vec{V}^{n+1}$，P^{n+1}。求解中引进一予估速度$\vec{V}^*$，由方程(1)显式求解$\vec{V}^*$(Δt为时间步长)

$$\frac{\vec{V}^*-\vec{V}^n}{\Delta t}+(\vec{V}^n\cdot\nabla)\vec{V}^n=-\nabla P^n+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{V}^n \tag{7}$$

予估速度$\vec{V}^*$可不满足连续方程(2)，另外我们写出

$$\frac{\vec{V}^{n+1}-\vec{V}^n}{\Delta t}+(\vec{V}^n\cdot\nabla)\vec{V}^n=-\nabla P^{n+1}+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{V}^n \tag{8}$$

由(8)－(7)，得

$$\frac{\vec{V}^{n+1}-\vec{V}^*}{\Delta t}=-\nabla(P^{n+1}-P^n) \tag{9}$$

设$\phi/\Delta t=-(P^{n+1}-P^n)$，$\phi/\Delta t$可看作修正压力，由(9)式得

$$\vec{V}^{n+1}-\vec{V}^*=\nabla\phi \tag{10}$$

$$P^{n+1}-P^n=-\phi/\Delta t \tag{11}$$

对(10)取散度，并要求$\vec{V}^{n+1}$满足方程(2)，可得ϕ应满足的方程

$$\nabla^2\phi=-\nabla\cdot\vec{V}^* \tag{12}$$

因此，在一个时间步中，求解步骤为：

(a) 由猜想(或以前的计算得到的)的速度、压力$\vec{V}^n$，P^n，用(7)式计算予估速度$\vec{V}^*$；

(b) 由(12)求得ϕ；

(c) 由(10)式求$\vec{V}^{n+1}$；

(d) 由(11)式求P^{n+1}。完成一个时间步后，重新回到(a)，开始下一时间的计算。

求解(12)式时，ϕ的边界条件由(10)式在边界处法向方向投影获得

$$\vec{n}\cdot(\vec{V}^{n+1}-\vec{V}^*)=\frac{\partial\phi}{\partial n} \tag{13}$$

四、离 散 方 法

对于方程(7)，采用差分离散，对于复杂边界，方程在贴体坐标变换下写出：

$$\frac{u^*-u}{\Delta t}+\left(\frac{uy_\eta-vx_\eta}{J}\right)u_\xi+\left(\frac{vx_\xi-uy_\xi}{J}\right)u_\eta=-\frac{y_\eta P_\xi-y_\xi P_\eta}{J}+\frac{1}{Re}\Delta u \tag{14}$$

$$\frac{v^*-v}{\Delta t}+\left(\frac{uy_\eta-vx_\eta}{J}\right)v_\xi+\left(\frac{vx_\xi-uy_\xi}{J}\right)v_\eta=-\frac{x_\xi P_\eta-x_\eta P_\xi}{J}+\frac{1}{Re}\Delta v \tag{15}$$

其中(x, y)为物理坐标，(ξ, η)为计算坐标。u、v为速度向量在x、y方向的分量，为书写方便(7)式的上标n未写出。(14)、(15)以及以下各式中的下标表示求导。算子Δ为：

$$\begin{aligned}\Delta A=&(\alpha A_{\xi\xi}-2\beta A_{\xi\eta}+rA_{\eta\eta})/J^2+[(\alpha x_{\xi\xi}-2\beta x_{\xi\eta}+rx_{\eta\eta})(y_\xi A_\eta-y_\eta A_\xi)\\&+(\alpha y_{\xi\xi}-2\beta A_{\xi\eta}+ry_{\eta\eta})(x_\eta A_\xi-x_\xi A_\eta)/J^3\end{aligned} \tag{16}$$

其中A代表u，v

$$J=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi \qquad \alpha=x_\eta^2+y_\eta^2$$

$$\beta=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta \qquad \gamma=x_\xi^2+y_\xi^2$$

(14)、(15)式中的空间导数，除对流项外，均采用中心差分离散，对流项采用三阶精度的迎风格式离散[2]。

$$\left(f\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{i,j}=f_{i,j}(u_{i+2,j}-2u_{i+1,j}+9u_{i,j}-10u_{i-1,j}+2u_{i-2,j})/6\Delta\xi \quad (f_{i,j}\geqslant 0)$$

或

$$=f_{i,j}(-2u_{i+2,j}+10u_{i+1,j}-9u_{i,j}+2u_{i-1,j}-u_{i-2,j})/6\Delta\xi \quad (f_{i,j}<0)$$

误差的量阶为 $f\cdot(\Delta\xi)^3\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4}$。

对于$\left(f\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$，$\left(f\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)$，$\left(f\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)$按类似方法处理。

对于方程(12)，(10)，(11)采用有限元离散。

关于ϕ的单元矩阵为

$$A_{i,j}\phi_j=E_{xij}u_j^*+E_{yij}v_j^* \tag{17}$$

$$A_{ij}=\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\Omega$$

$$E_{xij}=\int_{\Omega^e}N_i\frac{\partial N_j}{\partial x}d\Omega$$

$$E_{yij}=\int_{\Omega^e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

这里 Ω^e 是单元面积，N_i 是插值函数。

关于 u^{n+1}，v^{n+1} 的矩阵为

$$M_{ij} u_j^{n+1}=M_{ij} u_j^* + E_{xij}\phi_j \tag{18a}$$

$$M_{ij} v_j^{n+1}=M_{ij} v_j^* + E_{yij}\phi_j \tag{18b}$$

其中 $M_{ij}=\int_{\Omega^e} N_i N_j d\Omega$，为了节省内存，采用了按行相加的质量集中法将$M_{ij}$集中到对角线上。

关于 P^{n+1} 的计算，因离散时，u，v，ϕ 是按节点离散的，而压力是按单元离散的，因而 P_e^{n+1} 按下式计算

$$P_e^{n+1}=P_e^n-\frac{\phi_e^{n+1}}{\Delta t}$$

ϕ_e^{n+1} 为单元中心的 ϕ^{n+1} 值。

由(17)式得到的线性方程组，采用直接法求解。

五、数值算例、结果讨论

用上述方法计算了 $Re\left(=\frac{uD}{U}\right)$ 为1200时均匀来流绕圆柱的流动。u 为来流速度，D为圆柱直径。求解区域及相应的贴体坐标网格如图1a，圆柱的圆心坐标为(o,o)，远前点离圆心5.5D，上、下边界离圆心也为5.5D，远后边界离圆心为11.5D、总节点数为3200，单元（四节点等参元）为3120，沿圆周不等距分布了60个网格点，附面层内有6层网格，无量纲时间步长为Δt＝0.005（最大可用到0.008）。

边界条件

物面 A–A' 上　$u=v=0$

D–C，C–B，B–F，F–E 上　$u=1$，$v=0$

DE上 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$，$\phi$ 的边界条件为(13)式。

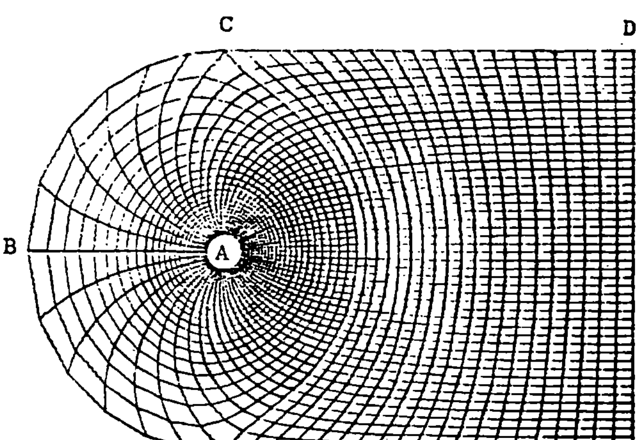


图 1a　贴体座标系统

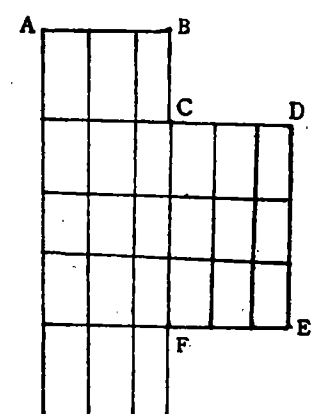


图 1b　计算座标系

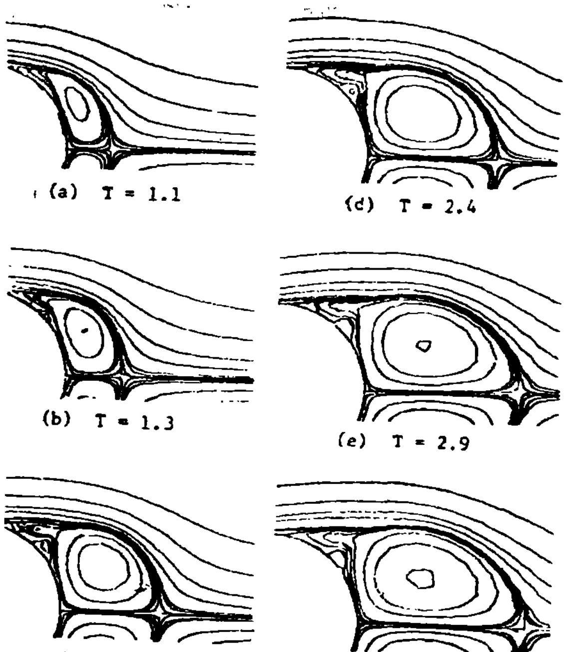


图 2 不同时刻的流线图(计算)$Re=1200$

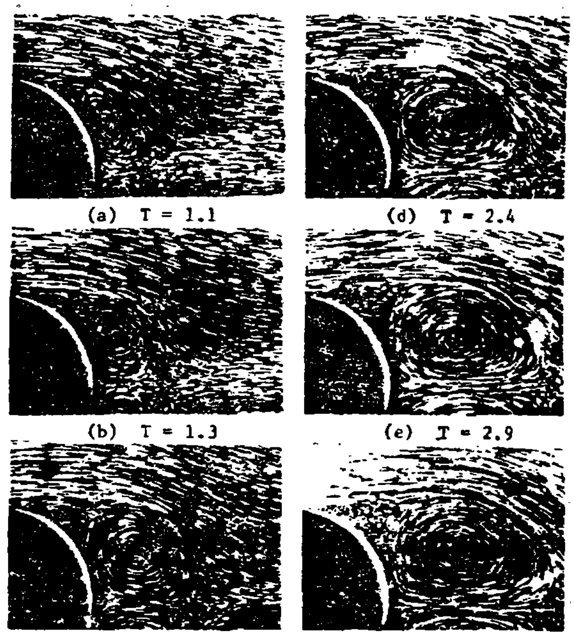


图 3 不同时刻的流场显示(实验)$Re=1200$

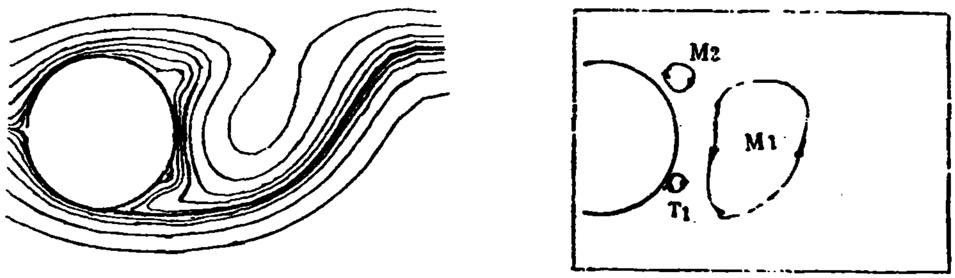
求解突然起动流时，采用无粘势流解作为初始场。

图2为圆柱突然起动后的流场，此时流场是对称的，无量纲时间$T=1.1$时，形成一对主涡，$T=1.3$时，主涡增大，涡心后移，同时在圆柱后形成一对二次涡，旋转方向与主涡相反，随着时间的发展，主涡逐渐增大，涡心后移，二次涡的位置变化不大，图3为取自文献[2]的实验结果，可看出本文结果与实验结果符合很好。

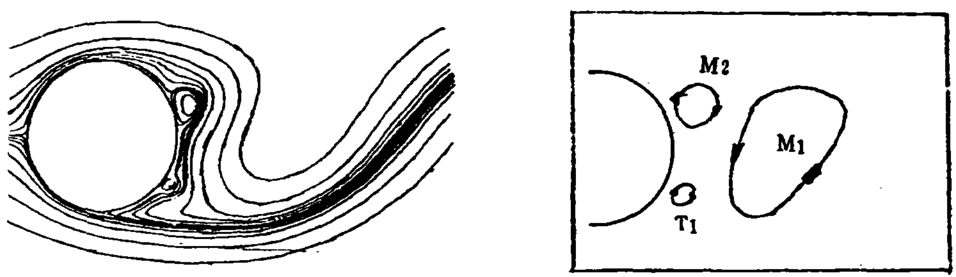
$T=25.0$流场显现不对称，$T=45$后，形成有周期性的柱后涡衔，图4给出一个周期内不同时刻的流线图，从图中可看到主涡的交替脱落及二次涡与主涡的合并过程。

$T=47.0$时，柱后有一大涡，其旋转方向为逆时针方向，这是从柱下方脱落下来的，以M_1代表。同时柱后上部形成一顺时针的主涡M_2。$T=47.70$时M_1移向下游，M_2移向圆柱后部。这时在柱的下后部，由M_1和下部主分离点形成的剪切层的共同作用，形成了一顺时针方向旋转的二次涡，以T_1代表之。$T=48.15$时，M_2继续增大，同时移向柱后部，T_1增大，但位置不变，M_2与T_1共同把M_1挤向下游。$T=48.60$时，T_1与M_2合并为一大涡，继续以M_2表示。$T=49.05$时，M_2继续增大，圆柱下部的剪切层形成一个逆时针旋转的主涡M_3。$T=49.50$时，柱上后部形成一逆时针旋转的二次涡T_2，M_2开始脱落。M_3向柱后移动。$T=49.95$，50.40时T_2、M_3都继续增大，M_3向T_2靠拢，把M_2挤向下游。$T=50.85$时，M_3与T_2合并，形成一个逆时针旋转的主涡，同时上部剪切层形成一顺时针旋转的涡M_4。$T=51.30$时，柱下部出现顺时针的二次涡T_3，M_3向下游脱落。$T=51.75$时，M_4与T_3继续增大、靠拢，形成类似$T=47.70$时的流场。从计算结果看，涡衔的交替脱落过程中，一侧脱落的主涡并非由一侧剪切层单独产生，而是加入了另一侧二次涡的涡量，最后从柱后部脱落。这一合并脱落过程对于涡衔脱落的频率有何影响有待进一步研究。文献[3]给出了$Re=1000$时的计算结果，他们用有限差分法

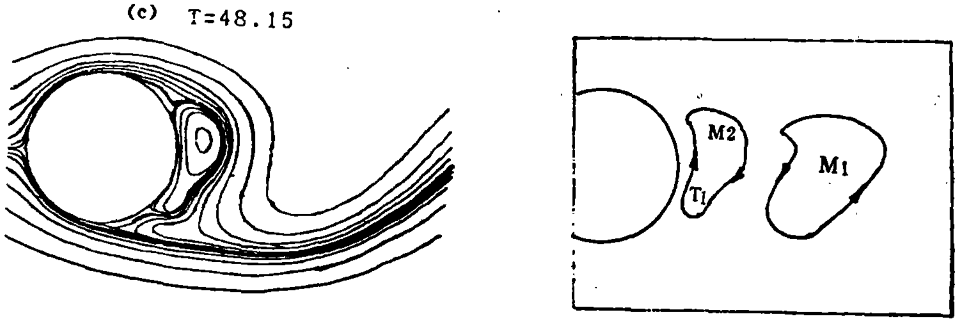
(a) T=47.00



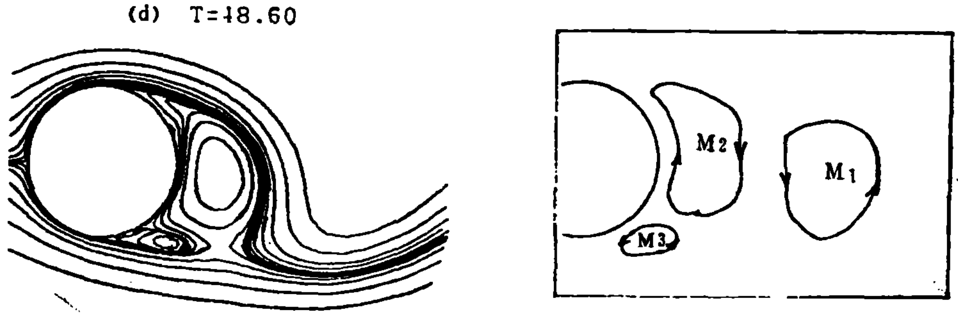
(b) T=47.70



(c) T=48.15



(d) T=48.60



(e) T=49.05

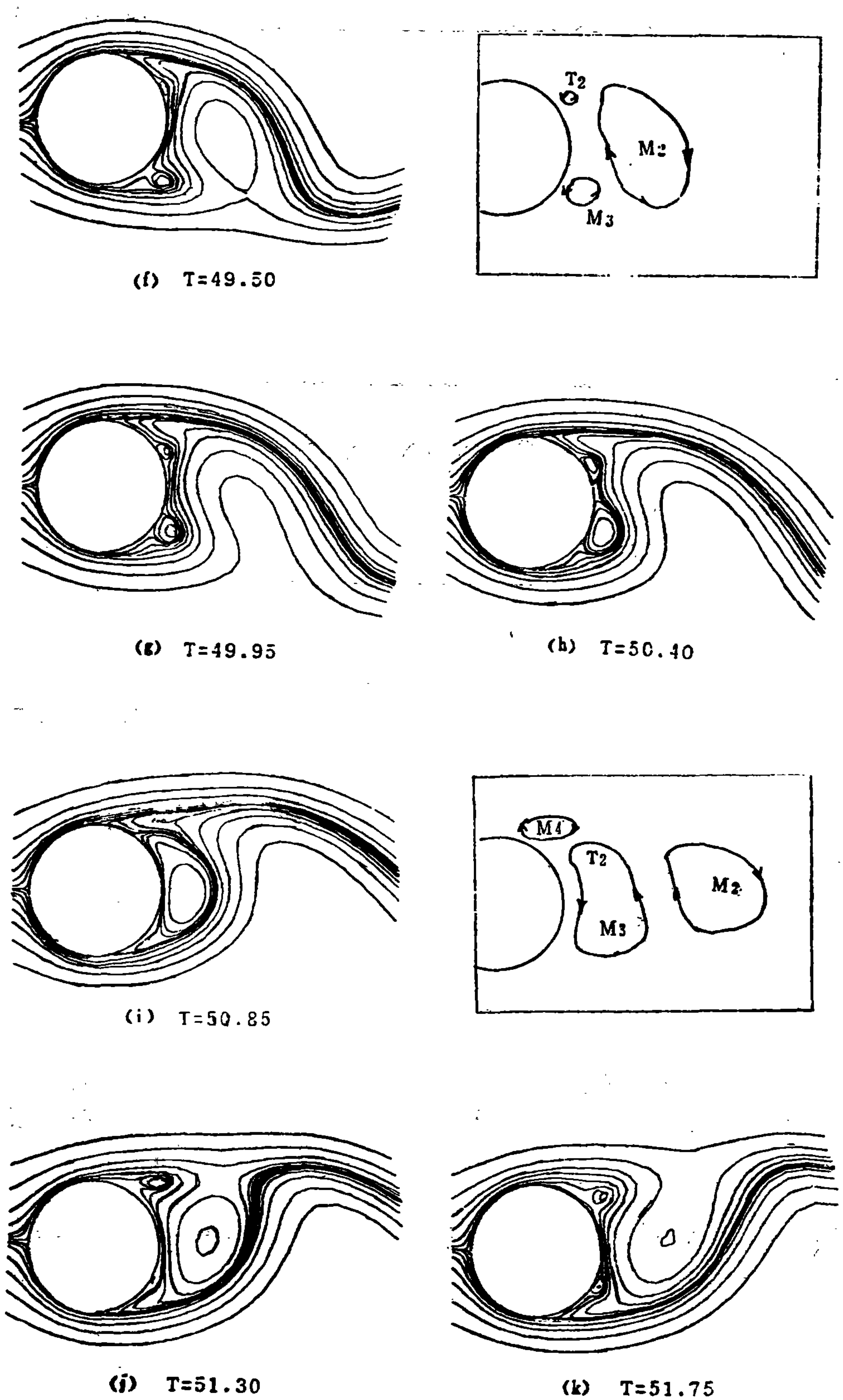


图 4　不同时刻的流线图(稳态)

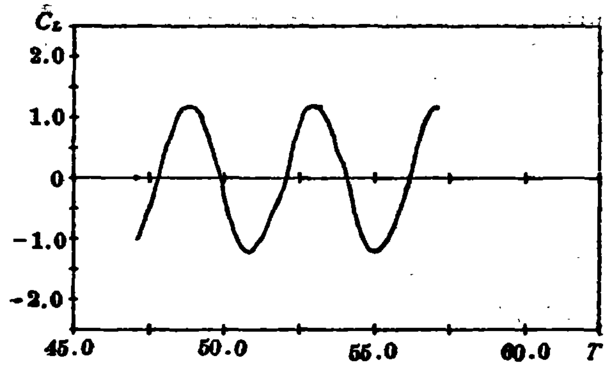


图 5 升力随时间变化

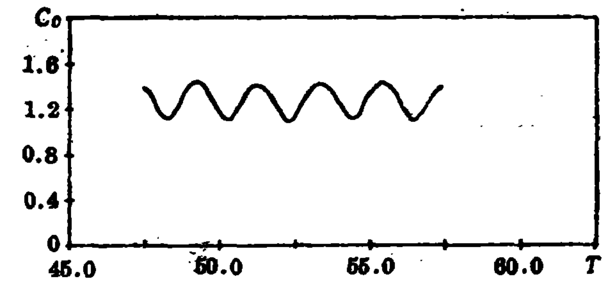


图 6 阻力随时间变化

(网格点数约18000，空间导数用中心差分离散)得到与本文类似的结果。

图5为圆柱的升力系数随时间变化过程，图6为阻力系数随时间变化的过程，阻力的变化周期约为升力的两倍，斯图罗哈数 $S_t=0.237$，接近于实验的0.19～0.22的值，但还有一定差距，原因可能是计算区域取得不够大，导致了类似风洞中的堵塞效应。

本文的计算未采用湍流模型，而直接解时间相关的Navier-Stokes方程，对于小于网格尺度和小于时间增量 Δt 的脉动没有考虑，得到的结果和实验仍有差别，其原因还有待研究。但用本文的方法是有可能提供一些有用的信息，如圆柱后的涡的形成、合并、脱落的过程，这将给我们提示解决问题的办法。

六、结　　论

本文用有限元-有限差分混合法模拟了 $Re=1200$ 时圆柱绕流问题，以三阶迎风格式离散对流项，有利于计算较高 Re 数的流动，对于修正压力的方程采用有限元离散，可适应复杂边界，针对方程的具体特点，用直接法求解，速度也较快、用贴体坐标变换可将有限元-有限差分结合起来。

由计算结果，可看出涡街交替脱落过程中主涡与二次涡合并脱落现象，其确定性有待物理实验的验证。

参 考 文 献

[1] 赖国璋 穆维贤 陈 雄，非定常 N-S 方程的分裂时间步势函数有限元解法，第四届全国计算流体力学会议论文集，上海，1988.

[2] T. Kawamura K. Kuwahara, Computation of High Reynolds Numbers Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness, AIAA paper 84—340, 1984.

[3] M. Braza P. Chassaing and H. Ha. Minh, Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder, J. Fluid Mech., Vol. 165, pp. 79—130, 1986.

FDM-FEM Approach for Unsteady Incompressible Flow Computations

Lai Guo-zhang *Liu Jian* *Liu Jian-lin*

(Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology)

Abstract

Unsteady incompressible flow around a circular cylinder is analysed by direct integration of Navier-Stokes equations using a hybrid method between a finite-difference method (FDM) and a finite-element method (FEM). In this method, a high-order upwind scheme expressed easily in FDM is used to discrete convective terms in the N-S equations. The Poisson equation for the correct pressure P is solved by FEM. The Reynold number is 1200. Some meaningful results are gotten.

Key words: unsteady flow, incompressible flow, finite-difference method, finite-element method.