

文章编号: 1006-6780(2001)01-0062-05

粘性流体圆柱绕流的有限元模拟

樊洪明¹, 王小华², 何钟怡²

(1. 清华大学 博士后流动站, 北京 100084; 2. 哈尔滨工业大学 市政环境工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150090)

摘要 对粘性流体圆柱绕流进行了数值模拟。根据三阶Taylor展开弱解的概念, 在二阶分裂步Taylor-Galerkin有限元法基础上, 采用时间推进和张量分析的方法推导了对流扩散通用微分方程的ETG有限元离散格式。对Reynolds数为32、102和250的粘性流体圆柱绕流流场进行了数值仿真, 数值模拟结果与实验结果吻合良好。表明隐含流线迎风耗散作用并具有三阶部分展开的Taylor-Galerkin有限元法稳定性好, 精度较高, 可用于计算包含对流扩散耦合传递动量的绕流问题及类似的流动问题。

关键词 粘性流体; 流场; 数值模拟; 圆柱绕流; 对流扩散; 离散格式; 有限元法; 时间推进法

中图分类号: O333.18 文献标识码: A

Numerical simulation of viscous flow round a circular cylinder by finite element method

FAN Hong-ming¹, WANG Xiao-hua², HE Zhong-yi²

(1. Post Doctoral Station, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. School of Municipal & Environmental Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

Abstract Presents the numerical simulation of viscous flow round a circular cylinder using the concept of weak-solution of third order Taylor expansion, the ETG finite element discretization scheme of general convective-diffusion equations deduced on the basis of Taylor-Galerkin finite element method with time fractional step and tensor analysis ($Re=32, 102, 250$) with results in good agreement with the experimental data available and the better stability and accuracy of the implied streamline up-winding dissipation and partly third-order expansion Taylor-Galerkin finite element method revealed, which can be used to solve such problems as coupling convective-diffusion and transported momentum of flow around bodies.

Key words: viscous fluid; flow field; numerical simulation; flow past a circular cylinder; convective-diffusion; discretization scheme; finite element method; time stepping method

在计算流体力学 (CFD) 的数值方法中有限差分法占据主导地位。从网格的角度看, 有限差分法一般属于结构化网格数值方法, 对于几何形状复杂的实际问题而言其网格生成较困难且费时。而有限元法属于非结构化方法, 网格问题的处理要灵活得多, 特别是几何形状和边界条件复杂时, 更显示出其优越性。此外, 有限元法能统一处理各类边界条件, 便于编写通用的计算机程序, 同时它具有丰富的数学结构, 多数情况下可以达到很高精度。因此, 近年来有限元法已成为计算流体力学中常用的重要方法之一。

在流体力学的控制方程中, 对流算子是非对称的, N-S方程中的对流算子还是非线性的, 对流项处理不好往往会引起数值耗散和伪振荡, 甚至于不稳定^[1], 特别在非线性问题中更是如此。从有限元法应用于计算流体力学以来, 很重要的一个研究方面就是高Reynolds数下流动的有限元解法。一种方

收稿日期: 2000-06-30

作者简介: 樊洪明(1964-), 男, 清华大学博士后。

法是加密网格以降低网格Reynolds数, 例如使每个单元的局部Reynolds数 $Re < 2$, 这样做虽然可以抑制伪振荡, 但计算时间和对计算机内存的需求都大大增加; 另一种方法是借鉴有限差分法中对流项的处理方法, 在有限元法中引入所谓的“迎风”机制, 其基本思想是在加权余量法中采用考虑来流上游效应的不对称权函数。80年代中期以来, 计算流体力学有限元法研究的一项重要成果是由Jean Donea^[2]提出的Taylor-Galerkin有限元法。这种方法对时间导数项采用时间向前的Taylor展开式展开, 其中至少包括二阶以上的时间导数项, 再根据控制方程, 将时间导数转化为对空间的导数, 得到一般的时间离散方程, 然后, 利用标准的Galerkin有限元法在空间上离散。Taylor-Galerkin有限元法不需要使用特殊的权函数, 不用确定人工耗散自由参数来达到高精度, 可以很好应用于处理变系数问题 and 多维问题, 具有较高的精度和稳定性。在Taylor-Galerkin有限元法中, 一般采用二阶Taylor级数展开, 这样做虽然可以大大降低公式推导的复杂性, 但精度较低。本文拟根据三阶Taylor展开弱解的概念, 在二阶分裂步Taylor-Galerkin有限元法^[3]基础上, 采用张量分析的方法推导典型流体动力学方程——多维粘性非定常对流扩散通用方程式的整体有限元列式——Euler-Taylor-Galerkin (ETG) 格式。

粘性流体绕圆柱流动是流体力学经典问题之一。由于实际工程的需要, 很长时期以来, 这种以钝体分离流及涡旋运动为主要特征的圆柱绕流问题一直受到密切关注, 人们从实验、理论分析和数值模拟角度进行了大量的研究^[4-6]。众多学者对此进行的深入实验研究, 取得了共识: 当 $Re < 5$ 时, 流动无分离, 绕流流场在圆柱上下游是对称的; 当 $5 < Re \leq 40$ 时, 在圆柱下游出现一对稳定的对称附着涡; $Re > 40$ 时, 圆柱下游为不稳定层流尾迹流动; 当 $40 < Re < Re_c$ (Re_c 为临界Reynolds数) 时, 流动是层流基础上迭加Karman涡街。由此可见, 尽管圆柱的几何形状非常简单, 但是仅在层流流态下, 绕流所形成的流场就蕴涵着如此丰富的内容, 理所当然会引起人们的浓厚兴趣, 研究者经常以这种流动来检验算法的稳定性和精度。

本文拟用前述ETG格式有限元法离散求解Navier-Stokes方程组, 对粘性流体绕圆柱流动进行数值仿真, 以验证这种有限元离散格式的稳定性和精度。

1 计算方法

二维非定常粘性不可压缩流动的控制方程为Navier-Stokes方程, 笛卡尔坐标系下, 其无量纲形式可写为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (i=1, 2) \quad (2)$$

式中: u_i 为 x_i 方向的速度分量; p 为压应力; Re 为Reynolds数。

将控制方程式 (2) 写成对流扩散形式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + Q \quad (3)$$

式中: ψ 为待求物理量 (这里为速度 u_i); α 为扩散系数; Q 为源项。

将式 (3) 中的非稳定项对时间作三阶Taylor展开, 此时出现了因变量对时间的各阶导数, 再把对时间的导数转化为对空间的导数, 便出现我们所需要的“人工粘性”项, 得到稳定的计算格式^[2]。

取单元近似函数为

$$\psi = N_J \psi_J(t) \quad (4)$$

式中: N_J 为单元形函数; $\psi_J(t)$ 为 t 时刻节点 J 的因变量值, $J=1, 2, \dots, m$, m 为单元节点个数。采用Galerkin有限元离散

$$A_{IJ} \dot{\psi}_J = B_{IJ} \psi_J + F_I \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned}
A_{IJ} &= \int_{\Omega^e} N_I N_J d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \alpha \Delta t \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{1}{6} \Delta t u_j u_k \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \frac{\partial N_J}{\partial x_k} d\Omega \\
B_{IJ} &= \int_{\Omega^e} (-N_I u_k \frac{\partial N_J}{\partial x_k} - \alpha \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i}) d\Omega - \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \Delta t u_j u_k \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \frac{\partial N_J}{\partial x_k} d\Omega \\
F_I &= \int_{\Omega^e} (N_I + \frac{1}{2} \Delta t u_j \frac{\partial N_I}{\partial x_j}) Q d\Omega
\end{aligned}$$

式中： Ω^e 为单元域； Ω 为计算域； $\dot{\psi}_j$ 为因变量对时间的一阶导数。

将计算域所有单元的有限元方程迭加在一起，构成总体有限元方程

$$A \dot{\psi} = B \psi + F \quad (6)$$

式中： $A=(A_{IJ})$ ； $B=(B_{IJ})$ ； $F=(F_I)$

式(6)即为多维对流扩散方程Taylor展开下的Galerkin有限元离散方程。这种离散格式具有较高精度并且隐含流线迎风的耗散作用，可有效地用于高雷诺数流动。

本文采用压力校正法^[6,7]求解N-S方程组。对离散方程组采用迭代法求解。设 t 时刻的速度与压力分别为 u_i^n 和 p^n ， $t+\Delta t$ 时刻的速度与压力分别为 u_i^{n+1} 和 p^{n+1} 。压力改进值 p^{n+1} 与原来压力 p^n 之差记为 δp^n ，相应的速度修正量记为 δu_i^n ，则有

$$p^{n+1} = p^n + \delta p^n \quad (7)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \delta u_i^n \quad (8)$$

压力校正法保证任何时刻的速度场均满足连续方程。如果把 p^n 作为初始压力场来求解N-S方程，所得速度场不能满足连续方程，因此，该速度场不能作为 $t+\Delta t$ 时刻的速度场，只能作为 $t+\Delta t$ 时刻速度场的近似值，记作 u_i^* 。为了达到使 u_i^* 满足连续方程的目的，必须根据连续方程对 u_i^* 进行修正。由N-S方程可知，速度场修正的同时，压力场也必然作相应的修正。所以，在解的迭代改进过程中，应始终保持压力修正量与速度修正量保持一定关系，直到满足要求为止。根据二步算法，压力修正 δp^{n+1} 的Poisson方程为下列形式

$$\frac{\partial^2 \delta p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (9)$$

如果速度场的当前值 u_i^* 使式(9)的右端项为零，说明此刻的速度满足连续方程，而且压力修正量为零，已经得到速度场和压力场的收敛解。如果 u_i^* 不能使式(9)的右端项为零， $\partial u_i^* / \partial x_i$ 就会产生压力修正的动力，当流场收敛后，这个动力则自然消失。

对式(9)采用常规的Galerkin有限元法求解。取 $\delta u_i^{n+1} = N_j \delta u_j^{n+1}(t)$ ， $\delta p^{n+1} = N_j \delta p_j^{n+1}(t)$ ，其中， N_j 为单元插值函数 $(\delta u_i^{n+1})_j$ 与 $\delta p_j^{n+1}(t)$ 分别为时刻结点 j 的速度修正值和压力修正值。可得单元有限元方程为

$$A_{IJ} \delta p_j^{n+1} = B_I + \int_{\Gamma} \frac{\partial \delta p^n}{\partial n} N_I ds \quad (10)$$

$$\text{式中：} A_{IJ} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} d\Omega ; B_I = \int_{\Omega^e} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} N_I d\Omega$$

压力修正Poisson方程边界条件提法极其重要。在给定速度的边界上，速度无须修正，对于压力Poisson方程来说，相当于Neumann边界条件，有限元法可以自动满足这种自然边界条件；在给定压力的边界上，速度无须修正，对于压力Poisson方程来说，相当于Derichlet边界条件，对于这种本质边界条件，有限元法要求给出这类边界上的压力值。

为了比较精确和快速地求解压力Poisson方程，本文采用直接解法——Choleski-Banachiewicz因式分解法，这种方法不仅精度较高，而且可以利用系数矩阵的稀疏性使其存储量大大压缩^[8]。由于有限元

方程的系数矩阵具有高度稀疏性, 如果对系数矩阵采用变带宽存储, 则直接法所占用的机器内存比迭代法增加并不多, 但可以大大减少机上求解时间, 因而这种方法显得更加优越。本文对系数矩阵采取一维变带宽存储方式^[9]。此外, 为了简化计算, 提高计算效率, 便于编程, 本文还采用了有限元质量矩阵对角化技术^[1]。

2 圆柱绕流计算结果

图1为圆柱绕流计算模型, 坐标原点设在圆心, 取圆柱直径为1。为了使数值计算结果更接近无限空间内的圆柱绕流, 计算域应取得足够大, 为此, 上游边界距圆心4倍直径, 下游边界距圆心50倍直径, 上、下侧边界分别距圆心5倍直径。由于圆柱附近流场比较复杂, 含有分离、旋涡及其脱落等现象, 因此在这一区域需要布置较为密集的网格节点, 而在远离圆柱的区域, 则可布置得较稀疏一些, 以节省整个计算的工作量, 按照这样的原则, 将计算域划分为11520个单元, 11824个节点, 如图1所示。取Reynolds数分别为 $Re=32$ 、102和250三种情况进行数值模拟。入流的无因次速度取为1; 无量纲时间步长取为0.001。固定壁面, 包括圆柱表面的无因次速度取作0; 出口断面作为0压力参考面。

图2 (a)、(b) 为 $Re=32$ 的数值计算结果; 图3 (a)、(b) 为 $Re=102$ 的数值计算结果; 图4 (a)、(b) 为 $Re=250$ 的数值计算结果; 从数值模拟结果看到, $Re=32$ 时, 在圆柱的下游有一对稳定的对称附着涡 (如图2); $Re=102$ 时, 流动变得不稳定, 出现层流卡门涡街 (如图3); $Re=250$ 时, 涡街破碎, 层流涡变成湍流涡, 流动变得复杂 (如图4)。

从以上数值模拟结果与文献[5、6]中相应的实验照片比较可以发现, 两者是吻合的, 而且模拟结果与理论分析以及前人的大量研究成果是一致的, 证明本文的有限元离散格式对含有十分丰富流动机理的圆柱绕流计算是有效的, 而且具有较高的稳定性。此外, 可以看到有限元法在处理这种曲边边界时所体现的良好边界适应性。

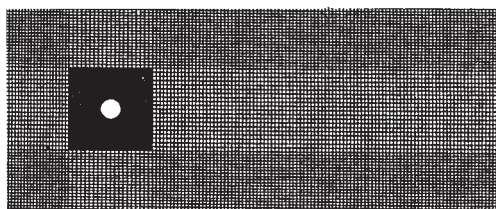
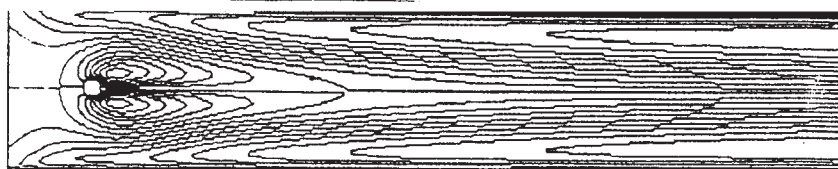


图1 圆柱绕流计算模型与网格划分

Fig.1 Calculating model and grids of calculating domain



(a) $Re=32$ 流线

(a) Streamlines at $Re=32$

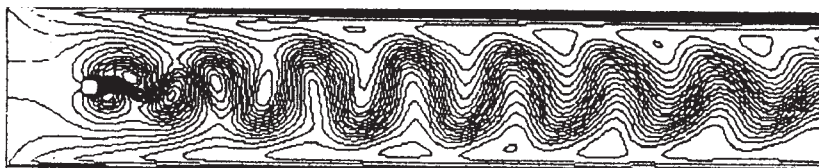


(b) $Re=32$ 等压线

(b) Pressure contours at $Re=32$

图2 圆柱绕流计算结果

Fig.2 Calculating results of flow past a circular cylinder



(a) $Re=102$ 流线

(a) Streamlines at $Re=102$

(b) $Re=102$ 等压线(b) Pressure contours at $Re=102$

图3 圆柱绕流计算结果

Fig.3 Calculating results of the flow past a circular cylinder

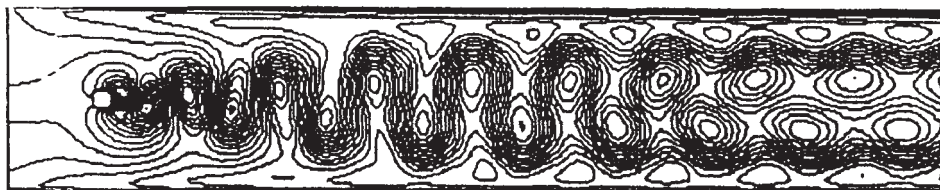
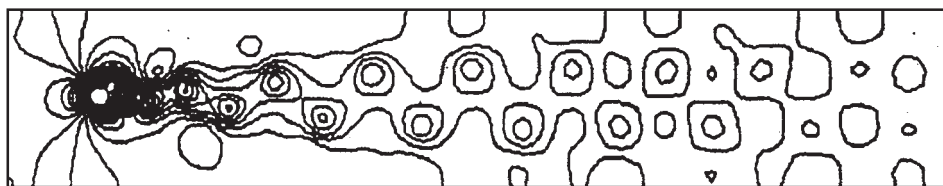
(a) $Re=250$ 流线(a) Streamlines at $Re=250$ (b) $Re=250$ 等压线(b) Pressure contours at $Re=250$

图4 圆柱绕流计算结果

Fig.4 Calculating results of flow past a circular cylinder

3 结论

数值模拟结果表明隐含流线迎风耗散作用并具有较高精度的ETG有限元法稳定性好,可用于计算包含对流扩散耦合传递动量的绕流问题及类似的流动问题。

参 考 文 献:

- [1] 吴江航, 韩庆书. 计算流体力学的理论、方法和应用 [M] 北京: 科学出版社, 1988
- [2] DONEA J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems [J] Int. J. Numer. Methods Eng., 1984, 20 (1): 109-119.
- [3] LAVAL H, QUARTAPELLE L. A Fractional-Step Taylor-Galerkin for unsteady incompressible flows [J] Int.J. Numer. Methods Fluids, 1990, 11: 501-513.
- [4] 方正, 李伟. 粘性流体圆柱绕流的混合有限分析解[J]. 水动力学研究与进展 (A辑), 1998, 13 (2): 133-139.
- [5] L.普朗特, K.奥斯瓦提奇, K.维格哈特. 流体力学概论 [M] 北京: 科学出版社, 1981.
- [6] L.M. 米尔恩-汤姆森. 理论流体力学 [M] 北京: 机械工业出版社, 1984.
- [7] PATANKAR S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M] New York: Hemisphere, 1980.
- [8] 陶文铨. 数值传热学 [M] 西安: 西安交通大学出版社, 1988.
- [9] 朱谷君. 工程传热传质学 [M] 北京: 航空工业出版社, 1989.
- [10] 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用·3· [M] 北京: 科学出版社, 1998.