

一种IBM方法

这种IB方法不需要在固体区域求解。只需要在 Ω_h 上建立函数空间，不需要在 B_h 上建立函数空间。结合了heltai等人的IBFE方法和Maitre等人的欧拉描述的IBLS。在整个过程中，固体网格 B_h 的作用只有两个：

1. 计算高斯点和高斯权重
2. 追踪固体的运动位置

1. 方程推导

在欧拉体系下，固体的力可以表示成

$$-\int_{B_t} \sigma_s : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

其中， $V = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d\}$ 是定义在 Ω 上的函数空间。再根据Neo-Hookean的本构

$$\tilde{\mathbb{P}}(s, t) = |\mathbb{F}(s, t)| \sigma_s(\mathbf{X}(s, t), t) \mathbb{F}^{-T}(s, t), \quad s \in \mathcal{B}$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(s, t) = \mu_e (\mathbb{F}(s, t) - \mathbb{F}^{-T}(s, t))$$

可以将原来的公式推导成

$$-\int_{B_t} \mu_e (\mathbb{F}\mathbb{F}^T - \mathbb{I}) : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

那么，原来的动量方程可以写成

$$\rho_t \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sigma_f : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} = - \int_{B_t} \mu_e (\mathbb{F}\mathbb{F}^T - \mathbb{I}) : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

式子的左边等价于没有源项的流体的动量方程，右边可以看成源项。

2. 有限元离散

将 Ω 离散成 Ω_h ，将 B_t 离散成 B_h ，在 Ω_h 上建立有限元空间 V_h ， V_h 是 V 的有限维子空间，记成 $\{\mathbf{v}_i\}$ 。然后原来的动量方程可以组装成线性系统 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，就可以解出速度了。但是这里有个比较难处理的地方，右端的源并不容易积分，因为有两个问题：

1. B_h 的单元和 V_h 的单元不匹配，数值积分比较复杂。
2. \mathbb{F} 需要间接地计算。

解决第一个问题

我们将源项组装出来的向量记成 \mathbf{b}_s ，其中有 $b_s[i] = \int_{B_t} \mu_e (\mathbb{F}\mathbb{F}^T - \mathbb{I}) : \nabla \mathbf{v}_i d\mathbf{x}$

B_h 可以看成是三角单元或者四边形单元的集合，记为 $\{e_k\}$ ，那么 $b_s[i]$ 就等价于

$$\sum_{e_k \in B_h} \int_{e_k} \mu_e (\mathbb{F} \mathbb{F}^\top - \mathbb{I}) : \nabla \mathbf{v}_i d\mathbf{x}$$

根据 B_h 的网格结构计算出 $\{e_i\}$ 中所有单元的高斯点和高斯权重（这里应该按 B_t 求解），记为 $\{p_g\}$ 和 $\{w_g\}$ 。那么上式等价于

$$\sum_{p_g} w_g \mu_e (\mathbb{F} \mathbb{F}^\top - \mathbb{I})(p_g) : \nabla \mathbf{v}_i(p_g)$$

实际计算中，我们要根据结构网格的特点，找到在高斯点处非零的 \mathbf{v} 。

解决第二个问题

令 $X(x, t) \in V_h$ ，是一个 Ω_h 上的函数，为整个区域的向后追踪坐标，表示质点 x 运动了时间 t 以后会到达 X 。

$$\begin{cases} X(x, t_{n+1}) = X(x, t_n) + \Delta t \mathbf{u}(X(x, t_n), t_n), \\ X(x, 0) = x, \end{cases}$$

我们假设固体不会运动到流体外部，因此 $\mathbf{u}(X(x, t_n)) = \mathbf{0} \quad | \quad X(x, t_n) \notin \Omega$ 。我们要知道只计算固体区域的高斯点处的 X 导数就行了。因此可以求出 $\mathbb{F} = \nabla X$ ， $X \in B_t$ 。

最后 b_s 就计算出来了。