

文章编号:1007-4708(2010)05-0862-06

不可压缩粘性流动的 CBS 有限元解法

孙 旭, 张家忠*, 周志宏, 徐 忠

(西安交通大学 能源与动力工程学院, 西安 710049)

摘 要:对于二维不可压缩粘性流动, 首先通过坐标变换的方式得到了的不含对流项的 NS 方程, 并给出了 CBS 有限元方法求解的一般过程。结合一类同时含有压力和速度的出口边界条件, 对方腔顶盖驱动流、后向台阶绕流和圆柱绕流进行了计算。所得结果与基准解符合良好, 验证了 CBS 算法对于定常、非定常粘性不可压缩流动问题的可行性和所用出口边界条件的无反射特性。特别的, 对于圆柱绕流, $Re=100$ 时非定常升、阻力系数及漩涡脱落等非定常都得到了较好地模拟, 为进一步研究自激振动等更加复杂的非定常流动问题奠定了基础。

关键词: CBS; 有限元; 方腔顶盖驱动流; 后向台阶绕流; 圆柱绕流

中图分类号: O242.21; O357.1 **文献标识码:** A

1 引 言

与有限差分法相比, 有限单元法在流体力学中的应用相对较晚, 直至 20 世纪 70 年代, Veries 和 Norrie^[1] 才首次应用 Galerkin 有限单元法求解了平面势流问题。然而, 当进一步将常规的 Galerkin 有限元应用到 NS 方程的求解中时, 由于非线性对流项的作用, 较高雷诺数下的数值解振荡剧烈。为了解决该问题, Petrov-Galerkin 迎风有限元^[2]、Taylor-Galerkin 有限元^[3] 等多种算法应运而生, CBS(Characterictic-Based Split)^[4-7] 有限元方法也是其中的一种。CBS 算法由 Zienkiewicz 等于上世纪 90 年代提出, 是一种同时适用于不可压缩、可压缩流动的 NS 方程数值解法, 经过多年的发展, 已经在众多流动问题中得到了广泛的应用^[7]。与其他方法相比, 采用 CBS 算法求解不可压缩粘性流动更加简便, 因为其允许采用同阶的速度和压力插值函数, 避开了 BB(Babuška-Brezzi) 条件。本文首先从坐标变换的角度重新推导了不可压缩粘性 NS 方程, 给出了 CBS 解法的一般过程。然后, 结合一类出口边界条件, 对方腔顶盖驱动流、后向台阶绕流、单圆柱绕流三个经典问题进行了求解, 用来验证算法的可行性以及出口边界条件在定常、非

定常情况下的无反射特性, 为进一步求解具有可动边界等更为复杂的流动问题奠定了基础。

2 控制方程

以原始变量形式的粘性不可压缩 NS 方程作为流动控制方程, 不考虑重力等体积力的影响时, 其无量纲形式为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + Re^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

式中 p 为压强, $Re = UL/\nu$, 其中 U 和 L 分别为参考速度和特征长度, ν 为运动粘性系数。

采用常规的 Galerkin 有限元法对式(1) 进行计算时, 当 Re 较高时会出现严重的数值振荡, 主要由动量方程中的非线性对流项引起, 为此引入新的坐标 $x'_i = x'_i(x_i, t)$, 希望通过坐标变换的方式去掉该项。令

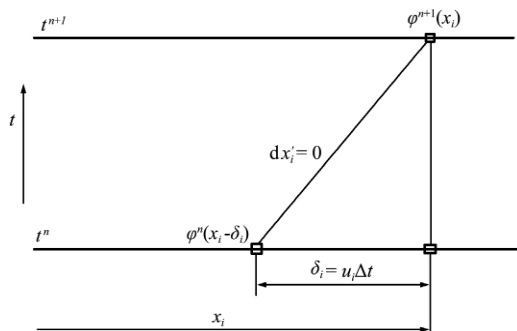


图1 流动参数在不同坐标系下的变化关系

Fig.1 Variation of the flow variable in different coordinates

收稿日期:2008-08-27; 修改稿收到日期:2010-01-23.

基金项目: 新世纪优秀人才支持计划(NCET-07-0685)

资助项目.

作者简介: 孙 旭(1982-), 男, 博士;

张家忠*(1968-), 男, 博士, 教授, 博士生导师

E-mail: jzhang@mail.cc.xjtu.edu.cn

$$\frac{\partial x'_i}{\partial t} = -u_i, \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} = 1.0 \tag{2}$$

对式(1)采用链导法,结合式(2)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x'_i} &= 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{x'_i = \text{Const}} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \tag{3}$$

该式即为坐标系 (x'_i, t) 下的不可压缩 NS 方程。考虑到坐标变换关系式(2)还可以表示为 $dx'_i = dx_i - u_i dt$, 式(3)中 u_i 随时间变化时必须满足 $dx_i - u_i dt = 0$ 或 $dx_i/dt = u_i$ 。式(3)中任一流动参数 φ 在的变化过程如图 1 所示。

3 CBS 有限元解法

3.1 CBS 算法

根据图 1,在 (x'_i, t) 坐标系下对式(3)中的动量方程进行离散可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [u_i^{n+1} \Big|_{x_k} - u_i^n \Big|_{(x_k - \delta_k)}] &= \\ \theta \left(\text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{n+1} \Big|_{x_k} &+ \\ (1 - \theta) \left(\text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^n \Big|_{(x_k - \delta_k)} \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 0$ 时为显式, $\theta = 1$ 时为隐式格式, x_k 代表求解区域中的某一空间位置, 取 $\delta_k = u_k^n \Delta t$ 。保持式(4)的压力项不变,耗散项采用显式格式,利用泰勒展开式可以得到 x_k 处的关系式:

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= u_i^{n+1} - u_i^n = \\ -\Delta t \left[\frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j} - \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} \right] &+ \\ \frac{\Delta t^2}{2} u_i^n \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} - \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^n \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} = \theta \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1 - \theta) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \tag{6}$$

采用文献[4]中的算子分裂法对式(5)进行求解,引入中间变量 u_i^* , 满足

$$\begin{aligned} \Delta u_i^* &= u_i^* - u_i^n = \\ -\Delta t \left[\frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j} - \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} \right] &+ \\ \frac{\Delta t^2}{2} u_i^n \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} - \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^n \end{aligned} \tag{7}$$

将上式代入式(5),可以得到

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= u_i^{n+1} - u_i^n = \\ \Delta u_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_i^n \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial p}{\partial x_l} \right)^n \end{aligned} \tag{8}$$

结合连续性方程,由式(8)可得

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i^n + \Delta u_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_i^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)^n \right] = 0 \tag{9}$$

省略高阶导数项整理得

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right) &= \\ \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i^n + \Delta u_i^* - \Delta t (1 - \theta) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \tag{10}$$

根据以上各式,不可压缩 NS 方程的求解可以按照以下步骤进行。

- (a) 设定初始时刻流场的压力 p^0 和速度 u_i^0 。
- (b) 利用已有速度分布 u^n , 求解方程(7), 得到

Δu_i^* 。

- (c) 求解方程(10), 计算下一时刻的压力 p^{n+1} 。

- (d) 求解方程(8), 得到下一时刻的速度 u_i^{n+1} 。

- (e) 将改进后的速度场和压力场作为下一层迭代的初值, 重复上述步骤, 直到获得收敛的解。

3.2 Galerkin 有限元法

对于方程(7,8)和(10)采用 Galerkin 有限元法进行了求解。流场区域采用三角形网格进行剖份,速度和压力采用相同的线性插值基函数 N_k 进行逼近。

根据 Galerkin 加权余量法,由式(7)可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_k \Delta u_i^* d\Omega &= - \\ \Delta t \left(\int_{\Omega} N_k \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} d\Omega + \text{Re}^{-1} \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega \right)^n &- \\ \frac{\Delta t^2}{2} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_k u_l}{\partial x_l} \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} d\Omega \right)^n &+ \\ \Delta t \text{Re}^{-1} \int_{\Omega} N_k \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} n_j d\Gamma \end{aligned} \tag{11}$$

式中 $\bar{\Omega}$ 代表计算区域的边界, n_j 为边界外法向向量。推导过程中省略了高阶导数项和含有 Δt^2 项的边界积分项。

由式(10)可得:

$$\begin{aligned} \theta \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega &= - \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} N_k \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x_i} \Delta u_i^* d\Omega &- \\ (1 - \theta) \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x_i} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega &- \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} N_k (u_i^n - u_i^*) n_i d\Gamma \end{aligned} \tag{12}$$

其中的边界积分项结合关系式(8)得到。

同理可得方程(8)的积分形式:

$$\int_{\Omega} N_k \Delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} N_k \Delta u_i^* d\Omega -$$
$$\Delta t \int_{\Omega} N_k \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} d\Omega - \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial N_k u_l^n}{\partial x_l} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega \quad (13)$$

上式同样省略了含有 Δt^2 项的边界积分项。

4 算例及分析

采用以上方法对方腔顶盖驱动流、后向台阶绕流和单圆柱绕流进行了模拟,以验证该算法的可行性。同时,还考查了一类出口边界条件对于定常、非定常流动的适应性和无反射特性。

4.1 方腔顶盖驱动流

图 2 为方腔顶盖驱动流的流场模型和计算网格。壁面均采用无滑移边界条件,顶盖上 A,B 两角点速度取零,剩余节点具有相同的水平速度 1.0,在 B 点设定压力边界条件 $p=0$ 。采用三角形网格,总体节点数 1681,单元数 3200。

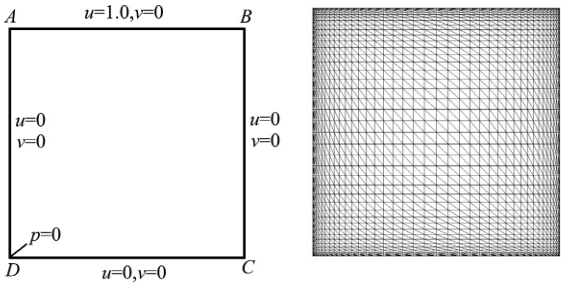


图 2 方腔顶盖驱动流流场模型及计算网格
Fig. 2 Solution domain and computation mesh of the lid-driven flow in a square cavity

采用 CBS 算法对不同 Re 下的稳态流场进行了计算,并与基准解^[8]进行了对比,部分结果如图 3 所示。计算所得方腔水平、竖直中心线上的速度与基准值非常吻合,验证了该算法对于方腔顶盖驱动流的可行性。

4.2 后向台阶绕流

为了验证本文算法对具有出口边界的流动问题的适应性,对后向台阶绕流进行了计算。

图 4 为后向台阶绕流问题的流动模型和计算

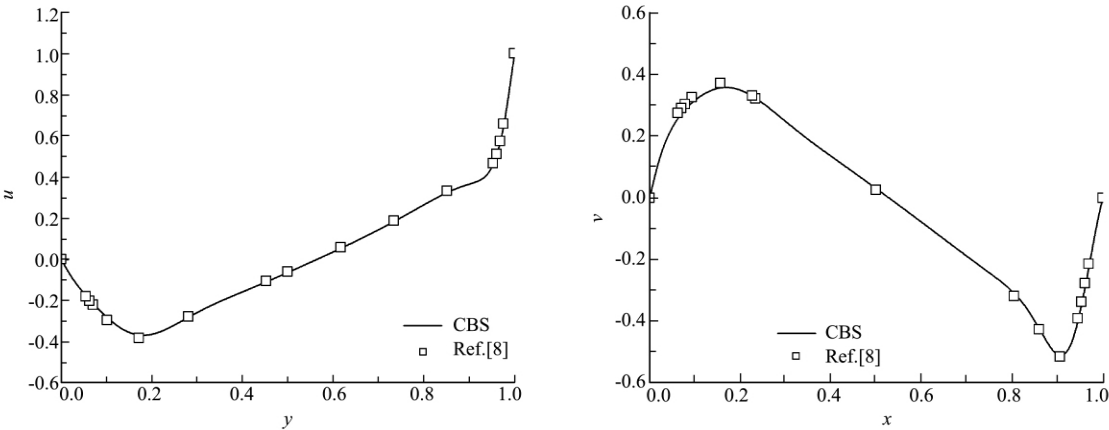


图 3(a) Re = 1000 中心线速度分布
Fig. 3(a) Velocity distribution along the center lines of the cavity, Re = 1000

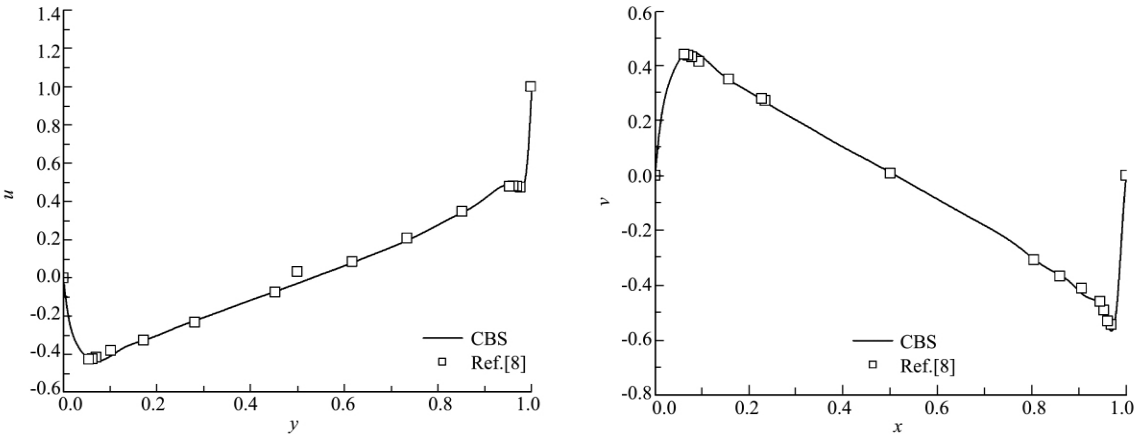


图 3(b) Re = 10000 中心线速度分布
Fig. 3(b) Velocity distribution along the center lines of the cavity, Re = 10000

表 1 网格划分

	$xl = 30.0$	$xl = 15.0$	$xl = 7.0$
稀网格	300×20	150×20	70×20
密网格	600×40	300×40	140×20

网格示意图,其中 xl 表示出口边界所处的位置。流场区域采用三角形网格进行剖分,通过均分 x,y 边界得到。分别取 $xl = 30.0,15.0$ 和 7.0 ,结合出口边界条件^[9]:

$$-p + \text{Re}^{-1} \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0 \tag{14}$$

对 $\text{Re} = 800$ 时的流场进行了计算。使用了疏密不同的两套网格见表 1,网格密度通过 x,y 边界所分份数加以表示。对于同一个出口边界,采用稀疏网格计算的结果与密网格相比基本相同,这里只给出稀疏网格对应的计算结果。

图 5(a,b) 分别为出口边界 $xl = 7.0$ 和 15.0 时计算所得 $x = 7.0,15.0$ 两截面处的水平速度分

布,与文献[10] 给出的基准解非常符合,说明了该算法的准确性。同时,采用式(14) 给出的出口边界条件进行计算时,对于出口存在回流的情况($xl = 7.0$) 仍然得到了比较准确的结果,反映出了该边界条件的无反射特性。为了更好地说明这一点,图 6 给出了 $xl = 30.0$ 和 $xl = 7.0$ 时计算所得的流线图。通过对比不难看出,将出口设置在存在回流的截面上并没有对其上游的流场造成显著的影响。

4.3 单圆柱绕流

对 $\text{Re} = 100$ 时的圆柱绕流进行了计算,用来检验 CBS 算法以及出口边界条件(14) 对于非定常绕流问题的适用性。各边界设定如下:取入口及上下侧边界到圆柱中心的距离为 $8D$ (D 为圆柱直径),采用入口边界条件,取 $u = 1.0, v = 0.0$,出口边界位于下游 $25D$ 处,采用式(14) 给出的出口边界条件。图 7 所示为分块生成的网格,含有 5452 个

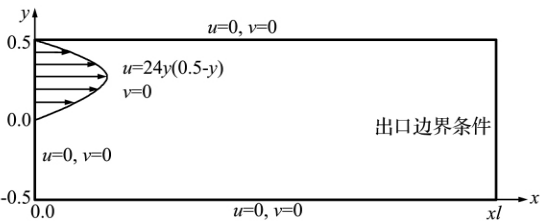


图 4 后向台阶绕流场模型及计算网格

Fig. 4 Solution domain and computational mesh of the flow over a backward-facing step

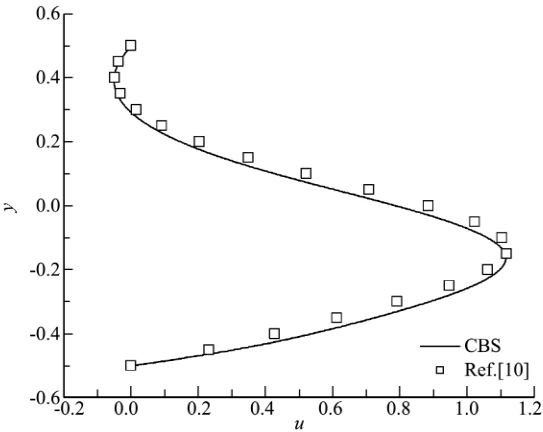
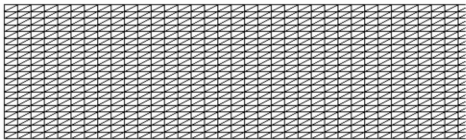


图 5(a) $xl = 7.0$ 时 $x = 7$ 截面处速度 u
Fig. 5(a) u -velocity along section $x = 7$ when $xl = 7.0$

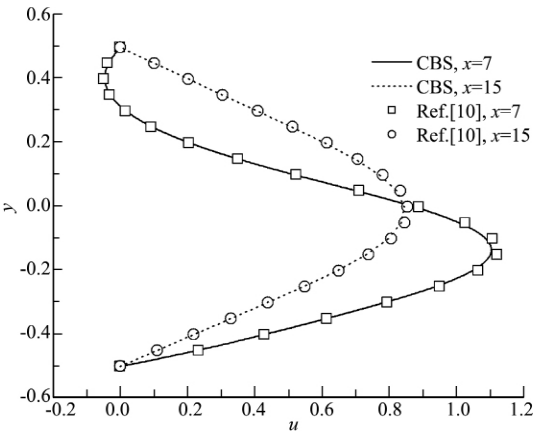


图 5(b) $xl = 15.0$ 时 $x = 7,15$ 截面处速度 u
Fig. 5(b) u -velocity along sections $x = 7$ and 15 when $xl = 15.0$

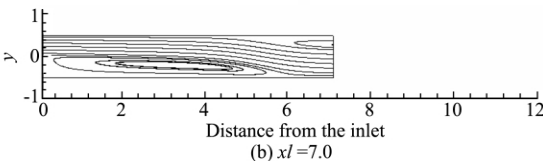
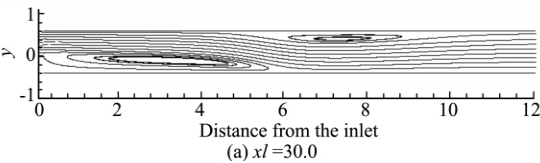


图 6 出口边界不同时得到的流线图

Fig. 6 Streamline patterns obtained from different outlet location

节点,10556 个三角形单元,圆柱外部第一层节点距离圆柱 $0.016D$ 。

图 8 为计算所得圆柱非定常升、阻力系数,所得结果与文献[11] 给出的基准解基本符合。说明采用 CBS 算法结合式(14) 中的出口边界条件对圆柱绕流问题进行求解是可行的。

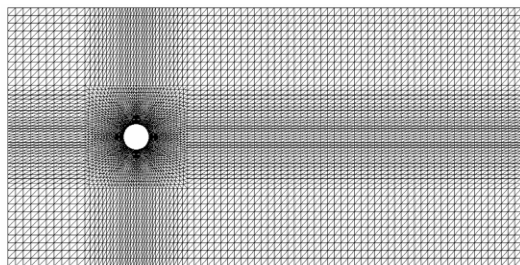


图 7 圆柱绕流计算网格

Fig. 7 Computational mesh for incompressible flow past a circular cylinder

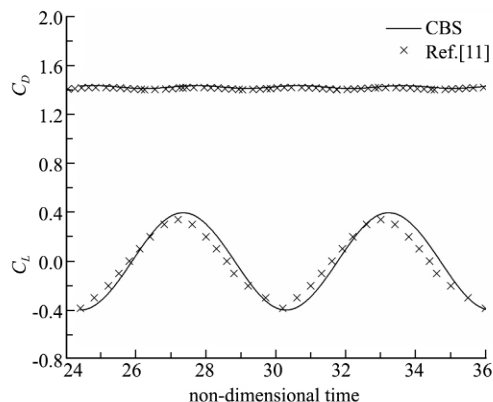
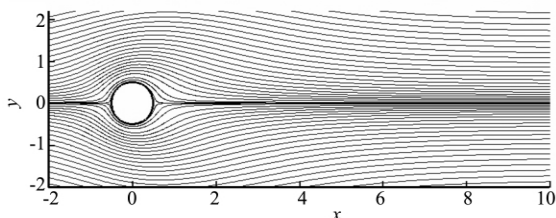
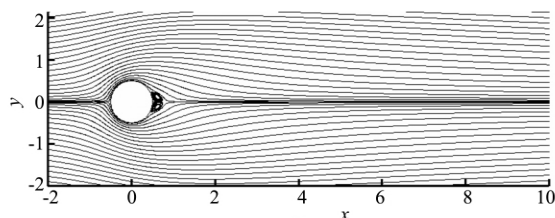


图 8 $Re = 100$ 时圆柱非定常升、阻力系数

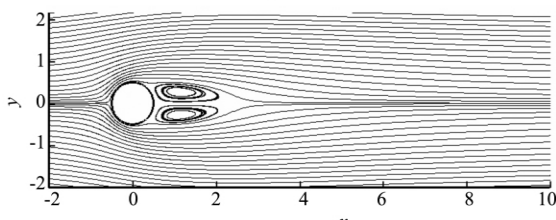
Fig. 8 Coefficients of lift and drag on the circular cylinder at $Re = 100$



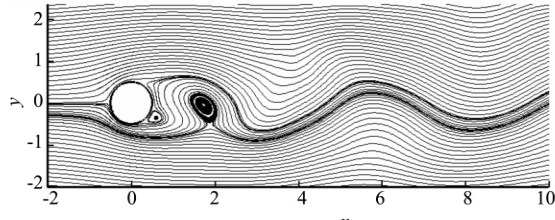
(a) $Re=2.0$



(b) $Re=10.0$



(c) $Re=35.0$



(d) $Re=100$

图 9 不同 Re 数下的流线图

Fig. 9 Streamline pattern of the flow past a circular cylinder under different Reynolds number

5 结 论

本文给出了 CBS 有限元求解不可压缩粘性流动的一般过程,结合一类同时含有压力和速度的出口边界条件,对方腔顶盖驱动流、后向台阶绕流和单圆柱绕流进行了求解,所得结果与基准解符合良好,说明了该算法在定常、非定常不可压缩粘性流动问题中的可行性,为进一步求解自激振荡、动态失速等更加复杂的非定常流动问题奠定了基础。

参考文献 (References):

[1] De Vries G, Norrie D H. The application of the finite element technique to potential flow problems

[J]. *J Appl Mech*, ASME Transactions, 1971, **38** (4):798-802.

[2] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation[J]. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1982, **32**(1-3):199-259.

[3] Donea J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems[J]. *Int J Num Meth Eng*, 1984, **20**(1):101-109.

[4] Zienkiewicz O C, Codina R. A general algorithm for compressible and incompressible flow, part I: the Split, Characteristic-Based scheme[J]. *Int J Num Meth Fluids*, 1995, **20**(8-9):869-885.

[5]

Zienkiewicz O C, Codina R, Morgan K, et al. A general algorithm for compressible and incompressible flow, part II : tests on the explicit form[J]. *Int J Num Meth Fluids*,1995,**20**(8-9):887-913.

[6]

Codina R, Vázquez M, Zienkiewicz O C. A general algorithm for compressible and incompressible flow, part III : the semi-implicit form[J]. *Int J Num Meth Fluids*,1998,**27**(1-4):13-32.

[7]

Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method Volume 3: Fluid Dynamics* [M]. 5th Edition, Oxford, UK;Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

[8]

Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. *J Comput Phys*, 1982,**48**(3):387-411.

[9]

Sani, R L, Gresho, P M. Résumé and remarks on the open boundary condition mini-symposium[J]. *Int J Num Meth Fluids*,1994,**18**(10):983-1008.

[10]

Gartling D K. A test problem for outflow boundary conditions: flow over a backward-facing step[J]. *Int J Num Meth Fluids*,1990,**11**(7):953-967.

[11]

Engelman M S, Jamnia M A. Transient flow past a circular cylinder: a benchmark solution [J]. *Int J Num Meth Fluids*,1990,**11**(7):985-1000.

On the application of the CBS finite element method to the incompressible flow

SUN Xu, ZHANG Jia-zhong*, ZHOU Zhi-hong, XU Zhong

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A finite element method for the incompressible flow, the Characteristic-Based Split (CBS) algorithm, is presented in this paper. First, the convective term of the incompressible Navier-Stokes (NS) equation is eliminated via a coordinate transformation, and then the calculation procedure of CBS algorithm is presented. Combined with a type of outflow boundary condition, typical problems of the incompressible flow including the lid-driven flow in a square cavity, flow over a backward-facing step and the flow past a circular cylinder are calculated. Numerical results from CBS are compared with the benchmark solutions, and a good agreement is achieved. Especially, for the flow past a circular cylinder at $Re=100$, a good simulation of the unsteady phenomena such as the oscillatory coefficients of lift and drag and the vortex shedding are achieved, which lays a solid foundation for the further study of flow problems such as the flow-induced vibration.

Key words: CBS; finite element method; lid-driven cavity flow; backward-facing step; circular cylinder