

学校代码	10699
分 类 号	O241
密 级	
学 号	2017202146

题目 强对流问题的半 Lagrange
无网格 Galerkin 方法研究

作者 王海丹

学科、专业 计算数学

指 导 教 师 王晓东

申请学位日期 2020 年 3 月

西北工业大学

硕士学位论文

(学位研究生)

题目： 强对流问题的半 Lagrange
无网格 Galerkin 方法研究

作者： 王海丹

学科专业： 计算数学

指导教师： 王晓东

2020 年 3 月

**Research on a Semi-Lagrangian Element Free Galerkin
Method for Flow Problems with Strong Convection**

By

Wang Hai-dan

**Under the Supervision of Associate Professor
Wang Xiao-dong**

A Thesis Submitted to
Northwestern Polytechnical University

In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
Master of Computational Mathematics

Xi'an P. R. China

March 2020

摘要

流动问题的数学描述可以使用固定坐标系统的 Euler 方法或随流坐标系统的 Lagrange 方法。在强对流情形下, Euler 方法没有网格方面的困难, 但数值格式的稳定性难以保证; Lagrange 方法数值格式稳定, 但却面临网格畸变的问题。半 Lagrange(SL) 方法介于上述两种方法之间, 同时拥有 Euler 方法在网格方面和 Lagrange 方法在稳定性方面的优势, 并且不受 CFL 条件的限制, 可以在大时间步长下获得稳定的数值结果。然而, SL 方法在获取出发点处函数信息时需要进行网格搜索和使用高次插值, 增加了算法的实现难度。为了降低 SL 方法的实现难度, 并增强算法的灵活性, 本文发挥无网格 Galerkin(EFG)方法无需网格和易于构造高阶近似的优点, 提出了针对强对流问题的半 Lagrange 无网格 Galerkin(SL-EFG)方法。具体研究工作如下:

(1) 针对强对流情形下对流扩散方程的数值求解, 结合 SL 和 EFG 方法, 提出了 SL-EFG 方法。该方法通过反向追踪和函数插值两个关键步骤, 实现了在固定的 Euler 坐标系下求解 Lagrange 型的扩散方程。通过对比多种反向追踪技术和插值方式, 发现采用向后 Euler 的反向追踪技术和等阶插值方式具有更高的计算精度, 即 SL-EFG 方法突破了传统 SL 方法必须使用高次插值的限制。相比于标准的 EFG 方法, SL-EFG 方法以损失少量精度为代价获得了更好的稳定性。

(2) 为了弥补 SL-EFG 方法在精度方面的不足, 本文给出了两方面的改进。首先, 将出发点处导数值的计算改在原始数据集上, 避免了使用插值数据集计算导数时出现的累积误差。其次, 将对节点的反向追踪改为直接对积分点的反向追踪, 避免了先计算出发层节点信息再以此为基础计算出发层积分点信息产生的二次误差。数值结果表明, 经过改进, SL-EFG 方法的精度和稳定性全面超越了 EFG 方法, 特别是强对流情形, 这使其成为稳定性和精度兼得的一种新方法。

(3) 针对不可压缩流动问题的数值求解, 在 SL-EFG 方法框架下, 推导了 Navier-Stokes 方程的非增量型分步格式, 该格式在使用等线性基近似速度和压力时, 可以避免 LBB 条件。对二维管道流动和方腔流动的计算结果表明, 采用分步格式的 SL-EFG 方法, 可在不同的 Reynolds 数下, 得到稳定的速度场和压力场, 有效消除了标准 EFG 方法在高 Reynolds 数下出现的数值伪振荡。

关键词: 半 Lagrange 方法, 无网格 Galerkin 方法, 强对流, 对流扩散方程, 不可压缩流动

Abstract

Mathematical description of flow problems can use Eulerian method of fixed coordinate system or Lagrangian method of coordinate system with flow. In the case of strong convection, Eulerian method has no difficulties in grid, but the stability of the numerical scheme is difficult to be guaranteed. Lagrangian method, by contrast, has stable numerical scheme, but the grid is easy to be distorted following the fluid flow. Semi-Lagrangian (SL) method is between the above two methods. It combines the advantages from both Eulerian method in grid and Lagrangian method in stability. Besides, SL method is not restricted by CFL condition, so this method can achieve stable numerical results with large time steps. However, in order to achieve the variable information at the departure points, SL method needs a searching algorithm of grids and uses a high-order interpolation, which increases the difficulty of the algorithm. In order to reduce the difficulty of implementing SL method and enhance the flexibility of the algorithm, a Semi-Lagrangian Element Free Galerkin (SL-EFG) method for flow problems with strong convection is proposed by taking advantages of the Element Free Galerkin(EFG) method which requires no grid and is easy to construct higher-order approximation. The contents of this dissertation are summarized as follows:

(1) For the numerical simulate of convection diffusion equation with strong convection, a SL-EFG method is proposed based on SL method and EFG method. SL-EFG method solves the Lagrangian-type diffusion equation in a fixed Eulerian coordinate system through two key steps: backward tracking and interpolation. By comparing a variety of backward tracking techniques and interpolation methods, it is found that SL method have higher computational accuracy with both the backward-Eulerian backward tracking technique and the equal-order interpolation method. In other words, SL-EFG method breaks through the limitation that the traditional SL method must use high-order interpolation. Compared with the standard EFG method, the SL-EFG method achieves better stability at the cost of a small loss of accuracy.

(2) In order to make up for the shortcoming of SL-EFG method in accuracy, two improvements is proposed. Firstly, the calculation of the derivative values at the departure points is changed to the original data set to avoid the cumulative error of calculating the derivative on the basis of the interpolation data set. Secondly, we adopt the backward tracking based on integration points directly instead of nodes, which avoids the quadratic error caused by calculating the integration point information of the departing layer on the basis of the

nodes information of the departing layer. The numerical results indicate that the accuracy and stability of SL-EFG method are better than those of EFG method, especially in the case of strong convection. This makes SL-EFG method a new method with good stability and high accuracy.

(3) For the numerical simulate of the incompressible flow problem, a non-incremental splitting scheme of Navier-Stokes equations is derived under the framework of SL-EFG method. This method with the equivalent linear basis function approximation for pressure-velocity variables can avoid the LBB condition. The calculation results of two-dimensional pipeline flows and square cavity driving flow indicate that the SL-EFG method with fractional step scheme can achieve stable velocity and pressure fields under different Reynolds Numbers. SL-EFG method can eliminate the instability issues effectively that occur in the standard EFG method under high Reynolds Number.

Key words: Semi-Lagrangian method; Element free galerkin method; Strong convection; Convection diffusion equation; Incompressible flow

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	III
目 录.....	V
第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 强对流问题的研究概况.....	2
1.2.1 数值求解对流占优问题的研究进展.....	2
1.2.2 数值求解强对流问题的困难.....	3
1.3 SL 方法的研究概况.....	3
1.3.1 SL 方法的研究进展.....	4
1.3.2 SL 方法目前仍存在的困难.....	5
1.4 本文目的与研究工作的.....	6
第二章 基础知识.....	9
2.1 SL 方法的基础知识.....	9
2.1.1 控制方程.....	9
2.1.2 处理对流项的反向追踪技术.....	10
2.1.3 插值方法.....	11
2.1.4 无条件稳定性.....	13
2.2 EFG 方法的基础知识.....	15
2.2.1 方程离散.....	15
2.2.2 MLS 方法.....	16
2.2.3 数值积分方案.....	18
2.2.4 本质边界条件的处理.....	19
2.3 本章小结.....	19
第三章 半 Lagrange 无网格 Galerkin 方法.....	21
3.1 SL-EFG 方法的基本思想.....	21
3.2 控制方程及其 Lagrange 形式.....	22
3.3 方程离散.....	22
3.3.1 时间离散.....	22
3.3.2 空间离散.....	23
3.4 反向追踪出发点.....	25
3.4.1 反向追踪技术.....	25

3.4.2 反向追踪技术的数值检验.....	27
3.5 插值方式的选取.....	30
3.6 本章小结.....	32
第四章 半 Lagrange 无网格 Galerkin 方法的改进.....	33
4.1 SL-EFG 方法的不足与改进.....	33
4.1.1 SL-EFG 方法的不足.....	33
4.1.2 出发点处导数值计算方法的改进.....	34
4.1.3 基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法.....	35
4.2 SL-EFG 方法的完整流程.....	36
4.3 SL-EFG 方法的数值收敛率.....	37
4.4 数值算例.....	38
4.4.1 一维 Gaussian-cone 问题.....	38
4.4.2 一维 Burgers 方程.....	40
4.4.3 二维 Gaussian-cone 问题.....	43
4.4.4 二维 Burgers 方程.....	44
4.5 本章小结.....	46
第五章 不可压缩流动问题模拟的 SL-EFG 方法.....	49
5.1 不可压缩流动问题的数学模型.....	49
5.2 基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法.....	49
5.2.1 时间离散.....	50
5.2.2 非增量型分步算法.....	50
5.2.3 空间离散.....	51
5.2.4 基于积分点的反向追踪.....	53
5.3 数值算例.....	54
5.3.1 平面 Poiseuille 流动.....	54
5.3.2 方腔驱动流.....	55
5.4 本章小结.....	58
第六章 总结与展望.....	61
6.1 工作总结.....	61
6.2 工作展望.....	62
参考文献.....	63
致 谢.....	69

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

流体按形变特点分为牛顿流体和非牛顿流体,服从牛顿粘性定律的流体称为牛顿流体,否则称其为非牛顿流体。流体流动的控制方程包括连续方程、动量方程和能量方程,其中动量方程和能量方程都属于对流-扩散型方程。众所周知,对流-扩散型方程和纯对流方程数值求解的主要困难在于对流项引起的方程双曲性,特别是强对流情形会导致数值结果在空间域的虚假振荡^[1]。因此在对流-扩散型方程的数值模拟研究中,强对流情形下的数值稳定性问题^[2-4]一直是研究的核心内容之一。

描述流体流动的方法有 Euler 方法和 Lagrange 方法^[5],在处理这类强对流问题时,这两种方法各自具有局限性^[6]。一方面, Euler 方法采用固定的坐标系,求解区域不变,不存在网格方面的困难。然而,为了保证数值方法的稳定性,需要使用具有迎风效应的数值格式或复杂的稳定化方案,并且要求时间和空间步长满足很强的约束条件。另一方面, Lagrange 方法采用随流坐标系,控制方程中不显含对流项,所以数值格式具有较好的稳定性。然而,该方法的求解区域会随流体的流动发生变化,导致网格畸变、节点收缩和节点凝聚等问题,这给数值计算带来了很大的困难。

半 Lagrange(Semi-Lagrange, SL)方法^[7]介于 Euler 方法和 Lagrange 方法之间,结合了两种方法各自的优点,同时又避免了单独使用这两种方法时遇到的困难。SL 方法既克服了 Euler 方法的不稳定,又保持了空间网格不变,不受 CFL 条件对时间步长的限制,可以在大时间步长下获得稳定的数值结果,在强对流问题的求解中具有潜在优势。该方法的核心思想是在 Euler 坐标系中求解 Lagrange 描述的控制方程。为达到此目的,需要在每个时间步内进行一次沿特征线的反向追踪。SL 方法最关键的步骤就是反向追踪和函数插值,传统的 SL 方法在求解控制方程时都采用了基于网格的数值方法,但是在强对流或大时间步长时,反向追踪到出发点的位置后,搜索其所隶属的网格将是一项非常繁琐的工作,特别是在使用非结构网格时。除此之外,传统的 SL 方法需要使用高次插值来提高数值结果的精度,而有限元、有限差分等方法不易构造高次插值。为此本文选用不依赖于网格的无网格方法^[8-10],该类方法基于点近似,不需要网格的初始划分和重构、对复杂区域不存在网格剖分的困难,不仅可以极大地降低算法的实现难度,而且更容易构造高阶近似函数,增强算法的灵活性。本文采用计算精度高、稳定性好的无网格 Galerkin(Element Free Galerkin, EFG)方法^[11]。

本文基于 SL 方法与 EFG 方法,提出了针对强对流问题的半 Lagrange 无网格 Galerkin(SL-EFG)方法。该方法使控制方程中不显含对流项,避免了高 Reynolds (Re)数时强对流引起的数值伪振荡,使得发展强对流问题的 SL-EFG 方法具有很大潜力。

1.2 强对流问题的研究概况

对流-扩散型偏微分方程是流体力学中的一类重要方程，在流动问题中具有非常重要的地位。而大多数求解对流-扩散型方程的数值方法，在由双曲算子决定的对流作用比由抛物(或椭圆)算子决定的扩散作用强或者扩散作用消失只存在对流作用时，数值结果都不那么令人满意。其中一些高精度方法，稳定性不好，数值解严重振荡；另一些方法稳定性好，却丧失了精度^[12]。本文将上述对流占优和纯对流情形引起的数值问题称为强对流问题。而如何消除数值方法在求解强对流问题时出现的数值稳定性问题，一直是学者们关注的重点，因此对于强对流问题数值解法的研究有着非常重要的现实意义与理论研究价值。

1.2.1 数值求解对流占优问题的研究进展

用标准的有限差分方法和 Galerkin 型有限元方法求解对流占优问题都会引起数值解振荡，主要是因为未考虑到对流占优时方程的双曲特性，在解变化比较大的区域，数值解不能做出有效的模拟，同时因为离散之后方程组系数矩阵的病态性质，使得计算过程表现出不稳定的伪振荡现象。克服这种数值振荡的方法主要可以分为两种，一是采用十分密的空间网格，这样使在真实解急剧变化的区域具有一定的分辨率，但会使计算的规模大幅度增加，在高维问题时变得很难求解。另外一种方法就是引入迎风差分格式，但这样会带来数值耗散，并且随着 Re 数的增加而加剧，超过真实物理耗散。

20 世纪 70 年代初期，迎风格式是通过将权函数取为试函数的某种修正形式使计算格式具有人工耗散能力，这种直接的差分迎风格式计算精度差，并不受欢迎^[13]。1975 年 MAFELAP 会议上，Zienkiewicz 等人^[14]在讨论了经典 Galerkin 有限元方法振荡问题的基础上提出了一种稳定的有限元格式。1977 年，Heinrich 等人^[15]提出了求解二维对流扩散方程的迎风有限元方法，虽然消除了数值振荡，但是却引入了数值耗散。Chen 等人^[16,17]提出了有限分析方法，该方法是对有限元法的一种改进，将解析法与数值法相结合，计算精度较高并具有自动迎风特性，计算稳定性好。但是该方法系数复杂，计算速度慢，且由于对流项和扩散项的数学物理性质存在差异，在对流占优时同时处理会非常困难。为了摆脱这一困境，Yanenko 等人^[18]提出了分步方法，将对流扩散方程分解为对流方程与扩散方程，然后对每个方程采用合适的最佳方法进行数值求解。20 世纪 80 年代，许多数值方法都是在这样的思想下发展起来的，学者们采用有别于标准 Galerkin 方法的非标准有限元方法或者有别于传统差分格式的差分方法求解对流占优扩散问题，涌现出特征有限元方法^[19]，间断有限元方法^[20]、连续有限元方法^[21]、流线扩散法^[22]、有限差分流线扩散法^[23]等。这些方法虽然较之前的方法有了改进，比如消除了数值振荡，但是因为在数值求解扩散项时使用的是有限差分方法或者有限元方法，各节点之间只能插值近似。

上述有限元和有限差分方法是流体力学中应用比较广泛的微分方程数值解法。在问

题的几何区域比较复杂或几何区域存在大变形时会遇到网格生成或网格畸变的困难^[24]。因此,基于点近似而不依赖于网格的无网格方法得到学者们的广泛关注。同样,无网格方法在求解对流占优或纯对流问题时也需要采用类似于具有迎风效应或者添加人工粘性的格式来消除求解过程中出现的数值振荡。Li 等人^[25]提出了基于特征线分步算法 (Characteristic Based Split, CBS)和基于 Taylor-Galerkin 分步算法的无网格方法,在这两种方案中引入了一种使对流项隐式满足动量守恒方程的迭代方法,使时间步长增大,对流占优时得到了稳定的数值解。欧阳洁等人^[26]针对 EFG 方法求解对流占优问题时出现的数值伪振荡现象建立了一系列稳定化方案,但在稳定化方案中需要确定稳定化参数,且引入人工粘性项降低了计算精度。Zhang 等人^[27]提出了一种基于 Characteristic-Galerkin 格式的无网格方法,用于求解具有不同粘度的 Burgers 方程。用特征线法消除了 Burgers 方程中的对流项,使之自伴随,从而保证了 Galerkin 方法空间离散的最优性,在高 Re 数下得到了稳定的数值解。

1.2.2 数值求解强对流问题的困难

在对流占优问题求解的数值方法中,学者们发展了很多稳定化方案,如在有限元方法、有限差分方法、有限体积方法中采用具有迎风效应或添加人工粘性,在无网格方法中使用具有迎风效应的 Taylor-Galerkin 格式^[25]和 Characteristic-Galerkin 格式^[27]。然而当对流作用很强或纯对流问题时,上述所提的稳定化方案难以彻底消除数值伪振荡现象。在欧阳洁等人^[28]提出的无网格 Taylor 最小二乘稳定化方案的基础上,张林等人^[29]引入了一种自适应节点加密技术,在高 Re 数和纯对流情形下得到了稳定的数值解,然而其计算精度未经过定量比较,很难保证在保持稳定的结果下仍能获得高精度的解。因此针对对流作用很强或纯对流的强对流问题的研究还需进一步深入探索。本文针对这一问题提出了一种稳定性和精度兼得的新方法,将在后文详细论述。

1.3 SL 方法的研究概况

目前,流体流动的描述主要有两种,分别为 Euler 方法和 Lagrange 方法^[5]。Euler 方法着眼于固定不变的空间中指定位置的状态,主要研究这个指定位置上流动量随时间的变化,分析流体流过指定位置的瞬时速度、压力、密度等。Lagrange 方法着眼于流体质点运动,主要研究流体质点流动量随时间的变化,分析任意时间流体质点的运动轨迹、速度、压力、密度等。Euler 方法有固定的计算区域或单元,每个单元中的流体属性(如压力、密度或速度)用某些方式近似。通过考虑穿过单元界面的通量建立单元网格间流体的运动模型,从而模拟与时间相关的流体流动。因此 Euler 方法的两个基本结构为单元网格和通量。而 Lagrange 方法的基本结构是流体粒子及其运动轨迹,每个粒子都具有流体所有性质,并随流体流动的速度运动。两种方法都有各自的局限性,基于通量的 Euler 方法受 CFL 条件的限制,在大时间步长下很难保持稳定性和精度。Lagrange 方法对时间步长的限制要小得多,特别是在流体以对流为主的情况下,但是该方法的求解区

域会随流体的运动发生变化，从而使得计算网格发生变形，甚至发生严重扭曲。图 1-1 给出了 Euler 方法和 Lagrange 方法的数值模型图。

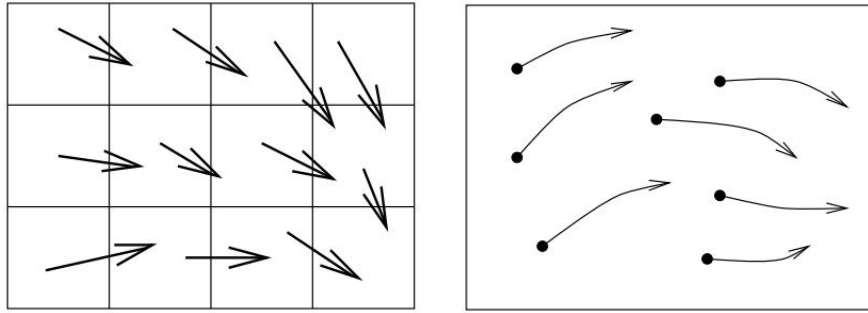


图 1-1 Euler 方法(左)和 Lagrange 方法(右)的数值模型^[29]

SL 方法^[7]可以看做是 Eulerian-Lagrangian 混合方法，保留了两种方法各自的可取之处，同时又避免了各自的缺点。SL 方法允许通过追踪粒子的轨迹实现大时间步长的积分，在整个模拟过程中保持固定的 Euler 网格，通过在每个时间步的固定网格上进行求解，而不是追踪单个粒子的长期轨迹。因此，SL 方法的两种基本结构为单元网格和流体粒子的轨迹^[5]。

1.3.1 SL 方法的研究进展

上世纪五十年代，Courant 等人^[7]首次提出在曲线网中求解拟线性方程组时，首次提出用差商来替换方程组中沿特征线方向的导数，这就是 SL 方法的原型。六十年代，Sawyer 等人^[30]提出用 SL 方法求解涡度平流方程，该方法在不满足 CFL 条件时仍保持计算的稳定性，适用于粗网格和大时间步长下的情形，得到与 Euler 方法相似的精度。然而当时在数值模拟中主要采用 Euler 方法，SL 方法未能得到推广。八十年代，Robert^[31]将 SL 方法和半隐式方法结合起来，应用于原始气象方程的求解，为 SL 方法在数值天气预报领域的广泛应用开辟了道路。自此，众多学者开始关注 SL 方法在数值求解中的应用。Pironneau^[32]结合 SL 方法和有限元方法，应用于 Navier-Stokes 方程的求解；Giraldo^[33]将 SL 方法与谱方法结合起来，应用于对流扩散方程和 Navier-Stokes 方程的求解；Phillips 等人^[34]将 SL 方法与有限体积方法结合起来，应用于粘弹流体的求解。学者们将 SL 方法与各种网格类数值方法结合起来对流体流动问题进行模拟，得到了稳定的数值结果，由此可见 SL 方法在流体流动问题求解方面具有显著优势。

SL 方法在强对流问题的求解中表现良好，可以在大时间步长下获得稳定的数值结果。邵光茹等人^[35]针对二维对流扩散方程提出了半 Lagrangian Crank-Nicolson 有限差分格式，将对流扩散方程等价转化为 Lagrange 形式，然后进行时间和空间离散，时间离散采用 Crank-Nicolson 格式，空间离散采用有限差分格式。Celledoni 等人^[11]针对非线性对流占优扩散问题将半 Lagrange 方法与指数积分相结合，该方法具有良好的稳定性，且不会产生数值色散。Bak 等人^[37]设计了一个向后半 Lagrange(BSL)方法，结合二阶后向差

分公式，计算了非线性对流扩散方程的数值解，使用二阶中心有限差分逼近扩散项，三阶 B 样条近似进行空间离散，消除了迭代过程，得到具有二阶精度的有效算法。Sastre 等人^[38]将半 Lagrange 二阶后向差分方法(BSL2)与有限元方法结合起来，应用于二维对流扩散方程的数值逼近。

从众多文献中可以发现，SL 方法在求解对流占优问题时具有很好的稳定性。然而，该方法采用低阶插值方法往往会导致精度低和不守恒问题，采用高阶插值也无法降低耗散和色散误差^[39]。在过去的几十年里，许多研究者试图解决这个问题，比如开发更好的离散方法^[40,41]，采用新的高阶插值方法^[42,43]，结合不同阶次插值方法的混合方法^[44]。Zerroukat^[39]提出了一种具有守恒重构特性的 SL 方法；Sun 等人^[42]提出了一种基于有限体积的高阶 SL 方法来控制数值振荡；Xiu 等人^[40]提出了一种高阶时间和空间离散化方案。这些方法都试图用不同的方法提高 SL 方法的精度，但同时它们也增加了方法的复杂性和计算成本。于是 Zuo 等人^[44]提出了一种较为简单的混合方法，结合了线性和三阶向后插值：在大梯度附近使用线性插值降低色散误差，在其他区域采用三阶插值来减少数值耗散。然而，结合低阶和高阶插值并不能同时减少耗散误差和色散误差，且混合方法的整体精度往往比预期的要低。Mohammad 等人^[45]提出了一种三阶向前、向前交替扫描算法来提高 SL 方法在整个流动区域的精度，有效地降低了耗散误差和色散误差，特别是具有大梯度的邻近区域。

1.3.2 SL 方法目前仍存在的困难

SL 方法最关键的步骤是出发点位置的确定和出发点处变量信息的插值计算。一般情况下，出发点并不正好位于节点处，为了计算这些点上的变量信息就需要一些插值方法，如谱方法^[40]、有限元方法^[46]等。而这些插值计算首先需要确定出发点所隶属的网格单元，然后根据网格节点上的值进行插值。如果网格是均匀正方形或结构化的四边形，此时的网格定位和插值很容易实施，没有任何计算困难。但是在非结构网格中，出发点位置计算及其网格定位就需要使用文献^[47]中所给出的复杂的搜索算法。并且 SL 方法在反向追踪出发点位置的过程中，如果流体速度或时间步长过大，会导致区域内的粒子落到距离对应网格节点较远的位置，这时就需要进行全局搜索，这将是一项非常繁琐的工作，也需要复杂的搜索算法来定位，特别是在非结构网格中(如图 1-2 所示)，这使得算法的复杂度大大增加。另外，为了保证方法的计算精度，需要采用高阶插值来近似出发点处的变量信息，但是有限元、有限差分等方法均不易构造高阶插值。

近年发展起来的无网格方法基于一系列节点对函数进行插值，不需要划分网格，避免了网格划分的复杂过程，又不会产生网格畸变。将该方法引入 SL 方法中，就不需要复杂的搜索算法，确定出发点后，直接根据支持域内节点上的变量信息插值得到出发点处的变量信息，可以极大地降低算法的实现难度。本文选用基于 MLS 形函数近似的 EFG 方法，该方法相比于有限元方法易于构造高阶近似，计算精度高、稳定性好。因此将

EFG 方法引入 SL 方法中，得到一种稳定性和精度兼得的新方法，即为 SL-EFG 方法。

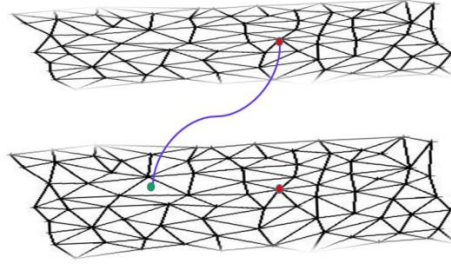


图 1-2 非结构网格出发点示意图

1.4 本文目的与研究工作

本文的主要目的是解决在数值求解强对流问题时出现的数值伪振荡，建立一种稳定性好、高精度的数值方法。众所周知，Euler 方法和 Lagrange 方法在强对流情形下都各有长短，针对这一问题本文采用 SL 方法。该方法在固定的 Euler 坐标系下求解 Lagrange 方法描述的控制方程，既没有网格方面的困难，又保证了方法的稳定性，而且不需要满足 CFL 条件，可以在大时间步长下得到稳定的数值结果。然而该方法在进行反向追踪和插值两个关键步骤时需要网格搜索和使用高次插值，这增加了算法实现的难度。本文鉴于 EFG 方法不依赖于网格并易于构造高阶近似的优点，提出了针对强对流问题的 SL-EFG 方法，并对该方法进行了初步研究。首先针对强对流情形下的对流扩散方程给出了 SL-EFG 方法的构建过程，然后在此基础上针对计算精度的提高做出了两方面的改进，最后将改进后的 SL-EFG 方法应用于不可压缩流动问题的求解中。主要内容及结构安排如下：

第一章，首先，论述了本文的研究背景及意义；其次，介绍了强对流问题，给出了数值求解对流占优问题的研究进展和目前数值求解强对流问题存在的困难；再次，对 SL 方法的研究进展和目前存在的困难进行了介绍；最后，给出了本文的研究目的和具体结构安排。

第二章，主要介绍了 SL 方法和 EFG 方法的相关理论知识：首先，以平流方程为例，介绍了传统 SL 方法的方程离散过程、处理对流项的反向追踪技术及插值方法，并分析了该方法的无条件稳定性；其次，给出了 EFG 方法的方程离散、MLS 近似、数值积分方案以及本质边界条件的处理。

第三章，提出了求解强对流问题的 SL-EFG 方法：首先，给出了 SL-EFG 方法的基本思想，将对流扩散方程转换成 Lagrange 形式；其次，在 Lagrange 形式方程的基础上给出了 SL-EFG 方法的方程离散，包括时间离散和空间离散；再次，介绍了几种不同的反向追踪技术，并通过数值算例进行了对比分析；最后，利用数值算例确定了出发点处变量信息和全离散方程中未知函数的插值方式。

第四章，针对 SL-EFG 方法在精度方面的不足，提出了两方面的改进：首先，指出

了在第三章中建立的 SL-EFG 方法的不足之处，提出了针对导数插值和反向追踪技术两方面的改进，给出了 SL-EFG 方法的完整流程，通过数值算例分别对这两种改进的有效性进行了验证；其次，对该方法的数值收敛率进行了简单分析；最后，通过数值算例验证了 SL-EFG 方法的计算精度及强对流情形下的稳定性。

第五章，给出了 SL-EFG 方法在不可压缩流动问题中的应用：首先，在 SL-EFG 方法框架下，推导了 Navier-Stokes 方程的非增量型分步格式，包括时间离散、非增量型分步算法、空间离散和基于积分点的反向追踪；其次，通过数值算例验证了 SL-EFG 方法求解不可压缩流动问题的有效性和稳定性。

第六章，对本文工作内容进行了总结，并说明现有研究的不足，对后续工作进行了展望。

第二章 基础知识

SL 方法，源于 1952 年 Courant、Isaacson、Rees^[7]在求解双曲方程组时提出的一种一阶迎风格式，称为 CIR 格式。该方法在整个积分过程中不对同一流体粒子沿其移动路径追踪，而是对终点位于网格点上的粒子在一定时间段内进行追踪的方法。SL 方法物理意义明确，计算稳定，不受 CFL 条件的限制，被广泛地应用到各种数值模拟和数值预报中。

无网格方法是针对有限元法、有限差分法等基于网格的数值方法的一些缺陷而提出的一种新型数值方法。无网格方法基于点近似，不需要网格生成和网格剖分，消除了网格依赖性、容易构造高阶形函数。其中，EFG 方法由于计算精度高、稳定性好等优点而备受学者青睐。

本章的内容安排如下：首先，给出了 SL 方法的基础知识，主要包括方程离散、处理对流项的反向追踪技术、插值方法、无条件稳定性；其次，阐述了 EFG 方法的基础知识，包括基于 Galerkin 方法的方程离散、MLS 方法、数值积分方案和本质边界的处理；最后，对本章内容进行了总结。

2.1 SL 方法的基础知识

SL 方法是在固定的 Euler 坐标系下对 Lagrange 描述的控制方程进行求解的一种数值方法。因此，在每个时间步，需要进行一次沿特征线的反向追踪，找到位于网格节点上的流体粒子在前一个时刻的出发点，以及在这个位置上传输的值。且该方法无条件稳定，允许大时间步长积分。

2.1.1 控制方程

为了清楚地说明 SL 方法，考虑如下平流方程

$$\begin{cases} u_t(x,t) + f(x,t)u_x(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0 \end{cases} \quad (2-1)$$

其中， f 表示流体速度场，称为对流系数， g 表示源项， u 表示流体的某物理属性，如速度、压强或温度等。

式(2-1)表示随着时间的推进， u 沿着特征线 $x(t)$ 进行传输。那么得到式(2-1)的 Lagrange 形式为

$$\frac{du(x,t)}{dt} = g(x,t) \quad (2-2)$$

其中， $d/dt = \partial/\partial t + f(x,t)\partial/\partial x$ 称为物质导数或 Lagrange 导数。而经过点 (x,t) 的特征线方程表示为

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) \quad (2-3)$$

设区域 Ω 内有 N 个节点，给定时间步长 Δt ，则 $t_n = n\Delta t (n=1, 2, \dots, M)$ 。SL方法假设在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ ，将 t_{n+1} 时刻位于节点 x_i 处的流体粒子沿特征线反向追踪一个时间步，得到流体粒子在 t_n 时刻的出发点 x_d 。换句话说，在 t_n 时刻从点 x_d 出发的流体粒子，随流体运动一个时间步长 Δt 后的到达点正好与网格节点 x_i 重合，这一过程如图2-1所示。而出发点通常不一定正好落在节点上，其上的值 u_d^n 必须由各节点上的值通过插值或其他方法来确定。

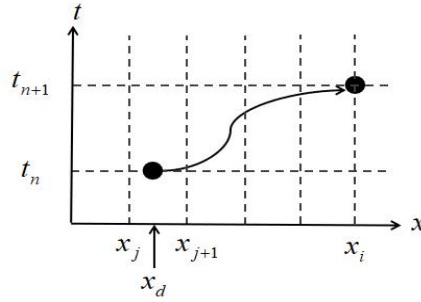


图 2-1 SL 方法粒子轨迹图

那么由式(2-2)可以得到在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_d, t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x, t) dt \quad (2-4)$$

其中过点 (x_i, t_{n+1}) 的特征线满足常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t), & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ x(t_{n+1}) = x_i \end{cases} \quad (2-5)$$

求解上述初值问题的过程就是反向追踪出发点的过程。

2.1.2 处理对流项的反向追踪技术

常微分方程初值问题(2-5)通常难以得到精确解，一般求解方法分为单步法和多步法。在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上对式(2-5)两端进行积分，得到

$$x_i - x_d = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, t) dt, \quad [t_n, t_{n+1}] \quad (2-6)$$

式(2-6)的积分求解分为两种情况，其一：如果 $f(x, t) = c(\text{constant})$ 是一个与时间无关的常数，那么出发点的位置可以直接得到，即

$$x_d = x_i - c\Delta t \quad (2-7)$$

其二：如果 $f(x, t)$ 是一个与时间相关的函数，那么可以采用常微分方程初值问题中的各种时间积分方案^[48]，本节将介绍如下四种积分算法。

1. 向后 Euler 法

用向后 Euler 法求解式(2-6)可得

$$x_d = x_i - f(x_d, t_n) \Delta t \quad (2-8)$$

其中, $f(x_d, t_n)$ 是 t_n 时刻出发点 x_d 处的流体速度。

2. 梯形求积公式

用梯形求积公式求解式(2-6)可得

$$x_d = x_i - \frac{\Delta t}{2} [f(x_d, t_n) + f(x_i, t_{n+1})] \quad (2-9)$$

其中, $f(x_i, t_{n+1})$ 是 t_{n+1} 时刻节点 x_i 处的流体速度。

3. 二阶二级龙格-库塔求积公式——中间点法

用中间点法求解式(2-6)可得

$$x_d = x_i - f(x_m, t_n + \Delta t/2) \Delta t \quad (2-10)$$

其中, $x_m = (x_i + x_d)/2$ 是节点 x_i 和出发点 x_d 的中间点, 则 $f(x_m, t_n + \Delta t/2)$ 是 $t_{n+1/2}$ 时刻中间点 x_m 处的流体速度。

除了上述几种常用的时间积分方案外, 本节还提出一种基于 Taylor 展开的一阶反向追踪技术。

4. 基于 Taylor 展开的方法

特征线方程(2-6)中的 $f(x, t)$ 是关于 x 和 t 的函数, 对出发点 x_d 处的值 $f(x_d, t_n)$ 在 x_i 处 Taylor 展开, 并假设在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内, 位于出发点 x_d 处的粒子以速度 $f(x_d, t_n)$ 匀速运动到节点 x_i , 即

$$\begin{cases} f(x_d, t_n) = f(x_i, t_n) + (x_d - x_i) f_x(x_i, t_n) + o(x_d - x_i) \\ f(x_d, t_n) \Delta t = x_i - x_d \end{cases} \quad (2-11)$$

由式(2-11)可得

$$\begin{cases} f(x_d, t_n) = \frac{f(x_i, t_n)}{1 + f_x(x_i, t_n) \Delta t} \\ x_d = x_i - f(x_d, t_n) \Delta t \end{cases} \quad (2-12)$$

需要注意的是, 在上述式(2-8)到(2-12)中当 $f(x_d, t_n)$ 、 $f(x_i, t_{n+1})$ 、 $f(x_m, t_n + \Delta t/2)$ 或 Δt 太大时, 位于边界附近的节点所对应的出发点 x_d 会落在区域外, 此时便将落于区域外的出发点当作边界点处理即可。

2.1.3 插值方法

一般地, 通过上述反向追踪技术得到的出发点 x_d 并不正好是网格节点, 因此出发点处的 $u(x_d, t_n)$ 是未知的。在 SL 方法中并不用单元平均法来求解 $u(x_d, t_n)$, 而是基于各节点上的函数值进行插值重构。本节仅考虑结构化网格,

在求解区域 Ω 内均匀布置 N 个节点 $\{x_i\}_{i=1}^N$ ，空间固定步长为 Δx ，函数 $u(x)$ 由对应节点值 u_i 的向量 V 表示，设点 x 对应的插值为 $I[V](x)$ 。最简单的插值形式(如Lagrange插值)是一些基函数的线性组合

$$I[V](x) = \sum_k v_k \phi_k(x) \quad (2-13)$$

其中 ϕ_k 一般是分段多项式基函数，且满足插值条件

$$\phi_k(x_i) = \delta_{ik} \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Lagrange插值一般应用于均匀间隔的节点，点 x 对应的重构模板是包含该点在内的一个区间。事实上，Lagrange插值可以在非均匀网格上实现，也可以采用全局多项式形式实现。然而，在SL方法框架下，前者通常会导致不稳定格式，后者会导致数值色散。Lagrange插值通常取奇数阶，因此在点 x 的两边使用相同数量的节点。此时，重构模板中的节点数比插值阶数 r 大一个单位，对于 $x \in [x_l, x_{l+1}]$ ，该区间的左右两边均匀分布着 $(r+1)/2$ 个节点，正如图2-2所示，那么重构模板可以表示成

$$\varphi = \left\{ x_k : l - \frac{r-1}{2} \leq k \leq l + \frac{r-1}{2} \right\}$$

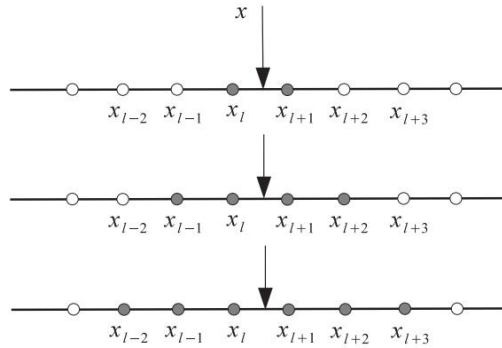


图 2-2 线性、三次、五次 Lagrange 重构模板

因此， r 阶 Lagrange 插值多项式的表达式为

$$I_r[V](x) = \sum_{x_k \in \varphi} v_k \prod_{x_i \in \varphi \setminus \{x_k\}} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (2-14)$$

其中

$$\phi_k(x) = \prod_{x_i \in \varphi \setminus \{x_k\}} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

为 Lagrange 插值基函数，这些基函数仅依赖于插值节点 $x_k \in \varphi$ ，并满足插值条件 $\phi_k(x_i) = \delta_{ik}$ 。奇数阶 Lagrange 插值具有对称性，当然也可以使用偶数阶 Lagrange

插值，但是这样的话就会丧失对称性。然而，高阶 Lagrange 插值需要增加节点数，可能会在间断附近产生非物理数值振荡^[5]，这很大程度上推动了非振荡插值方案的研究^[49]。

本质无振荡 (Essentially Nonoscillatory, ENO) 插值和加权基本无振荡 (Weighted Essentially Nonoscillatory, WENO) 插值通过增加节点和模板数，并利用 Lagrange 或 Newton 方法构造高阶精度插值^[50,51]。ENO 插值方案以 Lagrange 插值方法为基础，采用 Newton 差商来表示 Lagrange 插值多项式，模板选择方式有固定节点模板方式和逐步扩展节点模板方式。相比于 Lagrange 插值过程，ENO 插值通过比较差商绝对值大小自动选择、扩展节点和模板，有一定的自适应能力，因此在具有间断的区域中能自动有效地捕捉激波，不会产生非物理振荡。然而，ENO 插值需要在若干个重构模板中选取重构多项式最为光滑的那个模板进行计算，很多节点和模板并未有效利用，而且在解比较光滑的区域，这样的做法费时又费力^[5]。WENO 插值对 ENO 插值的各个备选模板上的插值进行非线性加权，使得在光滑区域达到更高阶精度。通过自动调节权系数，在间断附近退化为 ENO 插值格式，以保证数值解在间断附近没有振荡^[52]。除此之外，文献[49]中还介绍了有限元插值，在处理复杂几何图形时具有明显优势。

2.1.4 无条件稳定性

在偏微分方程数值解法中，无条件稳定性表示一个差分格式对于任何时间步长与空间步长都是稳定的。而在判断数值解法的稳定性和收敛性时，有一个非常重要的概念——CFL 条件。CFL 是 Courant、Friedrichs、Lewy 三位学者姓名首字母的缩写。三位学者最早在 1928 年一篇关于偏微分方程的有限差分方法的文章中首次提出这个概念。CFL 条件具体为：一个数值方法只有当它的数值依赖域包含对应偏微分方程的真实依赖域时才是稳定的。对于一维情况，CFL 条件的形式如下

$$\mu = \frac{u\Delta t}{\Delta x} < C \quad (2-15)$$

称 μ 为 Courant 数。其中， u 表示流体速度， Δx 、 Δt 分别为时间步长和空间步长， C 为常数，一般取 $C=1$ 。而 SL 方法却不受 CFL 条件的限制，满足无条件稳定性。本节将对式(2-1)的常系数情况进行讨论。

对于式(2-1)，取 $g(x,t) \equiv 0$ 、 $f(x,t) \equiv c(\text{constant})$ ，则常系数方程为

$$\begin{cases} u_t(x,t) + cu_x(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0 \end{cases} \quad (2-16)$$

式(2-16)的 Lagrange 方程为

$$\frac{du(x,t)}{dt} = 0 \quad (2-17)$$

经过点 (x,t) 的特征线方程为

$$\frac{dx(t)}{dt} = c \quad (2-18)$$

在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上对式(2-17)进行积分, 得到

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_d, t_n) \quad (2-19)$$

其中 x_d 表示 t_{n+1} 时刻位于网格点 x_i 处的粒子在 t_n 时刻的出发点。由式(2-19)可知, t_n 时刻点 x_d 处的 u 值与在 t_{n+1} 时刻的网格点处的值相同, 因此要求解 $u_i^{n+1} = u(x_i, t_{n+1})$ 就必须先得到 $u_d^n = u(x_d, t_n)$ 的值。那么首先要得到出发点 x_d 的位置, 对式(2-7)在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上进行积分(即反向追踪), 得到出发点的位置

$$x_d = x_i - c\Delta t \quad (2-20)$$

假设式(2-20)中的 $c > 0$ 且出发点 x_d 到 x_i 的距离小于 Δx , 因此

$$x_{i-1} < x_d < x_i \quad (2-21)$$

用最简单的线性插值得到出发点处的值为

$$\begin{aligned} u_d^n &= u_{i-1}^n + \left(\frac{x_d - x_{i-1}}{\Delta x} \right) (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ &= u_{i-1}^n + \left(\frac{\Delta x - c\Delta t}{\Delta x} \right) (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ &= u_{i-1}^n + (1 - \mu) (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ &= \mu u_{i-1}^n + (1 - \mu) u_i^n \end{aligned} \quad (2-22)$$

其中, $\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$, 网格均匀划分。那么可以得到

$$u_i^{n+1} = \mu u_{i-1}^n + (1 - \mu) u_i^n \quad (2-23)$$

式(2-23)与迎风格式一致。注意式(2-21)等价于

$$0 < \mu < 1 \quad (2-24)$$

这是迎风格式稳定性要满足的条件。

那么, 如果粒子运动速度过快或者时间步长过大时, 式(2-21)就不成立了, 这时 $\mu > 1$, 即

$$x_{i-a} < x_d < x_{i-a+1} \quad (2-25)$$

其中, a 是一个大于 1 的整数。可以得到与式(2-22)类似的结果

$$u_d^n = \hat{\mu} u_{i-a}^n + (1 - \hat{\mu}) u_{i-a+1}^n \quad (2-26)$$

其中,

$$\hat{\mu} = 1 - a + \mu \quad (2-27)$$

显然,

$$0 < \hat{\mu} < 1 \quad (2-28)$$

于是可以得到

$$u_i^{n+1} = \hat{\mu} u_{i-a}^n + (1 - \hat{\mu}) u_{i-a+1}^n \quad (2-29)$$

很明显, 式(2-29)的计算是稳定的。这意味着不管取多大的时间步长, SL 方法都能保持稳定性, 即该方法是无条件稳定的。

2.2 EFG 方法的基础知识

EFG 方法基于 Galerkin 变分原理对控制方程进行空间离散, 使用移动最小二乘(Moving Least Squares, MLS)方法对未知函数进行近似。MLS 方法可直接基于空间离散点对函数近似, 此时不需要对区域进行网格划分。

2.2.1 方程离散

EFG 方法是基于 Galerkin 弱形式的数值方法, 其对微分方程的离散过程可以描述为: 假设 H 为定义在有界闭区域 Ω 上的任一微分算子, u 为满足一定光滑性条件的未知函数, f 为已知函数, 微分方程的一般形式可以写为

$$H(u) = f \quad (2-30)$$

由于式(2-30)在区域 Ω 内任意点都满足, 因此对于任意函数 v 都有

$$(v, H(u))_{\Omega} = (v, f)_{\Omega} \quad (2-31)$$

反过来, 如果对于任意函数 v 式(2-31)都成立, 则式(2-30)必定在区域 Ω 内任意点满足。函数 v 称为检验函数, (\cdot, \cdot) 为区域 Ω 上定义的函数内积

$$(g, h)_{\Omega} = \int_{\Omega} g h d\Omega$$

式(2-31)称为微分方程(2-30)的等效积分形式。

一般地, 对于给定的定解条件, 方程(2-30)很难精确求解, 只能近似求解。设 $u^h(\mathbf{x})$ 为式(2-30)的一个近似解, 称为试探函数, 它可以表示为一组线性无关的已知函数 $\varphi_i(\mathbf{x})$ 的线性组合, 即

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (2-32)$$

其中 u_i 是待定参数。试探函数的项数 N 越多, 近似解的精度就越高。当项数 N 趋于无穷大时, 近似解将收敛于精确解。

如果对于任意函数 v ，式(2-31)都成立，此时近似解便为精确解。实际上，不可能也不需要取无穷多个检验函数，而是一般将检验函数 v 取为一组基函数的线性组合，即

$$v = \sum_{j=1}^M c_j \phi_j(\mathbf{x}) \quad (2-33)$$

其中 $M > N$ 。将式(2-32)和(2-33)代入式(2-31)，并考虑到系数 c_j 的任意性，得

$$\left(\phi_j(\mathbf{x}), H\left(\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) u_i\right) \right)_{\Omega} = (\phi_j(\mathbf{x}), f)_{\Omega} \quad j=1, 2, \dots, M \quad (2-34)$$

上式的意义是通过选择合适的待定参数 u_i ，使得微分方程(2-30)在积分平均意义下满足。

对于 EFG 方法，试探函数和检验函数取自同一函数空间，且 $M = N$ ，即

$$\phi_i = \phi_i \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2-35)$$

此时式(2-34)可以写为

$$\left(\phi_j(\mathbf{x}), H\left(\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) u_i\right) \right)_{\Omega} = (\phi_j(\mathbf{x}), f)_{\Omega} \quad j=1, 2, \dots, N \quad (2-36)$$

或写成

$$\sum_{j=1}^N (\phi_j(\mathbf{x}), H(\phi_i(\mathbf{x})))_{\Omega} u_i = (\phi_j(\mathbf{x}), f)_{\Omega} \quad j=1, 2, \dots, N \quad (2-37)$$

此时，式(2-37)是以 u_i 为未知量的 N 阶代数方程组。

计算时可以使用分部积分或 Green 公式降低式(2-37)中所含导数的阶次，从而降低对函数 $u^h(\mathbf{x})$ 的光滑性要求。通过定解条件对代数方程组(2-37)做相应的修正后求得 u_i ，将 u_i 代入式(2-32)即可得到近似解 $u^h(\mathbf{x})$ 。

2.2.2 MLS 方法

MLS 是局部近似与最小二乘相结合的产物，该方法直接基于空间离散点进行近似，不需要对区域进行网格划分。

设待求函数 $u(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x} 处的 MLS 近似表达式为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2-38)$$

其中 m 为基函数个数， $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 为基函数向量， $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 为待定系数作为分量构成的向量。通常基函数取为多项式，为避免 EFG 方法采用传统高次多项式基函数时形函数违背一致性条件，本文采用偏移多项式基函数^[53]。偏移多项式基函数形式如下：

线性基: $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = (1, x - \bar{x})$, $m = 2$

二次基: $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = (1, x - \bar{x}, (x - \bar{x})^2)$, $m = 3$

三次基: $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = (1, x - \bar{x}, (x - \bar{x})^2, (x - \bar{x})^3)$, $m = 4$

其中 $\bar{\mathbf{x}}$ 为点 \mathbf{x} 的支持域中心。在 MLS 近似中, 支持域是近似点 \mathbf{x} 邻近的一个局部区域, 该局部区域所包含的节点信息, 将用于 \mathbf{x} 处函数值的 MLS 近似。下面将基于偏移多项式基 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, 给出 MLS 近似的具体过程。

为了确定待定系数 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, 对于逼近函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在节点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ 处的加权 L_2 范数误差为

$$J = \sum_{i=1}^{N_x} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}_i) - u_i]^2 \quad (2-39)$$

其中 N_x 为位于近似点 \mathbf{x} 支持域内的节点个数, $u_i = u(\mathbf{x}_i)$ 为函数在节点 \mathbf{x}_i 的函数值, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ 为具有紧支特性的节点权函数, 本文权函数取 Gauss 函数, 即

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-r^2\beta^2} - e^{-\beta^2}}{1 - e^{-\beta^2}}, & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (2-40)$$

其中, β 为常数, $r = d_i/r_i$, $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$, r_i 为节点 \mathbf{x}_i 的支持域尺寸。

为保证 $u^h(\mathbf{x})$ 为最佳近似, 要使 $J(\mathbf{a}(\mathbf{x}))$ 达到最小, 即要求

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = 0 \quad (2-41)$$

若 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 可逆, 得到

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} \quad (2-42)$$

其中

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (2-43)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)) \quad (2-44)$$

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T \quad (2-45)$$

将(2-42)式代入(2-38)式, 可得

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U} \quad (2-46)$$

其中

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2-47)$$

2.2.3 数值积分方案

EFG 方法由于使用了 Galerkin 积分弱形式，因而需要一系列的积分，可以归结为如下两种形式的积分

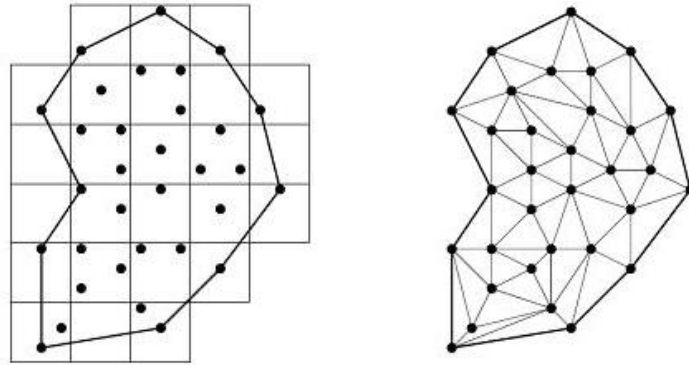
$$I_{\Omega} = \int_{\Omega} f(x) d\Omega \quad (2-48)$$

$$I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} f(x) d\Gamma \quad (2-49)$$

EFG 方法使用节点离散区域，而不是网格，且被积函数的 MLS 近似函数一般不是多项式函数，因此数值积分一直是该方法的一个难点。目前常用的数值积分方案有背景网格积分、有限元网格积分、节点积分等^[54]。

1. 背景网格积分

Belytschko 等人^[55]提出背景网格积分，在 EFG 方法中进行区域积分时，他们用一个规则的背景网格覆盖计算区域 Ω ，将区域积分转化为对各个规则网格的积分之和，如图 2-3(a)所示。从图中可以看出，背景网格中的网格可能有三种情况：完全位于 Ω 内、完全位于 Ω 外或与 Ω 相交。背景网格独立于所研究的对象，且只用于数值积分。为了保证计算精度，通常在每个规则网格里采用高阶 Gauss 积分。因为背景网格只是用来计算积分的，故一般都使用比较规则的网格，这比有限元网格的生成更容易些，但是采用背景网格计算 Galerkin 弱形式可能会产生较大的误差。



(a) 结构背景网格积分

(b) 有限元背景网格积分

图 2-3 结构背景网格积分与有限元网格积分^[56]

2. 有限元网格积分

有限元网格积分将区域 Ω 离散成一系列有限单元如图 2-3(b)所示，对 Ω 的积分转化为对各单元的积分之和。与有限元不同，这里近似函数仅用节点来构造，因而此类方法仍然是无网格方法。但对于复杂的三维问题，有限单元的生成比较困难，因此用有限元网格积分丧失了无网格方法的部分优点。

3. 节点积分

Beissel 等人^[57]采用节点积分方法来近似计算积分。它将被积函数 $f(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_i 的一个邻域 $\Delta\Omega_i$ 内近似为常数 $f(\mathbf{x}_i)$ ，然后将 $\sum f(\mathbf{x}_i)\Delta\Omega_i$ 作为积分的近似值 (其中 $\sum \Delta\Omega_i = \Omega$)。与 Gauss 积分相比，节点积分大幅度提高 EFG 方法的计算效率，但也显著降低了计算精度。

2.2.4 本质边界条件的处理

一般情况下，由 MLS 构造的形函数不满足 Kronecker Delta 条件，即近似函数在本质边界节点处的函数值通常不等于节点的已知值 ($\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$)，因此很难直接施加本质边界条件。针对这一问题，王晓东等人^[58]从理论上证明了当支持域内节点个数与基函数个数相等时，采用多项式基的 MLS 形函数可以精确满足 Kronecker Delta 条件。MLS 形函数的这种局部 Kronecker Delta 特性，使得 EFG 方法可以直接施加本质边界条件。在本文中 $m = N_x$ ，则对于边界点有

$$u^h(\mathbf{x}_j) = \phi_j(\mathbf{x}_j)u_j = u_j \quad (2-50)$$

若将 EFG 方法用于有 N 个自由度的偏微分方程，则可得到如下未施加本质边界条件的线性代数方程组

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (2-51)$$

其中 \mathbf{K} 为 $N \times N$ 的方阵， $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ 是一个以未知函数 $u(\mathbf{x})$ 对应的广义节点值为分量的 $N \times 1$ 阶列矩阵， \mathbf{f} 表示方程组右端向量的 $N \times 1$ 阶列矩阵。假设 \mathbf{x}_j 是一个本质边界点，并且 $u(\mathbf{x}_j) = d_j$ ，则可通过下面的方式将其施加到线性代数方程组(2-36)或(2-37)上

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,j-1} & 0 & k_{1,j+1} & \cdots & k_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{j-1,1} & \cdots & k_{j-1,j-1} & 0 & k_{j-1,j+1} & \cdots & k_{j-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{j+1,1} & \cdots & k_{j+1,j-1} & 0 & k_{j+1,j+1} & \cdots & k_{j+1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N,1} & \cdots & k_{N,j-1} & 0 & k_{N,j+1} & \cdots & k_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - d_j k_{1,j} \\ \vdots \\ f_{j-1} - d_j k_{j-1,j} \\ d_j \\ f_{j+1} - d_j k_{j+1,j} \\ \vdots \\ f_N - d_j k_{N,j} \end{pmatrix} \quad (2-52)$$

对于所有的本质边界节点重复上述过程，即可完成本质边界条件的施加。

2.3 本章小结

本章简要概述了 SL 方法和 EFG 方法的一些基础知识。首先，介绍了 SL 方法的基础知识，包括控制方程、处理对流项的反向追踪技术、插值方法以及无条件稳定性的分析。然后，概述了 EFG 方法的基础知识，包括基于 Galerkin 方法的方程离散和基于 MLS 近似的未知函数逼近和检验函数构造，以及三种数值积

分方案和一种满足 Kronecker Delta 条件的本质边界条件处理方法。

第三章 半 Lagrange 无网格 Galerkin 方法

SL 方法介于 Euler 方法和 Lagrange 方法之间,既克服了 Euler 方法的不稳定,不受 CFL 条件的限制,又克服了 Lagrange 方法在网格方面的困难,保持空间网格不变。因此,SL 方法在对流-扩散型方程数值求解中具有显著优势。然而,SL 方法在获取出发点处变量信息时需要进行网格搜索和使用高次插值,增加了算法的实现难度。EFG 方法无需网格且易于构造高阶近似,因此本文结合 SL 和 EFG 方法,提出了针对强对流问题的 SL-EFG 方法,降低了 SL 方法的实现难度,并增强了算法的灵活性。

本章详细介绍 SL-EFG 方法的构造过程,主要内容安排如下:首先,讲述了 SL-EFG 方法的基本思想以及主要过程;其次,给出了本章考虑的控制方程及其 Lagrange 形式;再次,推导了 SL-EFG 方法的方程离散,包括时间离散和空间离散;随后,分别将四种反向追踪技术和不同插值方式对 SL-EFG 方法计算精度的影响进行了比较研究;最后,对本章内容进行了小结。

3.1 SL-EFG 方法的基本思想

本文基于 SL 方法和 EFG 方法,针对强对流问题提出了可以消除对流项且不依赖于网格的 SL-EFG 方法。EFG 方法基于 Galerkin 弱形式,因此需要一种积分方案,本文采取背景网格积分方案,在每个规则网格中采用 Gauss-Legendre 数值积分方法。且本文仅考虑规则计算区域,因此背景网格与计算区域重合,背景网格节点和计算区域节点共用一套节点。SL-EFG 方法在背景网格的基础上建立固定的 Euler 坐标系,对时间的 Lagrange 导数而不是 Euler 导数进行离散。该方法对终点位于网格点上的粒子在一个时间步内的轨迹进行反向追踪,找到在上一时刻的出发点,并对该点处的变量值进行求解。

SL-EFG 方法主要有三个过程:

- (1) 用 Lagrange 方法将控制方程转化为 Lagrange 形式;
- (2) 采用 θ 加权法对 Lagrange 形式的方程进行时间离散,应用标准 Galerkin 方法对半离散方程进行空间离散得到全离散方程;
- (3) 沿特征线反向追踪出发点,用 MLS 方法近似出发点处的未知函数值,由这些插值数据集计算出发点处的函数导数值,然后以出发层信息为基础计算出发层节点信息,并带入全离散方程中,最后求解代数方程组。

SL-EFG 方法最后求解的方程中不存在对流项,很好地消除了方程的双曲型特性,对于强对流问题的处理具有显著优势。而许多领域的物理现象可以用对流扩散方程来描述,流体动力学中,对流扩散方程是反应宏观流动物理规律的基本

模型。因此对流扩散方程在流动问题中具有非常重要的地位，本章将以对流扩散方程为例，详细阐述 SL-EFG 方法的构建过程。

3.2 控制方程及其 Lagrange 形式

考虑如下对流扩散方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0 \quad \text{on } \Omega \end{aligned} \quad (3-1)$$

其中 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ 表示对流速度，称为对流系数， $\nu = 1/Re$ 称为扩散系数， \mathbf{f} 称为源项。为了方便说明，这里仅考虑齐次 Dirichlet 边界条件。

对于给定的 $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ ，经过 (\mathbf{x}, t) 的特征线满足常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t; s)}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t; s), s), & s \in [0, T] \\ \mathbf{x}(t; t) = \mathbf{x} \end{cases} \quad (3-2)$$

其中 $\mathbf{x}(t; s)$ 表示 t 时刻位于终点 \mathbf{x} 的粒子在之前 s 时刻的位置。沿着特征线，式 (3-1) 中的偏微分方程改写成 Lagrange 形式

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3-3)$$

其中 $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{a} \cdot \nabla)$ 为 Lagrange 导数或物质导数。从式 (3-3) 中可明显地看出，式 (3-1) 中的对流项消失了，这对于强对流问题的稳定求解非常有利。对于式 (3-3)，SL-EFG 方法在一个时间步内，将 Lagrange 坐标系转化为固定的 Euler 坐标系，既能更好地追踪流体的流动，更加符合实际物理意义，又能保持网格不变，避免了坐标系随流体流动造成的网格畸变等问题。

3.3 方程离散

SL-EFG 方法的方程离散包括时间离散和空间离散，分别采用 θ 加权法和标准 Galerkin 方法。下面将详细介绍 SL-EFG 方法的方程离散过程。

3.3.1 时间离散

本节直接对控制方程的 Lagrange 形式 (3-3) 进行时间离散。将区间 $[0, T]$ 等分，取时间步长为 Δt 。在时间段 $[t_n, t_{n+1}]$ 内考虑式 (3-3)，其中 $t_n = n\Delta t$ ， $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ，那么在点 \mathbf{x} 处对式 (3-3) 采用 θ 加权法得到

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_d^n}{\Delta t} = \theta (\nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f})^{n+1} + (1 - \theta) (\nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f})_d^n \quad (3-4)$$

式 (3-4) 中的 \mathbf{u}_d^n 表示点 \mathbf{x} 的出发点 \mathbf{x}_d 在 t_n 时刻的函数值。常见地，当 $\theta = 0$ 时，式

(3-4)为一阶显式时间离散；当 $\theta = 1/2$ 时，式(3-4)为二阶 Crank-Nicolson 格式时间离散；当 $\theta = 1$ 时，式(3-4)为全隐式时间离散。本文取 $\theta = 1/2$ ，即采用 Crank-Nicolson 时间离散。

相应地，经过 (\mathbf{x}, t) 的特征线满足的常微分方程初值问题的离散方程为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t_{n+1};t)}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t_{n+1};t), t) & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \mathbf{x}(t_{n+1};t_{n+1}) = \mathbf{x} \end{cases} \quad (3-5)$$

3.3.2 空间离散

对控制方程的 Lagrange 形式进行时间离散后，就可用标准 Galerkin 方法进行空间离散。对于 Galerkin 方法，首先定义检验函数空间 W 和试探函数空间 V 。检验函数 $\mathbf{w} \in W$ 在边界 $\partial\Omega$ 上满足齐次 Dirichlet 边界条件，即

$$W = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega), \mathbf{w}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = \mathbf{0}, \forall t \in [0, T]\} \quad (3-6)$$

试探函数空间为

$$V = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = \mathbf{u}_{\partial\Omega}, \forall t \in [0, T]\} \quad (3-7)$$

为了得到时间半离散方程(3-4)的 Galerkin 弱形式，在等式两边同乘检验函数 \mathbf{w} ，并对方程在定解区域 Ω 上进行积分，可得到如下的变分问题：给定 \mathbf{u}_d^n 、 \mathbf{f}^n 和 \mathbf{f}^{n+1} ，寻找 $\mathbf{u}^{n+1} \in V$ ，使得 $\forall \mathbf{w} \in W$ 有

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}, \mathbf{u}^{n+1}) + \Delta t \theta \nu (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{u}^{n+1}) - \Delta t \theta (\mathbf{w}, \mathbf{f}^{n+1}) \\ & = (\mathbf{w}, \mathbf{u}_d^n) - \Delta t (1 - \theta) \nu (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{u}_d^n) + \Delta t \theta (\mathbf{w}, \mathbf{f}_d^n) \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示 Ω 上的函数内积。式(3-8)的求解需要用 MLS 方法来构造检验函数空间和试探函数空间。

对于任意检验函数 $\mathbf{w} \in W$ ，在点 \mathbf{x} 处的 MLS 近似为

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \varphi_i(\mathbf{x}) \in W \quad (3-9)$$

其中 M 为点 \mathbf{x} 支持域内所包含的节点个数， $\varphi_i(\mathbf{x})$ 是节点 i 处的 MLS 形函数在点 \mathbf{x} 的取值。同样地，用 MLS 方法来近似点 \mathbf{x} 处的函数值，则有

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t) \quad \phi_j(\mathbf{x}) \in V \quad (3-10)$$

其中 N 为点 \mathbf{x} 支持域内所包含的节点个数。在 EFG 方法中，试探函数与检验函数取自同一函数空间，那么在 SL-EFG 方法中， W 和 V 均由速度场的 MLS 形函数张成。式(3-9)中的 M 和式(3-10)中的 N 都是点 \mathbf{x} 支持域内所包含的节点个数，因此 $M = N = N_x$ ，且

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}), \quad j=1,2,\dots,N_x \quad (3-11)$$

如果对于任意的检验函数 $\mathbf{w} \in W$ ，式(3-8)都成立，此时近似解便为精确解。其实不可能也不需要无穷多个检验函数，式(3-9)中 \mathbf{w} 为函数空间内的一组 MLS 形函数的线性组合，其中系数 c_i 是任意的，只须这组形函数满足式(3-8)即可。本文将等式(3-8)左边的待求解时间层信息 \mathbf{u}^{n+1} 、 $\nabla \mathbf{u}^{n+1}$ 称为到达层函数信息，将(3-9)、(3-10)、(3-11)三式代入式(3-8)中，得到如下变分形式

$$\begin{aligned} & \left(\varphi_i, \sum_{j=1}^{N_x} \varphi_j \mathbf{u}_j^{n+1} \right) + \Delta t \theta \nu \left(\nabla \varphi_i, \sum_{j=1}^{N_x} \nabla \varphi_j \mathbf{u}_j^{n+1} \right) - \Delta t \theta (\varphi_i, \mathbf{f}^{n+1}) \\ & = (\varphi_i, \mathbf{u}_d^n) - \Delta t (1-\theta) \nu (\nabla \varphi_i, \nabla \mathbf{u}_d^n) + \Delta t (1-\theta) (\varphi_i, \mathbf{f}_d^n), \quad i=1,2,\dots,N_x \end{aligned} \quad (3-12)$$

将式(3-12)中的求和符号与内积的顺序交换后得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_x} (\varphi_i, \varphi_j) \mathbf{u}_j^{n+1} + \Delta t \theta \nu \sum_{j=1}^{N_x} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) \mathbf{u}_j^{n+1} - \Delta t \theta (\varphi_i, \mathbf{f}^{n+1}) \\ & = (\varphi_i, \mathbf{u}_d^n) - \Delta t (1-\theta) \nu (\nabla \varphi_i, \nabla \mathbf{u}_d^n) + \Delta t (1-\theta) (\varphi_i, \mathbf{f}_d^n), \quad i=1,2,\dots,N_x \end{aligned} \quad (3-13)$$

此时式(3-13)是以 \mathbf{u}_j^{n+1} 为未知量的代数方程组。

在区域 Ω 内计算式(3-13)时，在每个背景格子中采用 Gauss-Legendre 积分，并且背景网格与计算区域共用一套节点。因此，对于整个区域，直接关于积分点循环。此时，式(3-13)中需要的是积分点即 $\mathbf{x} = \mathbf{g}$ 处的函数信息，那么等式左边的 N_x 表示积分点 \mathbf{g} 的支持域内所包含的节点个数， φ_i 、 φ_j 分别为节点 \mathbf{x}_i 、 \mathbf{x}_j 处的 MLS 形函数在积分点处的取值， $\nabla \varphi_i$ 、 $\nabla \varphi_j$ 分别为节点 \mathbf{x}_i 、 \mathbf{x}_j 处的 MLS 形函数在积分点处的一阶导；等式右边的 $\mathbf{u}_d^n(\mathbf{g})$ 、 $\nabla \mathbf{u}_d^n(\mathbf{g})$ 表示积分点 \mathbf{g} 的出发点 \mathbf{g}_d 处的函数值与一阶导数值。为了更清楚地描述，将式(3-13)改写成如下形式

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_x} \left[(\varphi_i(\mathbf{g}), \varphi_j(\mathbf{g})) + \Delta t \theta \nu (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \nabla \varphi_j(\mathbf{g})) \right] \mathbf{u}_j^{n+1} - \Delta t \theta (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}^{n+1}) \\ & = (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{u}_d^n(\mathbf{g})) - \Delta t (1-\theta) \nu (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \nabla \mathbf{u}_d^n(\mathbf{g})) + \Delta t (1-\theta) (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}_d^n), \quad i=1,2,\dots,N_x \end{aligned} \quad (3-14)$$

假设计算区域 Ω 中各节点对应的出发点位置确定后，通过 MLS 方法近似这些点处的函数值 \mathbf{u}_d^n 和一阶导数值 $\nabla \mathbf{u}_d^n$ ，称为出发层函数信息，则 \mathbf{u}_d^n 和 $\nabla \mathbf{u}_d^n$ 的 MLS 近似分别为

$$\mathbf{u}_d^n = \sum_{k=1}^{N_{x_d}} \psi_k(\mathbf{x}_d) \mathbf{u}_k^n \quad (3-15)$$

$$\nabla \mathbf{u}_d^n = \sum_{k=1}^{N_{x_d}} \nabla \psi_k(\mathbf{x}_d) \mathbf{u}_k^n \quad (3-16)$$

其中 N_{x_d} 表示出发点 \mathbf{x}_d 支持域内包含的节点个数， ψ_k 表示 MLS 形函数，基函数可以取线性基、二次基、五次基。

由于传统 SL 方法是关于节点上的粒子进行反向追踪的，因此不能直接得到式(3-14)中 $\mathbf{u}_d^n(\mathbf{g})$ 、 $\nabla \mathbf{u}_d^n(\mathbf{g})$ 的值，需要将区域中各节点对应的出发点处的函数值 \mathbf{u}_d^n 传递到对应的节点上，记为 $(\mathbf{u}_d^n)_i (i=1,2,\dots,N)$ ，通过这些函数值，应用 MLS 方法近似积分点所对应出发点处的函数值及其导数值分别为

$$\mathbf{u}_d^n(\mathbf{g}) = \sum_{j=1}^{N_x} \varphi_j(\mathbf{g}) (\mathbf{u}_d^n)_j \quad (3-17)$$

$$\nabla \mathbf{u}_d^n(\mathbf{g}) = \sum_{j=1}^{N_x} \nabla \varphi_j(\mathbf{g}) (\mathbf{u}_d^n)_j \quad (3-18)$$

此时，式(3-14)可改写为

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_x} \left[(\varphi_i(\mathbf{g}), \varphi_j(\mathbf{g})) + \Delta t \theta \nu (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \nabla \varphi_j(\mathbf{g})) \right] \mathbf{u}_j^{n+1} - \Delta t \theta (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}^{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_x} \left[(\varphi_i(\mathbf{g}), \varphi_j(\mathbf{g})) - \Delta t (1-\theta) \nu (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \nabla \varphi_j(\mathbf{g})) \right] (\mathbf{u}_d^n)_j \\ & \quad + \Delta t (1-\theta) (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}_d^n), \quad i=1,2,\dots,N_x \end{aligned} \quad (3-19)$$

3.4 反向追踪出发点

3.4.1 反向追踪技术

对式(3-3)进行时间离散和空间离散后，需要确定区域 Ω 中各网格点对应的出发点 \mathbf{x}_d 的位置，根据 SL 方法处理对流项的反向追踪技术，对式(3-5)的两端进行积分，得到

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_d = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) dt \quad (3-20)$$

当 $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t)$ 是与时间无关的函数时， $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{a}$ 为一个常数向量，此时控制方程为常系数对流扩散方程。由式(3-20)可以得到出发点为

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x} - \mathbf{a} \Delta t \quad (3-21)$$

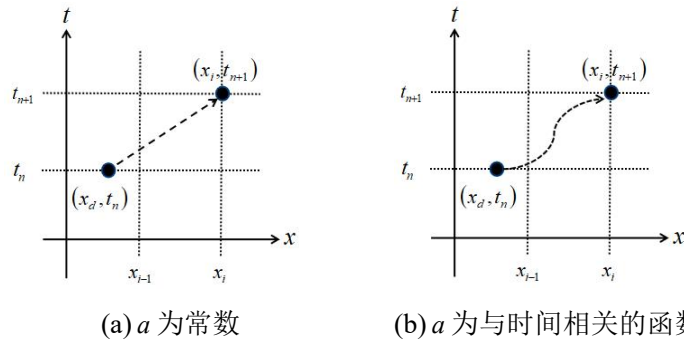


图 3-1 一维情况下点 x_i 在单位时间步内的粒子轨迹图

考虑一维问题时，点 x_i 在单位时间步内的粒子轨迹图如图 3-1(a)所示，粒子的轨

迹为一条直线。然而，当 $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t)$ 是与时间相关的函数时，控制方程为非线性对流扩散方程。此时式(3-20)很难精确求解出发点的位置(见图 3-1(b))，需要采用常微分方程初值问题的数值解法，即第二章给出的几种算法。

1. 向后 Euler 法

用向后 Euler 法求解式(3-20)可得

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) \Delta t \quad (3-22)$$

定义 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ 为粒子在单位时间步内沿特征线的位移，则式(3-22)可以写成

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) \Delta t \quad (3-23)$$

由于出发点一般不是网格点， $\mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n)$ 需要通过 MLS 近似得到。采用不动点迭代计算，对于区域 Ω 上的所有网格点，迭代过程为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For } i = 1, 2, \dots, N \\ \text{Initialize } \boldsymbol{\alpha}_i^{[0]} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Calculate } \mathbf{x}_d = \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\alpha}_i^{[k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \text{Interpolate } \mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) \text{ by MLS} \\ \text{Update } \boldsymbol{\alpha}_i^{[k+1]} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) \Delta t, \\ (\mathbf{x}_d)_i = \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\alpha}_i. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

其中 $(\mathbf{x}_d)_i$ 、 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 分别表示位于节点 \mathbf{x}_i 的粒子在单位时间内的位移。

2. 梯形求积公式

用梯形求积公式求解式(3-20)可得

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t_{n+1})] \quad (3-24)$$

其中 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ 用 EFG 方法计算得到。则引入 $\boldsymbol{\alpha}$ 后，式(3-24)可以写成

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t_{n+1})] \quad (3-25)$$

对于区域 Ω 上的所有网格点，迭代过程为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For } i = 1, 2, \dots, N \\ \text{Calculate } \mathbf{a}(\mathbf{x}_i, t_{n+1}) \text{ by EFG} \\ \text{Initialize } \boldsymbol{\alpha}_i^{[0]} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Calculate } \mathbf{x}_d = \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\alpha}_i^{[k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \text{Interpolate } \mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) \text{ by MLS} \\ \text{Update } \boldsymbol{\alpha}_i^{[k+1]} = \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{x}_d, t_n) + \mathbf{a}(\mathbf{x}_i, t_{n+1})], \\ (\mathbf{x}_d)_i = \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\alpha}_i. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. 中间点法

用中间点法求解式(3-20)可得

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{x} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_m, t_n + \Delta t/2)\Delta t \quad (3-26)$$

其中, $\mathbf{x}_m = (\mathbf{x} + \mathbf{x}_d)/2$ 是网格点 \mathbf{x} 和出发点 \mathbf{x}_d 的中间点, 则 $\mathbf{a}(\mathbf{x}_m, t_n + \Delta t/2)$ 是 $t_{n+1/2}$ 时刻中间点 \mathbf{x}_m 处的流体速度。则引入 \mathbf{a} 后, 式(3-26)可以写成

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_m, t_n + \Delta t/2)\Delta t \quad (3-27)$$

这里用外推法来计算 $\mathbf{a}^{n+1/2}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_m, t_n + \Delta t/2)$, 外推公式为

$$\mathbf{a}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(3\mathbf{a}^n - \mathbf{a}^{n-1}) \quad (3-28)$$

对于区域 Ω 上的所有网格点, 迭代过程为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For } i = 1, 2, \dots, N \\ \text{Calculate } \mathbf{a}^{n+1/2}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2}[3\mathbf{a}^n(\mathbf{x}_i) - \mathbf{a}^{n-1}(\mathbf{x}_i)], \\ \text{Initialize } \mathbf{a}_i^{[0]} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Calculate } \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i^{[k]}/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \text{Interpolate } \mathbf{a}^{n+1/2}(\mathbf{x}_m) \text{ by MLS} \\ \text{Update } \mathbf{a}_i^{[k+1]} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_m, t_{n+1/2})\Delta t, \\ (\mathbf{x}_d)_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

上述三种算法都需要迭代, 通常只要 2 次或 3 次迭代便可获得足够的精度, 并且值得注意的是只有满足条件 $\Delta t \rho(-\nabla \mathbf{a}/2) < 1$, 迭代才收敛。因此 Δt 的大小并不是受稳定性条件的限制, 而是受轨迹精确计算的限制。

4. 基于 Taylor 展开的方法

由第二章可知, 用基于 Taylor 展开的方法求解(3-20)可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}(\mathbf{x}_d^n, t_n) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}, t_n)}{1 + \mathbf{a}_x(\mathbf{x}, t_n)\Delta t} \\ \mathbf{x}_d^n = \mathbf{x} - \mathbf{a}(\mathbf{x}_d^n, t_n)\Delta t \end{array} \right. \quad (3-29)$$

该方法不需要迭代, 只需要对区域 Ω 上的所有网格点遍历一次即可。

另外需要注意的是, 当式(3-21)、(3-22)、(3-24)、(3-26)和(3-29)中的 Δt 或 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ 过大时, 出发点会落在区域外, 此时便将落于区域外的点当作边界点处理即可。

3.4.2 反向追踪技术的数值检验

本节对 3.4.1 节中给出的四种反向追踪技术进行数值验证, 拟选取最优的一种反向追踪技术。方便起见, 出发层变量信息和到达层变量信息的 MLS 近似取相同的基函数。

考虑定义在区间 $\Omega = [0, 1]$ 上的一维 Burgers 方程，此时式(3-1)中的对流系数 $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = u(x, t)$ ，扩散系数 $\nu = 1/Re$ ，源项 $\mathbf{f} = 0$ ，即为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = \nu \nabla^2 u \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (3-30)$$

速度 u 取齐次 Dirichlet 边界条件，初值为 $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ ，该问题有解析解

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) n \sin(n\pi x)}{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n\pi x)} \quad (3-31)$$

式中

$$c_0 = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1 - \cos(\pi x)}{2\pi\nu}\right) dx \quad (3-32)$$

$$c_n = 2 \int_0^1 \exp\left(-\frac{1 - \cos(\pi x)}{2\pi\nu}\right) \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3-33)$$

为了度量数值解的误差，首先需要计算解析解(3-31)，在实际计算中，不可能对无穷项求和，因此为了保证精度只需要取足够多的项。但是，当 Re 数很大时，解析解就失效了。为了对比分析 SL-EFG 方法在采用上述四种反向追踪技术时的计算精度，仅考虑数值解与解析解在 $Re = 1$ 、10 和 100 时的相对误差，定义 L_2 范数相对误差为

$$L_2 = \frac{\|u^h - u^{exact}\|_{L_2}}{\|u^{exact}\|_{L_2}} = \frac{\left(\int_{\Omega} (u^h - u^{exact})^2 d\Omega\right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega} (u^{exact})^2 d\Omega\right)^{1/2}} \quad (3-34)$$

其中 u^{exact} 表示解析解， u^h 表示数值解， Ω 为问题的求解域。

计算中使用 101 个等距分布节点，时间步长取 0.001，基函数采用线性基函数和二次基函数。表 3-1 到表 3-4 分别给出了 SL-EFG 方法在采用四种反向追踪技术时的计算误差。表中结果表明，对于上述四种反向追踪技术，在同一基函数

表 3-1 向后 Euler 反向追踪技术的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$
0.2	1.301e-2	1.521e-2	1.834e-2	1.240e-4	3.032e-4	2.542e-4
0.4	2.553e-2	2.940e-2	6.744e-2	8.563e-5	5.009e-4	2.199e-3
0.6	3.790e-2	3.972e-2	7.702e-2	1.098e-4	5.265e-4	3.310e-3
0.8	5.012e-2	4.820e-2	7.821e-2	1.354e-4	4.903e-4	2.925e-3
1.0	6.218e-2	5.632e-2	8.233e-2	1.610e-4	4.454e-4	2.534e-3

表 3-2 梯形法反向追踪技术的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$
0.2	1.495e-2	1.413e-1	2.149e-1	1.432e-3	1.509e-1	3.117e-1
0.4	3.906e-3	1.953e-1	4.188e-1	1.767e-4	1.397e-1	3.743e-1
0.6	7.916e-4	2.163e-1	5.936e-1	2.505e-5	1.207e-1	3.681e-1
0.8	1.441e-4	2.110e-1	5.674e-1	3.549e-6	1.055e-1	3.615e-1
1.0	2.469e-5	1.952e-1	5.197e-1	5.026e-7	9.048e-2	3.256e-1

表 3-3 中点法反向追踪技术的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$
0.2	1.495e-2	1.416e-1	2.149e-1	1.453e-3	1.518e-1	3.120e-1
0.4	3.905e-3	1.950e-1	4.184e-1	1.747e-4	1.404e-1	3.771e-1
0.6	7.915e-4	2.160e-1	5.930e-1	2.477e-5	1.208e-1	3.673e-1
0.8	1.440e-4	2.107e-1	5.669e-1	3.509e-6	1.054e-1	3.605e-1
1.0	2.468e-5	1.949e-1	5.194e-1	4.471e-7	9.031e-2	3.249e-1

表 3-4 基于 Taylor 展开的反向追踪技术的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$
0.2	1.566e-4	3.457e-3	7.112e-3	1.657e-4	3.109e-3	6.614e-3
0.4	1.088e-5	4.138e-3	3.441e-2	1.557e-5	3.400e-3	1.199e-2
0.6	7.026e-7	3.685e-3	5.445e-2	1.745e-6	2.842e-3	7.473e-3
0.8	1.119e-8	3.009e-3	3.948e-2	1.869e-7	2.236e-3	5.007e-3
1.0	1.663e-8	2.414e-3	2.768e-2	1.829e-8	1.756e-3	3.369e-3

下，随着对流作用的加强计算精度逐渐降低，而对于相同的 Re 数，基函数阶数越高计算精度就越高。观察不同反向追踪技术可知，在对流项不占优即 $Re = 1$ 时，四种反向追踪技术的精度都较高，且基于 Taylor 展开的反向追踪技术的计算精度最高。然而，随着对流作用的加强，除向后 Euler 的反向追踪技术外，其它反向追踪技术的计算精度显著降低，而向后 Euler 的反向追踪技术仍能保持相对较高的计算精度。因此，在 SL-EFG 方法中，向后 Euler 反向追踪技术更适合求解强对流情形的问题。如无特别说明，后文中 SL-EFG 方法求解各数值算例时均采用向后 Euler 的反向追踪技术。

图 3-2 给出了在 $Re = 10000$ 时，EFG 方法和 SL-EFG 方法求解 Burgers 方程 (3-30) 的数值解。由图中结果可知，随着时间的推移，EFG 方法的数值解出现了严重的数值伪振荡，而 SL-EFG 方法的数值解非常稳定，这有效地验证了 SL-EFG

方法在求解强对流问题时具有良好的稳定性。用 EFG 方法求解 Burgers 方程在低 Re 数下的数值解时, 得到的误差如表 3-5 所示。将该表与上述表 3-1 到表 3-4 进行比较可知, EFG 方法的计算精度略高于 SL-EFG。

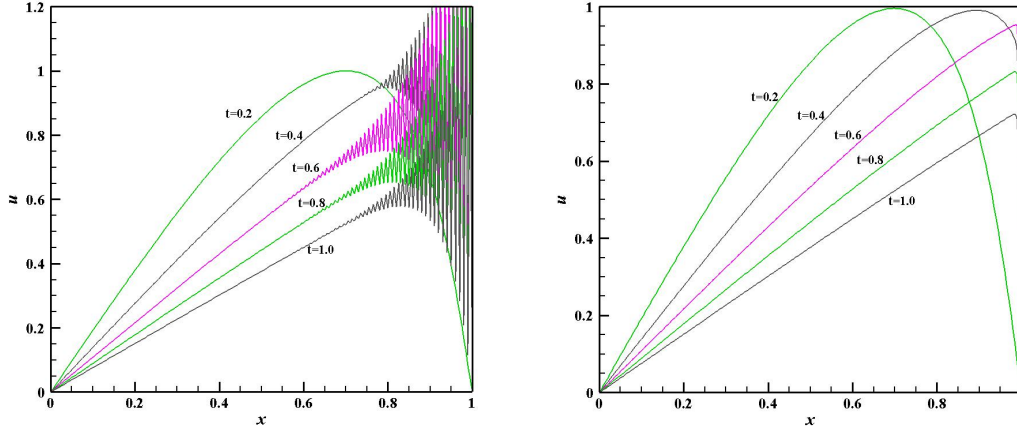


图 3-2 $Re = 10000$ 时 EFG 方法(左)与 SL-EFG 方法(右)的数值结果

表 3-5 EFG 方法的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1$	$Re = 10$	$Re = 100$
0.2	1.011e-4	1.922e-4	3.030e-4	8.526e-5	1.866e-4	3.284e-4
0.4	1.287e-4	2.599e-4	1.466e-3	8.999e-5	2.570e-4	7.488e-4
0.6	1.699e-4	2.770e-4	3.829e-3	1.109e-4	2.907e-4	9.297e-4
0.8	2.113e-4	2.773e-4	3.395e-3	1.321e-4	3.064e-4	8.491e-4
1.0	2.526e-4	2.755e-4	2.791e-3	1.532e-4	3.142e-4	7.204e-4

3.5 插值方式的选取

在本文提出的 SL-EFG 方法中, 出发层函数信息和到达层函数信息的计算都需要 MLS 近似, 且彼此相互独立, 这样的一组独立近似称为一种插值方式。由 3.3.2 节可知, 这里所说的出发层变量信息即指各节点对应的出发点处的未知函数信息, 对应的 MLS 形函数集合为 $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$, 而到达层变量信息即指待求解时间层的未知函数信息, 对应的 MLS 形函数集合为 $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ 。由于 EFG 方法在构造形函数时不受网格或单元限制, 因此 SL-EFG 方法中的插值方式很容易建立。假设在出发层上出发点处函数信息的 MLS 近似阶数为 m , 而式(3-19)中到达层上函数信息的 MLS 近似阶数为 n 。此时, 相应的 SL-EFG 方法被记为 SL-EFG(m, n, Re)。

为了比较 SL-EFG 方法在不同插值方式时的计算精度, 本节考虑一维 Gaussian-cone 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \nabla u = \nu \nabla^2 u \quad x \in (-1, 1) \quad (3-35)$$

该问题定义在区域 $\Omega = [-1, 1]$ 上，初值及解析解分别为

$$u(x, 0) = e^{-(x-x_0)^2/2\lambda_0^2} \quad (3-36)$$

$$u(x, t) = e^{-(x-x_0-at)^2/2(\lambda_0^2+2vt)} \quad (3-37)$$

其中 x_0 和 λ_0 为 Gaussian-cone 的形状参数，分别取 $x_0 = 0$ 、 $\lambda_0 = 1/8$ 。该问题的对流系数是一个常数 $a = 0.5$ ，因此可直接反向追踪得到出发点的位置为 $x_d = x_i - a\Delta t$ 。

本节考虑九种插值方式，按出发层函数信息的 MLS 近似阶数的取值将九种插值方式分为三组。三组插值方式分别为 $m=1$: SL-EFG(1,1,Re)、SL-EFG(1,2,Re)、SL-EFG(1,5,Re); $m=2$: SL-EFG(2,1,Re)、SL-EFG(2,2,Re)、SL-EFG(2,5,Re); $m=5$: SL-EFG(5,1,Re)、SL-EFG(5,2,Re)、SL-EFG(5,5,Re)。

为了讨论这三组插值方式在不同 Re 数下的计算精度，用这九种插值方式求解上述 Gaussian-cone 问题， Re 数分别取 100、1000。图 3-3、3-4、3-5 分别给出了三组插值方式在不同 Re 数下的误差图。图中结果表明，对于不同的 Re 数，出发层函数信息的近似阶数越高，相应的计算精度就越高。图 3-3 中，当出发层函数信息的近似阶数 $m=1$ 即取线性基函数时，提高到达层函数信息的近似阶数 n 的值对计算精度几乎没有影响。图 3-4 中，当出发层函数信息的近似阶数 $m=2$ 即取二次基函数时，提高到达层函数信息的近似阶数 n 的值，发现 $n=2$ 与 $n=5$ 时的计算精度几乎一致，均比 $n=1$ 时的计算精度高。图 3-5 中，当出发层函数信息的近似阶数 $m=5$ 即取五次基函数时，提高到达层函数信息的近似阶数 n 的值，发现 $n=5$ 时的计算精度明显高于 $n=2$ 和 $n=1$ 计算精度。由此可知，当 SL-EFG 方法取等阶插值方式即 $m=n$ 时，该方法既不失精度又无需增加额外的计算量。因此本文将等阶插值方式作为 SL-EFG 方法的推荐插值方式。

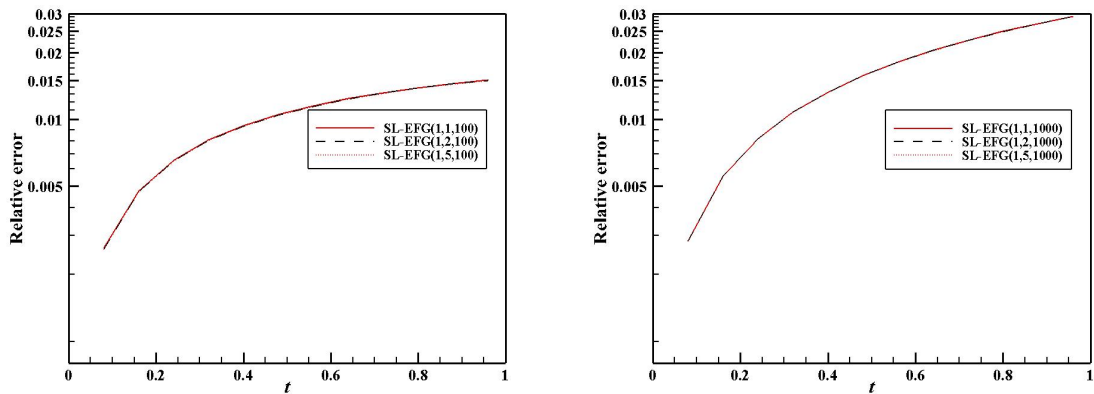
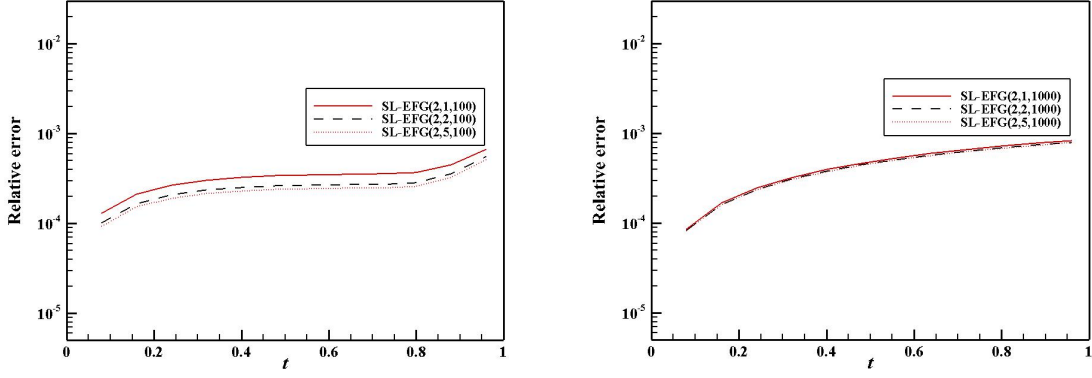
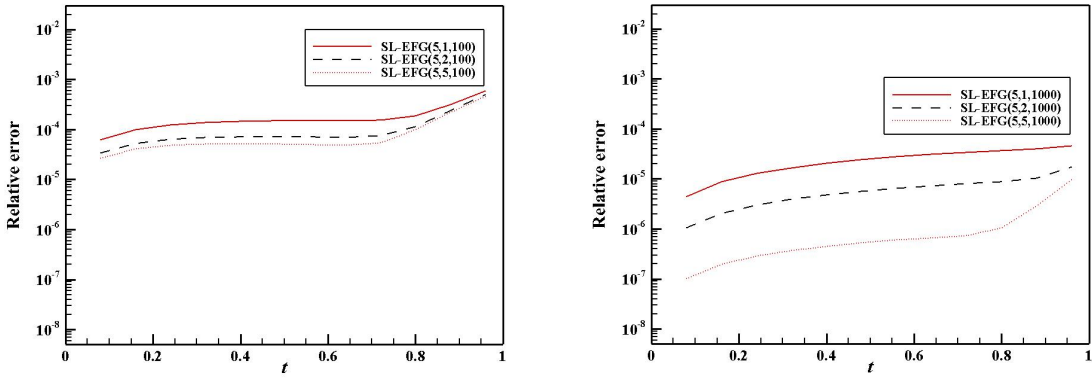


图 3-3 $m=1$ 的插值方式在 $Re=100$ (左)、1000 (右) 时的计算误差

图 3-4 $m=2$ 的插值方式在 $Re=100$ (左)、 1000 (右) 时的计算误差图 3-5 $m=5$ 的插值方式在 $Re=100$ (左)、 1000 (右) 时的计算误差

3.6 本章小结

本章提出了针对强对流情形下对流扩散方程求解的 SL-EFG 方法。该方法通过反向追踪和函数插值两个关键步骤，实现了在固定的 Euler 坐标系下求解 Lagrange 形式的扩散方程。采用 θ 加权法和标准 Galerkin 方法对 Lagrange 形式的扩散方程进行时间和空间的离散。

分别采用四种反向追踪技术对一维 Burgers 方程进行求解，对比研究后发现采用向后 Euler 的反向追踪技术在对流作用较强时计算精度更高，然而仍略低于 EFG 方法的计算精度。但是在对流作用更强时 EFG 方法的计算结果出现严重的数值伪振荡，而 SL-EFG 方法在相同条件下仍然保持稳定的数值结果。随后利用一维 Gaussian-cone 问题研究了不同插值方式对 SL-EFG 计算精度的影响，发现采用等阶插值方式，该方法既不失精度又无需增加额外的计算量。

总之，本章提出的 SL-EFG 方法，相比于 EFG 方法，以损失少量精度为代价获得了更好的稳定性，更加适用于强对流问题的求解。

第四章 半 Lagrange 无网格 Galerkin 方法的改进

SL-EFG 方法相比于 EFG 方法，以损失少量精度为代价获得了更好的稳定性。因而为了弥补 SL-EFG 方法在精度方面的不足，本节给出了两方面的改进。首先，将出发点处导数值的计算改在原始数据集上，避免了使用插值数据集计算导数时出现的累积误差。其次，将对节点的反向追踪改为直接对积分点的反向追踪，避免了先计算出发层节点信息再以此为基础计算出发层积分点信息产生的二次误差。

本章内容安排如下：首先，指出了 SL-EFG 方法的不足之处，基于此给出了两方面的改进，一种是改变了出发点处未知函数导数的插值方式，另一种是将对节点的反向追踪改为对积分点的反向追踪，并通过数值算例分别对这两种改进的有效性进行了验证；其次，给出了 SL-EFG 方法的完整流程；再次，利用数值算例对该方法的数值收敛率进行了简单分析；随后，通过数值算例验证了 SL-EFG 方法的计算精度及强对流情形下的稳定性；最后，对本章内容进行了小结。

4.1 SL-EFG 方法的不足与改进

4.1.1 SL-EFG 方法的不足

相比于标准的 EFG 方法，SL-EFG 方法虽然具备了更好的稳定性，但是精度还有待提高。由于该方法使用了 Galerkin 积分弱形式，因此对流扩散方程变分形式(3-8)的求解不可避免地需要求解一系列积分，本文采用 Gauss-Legendre 积分计算。式(3-8)中的 \mathbf{u}_d^n 和 $\nabla \mathbf{u}_d^n$ 是出发层变量信息，SL-EFG 方法通过向后 Euler 方法对节点进行反向追踪得到对应的出发点，利用 MLS 方法近似这些出发点处未知函数的值，本文称这些值为插值数据集。插值数据集是在原始节点数据集的基础上通过 MLS 近似计算得到的，随后便利用这些插值数据集计算出发点处未知函数的导数值。此时，式(3-14)中出发层函数值的 MLS 近似(3-17)本身就引入了误差，再用这些值通过 MLS 近似函数的导数值如式(3-18)所示，这样会产生累积误差，从而降低 SL-EFG 方法的计算精度。

本节考虑 3.5 中定义在区间 $\Omega = [-1, 1]$ 上的 Gaussian-cone 问题。表 4-1 和表 4-2 分别给出了插值方式为线性基和二次基时，SL-EFG 方法与标准 EFG 方法在不同 Re 数下的计算误差。表 4-1 中结果表明，对于不同的 Re 数，SL-EFG 方法的近似阶数越高精度越高；插值方式为线性基函数时，SL-EFG 方法的计算精度随着对流作用的增强而降低；插值方式为二次基函数时，SL-EFG 方法的计算精度随着对流作用的增强有所提升。表 4-2 中结果表明，对于不同的 Re 数，近似阶数对标准 EFG 方法的计算精度几乎没有影响，且对于不同的插值方式，该方

法的计算精度随着对流作用的增强而降低。将表 4-1 和表 4-2 中的数据进行对比，可以发现，插值方式为线性基函数时，SL-EFG 方法的计算精度低于标准 EFG 方法；然而插值方式为二次基函数时，在对流作用较强的情形下 SL-EFG 方法的计算精度高于标准 EFG 方法，且随着对流作用的加强，EFG 方法的精度明显降低，而 SL-EFG 方法的精度并没有显著降低，反而有所提升。这表明强对流情形时 SL-EFG 方法相比于标准 EFG 方法在计算精度方面有一定的优势，然而在线性基时精度仍偏低，还需进一步的改进。

表 4-1 SL-EFG 方法采用线性基和二次基时在不同 Re 数下的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1000$
0.2	5.832e-4	1.415e-3	1.727e-3	1.244e-4	7.465e-6	8.501e-6
0.4	6.186e-4	2.346e-3	3.363e-3	2.034e-4	1.068e-5	1.638e-5
0.6	8.095e-4	3.005e-3	4.913e-3	6.082e-4	1.232e-5	2.369e-5
0.8	1.168e-3	3.496e-3	6.385e-3	9.455e-4	2.857e-5	3.049e-5
1	1.413e-3	3.853e-3	7.784e-3	1.084e-3	1.700e-4	3.716e-5

表 4-2 标准 EFG 方法采用线性基和二次基时在不同 Re 数下的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1000$
0.2	1.741e-4	1.200e-4	1.529e-4	1.757e-4	1.140e-4	1.391e-4
0.4	8.481e-5	1.797e-4	2.947e-4	8.661e-5	1.696e-4	2.681e-4
0.6	4.647e-5	2.116e-4	4.264e-4	4.802e-5	1.987e-4	3.879e-4
0.8	3.308e-5	2.286e-4	5.489e-4	3.512e-5	2.139e-4	4.994e-4
1	2.810e-5	2.353e-4	6.629e-4	3.002e-5	2.195e-4	6.030e-4

4.1.2 出发点处导数值计算方法的改进

针对 SL-EFG 方法中使用插值数据集计算出发点处未知函数导数值时出现的累积误差，本节提出直接将出发点处导数值的计算改在原始数据集上，即将式 (3-18) 改写成

$$\nabla \mathbf{u}_d^n(\mathbf{g}) = \sum_{j=1}^{N_x} \varphi_j(\mathbf{g}) (\nabla \mathbf{u}_d^n)_j \quad (4-1)$$

将式(3-17)和式(4-1)代入式(3-14)，得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_x} \left[(\varphi_i(\mathbf{g}), \varphi_j(\mathbf{g})) + \Delta t \theta v (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \nabla \varphi_j(\mathbf{g})) \right] \mathbf{u}_j^{n+1} - \Delta t \theta (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}^{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_x} \left[(\varphi_i(\mathbf{g}), \varphi_j(\mathbf{g})) (\mathbf{u}_d^n)_j - \Delta t (1 - \theta) v (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \varphi_j(\mathbf{g})) (\nabla \mathbf{u}_d^n)_j \right] \\ & \quad + \Delta t (1 - \theta) (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}_d^n), \quad i = 1, 2, \dots, N_x \end{aligned} \quad (4-2)$$

为了验证改进后 SL-EFG 方法的计算精度，考虑 3.5 节中定义在区间 $\Omega = [-1, 1]$ 上的 Gaussian-cone 问题。表 4-3 给出了插值方式分别为线性基函数和二次基函数时，SL-EFG 方法改进后在不同 Re 数下的计算误差。将表 4-1 和表 4-3 中的数据进行对比，可以发现，SL-EFG 方法改进后的计算精度并没有显著提高，且改进后的相关结论与改进前基本保持一致。对于表 4-3 和表 4-2 中的数据，也得到与 4.1.1 中一致的结论。表明使用插值数据集计算出发点处的函数导数值时出现的累积误差对 SL-EFG 方法计算精度的影响并不显著，相比于标准 EFG 方法，SL-EFG 方法的精度仍需要进一步提高。

表 4-3 SL-EFG 方法改进后采用线性基和二次基时在不同 Re 数下的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1000$
0.2	9.612e-4	1.460e-3	1.728e-3	1.248e-4	7.736e-6	8.518e-6
0.4	9.133e-4	2.408e-3	3.364e-3	1.229e-4	1.101e-5	1.641e-5
0.6	9.415e-4	3.073e-3	4.915e-3	3.789e-4	1.258e-5	2.374e-5
0.8	9.535e-4	3.565e-3	6.387e-3	5.866e-4	1.788e-5	3.055e-5
1	8.741e-4	3.923e-3	7.787e-3	6.678e-4	8.283e-5	3.688e-5

4.1.3 基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法

传统 SL 方法是追踪终点位于节点上的流体粒子在一个时间步长内的运动轨迹，即对节点进行反向追踪得到该粒子在上一时刻的出发点，该方法消除了控制方程中的对流项，避免了方程的双曲型特性导致的不稳定性。因此本文在初始建立 SL-EFG 方法时沿用了传统 SL 方法的思路，对位于节点上的粒子进行反向追踪，但是 EFG 方法是 Galerkin 积分弱形式，需要的是积分点处的函数信息。虽然 4.1.2 中的改进是将出发点处导数值的计算改在原始数据集上，避免了使用插值数据集计算导数时出现的累积误差，但是这种改进和原始 SL-EFG 方法均是通过节点在出发层的信息来间接地计算积分点在出发层的信息，这样的计算产生了二次误差，使该方法的计算精度大幅度降低。

鉴于上述原因，本节把对节点的反向追踪改为直接对积分点的反向追踪，避免了间接求解产生的二次误差，得到了基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法。该方法在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内通过向后 Euler 反向追踪积分点 \mathbf{g} 在 t_n 时刻的出发点 \mathbf{g}_d ，然后利用 MLS 方法近似 \mathbf{g}_d 处的函数值和函数导数值，即

$$\mathbf{u}_d^n(\mathbf{g}_d) = \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{g}_d}} \psi_k(\mathbf{g}_d) \mathbf{u}_k^n \quad (4-3)$$

$$\nabla \mathbf{u}_d^n(\mathbf{g}_d) = \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{g}_d}} \nabla \psi_k(\mathbf{g}_d) \mathbf{u}_k^n \quad (4-4)$$

将式(4-3)、(4-4)代入式(3-14)，得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_g} \left[(\varphi_i(\mathbf{g}), \varphi_j(\mathbf{g})) + \Delta t \theta v (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \nabla \varphi_j(\mathbf{g})) \right] \mathbf{u}_j^{n+1} - \Delta t \theta (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}^{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{gd}} \left[(\varphi_i(\mathbf{g}), \psi_k(\mathbf{g}_d)) - \Delta t (1-\theta) v (\nabla \varphi_i(\mathbf{g}), \nabla \psi_k(\mathbf{g}_d)) \right] \mathbf{u}_k^n \\ & \quad + \Delta t (1-\theta) (\varphi_i(\mathbf{g}), \mathbf{f}_d^n), \quad i=1, 2, \dots, N_g \end{aligned} \quad (4-5)$$

为了验证基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法的计算精度，仍考虑上述 Gaussian-cone 问题。表 4-4 给出了插值方式为线性基函数和二次基函数时，基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法在不同 Re 数下的计算误差。表中结果表明，对于不同的 Re 数，插值阶数越高，相应的计算精度就越高；无论对线性基函数还是二次基函数，随着对流作用的加强该方法的计算精度都有所提高，尤其是在二次基函数和对流作用较强的情况下。相比于基于节点反向追踪的 SL-EFG 方法，精度得到了显著提高，尤其是在强对流情形时。相比于标准 EFG 方法，除线性基 $Re=10$ 外精度均显著地提高了。以上结论表明，基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法更符合流体流动的物理意义，并且具有较高精度，尤其是强对流情形时。如无特别说明，后文均以基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法进行数值求解。方便起见，在后文中仍然称为 SL-EFG 方法。

表 4-4 基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法在不同 Re 数下的计算误差

t	线性基			二次基		
	$Re=10$	$Re=100$	$Re=1000$	$Re=10$	$Re=100$	$Re=1000$
0.2	2.602e-4	1.117e-4	3.968e-5	1.239e-4	3.185e-6	7.376e-8
0.4	2.040e-4	1.700e-4	7.725e-5	4.841e-5	3.740e-6	1.404e-7
0.6	1.774e-4	2.028e-4	1.129e-4	2.666e-5	3.593e-6	2.007e-7
0.8	1.596e-4	2.218e-4	1.467e-4	1.614e-5	3.270e-6	2.553e-7
1	1.340e-4	2.309e-4	1.788e-4	1.024e-5	3.016e-6	3.060e-7

4.2 SL-EFG 方法的完整流程

假设用 N 个节点离散区域 Ω ，SL-EFG 方法求解对流扩散方程的离散方程式 (4-5) 的矩阵形式为

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{u}^n + \mathbf{D} \quad (4-6)$$

这里矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{ik} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_j \\ \vdots \end{pmatrix}_{N \times 1}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \vdots \\ d_j \\ \vdots \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

其中

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\varphi_i \varphi_j + \Delta t \theta v \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j) d\Omega$$

$$b_{ik} = \int_{\Omega} (\varphi_i \psi_k - \Delta t (1 - \theta) v \nabla \varphi_i \nabla \psi_k) d\Omega$$

$$c_j = \int_{\Omega} \Delta t \theta \varphi_i f_j d\Omega$$

$$d_j = \int_{\Omega} \Delta t (1 - \theta) \varphi_i f_j d\Omega$$

根据第三章及 4.1.3 节, SL-EFG 方法求解对流扩散方程时, 首先将控制方程转化为 Lagrange 形式; 然后用 θ 加权法进行时间离散, 用标准 Galerkin 方法进行空间离散; 其次基于特征线方程直接对积分点进行向后 Euler 反向追踪得到出发点的位置, 并进行 MLS 近似得到这些点处的变量信息, 将其代入全离散方程中; 最后编写程序实现方程组的求解。本节完整地给出了 SL-EFG 方法的程序流程如下:

1. 用一系列节点 \mathbf{x} 离散区域 Ω , 确定背景积分网格;
2. 确定区域中所有高斯积分点 \mathbf{g}_q 及其权系数 w_q ;
3. 对时间层循环:
 - (1) 对积分网格中的所有积分点 \mathbf{g}_q 循环:
 - (a) 关于积分点通过向后 Euler 法计算式(3-20)反向追踪到出发点, 并用 MLS 方法近似出发点处的变量信息;
 - (b) 确定积分点 \mathbf{g}_q 的支持域内的节点 \mathbf{x}_l , 即权函数 $w_l(\mathbf{g}_q) > 0$ 的节点;
 - (c) 计算积分点 \mathbf{g}_q 的支持域内各节点的 MLS 形函数 $\psi_l(\mathbf{g}_q)$ 及其导数 $\psi_{l,i}(\mathbf{g}_q)$;
 - (d) 计算被积函数在 \mathbf{g}_q 处的值, 组装矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和向量 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 。
 - (2) 结束对积分点的循环。
4. 边界条件处理;
5. 求解方程(4-6), 计算各节点的函数值;
6. 结束对时间层的循环。

4.3 SL-EFG 方法的数值收敛率

为了进一步研究 SL-EFG 方法的计算精度, 本节将给出计算结果的数值收敛率。记 R_t 、 R_s 为 SL-EFG 方法的时间和空间收敛率, 分别定义为

$$R_t = \log(L_2^2/L_2^1) / \log(\Delta t^2/\Delta t^1) \quad (4-7)$$

$$R_s = \log(L_2^2/L_2^1) / \log(\Delta x^2/\Delta x^1) \quad (4-8)$$

其中上标 1、2 用于区分两次数值实验。

首先, 为了检验 SL-EFG 方法的时间收敛率, 表 4-5 给出了 $t=1$ 时该方法在不同 Re 数下的时间收敛率 R_t , 时间步长从 0.1 取到 0.00625。此时, 为了更加准确地得到时间收敛率, 需要降低空间对 SL-EFG 方法精度的影响, 因此节点总数取为 $N=2560$, 插值方式取五次基函数。表中结果表明, SL-EFG 方法在时间方向上具有二阶收敛率。其次, 为了检验 SL-EFG 方法的空间收敛率, 表 4-6 给出了 $t=1$ 时该方法在不同 Re 数下的空间收敛率 R_s , 节点总数从 21 取到 321, 插值方式为线性基函数。同理, 为了更加准确地得到空间收敛率, 时间步长的取值要尽量小, 这里取为 $\Delta t = 0.0001$ 。表中结果表明, SL-EFG 方法在空间方向上具有二阶收敛率。

表 4-5 SL-EFG 方法的时间收敛率($N = 2560, t = 1$)

Δt	$Re = 10$		$Re = 100$		$Re = 1000$	
	L_2	R_t	L_2	R_t	L_2	R_t
0.1	9.446e-4	—	2.341e-4	—	1.940e-6	—
0.05	2.362e-4	1.9998	5.846e-5	2.0013	4.849e-7	2.0002
0.025	5.903e-5	2.0005	1.461e-5	2.0002	1.212e-7	2.0000
0.0125	1.474e-5	2.0014	3.653e-6	2.0001	3.031e-8	2.0000
0.00625	3.681e-6	2.0020	9.132e-7	2.0002	7.577e-9	1.9999

表 4-6 SL-EFG 方法的空间收敛率($\Delta t = 0.0001, t = 1$)

N	$Re = 10$		$Re = 100$		$Re = 1000$	
	L_2	R_s	L_2	R_s	L_2	R_s
20	5.825e-3	—	1.378e-1	—	3.581e-1	—
40	1.394e-3	2.0628	1.643e-2	3.0685	6.479e-2	2.4667
80	3.283e-4	2.0864	3.178e-3	2.3703	9.852e-3	2.7173
160	7.349e-5	2.1595	7.350e-4	2.1124	2.166e-3	2.1851
320	1.138e-5	2.6909	1.747e-4	2.0724	5.328e-4	2.0237

4.4 数值算例

本节将用四个算例进一步展示 SL-EFG 方法在稳定性和精度方面的优势。首先, 用 SL-EFG 方法进一步对本章上述各节中用来分析的 Gaussian-cone 问题进行求解, 通过计算来展现本文方法的高精度; 其次, 用第三章中检验反向追踪技术的一维 Burgers 方程来展现该方法的精度及其在高 Re 数下的稳定性; 最后, 将该方法拓展到对二维 Gaussian-cone 问题和 Burgers 方程的求解。

4.4.1 一维 Gaussian-cone 问题

这里沿用上述分析中的 Gaussian-cone 问题(3-35)进行数值求解。计算中, 使用 101 个等距分布节点, 即 $\Delta x = 0.02$, 插值方式分别采用线性基函数、二次基函数、五次基函数。对于这三种基函数, 每个积分单元内分别取 2 个、4 个、8 个

Gauss 积分点，相应的影响域半径分别为 $r_i = 1.5 \cdot \Delta x$ 、 $r_i = 2.5 \cdot \Delta x$ 、 $r_i = 6 \cdot \Delta x$ 。图 4-1 给出了 SL-EFG 方法采用不同插值方式时在 $t=1$ 时刻的精度比较，取 $Re=1000$ ，时间步长为 $\Delta t = 0.01$ 。图中结果表明，插值方式的基函数阶数越高，数值结果的精度就越高，SL-EFG 方法在五次基函数下的精度比在其他两种基函数的精度更高。

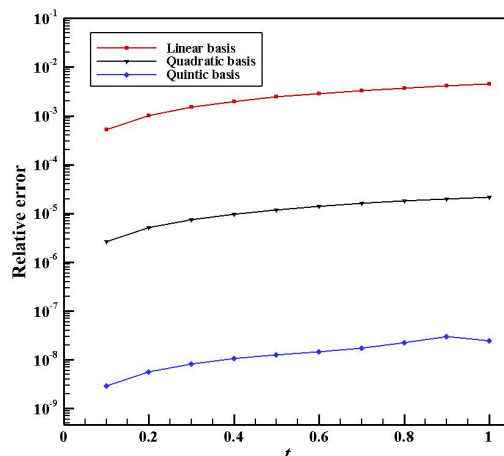


图 4-1 SL-EFG 方法采用不同基函数时的精度比较

表 4-7 给出了 SL-EFG 方法和 EFG 方法在时间步长取 $\Delta t = 0.01$ 、 0.1 ，并采用五次基函数时的误差比较。表中结果表明，在不同的 Re 数下，SL-EFG 方法的计算精度明显高于 EFG 方法。尤其在 $Re=1000$ 这种强对流情形下，EFG 方法的计算精度降低，但 SL-EFG 方法的计算精度却显著提高，并且在大时间步长 $\Delta t = 0.1$ 下，仍然保持较高的计算精度。对比 $\Delta t = 0.1$ 和 $\Delta t = 0.01$ 的结果，可以明显地看出该方法的时间收敛率为 2。综上所述，SL-EFG 方法比 EFG 方法更加适用于强对流问题，并且能够在较大的时间步长下保持更高的精度。

表 4-7 EFG 方法和 SL-EFG 方法采用五次基时的计算误差

Δt	t	$Re = 10$		$Re = 100$		$Re = 1000$	
		EFG	SL-EFG	EFG	SL-EFG	EFG	SL-EFG
0.01	0.2	1.754e-4	1.234e-4	1.152e-4	2.811e-6	1.407e-4	5.652e-9
	0.4	8.661e-5	4.812e-5	1.715e-4	3.222e-6	2.711e-4	1.047e-8
	0.6	4.805e-5	2.593e-5	2.009e-4	3.023e-6	3.924e-4	1.466e-8
	0.8	3.514e-5	1.482e-5	2.163e-4	2.686e-6	5.051e-4	2.247e-8
	1	3.013e-5	9.445e-6	2.219e-4	2.338e-6	6.099e-4	2.435e-8
0.1	0.2	2.173e-2	1.404e-2	1.109e-2	2.852e-4	1.309e-2	5.182e-7
	0.4	9.129e-3	4.914e-3	1.683e-2	3.247e-4	2.533e-2	9.626e-7
	0.6	4.917e-3	2.588e-3	1.994e-2	3.037e-4	3.676e-2	1.343e-6
	0.8	3.549e-3	1.470e-3	2.161e-2	2.694e-4	4.744e-2	1.669e-6
	1	3.043e-3	9.436e-4	2.231e-2	2.340e-4	5.739e-2	1.947e-6

为了更好地验证 SL-EFG 方法在不同 Re 数下的精度变化, 尤其是强对流情形时, 图 4-2 给出了该方法在不同基函数下误差随 Re 数的变化趋势。计算中, 时间步长取 $\Delta t = 0.01$, 节点总数取 500。图中结果表明, 对于不同基函数, SL-EFG 方法的精度不会随着对流作用的加强而大幅度下降, 采用线性基函数时精度保持稳定, 采用二次基函数和五次基函数时精度显著提高, 进一步说明了该方法在求解强对流问题时的优势。

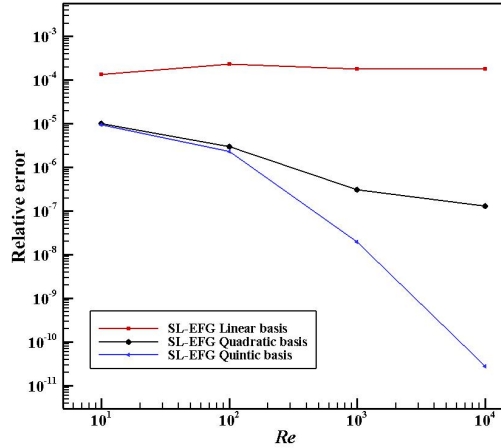


图 4-2 SL-EFG 方法采用不同基函数时在不同 Re 数下的误差

为了更好地展示数值结果, 图 4-3 给出了 SL-EFG 方法在不同 Re 数时的数值结果与解析解的比较。计算中, 采用五次基函数, 取 $\Delta t = 0.01$ 。可以看到, 两者吻合很好。

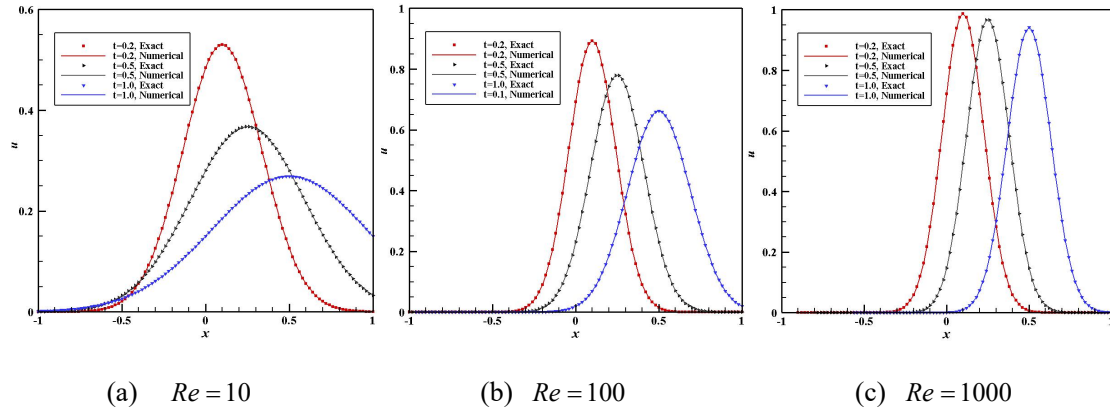


图 4-3 SL-EFG 方法所得结果与解析解的比较(五次基, $\Delta t = 0.01$)

4.4.2 一维 Burgers 方程

在 3.4.2 中使用原始 SL-EFG 方法对一维 Burgers 方程(3-30)进行了求解, 旨在确定四种反向追踪技术中精度较优的一种, 虽然最后选取了向后 Euler 反向追踪技术, 但是在线性基时计算结果不是很理想。本节用 4.1.3 中改进后的 SL-EFG 方法对该算例进一步求解, 通过计算来展示 SL-EFG 方法更好的计算效果。

计算中, 使用 101 个等距分布节点, 即 $\Delta x = 0.01$ 。图 4-4 给出了 SL-EFG 方法采用不同基函数在 $t=1$ 时的精度比较, 取 $Re=10$, $\Delta t = 0.001$ 。从图中结果可以看到, SL-EFG 方法在五次基函数下的计算精度相比于在其他两种基函数下的计算精度更高。

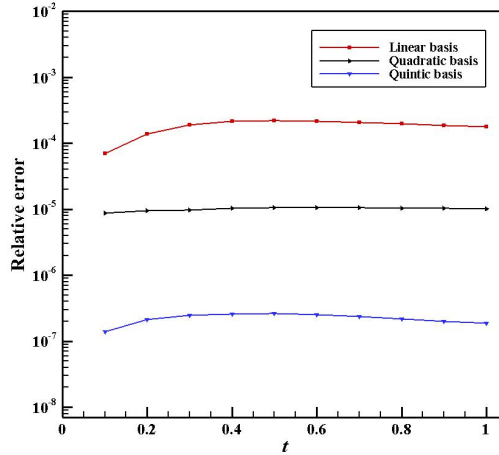


图 4-4 SL-EFG 方法采用不同基函数时的精度比较

SL-EFG 方法在采用五次基函数时精度高, 那么比较时间步长 $\Delta t = 0.001$ 和 $\Delta t = 0.01$ 时, EFG 方法和 SL-EFG 方法采用五次基函数的计算误差, 如表 4-8 所示。由于在 Re 数较大时, Burgers 方法的解析解失效, 因此这里只考虑了 $Re=1$ 、10、100 三种情形下的结果。表中结果表明, 两种方法在本算例中的表现与算例 4.4.1 相似, 但是当 $Re=100$ 时, SL-EFG 方法的误差相比于 $Re=10$ 的误差显著降低了, 这很大程度上是由于解析解随着 Re 数的增大逐渐失效导致的。但总体来看, 在不同时间步长和不同 Re 数下, SL-EFG 方法的精度均高于 EFG 方法。

表 4-8 EFG 方法和 SL-EFG 方法采用五次基时的计算误差

Δt	t	$Re = 1$		$Re = 10$		$Re = 100$	
		EFG	SL-EFG	EFG	SL-EFG	EFG	SL-EFG
0.001	0.2	8.097e-5	1.560e-5	1.858e-4	2.144e-7	3.281e-4	3.023e-4
	0.4	7.925e-5	3.151e-5	2.559e-4	2.593e-7	6.141e-4	1.656e-5
	0.6	9.495e-5	4.754e-5	2.891e-4	2.534e-7	3.916e-4	1.274e-4
	0.8	1.110e-4	6.356e-5	3.042e-4	2.190e-7	4.197e-4	3.828e-5
	1	1.270e-4	7.959e-5	3.115e-4	1.865e-7	4.431e-4	2.416e-5
0.01	0.2	2.136e-3	1.556e-3	1.872e-3	2.161e-5	3.952e-3	2.582e-4
	0.4	3.694e-3	3.145e-3	2.574e-3	2.655e-5	6.476e-3	2.374e-4
	0.6	5.291e-3	4.743e-3	2.907e-3	2.618e-5	3.462e-3	1.107e-3
	0.8	6.886e-3	6.339e-3	3.061e-3	2.276e-5	4.097e-3	7.561e-4
	1	8.478e-3	7.932e-3	3.136e-3	1.949e-5	4.387e-3	4.609e-4

另外地, 当 $\nu = 0$ 时, 该算例(3-30)便成为无粘 Burgers 方程

$$u_t + uu_x = 0 \quad (4-9)$$

与有粘性 Burgers 方程相比, 式(4-9)是纯对流方程, 对流作用更强。图 4-5 和图 4-6 分别给出了 EFG 方法与 SL-EFG 方法在不同时间、空间步长下的数值计算结果。在图 4-5(a)和图 4-5(c)中, EFG 方法均匀布置 51 个节点, 时间步长分别为 $\Delta t = 0.01$, $\Delta t = 0.001$, 在图 4-5(b)中, EFG 方法均匀布置 200 个节点, 时间步长 $\Delta t = 0.001$, 图 4-5(a)、(b)、(c)对应的 Courant 数分别为 0.5、0.2、0.05。从图 4-5 可以看到, 用 EFG 方法求解式(4-9)时, 在满足 CFL 条件的情况下, 随着计算时间的推进, 数值伪振荡现象不断加剧, 即使以增加计算量为代价而减小时间步长或增加节点数, 依然无法消除数值伪振荡现象。

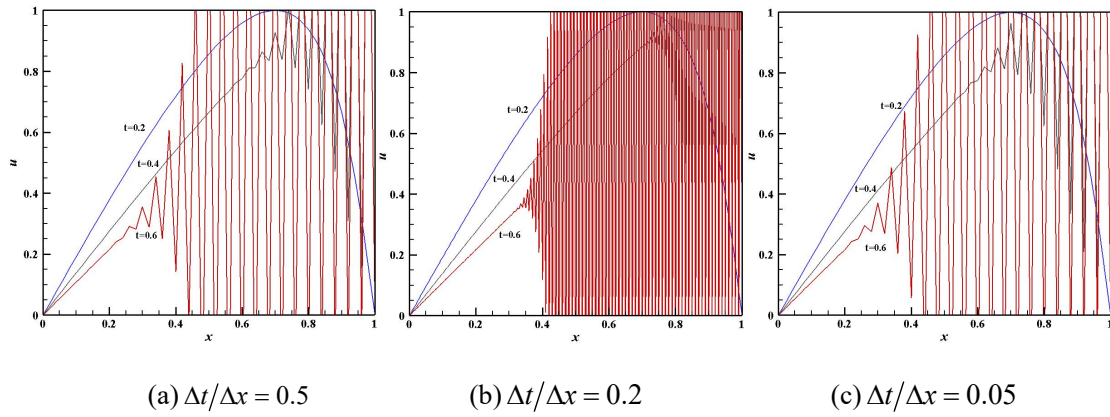


图 4-5 不同时间、空间步长下 EFG 方法的数值解

在图 4-6(a)中, SL-EFG 方法均匀布置 51 个节点, 时间步长 $\Delta t = 0.01$, 在图 4-6(b)和图 4-6(c)中, SL-EFG 方法的时间步长都为 $\Delta t = 0.1$, 分别均匀布置 41、51 个节点, 相应的 Courant 数分别为 0.5、4、5。从图 4-6 可以看到, 用 SL-EFG 方法求解式(4-9)时, 在不满足 CFL 条件的情况下, 仍然有效地消除了数值伪振荡现象。因此 SL-EFG 方法不仅适用于纯对流问题, 且无需满足 CFL 条件, 可以在较大的时间步长下进行计算并得到稳定的数值结果。

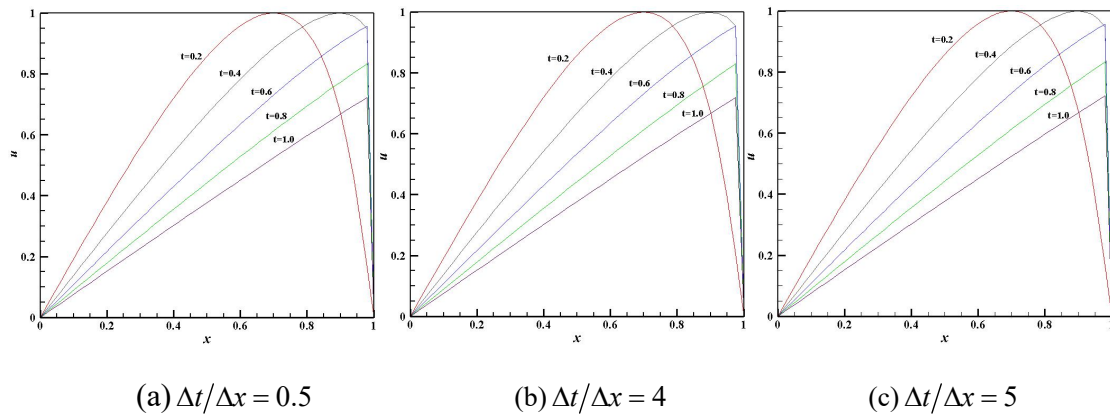


图 4-6 不同时间、空间步长下 SL-EFG 方法的数值解

4.4.3 二维 Gaussian-cone 问题

本节将 SL-EFG 方法应用于二维基准问题的求解，考虑定义在二维区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ， $t \in [0,1]$ 上的 Gaussian-cone 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4-10)$$

其中 a 、 b 分别表示流体在 x 、 y 方向的流动速度，取 $a = b = 0.8$ ， $\nu = 1/Re$ 表示流体扩散速度。式(4-10)的初值条件为

$$u(x, y, 0) = \exp \left[- \left((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \right) / \nu \right] \quad (4-11)$$

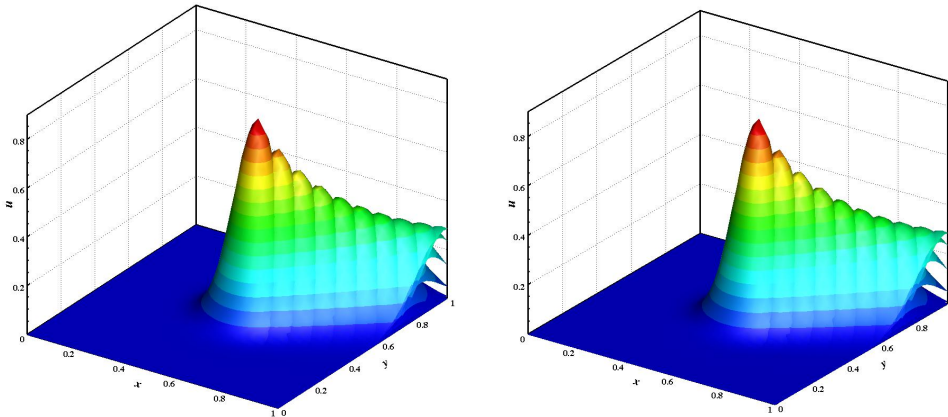
精确解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4t+1} \exp \left[- \frac{(x - at - 0.5)^2 + (y - bt - 0.5)^2}{\nu(4t+1)} \right] \quad (4-12)$$

计算中，使用 41×41 的节点分布，即 $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ，插值方式采用二次基函数，每个积分单元内取 4 个 Gauss 积分点计算。表 4-9 给出了 SL-EFG 方法和 EFG 方法在 $\Delta t = 0.01$ 时采用不同 Re 数下的精度比较。可以看到，在不同 Re 数下，SL-EFG 方法的计算精度都高于 EFG 方法，尤其在 $Re = 1000$ 这种强对流情形时，EFG 方法的精度显著降低，SL-EFG 方法的精度明显高于 EFG 方法。

表 4-9 EFG 方法和 SL-EFG 方法的计算误差

t	$Re = 10$		$Re = 100$		$Re = 1000$	
	EFG	SL-EFG	EFG	SL-EFG	EFG	SL-EFG
0.12	1.927e-4	1.099e-4	3.381e-3	6.156e-5	1.020e-1	1.809e-2
0.24	2.422e-4	1.641e-4	4.371e-3	1.013e-4	1.287e-1	9.559e-3
0.36	2.161e-4	1.614e-4	4.568e-3	1.299e-4	1.384e-1	5.196e-3
0.48	1.539e-4	1.099e-4	4.079e-3	7.926e-4	1.412e-1	5.556e-3
0.60	1.186e-4	4.787e-5	4.343e-3	5.230e-4	2.832e-1	1.772e-2

图 4-7 $\Delta t = 0.01$ 、 $\nu = 0.01$ 时的精确解(左)和 SL-EFG 数值解(右)

为了更好地展示 SL-EFG 方法的数值结果，图 4-7 给出了方程式(4-10)在 $\Delta t = 0.01$ 、 $Re = 100$ 的精确解和 SL-EFG 数值解的图像，可以从图中看到两者吻合很好。

4.4.4 二维 Burgers 方程

考虑定义在二维区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 的如下耦合 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4-13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4-14)$$

其边界条件和初始条件分别为：

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0.0, \quad v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0.0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1, t) = 0.0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}(0, y, t) = \frac{\partial v}{\partial n}(1, y, t) = 0.0 \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \cos(\pi y), \quad v(x, y, 0) = \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned}$$

其中 u 和 v 分别为沿着 x 轴和 y 轴的速度分量，定解区域定义在 $(x, y, t) \in \Omega \times (0, T]$ 上。不难看出上述方程具有明显的对称性

$$u(x, y, t) = v(y, x, t), \quad u(x, y, t) = -u(1-x, 1-y, t)$$

沿着区域的横截面，则有

$$u(x, x, t) = v(x, x, t), \quad u(x, x, t) = -u(1-x, 1-x, t)$$

因此本算例只给出了 $u(x, y, t)$ 的数值结果。

对于方程式(4-13)和(4-14)，强对流情形时，随着时间的推进，在过点(0,1)和(1,0)的对角线区域上， $u(x, y, t)$ 将会出现激波间断。

图 4-8 和图 4-9 分别给出了 $Re = 1000$ 时，EFG 方法在不同时刻的数值解 $u(x, y, t)$ ，图 4-10 给出了在 $Re = 1000$ 时，SL-EFG 方法在不同时刻的数值解 $u(x, y, t)$ 。图 4-8 中，EFG 方法在二维区域内均匀布置 41×41 个节点，时间步长为 0.01， $\Delta t / \Delta x = 0.4$ ，满足 CFL 条件；图 4-9 中，EFG 均匀布置 81×81 个节点，时间步长为 0.001， $\Delta t / \Delta x = 0.08$ ，满足 CFL 条件；图 4-10 中，SL-EFG 方法均匀布置 81×81 个节点，时间步长为 0.1， $\Delta t / \Delta x = 8$ 。

从图 4-8 和图 4-9 中可以看出，EFG 方法在数值模拟强对流问题时，随着时间的推进， $u(x, y, t)$ 在对角线上出现数值伪振荡，即使增加节点个数、减小时间步长，使 Courant 数减小，依然无法消除数值伪振荡现象。图 4-10 中 SL-EFG 方

法在对角线上出现了间断，虽然不满足 CFL 条件，但是并没有出现数值伪振荡，仍然有效地消除了强对流导致的振荡。

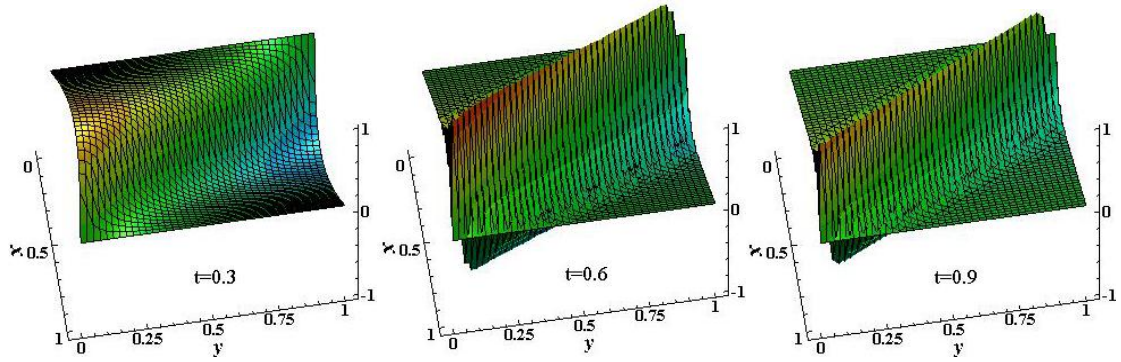


图 4-8 $Re = 1000$, $\Delta t/\Delta x = 0.4$ 时, EFG 方法的数值解 $u(x, y, t)$

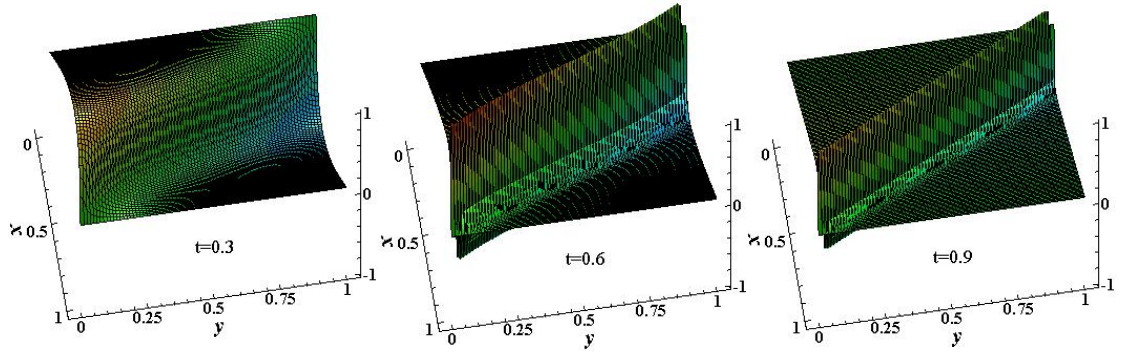


图 4-9 $Re = 1000$, $\Delta t/\Delta x = 0.08$ 时, EFG 方法的数值解 $u(x, y, t)$

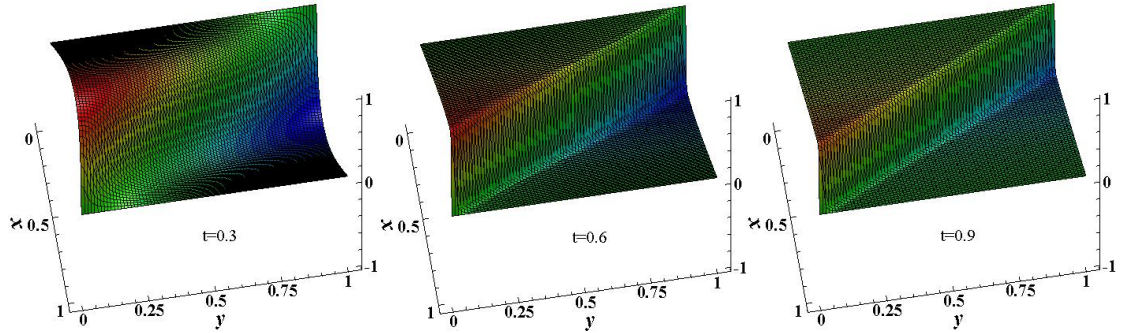
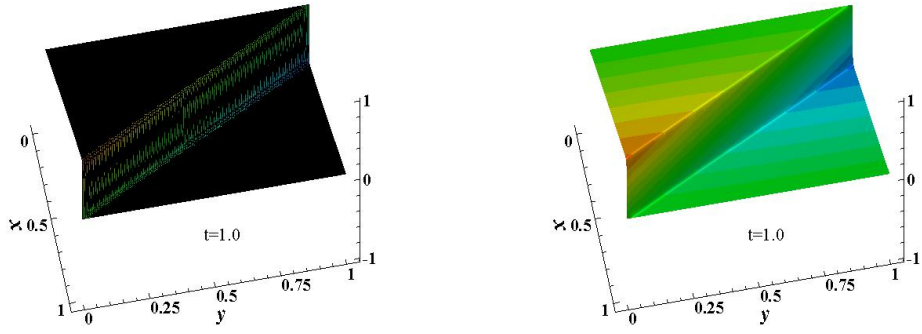
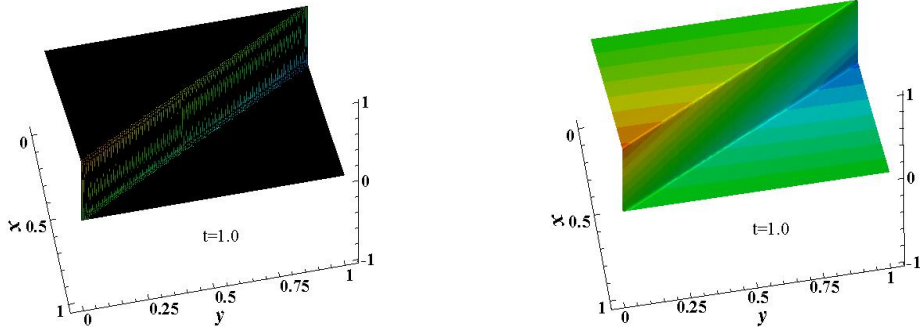
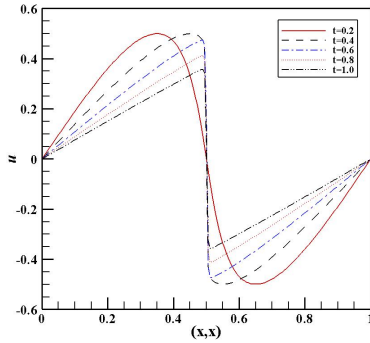
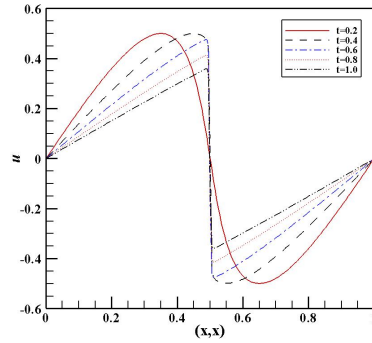


图 4-10 $Re = 1000$, $\Delta t/\Delta x = 8$ 时, SL-EFG 方法的数值解 $u(x, y, t)$

为了进一步检验 SL-EFG 方法在求解强对流问题时的有效性，图 4-11 给出了不同 Re 数下 $t = 1.0$ 时的数值结果。图 4-11(a)中，均匀布置 180×180 个节点，取 $Re = 5000$, $\Delta t/\Delta x = 18$; 图 4-11(b)中，均匀布置 200×200 个节点，取 $Re = 10000$, $\Delta t/\Delta x = 20$ 。图 4-12 给出了沿直线 $x = y$ 在不同时刻的数值解 $u(x, x, t)$ 。由图 4-11 和图 4-12 可知，对于充分大的 Re 数，即使 Courant 数非常大，不满足 CFL 条件，SL-EFG 方法在大时间步长下仍然能够消除数值伪振荡，其数值解与文献[27]的结果一致，且 SL-EFG 方法消除伪振荡的效果更好。

(a) $Re = 5000$, $\Delta t/\Delta x = 18$ (b) $Re = 10000$, $\Delta t/\Delta x = 20$ 图 4-11 $Re = 5000$, 10000 时, SL-EFG 方法在 $t=1.0$ 的数值解 $u(x, y, t)$ (a) $Re = 5000$ (b) $Re = 10000$ 图 4-12 $Re = 5000$, 10000 时, 对角线上不同时刻的 SL-EFG 方法数值解 $u(x, y, t)$

4.5 本章小结

本章分析了第三章建立的 SL-EFG 方法在精度方面的不足之处, 然后给出了两方面的改进。首先, 将出发点处函数导数值的计算改在原始数据集上, 虽然避免了使用插值数据集计算导数时出现的累积误差, 但是利用 Gaussian-cone 问题验证后发现改进后的 SL-EFG 方法的计算精度并没有显著提高, 且在低 Re 数时仍低于 EFG 方法。然后, 本章将对节点的反向追踪改为直接对积分点的反向追踪, 避免了先计算出层节点信息再以此为基础计算出层积分点信息产生的二次误差, 利用 Gaussian-cone 问题验证后发现进一步改进后的 SL-EFG 方法的计

算精度得到了显著地提高。

接着,给出了 SL-EFG 方法的矩阵形式及其完整的程序流程。除此之外,利用 Gaussian-cone 问题对 SL-EFG 方法的数值收敛率进行了计算,发现在 L_2 范数度量下,该方法时间方向上具有二阶收敛率,空间方向上使用线性基可以达到二阶收敛率。最后通过四个算例对 SL-EFG 方法的稳定性和精度做了进一步的验证,数值结果表明:

(1) SL-EFG 方法是一种有效的高精度求解对流扩散方程的方法。该方法具有二阶时间收敛率和二阶空间收敛率,能适用很大变化范围的 Re 数,有效地消除了强对流情形时的数值伪振荡现象。

(2) SL-EFG 方法在求解一维问题时,采用五次基函数可显著地提高计算精度。但是在二维情况下由于计算量及储存问题,一般采用二次基函数,当然也保持了较高的精度。

(3) 强对流情形时,相比于 EFG 方法,SL-EFG 方法具有很大的优势,如 SL-EFG 方法突破了 CFL 条件的限制,允许大时间步长如 $\Delta t = 0.1$,在不满足 CFL 条件的情况下,依然能够保持很好的稳定性,极大地消除了数值伪振荡现象。

第五章 不可压缩流动问题模拟的 SL-EFG 方法

不可压缩流动可以通过 Navier-Stokes 方程来描述，用标准 EFG 方法求解该方程时主要存在两方面的困难：其一来源于方程的对流-扩散特性^[59]，即强对流情形时标准 Galerkin 空间离散会导致速度场的数值伪振荡；其二来源于方程的可约化混合特性，即速度-压力插值空间不满足所谓的 LBB 条件^[60]时标准 Galerkin 空间离散会导致压力场的数值伪振荡^[61]。经过数十年的发展，产生了一系列有效求解不可压缩 Navier-Stokes 方程的数值方法，如人工压缩法、Uzawa 方法、分步算法等^[62]。其中，分步算法由 Chorin^[63]和 Temam^[64]在使用有限差分法模拟不可压缩流动问题时首先提出，它通过解耦速度 \mathbf{u} 和压力 p ，可以有效地减少速度-压力混合方程的求解规模并提高计算效率，避开了 LBB 条件，获得稳定的计算结果^[1]。因此，分步算法被广泛应用于不可压缩 Navier-Stokes 方程的求解中。于是，本章在 SL-EFG 方法框架下，推导了 Navier-Stokes 方程的非增量型分步格式，由于采用了分步算法，该格式在使用等线性基近似速度和压力时，可以避免 LBB 条件。

本章内容安排如下：首先，简单介绍了不可压缩流动问题的数学模型；其次，给出了基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法模拟不可压缩流动问题的推导过程；再次，通过二维管道流动和方腔流动两个数值算例验证 SL-EFG 方法在求解不可压缩流动问题的有效性；最后，对本章内容进行了小结。

5.1 不可压缩流动问题的数学模型

不可压缩流动问题的控制方程和初边界条件为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & in \Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} & in \Omega \times [0, T] \\ \mathbf{u} &= 0 & on \partial \Omega \times [0, T] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & on \Omega \end{aligned} \quad (5-1)$$

其中 \mathbf{u} 为流体速度向量， p 为压力， $\nu = \eta/\rho$ 为流体运动粘性系数， ρ 为密度， η 为动力粘性系数。为了方便说明，本章仅考虑 Dirichlet 边界条件。

5.2 基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法

基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法在模拟不可压缩流动问题时，主要过程如下所示：

- (1) 将动量方程转变为 Lagrange 形式，并进行时间离散；
- (2) 应用非增量型分步算法解耦动量方程中的速度和压力，给出流场速度和

压力的求解步骤，包括预测步、投影步和校正步；

(3) 应用标准 Galerkin 方法进行空间离散；

(4) 对于预测步，通过向后 Euler 的反向追踪技术确定积分点对应的出发点，并求解其变量信息；

(5) 求解代数方程组。

5.2.1 时间离散

控制方程(5-1)中动量方程的 Lagrange 形式及其特征线方程分别为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (5-2)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (5-3)$$

采用 θ 加权法对式(5-2)进行时间离散，其离散格式为

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_d^n}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} + \nu [\theta \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + (1-\theta) \nabla^2 \mathbf{u}_d^n] \quad (5-4)$$

5.2.2 非增量型分步算法

对于不可压缩流动问题(5-4)，分步算法主要有以下三步^[65]：第一步，将方程(5-4)中关于压力的项略去，得到近似的中间速度(预测步)；第二步，根据得到的中间速度并利用连续方程求得压力(投影步)；第三步，利用得到的压力值进行速度修正(校正步)。下面将详细介绍分步算法的推导过程。

首先引入中间速度 $\hat{\mathbf{u}}$ ，将式(5-4)分裂成以下两式

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d^n}{\Delta t} = \nu (1-\theta) \nabla^2 \mathbf{u}_d^n \quad (5-5)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \nu \theta \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (5-6)$$

式(5-5)中略去了压力项，只有速度项，因此可以直接求解中间速度 $\hat{\mathbf{u}}$ ，这里需要说明的是中间速度 $\hat{\mathbf{u}}$ 并不具有实际的物理意义，在实际的计算中， $\hat{\mathbf{u}}$ 通常与实际速度施加同样的边界条件^[66]，为

$$\hat{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5-7)$$

在式(5-6)两端同时取散度，得到

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} + \nabla \cdot (\nabla p^{n+1}) - \nu \theta \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1}) = 0 \quad (5-8)$$

交换等式(5-8)左端第三项中散度和二阶导的次序

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} + \nabla \cdot (\nabla p^{n+1}) - \nu \theta \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) = 0 \quad (5-9)$$

将质量守恒方程 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ 代入式(5-9)，得到压力 Poisson 方程，即

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (5-10)$$

由式(5-6)得到的中间速度 $\hat{\mathbf{u}}$ 求得压力 p^{n+1} ，代入式(5-6)得到校正速度 \mathbf{u}^{n+1} 的计算方程为

$$\mathbf{u}^{n+1} - \nu \theta \Delta t \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}} - \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (5-11)$$

至此，式(5-5)、(5-10)、(5-11)构成了分步算法的计算列式。

基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法的主要优点在于不仅消除了动量方程中的对流项，有效地消除了强对流引起的速度场数值振荡；并且应用分步算法对速度和压力解耦求解，在满足一定条件下可避免 LBB 条件，因而在进行标准 Galerkin 空间离散时，对速度和压力可以采取相同的 MLS 形函数。在本章应用 MLS 方法构造形函数时，基函数均取为线性基函数。

5.2.3 空间离散

对不可压缩流动问题进行时间离散后，就可以用标准 Galerkin 方法进行空间离散。对于 Galerkin 方法，首先定义检验函数空间 \mathbf{W} 和与速度、压力相关的有限维试探解空间 V 、 P 。检验函数 $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ 需要在边界 $\partial\Omega$ 上满足齐次边界条件，即

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w}|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0 \right\} \quad (5-12)$$

对于速度和压力，相应的试探函数空间分别为

$$V = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = \mathbf{u}_{\partial\Omega}, \forall t \in [0, T] \right\} \quad (5-13)$$

$$P = \left\{ p \mid p(\mathbf{x}, t) \in L^2(\Omega), p(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = p_{\partial\Omega}, \forall t \in [0, T] \right\} \quad (5-14)$$

则方程式(5-5)、(5-10)和(5-11)的空间离散如下所示。

第一步：计算中间速度 $\hat{\mathbf{u}}$ 。

为了获得式(5-5)的 Galerkin 变分弱形式，在等式两边同乘检验函数 \mathbf{w} ，并对方程在定解区域 Ω 上进行积分，则可得到如下的变分问题：给定 \mathbf{u}_d^n ，寻找 $\hat{\mathbf{u}} \in V$ ，使得 $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ 有

$$\left(\mathbf{w}, \frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d^n}{\Delta t} \right) = -\nu(1 - \theta) (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{u}_d^n) \quad (5-15)$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示 Ω 上的函数内积。

第二步：计算压力 p^{n+1} 。

压力 Poisson 方程(5-10)对应的 Galerkin 变分问题为：给定 $\hat{\mathbf{u}}$ ，寻找 $p^{n+1} \in P$ ，使得 $\forall q \in P$ 有

$$(\nabla q, \nabla p^{n+1}) = -\frac{1}{\Delta t}(q, \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (5-16)$$

第三步：计算校正速度 \mathbf{u}^{n+1} 。

方程(5-11)对应的 Galerkin 变分问题为：给定 $\hat{\mathbf{u}}$ 和 p^{n+1} ，寻找 $\mathbf{u}^{n+1} \in V$ ，使得 $\forall \mathbf{w} \in W$ 有

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u}^{n+1}) + \nu \theta \Delta t (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{u}^{n+1}) = (\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}) - \Delta t (\mathbf{w}, \nabla p^{n+1}) \quad (5-17)$$

在 SL-EFG 方法中， W 和 V 由速度场的 MLS 形函数张成， P 由压力场的 MLS 形函数张成。假设 $\{\phi_i(\mathbf{x}) | i=1, 2, \dots, M\}$ 和 $\{\varphi_i(\mathbf{x}) | i=1, 2, \dots, M\}$ 分别为速度场和压力场的形函数集合，其中 M 为节点个数。因此对于二维情况的分量形式，式(5-15)、(5-16)、(5-17)中的 $\mathbf{w} = \phi_i$ 、 $q = \varphi_i$ ($i=1, 2, \dots, M$)，那么速度分量 u 、 v 和压力 p 可以分别近似为

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \phi_i(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_i), \quad v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \phi_i(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}_i), \quad p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}_i)$$

然而，在 SL-EFG 方法中，采用等线性基来近似速度和压力，因此速度与压力的 MLS 形函数 $\phi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x})$ ($i=1, 2, \dots, M$)。此时，可以得到 SL-EFG 方法求解 Navier-Stokes 方程的分量形式如下所示。

第一步：计算中间速度

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \phi_i \phi_j \hat{u}_j d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\phi_i u_d^n - (1-\theta) \nu \Delta t \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial u_d^n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial u_d^n}{\partial y} \right) \right] d\Omega, \quad i=1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (5-18a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \phi_i \phi_j \hat{v}_j d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\phi_i v_d^n - (1-\theta) \nu \Delta t \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial v_d^n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial v_d^n}{\partial y} \right) \right] d\Omega, \quad i=1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (5-18b)$$

第二步：计算压力

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) p_j^{n+1} d\Omega \\ &= -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \phi_i \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) d\Omega, \quad i=1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (5-18c)$$

第三步：计算校正速度

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \left[\varphi_i \varphi_j + \theta v \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \right] u_j^{n+1} d\Omega \quad (5-18d)$$

$$= \int_{\Omega} \left[\varphi_i \hat{u} - \Delta t \varphi_i \frac{\partial p}{\partial x} \right] d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \left[\varphi_i \varphi_j + \theta v \Delta t \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \right] v_j^{n+1} d\Omega \quad (5-18e)$$

$$= \int_{\Omega} \left[\varphi_i \hat{v} - \Delta t \varphi_i \frac{\partial p}{\partial y} \right] d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

5.2.4 基于积分点的反向追踪

关于 5.2.3 节非增量型分步算法的第一步中 \mathbf{u}_d^n 的求解，首先，需要在单位时间步内，沿特征线反向追踪积分点 \mathbf{g} 对应的出发点 \mathbf{g}_d ；然后，用 MLS 方法近似出发点处的函数信息。特征线方程(5-3)写成分量形式为

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t) \quad (5-19)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, t) \quad (5-20)$$

其中 u 、 v 分别表示流体在 x 、 y 方向的流速。则出发点在 x 、 y 方向的坐标求解需要迭代，迭代过程如下

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For } i = 1, 2, \dots, M \\ \text{Initialize } \alpha_{ix}^{[0]} = 0, \alpha_{iy}^{[0]} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Calculate } g_{dx} = g_{ix} - \alpha_{ix}^{[m]}, g_{dy} = g_{iy} - \alpha_{iy}^{[m]}, \\ \text{Interpolate } u(g_{dx}, t_n), v(g_{dy}, t_n) \text{ by MLS} \\ \text{Update } \alpha_{ix}^{[m+1]} = u(g_{dx}, t_n) \Delta t, \alpha_{iy}^{[m+1]} = v(g_{dy}, t_n) \Delta t, \\ (g_{dx})_i = g_{ix} - \alpha_{ix}, (g_{dy})_i = g_{iy} - \alpha_{iy}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

其中下角标 x 、 y 表示 x 、 y 方向的分量。出发点的坐标确定后，用 MLS 方法近似 \mathbf{u}_d^n 、 $\nabla \mathbf{u}_d^n$ 的值为

$$\mathbf{u}_d^n = \sum_{j=1}^M \varphi_j(\mathbf{g}_d) \mathbf{u}_j^n \quad (5-21)$$

$$\nabla \mathbf{u}_d^n = \sum_{j=1}^M \nabla \varphi_j(\mathbf{g}_d) \mathbf{u}_j^n \quad (5-22)$$

其中 \mathbf{u}_j^n 表示 t_n 时刻节点 \mathbf{x}_j 处的函数值。将式(5-21)、(5-22)的分量形式代入式(5-18a)和(5-18b)中即可。

5.3 数值算例

为了验证基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法在求解不可压缩流动问题的有效性，本章应用该方法求解了两个经典的流动问题，分别是平面 Poiseuille 流动和方腔驱动流，下面给出数值模拟结果。

5.3.1 平面 Poiseuille 流动

在 AIAA 的很多文章中都用平面 Poiseuille 流动来测试各种商用流体动力学算法^[66]。又由于该流动问题一般具有解析解，因此本章首先考虑平面 Poiseuille 流动来验证基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法的有效性。

平面 Poiseuille 流的几何区域及相应的边界条件如图 5-1 所示。本节取了一个长宽比为 8:1 的矩形区域，即流动的腔体长为 8 个单位长度，宽为 1 个单位长度。其中两个水平实墙没有任何滑移条件，即 $u = v = 0$ ；入口边界上速度固定为 $u = 6y(1-y)$ ， $v = 0$ ；出口边界上压力指定为零，即 $p = 0$ 。该问题 x 方向速度和压力的稳定解析解为

$$u = 6y(1-y) \quad (5-23)$$

$$p = 12\nu(8-x) \quad (5-24)$$

其中， ν 表示流体运动粘性系数。数值解的精度用如下相对误差的 L_2 范数衡量

$$e_{L_2} = \frac{\|q_i^h - q_i^{exact}\|_{L_2}}{\|q_i^{exact}\|_{L_2}} = \frac{\left[\int (q_i^h - q_i^{exact})^2 d\Omega \right]^{1/2}}{\left[\int (q_i^{exact})^2 d\Omega \right]^{1/2}} \quad (5-25)$$

其中， q_i^h 和 q_i^{exact} 分别为物理量 q 在点 \mathbf{x}_i 的数值解和解析解。

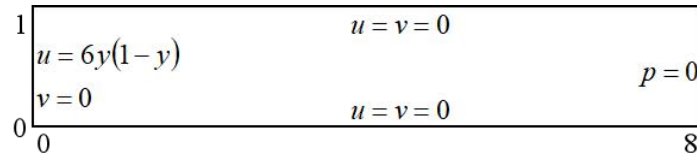


图 5-1 平面 Poiseuille 流的几何区域及边界条件

下面分别对 $Re = 100$ 和 $Re = 1000$ 两种情形下的流动情况进行研究。在计算中，区域 Ω 中均匀布置 81×11 个节点，采用线性基函数，每个积分单元内均使用 2×2 的 Gauss 积分，时间步长取 $\Delta t = 0.1$ 。图 5-2 和图 5-3 分别给出了在两种不同 Re 数下基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法模拟得到的压力等值线、 u 速度等值线。由图中结果可知，速度和压力均未出现振荡现象，说明 SL-EFG 方法具有很好的稳定性，可以避开所谓的 LBB 条件。表 5-1 给出了 SL-EFG 方法在不同 Re 数 100、1000、5000、10000 时的相对误差结果。表中数据表明，在高 Re 数下，基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法在保持稳定性的基础上，仍然能具有较高精度。

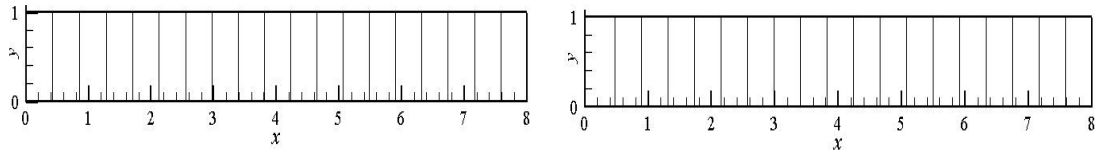
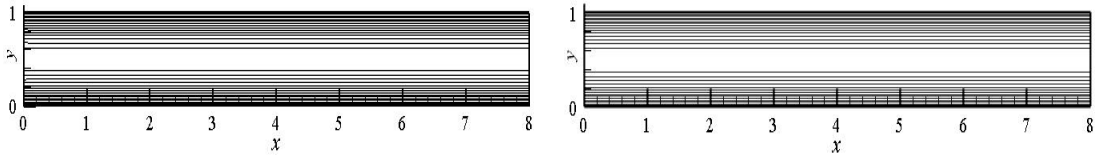
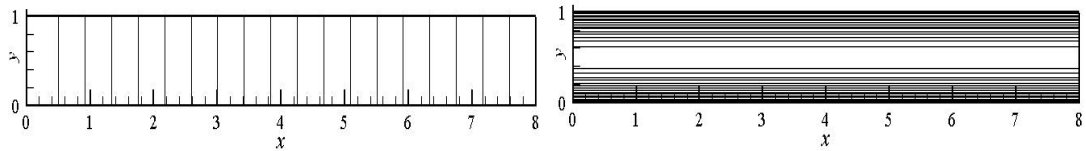

 图 5-2 $Re = 100, 1000$ 时的压力等值线

 图 5-3 $Re = 100, 1000$ 时的速度流线图

 表 5-1 SL-EFG 方法在不同 Re 数下的相对误差

Re	100	1000	5000	10000
u	6.25533e-3	6.09016e-4	1.21415e-4	6.11605e-5
p	8.73210e-3	3.62148e-3	2.12380e-3	1.79109e-3

为了更好地展示基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法的稳定性, 图 5-4 给出了 $Re = 10000$ 时的压力等值线和 u 速度等值线。由图 5-4 可知, 在高 Re 下速度和压力分步是光滑的, 没有出现振荡现象, 再次说明了等低阶近似的 SL-EFG 方法可以像分步算法一样避开 LBB 条件, 并在强对流情形下克服速度场的数值伪振荡。


 图 5-4 SL-EFG 方法在 $Re = 10000$ 的压力等值线和 u 速度等值线

5.3.2 方腔驱动流

方腔驱动流是计算流体力学和数值传热学中的典型算例, 常被用来检验数值方法的有效性和程序的正确性^[1,66]。

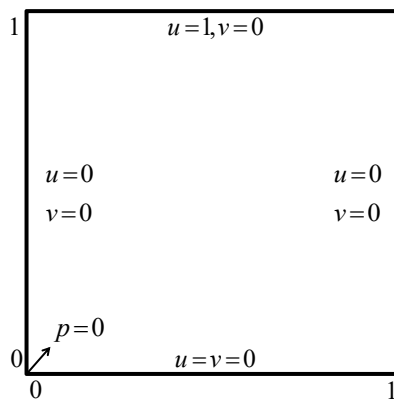


图 5-5 方腔驱动流的几何区域及边界条件

图 5-5 给出了方腔驱动流的几何区域及其边界条件，方腔长宽各为 1 个单位长度，上边界以恒定的水平速度 $u=1$ 向右运动，垂直速度 $v=0$ ，其它边界上的水平速度和垂直速度均为零，方腔的左下角点位置取为零参考压力点。方腔内的流体在顶盖速度的驱动下发生粘性流动。

首先，在 $Re=100$ 、 400 和 1000 三种情形下进行求解，在区域内均匀布置 129×129 个节点，时间步长取 $\Delta t = 0.002$ 。图 5-6 给出了三种 Re 数下基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法所得到的压力等值线图。图中结果表明，在三种情形下，压力场都是光滑的，没有出现振荡现象，说明了 SL-EFG 方法能有效地消除压力场的虚假数值振荡，表明了等低阶基近似的 SL-EFG 方法能绕开所谓的 LBB 条件。从图 5-6 中还可以看出，在各种 Re 数下，本文结果与文献[67, 68, 69, 70, 71, 72]的结果吻合很好。

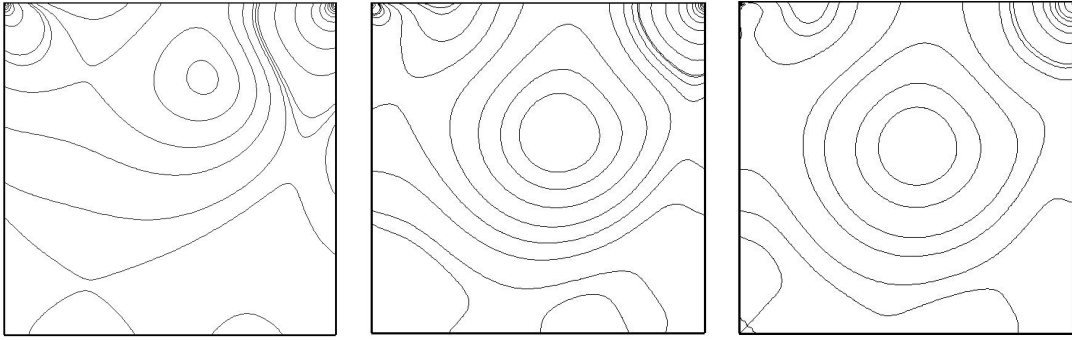


图 5-6 $Re=100$ ， 400 ， 1000 时的压力等值线(129×129 节点分布)

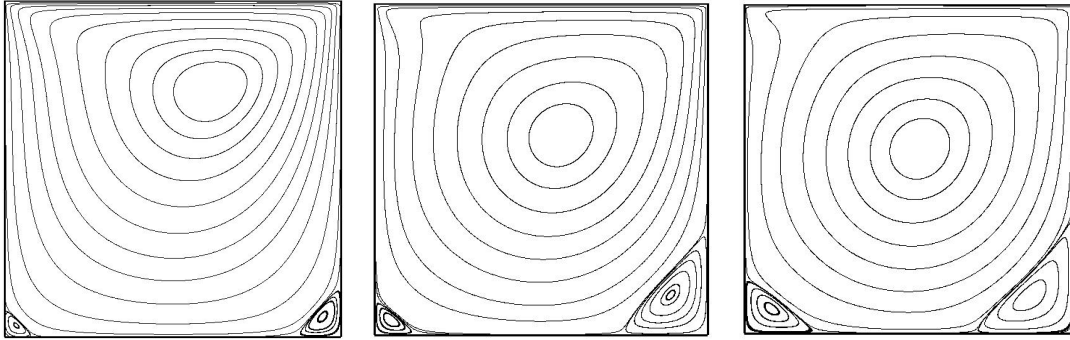


图 5-7 $Re=100$ ， 400 ， 1000 时的速度流线图(129×129 节点分布)

图 5-7 分别给出了三种 Re 数下 SL-EFG 方法所得到的流线图。图中结果表明，随着 Re 数的增加，流场中的原始涡逐渐向方腔的几何中心移动。当 $Re=100$ 时，该涡位于方腔的右上部分，涡的中心位置为 $(0.6176, 0.7391)$ ，与 Ghia^[73] 给出的涡心位置 $(0.6172, 0.7344)$ 非常接近，并且此时明显出现了右下一级涡和一个很小的左下一级涡，与文献[73]中的结果相符。当 $Re=400$ 时，其涡心位置为 $(0.5545, 0.6049)$ ，与文献中的涡心位置 $(0.5547, 0.6055)$ 也非常接近，右下一级

涡比 $Re=100$ 的大。当 $Re=1000$ 时, 左下一级涡逐渐生长, 原始涡的窝心位置为 $(0.5309, 0.5619)$, 与文献[73]的窝心位置 $(0.5313, 0.5625)$ 很接近。

由于方腔驱动流问题没有解析解, 所以一般将结果与 Ghia^[73]等人的基准解进行比较。为了定量分析 SL-EFG 方法的计算精度, 图 5-8 和 5-9 给出了不同 Re 数下水平速度 u 在垂直中心线和垂直速度 v 在水平中心线上的值与 Ghia^[73]等人给出的基准解的比较。从图 5-8 和图 5-9 可以看出, 在 Re 数为 100、400、1000 时, SL-EFG 的数值解和基准解吻合得很好。

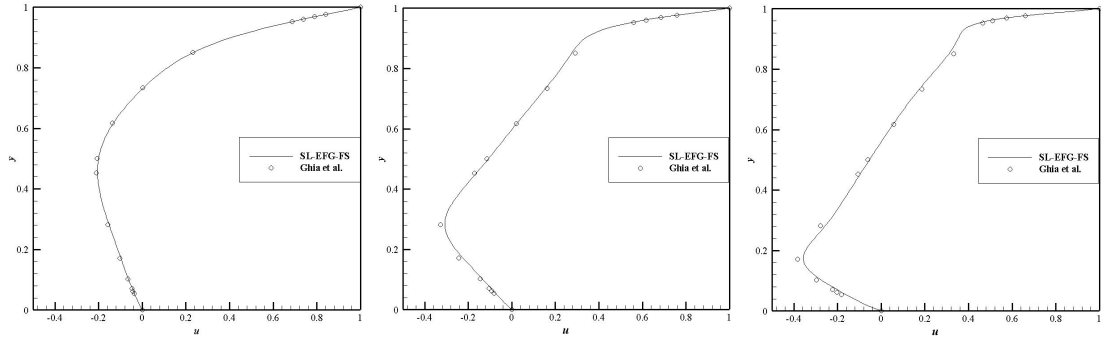


图 5-8 $Re=100, 400, 1000$ 时方腔中轴线上的 u 分布(129×129 节点分布)

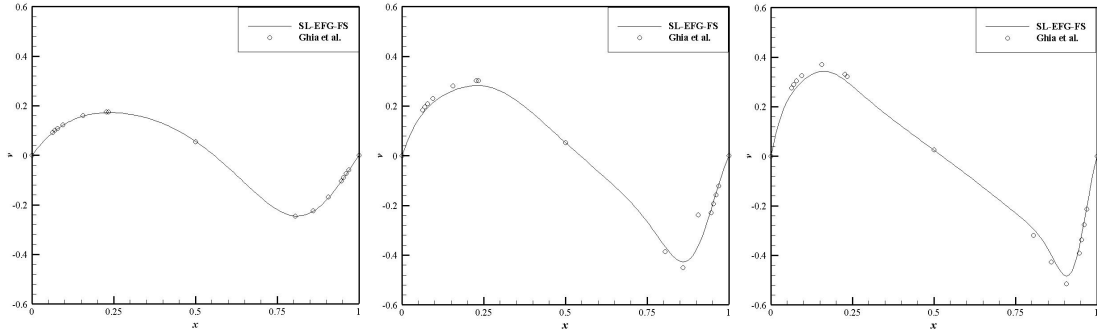
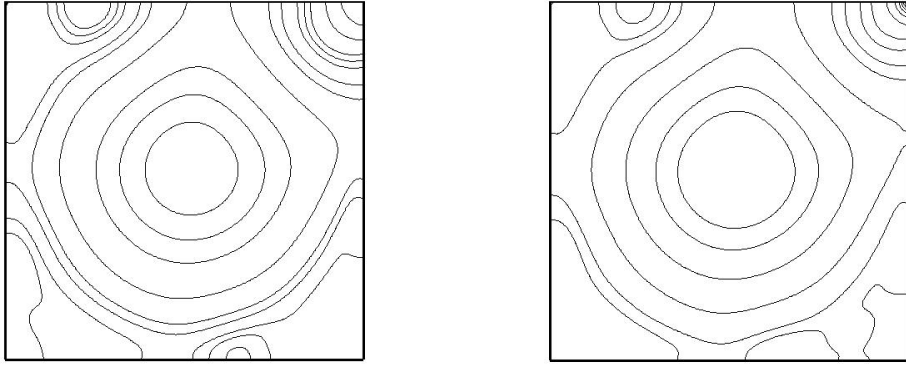
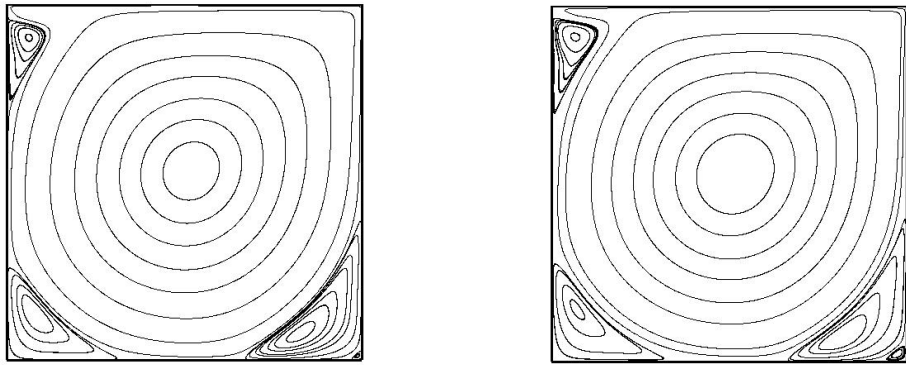
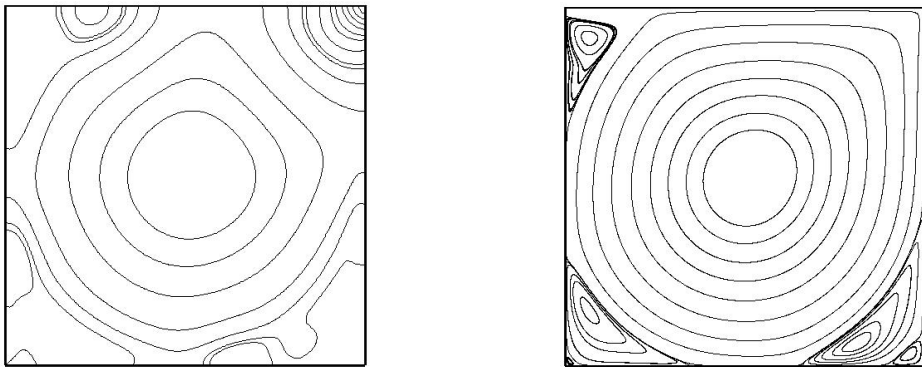


图 5-9 $Re=100, 400, 1000$ 时方腔中轴线上的 v 分布(129×129 节点分布)

接下来, 为了检验 SL-EFG 方法在高 Re 数下的稳定性, 考虑 $Re=5000$ 、7500 的情形。在这两种情形下对流作用很强, 很多分步算法都会出现数值不稳定^[74]。然而对于本文提出的 SL-EFG 方法却可以获得稳定的数值结果。图 5-10 和图 5-11 给出了 SL-EFG 方法在时间步 $\Delta t=0.01$ 时的数值结果。可以看到在两种情况下压力等值线很光滑, 没有出现振荡现象。在 $Re=5000$ 时, 出现了左上一级涡, 右下角除了一级涡外还出现了一个不太清楚的右下二级涡。在 $Re=7500$ 时, 右下二级涡和左上一级涡逐渐生长, 左下一级涡和右下一级涡没有明显地生长。另外, 两种情形下的涡心均位于方腔的几何中心。可以看到, SL-EFG 方法的结果非常稳定, 并且与文献[73,74]结果相吻合。

图 5-10 $Re = 5000$, 7500 时的压力等值线(257×257 节点分布)图 5-11 $Re = 5000$, 7500 时的压力等值线(257×257 节点分布)

最后, 将 SL-EFG 方法用于 $Re = 10000$ 的情形, 近年来对该 Reynolds 数下的方腔流动已有较多研究^[75,76]。图 5-12 给出了在 257×257 的节点分布上 $Re = 10000$ 时的计算结果。可以看到, 压力等值线光滑没有振荡, 流线图中出现一个很小的左下二级涡, 右下二级涡比 $Re = 7500$ 的大, 结果与 Ghia 等人所给结果相吻合。原始涡基本位于方腔的几何中心, 涡心位置为 $(0.5112, 0.5330)$, 与 Ghia 等人所给结果非常接近。

图 5-12 $Re = 10000$ 时的压力等值线和速度流线(257×257 节点分布)

5.4 本章小结

本章基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法, 对不可压缩流动问题的求解进行了推导, 推导过程中使用等线性基近似速度和压力, 并应用该方法模拟了平面

Poiseuille 流和方腔驱动流，数值结果表明：

(1) 与文献基本吻合的数值结果，验证了程序的正确性以及基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法数值模拟不可压缩流动问题的有效性。

(2) 在速度、压力采用等线性基近似的情况下，得到的压力场是光滑的，说明基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法可以同分步算法一样避开 LBB 条件，很好地解决速度-压力失耦问题。

(3) 在求解高 Re 数下流体流动时(强对流情形)，基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法求解结果没有出现速度场的数值振荡现象，从而说明该方法可以消除由强对流引起的速度场振荡问题。

(4) 在低 Re 数下，基于非增量型分步算法的 SL-EFG 方法的计算精度高，与基准解吻合很好；而在高 Re 数下，该方法具有很好的稳定性。

第六章 总结与展望

强对流问题的数值模拟一直是计算流体力学的研究重点。本文提出了一种针对强对流问题的半 Lagrange 无网格 Galerkin(SL-EFG)方法。该方法将 Euler 形式的控制方程转化成 Lagrange 形式，方程中不显含对流项，使用 EFG 方法求解 Lagrange 形式的扩散方程，采用反向追踪技术对对流项进行处理。相比于标准 EFG 方法，该方法在保证稳定性的前提下仍可获得较高的精度，对于强对流问题的求解具有显著优势。本文首先给出了 SL-EFG 方法求解对流扩散方程的详细过程，然后针对该方法在精度方面的不足提出了两方面的改进，最后探讨了该方法在不可压缩流动问题中的应用。

6.1 工作总结

本文主要工作可以概括为以下几个方面：

(1) 本文结合 SL 和 EFG 方法，提出了针对强对流问题的 SL-EFG 方法。考虑对流扩散方程，通过 Lagrange 方法将方程转化为 Lagrange 形式的扩散方程，分别采用 θ 加权法和标准 Galerkin 方法进行时间离散和空间离散。基于满足常微分方程初值问题的特征线方程，运用反向追踪技术处理对流项。此时考虑两种情况，其一是对流系数为常数，可直接求得出发点；其二是对流系数为时间相关的函数，可利用向后 Euler 法、梯形求积公式、中间点法或一种基于 Taylor 的新方法进行求解。运用四种反向追踪技术求解 Burgers 方程，发现 SL-EFG 方法采用向后 Euler 的反向追踪技术更适合强对流问题。同时，运用 SL-EFG 方法和标准 EFG 方法求解不同 Reynolds 数下的 Burgers 方程，发现 SL-EFG 方法有效地消除了标准 EFG 方法在高 Reynolds 数下出现的数值伪振荡，然而在低 Reynolds 数下的计算精度却低于标准 EFG 方法。随后，利用 Gaussian-cone 问题研究了不同的插值方式对 SL-EFG 方法计算精度的影响，发现采用等阶插值方式时，该方法既不失精度又无需增加额外的计算量。

(2) 相比于标准的 EFG 方法，SL-EFG 方法虽然具备了更好的稳定性，但是精度还有待提高。鉴于此，本文首先分析了 SL-EFG 方法的不足之处，随后改变了出发点处未知函数导数的插值方式，并利用 Gaussian-cone 问题进行验证，发现此次改进并没有显著提高 SL-EFG 方法的计算精度，相比于标准 EFG 方法，仍有待进一步提高。基于此，本文将对节点的反向追踪改为对积分点的反向追踪，再次利用 Gaussian-cone 问题进行验证，发现此次改进避免了先计算出发层节点信息再以此为基础计算出发层积分点信息产生的二次误差，计算精度明显高于标准 EFG 方法。然后给出了改进后 SL-EFG 方法的矩阵表达式和完整流程，并在 L_2

范数度量下，该方法时间方向上具有二阶收敛率，空间方向上使用线性基可以达到二阶收敛率。通过四个算例对 SL-EFG 方法的稳定性和精度进行了进一步的验证，再次说明了基于积分点反向追踪的 SL-EFG 方法在精度和稳定性方面均优于标准 EFG 方法，尤其是强对流情形时。

(3) 在不可压缩流动问题求解方面，标准 EFG 方法主要有两方面的困难：一是在高 Reynolds 数下出现速度场振荡；二是由于速度-压力空间插值不满足所谓的 LBB 条件出现的压力场振荡。基于此，本文在 SL-EFG 方法框架下，推导了 Navier-Stokes 方程的非增量型分步格式，并通过二维管道流动和方腔流动验证了该方法在求解不可压流动问题时的有效性。由于采用了分步格式，因此该方法在使用等线性基近似速度和压力时可以避免 LBB 条件。而该方法本身便可以消除在高 Reynolds 数下出现速度场振荡。

6.2 工作展望

本文工作仅是用 SL-EFG 方法数值模拟强对流情形下流动问题的一个开端，作为一种稳定性和精度兼得的新方法，仍有许多方面需要进一步研究，例如：

(1) 本文仅探讨了 SL-EFG 方法在对流扩散方程和不可压缩流动问题模拟中的应用，可将类似的研究思想推广到粘弹流动问题、多相流问题、流固耦合问题等的数值模拟中。

(2) 本文用大量的数值实验验证了 SL-EFG 方法求解强对流问题时具有很好的稳定性，同时可以获得较高精度，但并未从理论上给予诸如稳定性、误差估计等的证明，这是本文的不足之处，也是作者今后需要提高的地方。

(3) 本文仅对 SL-EFG 方法做了初步研究，并未考虑更加复杂的求解区域，且对方法的计算效率也未进行分析研究，可以从这两方面进一步深入研究。

参考文献

- [1] 韩先洪. 成型充填过程中非等温非牛顿粘弹性流动数值模拟[D]. 大连: 大连理工大学, 2007.
- [2] Gu DZ. Polymer Fluid Dynamics[M]. Chengdu: Sichuan Education Press, 1988.
- [3] 张林, 欧阳洁, 张文彬等. 基于无网格稳定化方案求解非稳态强对流问题的自适应节点加密技术[J]. 计算力学学报, 2010(3).
- [4] 王旭, 张建邦, 严传俊. 强对流问题数值计算的一种迎风有限元方法[J]. 西北工业大学学报, 2001(4):511-514.
- [5] 张德良. 计算流体力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [6] Smith CJ. The semi Lagrangian method in atmospheric modelling[D]. University of Reading, 2000.
- [7] Courant R, Isaacson E, Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1952, 5: 243-255.
- [8] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D. Meshless method: An overview and recent developments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139: 3-47.
- [9] Liu GR, Gu YT. An introduction to meshfree methods and their programming[M]. Springer Science & Business Media, 2005.
- [10] Nguyen VP, Rabczuk T, Bordas S. Meshless methods: A review and computer implementation aspects[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2008, 79: 763-813.
- [11] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37: 229-256.
- [12] 吴江航, 孙毓平. 数值求解对流占优问题的分步解析方法[J]. 中国科学, 1989, 19(9): 957-964.
- [13] 岳宝增, 彭武, 王照林. ALE 迎风有限元法研究进展[J]. 力学进展, 2005, 35(1): 21-29
- [14] Zienkiewicz OC, Gallagher RH, Hood P. Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows. Finite element solutions[J]. The Mathematics of Finite Elements and Applications II MAFELAP, Academic Press, London, 1975: 235-267.
- [15] Heinrich JC, Huyakorn PS, Zienkiewicz OC. An ‘upwind’ finite element scheme

- for two-dimensional convective transport equation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977, 11(1): 131-143.
- [16]Chen CJ, Naseri-Neshat H, Ho KS. Finite-analytic numerical solution of heat transfer in two-dimensional cavity flow[J]. Numerical Heat Transfer, 1981, 4(2): 179-197.
- [17]Chen CJ, Chen HC. Finite Analytical Numerical Method for unsteady Two-Dimensional Navier-Stokes equation[J]. Journal of Computation Physics, 1984, 53: 209-226.
- [18]Yanenko NN. The method of fractional steps[M]. New York: Springer, 1971.
- [19]Douglas J, Russell TF. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, 19(5): 871-885.
- [20]Johnson C. Numerical Solution of Paratial Differential Equation by the Finite Element Method[M]. England: Combridge University Press, 1987.
- [21]Falk RS, Richter GR. Analysis of a continuous finite element method for hyperbolic equations[J]. SIAM journal on numerical analysis, 1987, 24(2): 257-278.
- [22]Johnson C, Saranen J. Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations[J]. Mathematics of Computation, 1986, 47(175): 1-18.
- [23]Sun C, Shen H. The finite difference streamline diffusion methods for time-dependent convection-diffusion equations[J]. Numerical Mathematics (Theory, Methods and Applications), 1998 (1): 72-85.
- [24]王晓东, 欧阳洁, 王玉龙. 积分节点迎风偏移的节点积分无单元 Galerkin 方法[J]. 计算物理, 2012, 29(2): 183-190.
- [25]Li X, Duan Q. Meshfree iterative stabilized Taylor-Galerkin and characteristic-based split (CBS) algorithms for incompressible N-S equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(44-47): 6125-6145.
- [26]欧阳洁, 张林, 张小华. 求解非稳态对流占优问题的非标准无网格 Galerkin 方法[J]. 空气动力学学报, 2007, 25(3): 287-293, 299.
- [27]Zhang XH, Ouyang J, Zhang L. Element-free characteristic Galerkin method for Burgers' equation[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, 33(3):

- 356-362.
- [28] 欧阳洁, 张林, 张小华. 流动问题无网格 Galerkin 方法的稳定化方案研究[J]. 计算力学学报, 2008, 25(6): 855-862.
- [29] 张林, 欧阳洁, 张文彬. 基于无网格稳定化方案求解非稳态强对流问题的自适应节点加密技术[J]. 计算力学学报, 2010(3): 446-450.
- [30] Sawyer JS. A semi-Lagrangian method of solving the vorticity advection equation[J]. Tellus, 1963, 15(4): 336-342.
- [31] Robert A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations[J]. Atmosphere-Ocean, 1981, 19(1): 35-46.
- [32] Pironneau O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations[J]. Numerische Mathematik, 1982, 38(3): 309-332.
- [33] Giraldo FX. A Spectral Element Semi-Lagrangian Method for the Shallow Water Equations on Unstructured Grids[J]. Computational Mechanics, 1998, 190(2): 623-650.
- [34] Phillips TN, Williams AJ. Viscoelastic flow through a planar contraction using a semi-Lagrangian finite volume method[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1999, 87(2-3): 215-246.
- [35] 邵光茹, 龙晓瀚. 对流扩散方程的半拉格朗日有限差分法[J]. 鲁东大学学报(自然科学版), 2014, 30(2): 114-120.
- [36] Celledoni E, Kometa BK. Semi-Lagrangian Runge-Kutta exponential integrators for convection dominated problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2009, 41(1): 139-164.
- [37] Bak S, Bu S, Kim P. An Efficient Backward Semi-Lagrangian Scheme for Nonlinear Advection-diffusion Equation[J]. International Journal of Mathematical and Computational Sciences, 2014, 8(8): 1104-1107.
- [38] Sastre PGD, Bermejo R. Error analysis for hp-FEM semi-Lagrangian second order BDF method for convection-dominated diffusion problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2011, 49(2): 211-237.
- [39] Zerroukat M. A simple mass conserving semi-Lagrangian scheme for transport problems[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(24): 9011-9019.
- [40] Xiu D, Karniadakis GE. A semi-Lagrangian high-order method for Navier-Stokes equations[J]. Journal of computational physics, 2001, 172(2): 658-684.
- [41] Spiegelman M, Katz RF. A semi-Lagrangian Crank-Nicolson algorithm for the numerical solution of advection-diffusion problems[J]. Geochemistry,

- Geophysics, Geosystems, 2006, 7(4).
- [42]Sun Z, Xiao F. A semi-Lagrangian multi-moment finite volume method with fourth-order WENO projection[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2017, 83(4): 351-375.
- [43]Rosatti G, Chemotti R, Bonaventura L. High order interpolation methods for semi-Lagrangian models of mobile-bed hydrodynamics on Cartesian grids with cut cells[J]. International journal for numerical methods in fluids, 2005, 47(10-11): 1269-1275.
- [44]Zuo W, Jin M, Chen Q. Reduction of numerical diffusion in FFD model[J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2012, 6(2): 234-247.
- [45]Mortezazadeh M, Wang LL. A high-order backward forward sweep interpolating algorithm for semi-Lagrangian method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2017, 84(10): 584-597.
- [46]Gutierrez LMG, Bermejo R. A semi-Lagrangian level set method for incompressible Navier-Stokes equations with free surface[J]. International journal for numerical methods in fluids, 2005, 49(10): 1111-1146.
- [47]Allievi A, Bermejo R. A generalized particle search-locate algorithm for arbitrary grids[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 132(2): 157-166.
- [48]封建潮, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [49]Falcone M, Ferretti R. Semi-Lagrangian approximation schemes for linear and Hamilton-Jacobi equations[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013: 45-67.
- [50]Harten A. On high-order accurate interpolation for non-oscillatory shock capturing schemes[M]. New York: Springer, 1986: 71-105.
- [51]Harten A, Osher S, Engquist B, et al. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes[J]. Applied Numerical Mathematics, 1986, 2(3-5): 347-377.
- [52]Jiang G, Shu CW. Essentially implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126: 202-228.
- [53]Jin XZ, Li G, Aluru NR. On the Equivalence between least-squares and kernel approximations in meshless methods[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2001, 2(4): 447-462.
- [54]张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

- [55]Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1994, 37(2): 229-256.
- [56]温宏宇. 无网格法在金属塑性成形数值模拟中的应用研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2006.
- [57]Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996, 139(1-4): 49-74.
- [58]Wang XD, Ouyang J, Feng Z. Local Kronecker delta property of the MLS approximation and feasibility of directly imposing the essential boundary conditions for the EFG method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37(7-8): 1021-1042.
- [59]Zienkiewicz OC, Taylor RL, Nithiarasu P. The finite element method[M]. London: McGraw-hill, 1977.
- [60]Babuska I. The finite element method with Lagrangian multipliers[J]. Numerische Mathematik, 1973, 20(3): 179-192.
- [61]Huerta A, Vidal Y, Villon P. Pseudo-divergence-free element free Galerkin method for incompressible fluid flow[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12-14): 1119-1136.
- [62]Peyret R, Taylor TD. Computational methods for fluid flow[M]. New York: Springer, 1983.
- [63]Comini G, Giudice SD. Finite-element solution of the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Numerical Heat Transfer, Part A Applications, 1982, 5(4): 463-478.
- [64]Donea J, Giuliani S, Laval H, et al. Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982, 30(1): 53-73.
- [65]Lewis RW, Nithiarasu P, Seetharamu KN. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow[M]. England: John Wiley & Sons Ltd., 2004
- [66]Nithiarasu P, Zienkiewicz OC. Analysis of an explicit and matrix free fractional step method for incompressible flows[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(41-43): 5537-5551.
- [67]Venutelli M. A third-order Taylor-Galerkin model for the simulation of two-dimensional unsteady free surface flows[J]. Applied Mathematical Modelling, 1998, 22(9): 641-656.

- [68]Nithiarasu P. An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2005, 48(12): 1415-1428.
- [69]Massarotti N, Nithiarasu P, Zienkiewicz OC. Characteristic-based-split (CBS) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 1998, 8(8): 969-990.
- [70]Nithiarasu P, Ravindran K. A new semi-implicit time stepping procedure for buoyancy driven flow in a fluid saturated porous medium[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 165(1-4): 147-154.
- [71]赵光明, 宋顺来. 无网格 Galerkin 法与有限元耦合新算法[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(8): 899-904
- [72]赵光明. 无网格方法及其在冲击动力学中的应用研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2006
- [73]Ghia U, Ghia KN, Shin CT. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. Journal of computational physics, 1982, 48(3): 387-411.
- [74]王晓东. 面对流动与结晶问题模拟的无网格 Galerkin 方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2014.
- [75]Bruneau CH, Saad M. The 2D lid-driven cavity problem revisited[J]. Computers & Fluids, 2006, 35(3): 326-348.
- [76]Schreiber R, Keller HB. Driven cavity flows by efficient numerical techniques[J]. Journal of Computational Physics, 1983, 49(2): 310-333.

致 谢

时光荏苒，硕士生涯已接近尾声。这两年多的时光既漫长又短暂，其中充满了酸甜苦辣，更有收获和成长。太多的感谢与感恩，不知从何说起。

但是首先，我必须衷心地感谢我的导师王晓东老师在硕士期间对我的悉心指导和帮助。硕士阶段初期，王老师耐心地给我讲解关于所研究方向的一些基础知识，带我入门。并及时纠正我在学习一些错误的理解和不好的习惯，提出了非常中肯的建议，让我受益匪浅。在老师的帮助下我逐渐对半 Lagrange 方法和无网格 Galerkin 方法有了深入的了解，并在老师的指导下确定了本文的科研内容。之后在方法的构造和程序的调试方面，老师都给予了我很多帮助，科研工作才顺利进行下来。王老师对科研工作的热忱，淡泊名利、与人为善、踏实做事的态度，都深深地触动着我，他是一位值得我努力学习的榜样。我在此特向王老师表示深深的敬意和衷心的感谢，谢谢您这两年来的培育之恩，我会铭记于心！

同时，我很想感谢欧阳洁老师为我们提供的学习环境以及每次组会时的谆谆教诲。欧阳老师高尚的人格、严谨的态度、渊博的学识、开拓创新的精神、朴素细致的工作作风和井然有序的做事方式，永远是我学习的榜样。每次组会后，欧阳老师的认真教导都让我更加清醒地意识到自己所处的大环境，更加认识到自己在很多方面的不足。在此向欧阳老师表示深深的感谢！

我还要感谢组内的每一位成员。感谢柴勇师兄在科研中的帮助和支持，每次有问题请教师兄，他都耐心细致地帮我解决；感谢温紫薇、康婷师姐和赵立飞师姐在我找工作期间分享她们的宝贵经验；感谢曹献献师姐、马梦霞师姐在生活上的关心；感谢和我一同入学的小伙伴董学凯、张晓、陈翠萍，感谢平时在科研和生活上的互相鼓励和关怀；感谢高普阳、张晨辉、关振、李鑫、王医、常海粟、陈凯、窦婧溪、王晓丹、毛姣敏、范雅琪、李舒柯等师兄师姐师弟师妹们在科研和生活上的帮助。很荣幸能够和他们并肩奋斗，共同探寻真理。最后还要感谢我的三位舍友，谢谢她们这几年的陪伴，和她们一起度过的日子很开心！

本文研究得到国家自然科学基金重点基础研究计划(批准号：91434201)及国家自然科学基金面上项目(批准号：11671321)的资助，特在此表示感谢！

最后，特别感谢在背后默默支持我的家人，他们的支持是我一直坚持到现在的动力，也使得我能够顺利完成学业。唯有在今后的日子里不断努力前进，不断提高自己，才能不辜负他们殷切的期望。

西北工业大学

学位论文知识产权声明书

本人完全了解学校有关保护知识产权的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属于西北工业大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版。本人允许论文被查阅和借阅。学校可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律注明作者单位为西北工业大学。

保密论文待解密后适用本声明。

学位论文作者签名：_____

指导教师签名：_____

年 月 日

年 月 日

西北工业大学

学位论文原创性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容和致谢的地方外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表或撰写过的研究成果，不包含本人或其他已申请学位或其他用途使用过的成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式表明。

本人学位论文与资料若有不实，愿意承担一切相关的法律责任。

学位论文作者签名：_____

年 月 日