1.1 心肌细胞的 H-O 应变能函数

$$\mathrm{W}=\frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{b}}e^{\mathrm{b}(\mathrm{I}_1\text{-}3)}+\sum_{\mathrm{i=f,s}}\frac{\mathrm{a_i}}{2\mathrm{b_i}}\left(e^{\mathrm{b_i}\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{i}}^{*}\text{-}1\right)^2}-1\right)+\frac{\mathrm{a_{fs}}}{2\mathrm{b_{fs}}}\left(e^{\mathrm{b_{fs}}(\mathrm{I_{8fs}})^2}\text{-}1\right) \tag{1-1}$$

其中，a，b，$\mathrm{a_i}$，$\mathrm{b_i}$ (i=f, s, fs)表示非负材料参数，$\mathbf{A}=\partial\chi/\partial\mathbf{X}$表示结构体的形变梯度，$\mathbf{C}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$表示右柯西-格林形变张量，$\mathrm{I}_1=\mathrm{tr}(\mathbf{C})$。$\mathbf{f_1}=\mathbf{Af}_0$，$\mathbf{s_1}=\mathbf{As_0}$，其中$\mathbf{f}_0=\mathbf{f}(\mathbf{X})$表示心肌纤维方向的单位向量，$\mathbf{s}_0=\mathbf{s}(\mathbf{X})$表示心肌片层方向的单位向量。$\mathrm{I}_{4\mathrm{i}}^{*}=\max(\mathrm{I}_{4\mathrm{i}},1)$(i=f, s)，$\mathrm{I}_{4\mathrm{f}}=\mathbf{f}_0^T\mathrm{C}\mathbf{f}_0=\mathbf{f_1}\cdot\mathbf{f_1}$，$\mathrm{I}_{4s}=\mathbf{s}_0^T\mathrm{C}\mathbf{s}_0=\mathbf{s_1}\cdot\mathbf{s_1}$。

1.2 第一 Piola-Kirchhoff 弹性应力张量

通过应变能函数可以获得相应的第一 Piola-Kirchhoff 弹性应力张量$\mathbf{P}_\mathrm{p}$。

$$\mathbf{P}_\mathrm{p}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathbf{A}}=\mathbf{A}S_p \tag{1-2}$$

其中，S_p为第二 Piola-Kirchhoff 弹性应力张量

$$\begin{aligned} S_p &= 2\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= \mathrm{a}e^{\mathrm{b}(\mathrm{I}_1\text{-}3)}\mathbf{I}+2\mathrm{a}_f\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{f}}^{*}\text{-}1\right)e^{\mathrm{b}_f\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{f}}^{*}\text{-}1\right)^2}\boldsymbol{f}_0\otimes\boldsymbol{f}_0 \\ &\quad +2\mathrm{a}_s\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{s}}^{*}\text{-}1\right)e^{\mathrm{b}_s\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{s}}^{*}\text{-}1\right)^2}\boldsymbol{S}_0\otimes\boldsymbol{S}_0+\mathrm{a_{fs}}e^{\mathrm{b_{fs}}(\mathrm{I_{8fs}})^2}\boldsymbol{f}_0\otimes\boldsymbol{S}_0 \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mathrm{p} &= \mathrm{a}e^{\mathrm{b}(\mathrm{I}_1\text{-}3)}\mathbf{A}+2\mathrm{a}_f\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{f}}^{*}\text{-}1\right)e^{\mathrm{b}_f\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{f}}^{*}\text{-}1\right)^2}\mathbf{A}\boldsymbol{f}_0\otimes\boldsymbol{f}_0 \\ &\quad +2\mathrm{a}_s\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{s}}^{*}\text{-}1\right)e^{\mathrm{b}_s\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{s}}^{*}\text{-}1\right)^2}\boldsymbol{AS}_0\otimes\boldsymbol{S}_0+\mathrm{a_{fs}}e^{\mathrm{b_{fs}}(\mathrm{I_{8fs}})^2}\boldsymbol{Af}_0\otimes\boldsymbol{S}_0 \end{aligned} \tag{1-3}$$

在实际计算中，为了降低欧拉压力场中压力不连续性的量级，进而降低在流体与固体接触面损失的虚拟体积的量级，需要使用修正的被动弹性响应应力张量，即

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mathrm{p} &= \mathrm{a}e^{\mathrm{b}(\mathrm{I}_1\text{-}3)}\mathbf{A}+2\mathrm{a}_f\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{f}}^{*}\text{-}1\right)e^{\mathrm{b}_f\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{f}}^{*}\text{-}1\right)^2}\mathbf{A}\boldsymbol{f}_0\otimes\boldsymbol{f}_0 \\ &\quad +2\mathrm{a}_s\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{s}}^{*}\text{-}1\right)e^{\mathrm{b}_s\left(\mathrm{I}_{4\mathrm{s}}^{*}\text{-}1\right)^2}\boldsymbol{AS}_0\otimes\boldsymbol{S}_0+\mathrm{a_{fs}}e^{\mathrm{b_{fs}}(\mathrm{I_{8fs}})^2}\boldsymbol{Af}_0\otimes\boldsymbol{S}_0 \\ &\quad -\mathrm{a}\exp^{\mathrm{b}(\mathrm{I}_1\text{-}3)}\mathbf{A}^{\text{-T}} \end{aligned} \tag{1-4}$$

保证了当$\mathbf{A}=\mathbf{I}$时，$\mathbf{P}_\mathrm{p}=0$。

1.3 强公式

$\Omega\subset R^3$表示耦合系统所在的计算区域。$E\subset R^3$表示浸没结构体所在的区域。$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$ 表示系统所在区域的欧拉坐标， $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)\in E$ 表示结构体的拉格朗日坐标. $\chi(\mathbf{X}, t)\in\Omega$表示质点 $\mathbf{X}$ 在t时刻的欧拉坐标。$\Omega^e(t)=\chi(E, t)$和$\Omega^f(t)=\Omega\backslash\Omega^e(t)$分别表示结构体和流体在t时刻所在的区域。f、s 分别表示肌细胞的纤维方向和切片方向，n 表示与 f 和 s 相互垂直的方向。

由于$\mathbf{f}^e(\mathbf{x},t)=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t)$，其中，$\boldsymbol{\sigma}^e$表示左心室因形变而产生的弹性应力。根据虚功原理可得，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{f}^e(\mathbf{x},t)\cdot V dx &= \int_\Omega \left(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t)\right)\cdot V dx \\ &= \int_{\partial\Omega\cap\Omega^e(t)} \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t)\mathbf{n}\cdot V dx - \int_{\Omega\cap\Omega^e(t)} \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t):\nabla V dx \end{aligned} \quad (1\text{-}5)$$

其中，$\mathbf{n}$表示左心室所在的区域$\Omega^e(t)$的边界的单位外法线向量，V表示计算区域Ω内的任意函数。由$\partial\left(\Omega\cap\Omega^e(t)\right)=\left(\partial\Omega\cap\Omega^e(t)\right)\cap\left(\Omega\cap\partial\Omega^e(t)\right)$可得

$$\int_\Omega \mathbf{f}^e(\mathbf{x},t)\cdot V dx = \int_{\Omega\cap\Omega^e(t)}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t)\right)\cdot V d\mathbf{x} - \int_{\Omega\cap\partial\Omega^e(t)} \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t)\mathbf{n}\cdot V dA_r(\mathbf{x}) \quad (1\text{-}6)$$

在弹性力学中，对于使用拉格朗日坐标描述的弹性体，为了求解便利，一般使用第一 Piola-Kirchhoff 弹性应力张量$\mathbf{P}_p(\mathbf{X},t)$对结构体所产生弹力进行描述，且$\mathbf{P}_p(\mathbf{X},t)$满足

$$\int_{\Omega^e(t)} \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x},t)\mathbf{n} dA(x) = \int_E \mathbf{P}_p\mathbf{N} dA_r(\mathbf{X}) \quad (1\text{-}7)$$

其中 $\mathbf{N}(\mathbf{X})$表示区域 E 的边界的单位外法线向量。由此可得

$$\int_\Omega \mathbf{f}^e(\mathbf{x},t)\cdot V dx = \int_{\Omega\cap\mathbf{E}}\left(\nabla_\mathbf{X}\cdot\mathbf{P}_p\right)\cdot V^E d\mathbf{X} - \int_{\Omega\cap\partial\mathbf{E}} \mathbf{P}_p\mathbf{N}\cdot V^E dA_r(\mathbf{X}) \quad (1\text{-}8)$$

其中，$V^E(\mathbf{X})=\int_\Omega V\delta\left(\mathbf{x}-\chi(\mathbf{X}, t)\right)d\mathbf{x}$为 E 的任意一个函数。由于V和$V^E$分别是$\Omega$和 E 内的任意一个函数，所以$\mathbf{f}^e$满足如下等式

$$\mathbf{f}^e(\mathbf{x},t)=\int_\mathbf{E} \left(\nabla_\mathbf{X}\cdot\mathbf{P}_p\right)\delta\left(\mathbf{x}-\chi(\mathbf{X}, t)\right)d\mathbf{X} - \int_{\partial\mathbf{E}} \mathbf{P}_p\mathbf{N}\delta\left(\mathbf{x}-\chi(\mathbf{X}, t)\right)dA_r(\mathbf{X}) \quad (1\text{-}9)$$

其中，$\nabla\cdot\mathbf{P}_p(\mathbf{X},t)$和$-\mathbf{P}_p(\mathbf{X},t)\mathbf{N}(\mathbf{X})$分别表示结构体所产生的拉格朗日体力密度和面力密度。

5.1.3 弱公式

根据强公式可知

$$\mathbf{F}_{\mathrm{B}}=\nabla\cdot\mathbf{P}_{p}(\mathbf{X},\mathrm{t}) \tag{1-10}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{S}}=-\mathbf{P}_{p}(\mathbf{X},\mathrm{t})\mathbf{N}(\mathbf{X}) \tag{1-11}$$

其中，$\mathbf{F}_{\mathrm{B}}$和$\mathbf{F}_{\mathrm{S}}$分别表示拉格朗日体力密度和面力密度，且$\mathbf{F}=\mathbf{F}_{\mathrm{B}}+\mathbf{F}_{\mathrm{S}}$。根据虚功原理，方程(1-10)可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{E}} \mathbf{F}_{\mathrm{B}}\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}d\boldsymbol{X} &= \int_{\mathrm{E}} \nabla\cdot\mathbf{P}_{p}(\mathbf{X},\mathrm{t})\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{d}\mathbf{X} \\ &= \int_{\partial\mathrm{E}} \mathbf{P}_{p}\mathbf{N}\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{dA_r}(\mathbf{X}) - \int_{\mathrm{E}} \mathbf{P}_{p}:\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{d}\mathbf{X}\end{aligned} \tag{1-12}$$

根据方程(1-11)可知

$$\int_{\partial\mathrm{E}} \mathbf{F}_{\mathrm{s}}\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\mathbf{X}=\int_{\partial\mathrm{E}} -\mathbf{P}_{p}(\mathbf{X},\mathrm{t})\mathbf{N}(\mathbf{X})\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\mathbf{X} \tag{1-13}$$

根据方程(1-12)和(1-13)可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{E}} \mathbf{F}^{\mathrm{e}}(\mathbf{X},\mathrm{t})\cdot\mathbf{V}(\mathbf{X})\mathrm{d}\mathbf{X} &= \int_{\mathrm{E}} \mathbf{F}_{\mathrm{B}}\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{d}\mathbf{X} + \int_{\partial\mathrm{E}} \mathbf{F}_{\mathrm{s}}\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{d}\mathbf{X} \\ &= \int_{\partial\mathbf{E}} \mathbf{P}_{p}\mathbf{N}\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{dA_r}(\mathbf{X}) - \int_{\mathrm{E}} \mathbf{P}_{p}:\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{d}\mathbf{X} \int_{\partial\mathrm{E}} -\mathbf{P}_{p}(\mathbf{X},\mathrm{t})\mathbf{N}(\mathbf{X})\cdot\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\mathbf{X} \\ &= -\int_{\mathrm{E}} \mathbf{P}_{p}:\mathrm{V}^{\mathrm{E}}\mathrm{d}\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathrm{E}} \left(\nabla\cdot\mathbf{P}_{p}(\mathbf{X},\mathrm{t})\right)\cdot\mathbf{V}(\mathbf{X})\mathrm{d}\mathbf{X} - \int_{\partial\mathrm{E}} \left(\mathbf{P}_{p}(\mathbf{X},\mathrm{t})\mathbf{N}(\mathbf{X})\right)\cdot\mathbf{V}(\mathbf{X})\mathrm{d}\mathbf{A}(\mathbf{X})\end{aligned} \tag{1-14}$$