Anàlisi de funcions I

Apunts Selectivitat Versió 2020

En aquests apunts totes les **funcions** són **reals de variable real**. Això vol dir que si f és la funció, aleshores escribim $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i si, a més x i y són les variables independent i dependent respectivament, aleshores també escribim $y = f(x)$ i es compleix que x i y prenen valors reals. Al subconjunt $\mathcal{D}$ es diu **domini** de la funció f. Podem definir-lo com el conjunt

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = y \in \mathbb{R}\}$$

i, en paraules, és el conjunt de punts x de la recta real que tenen imatge y real. Se'n diu **recorregut** de la funció f al conjunt

$$\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ i } f(x) = y\}$$

i, en paraules, és el conjunt de punts y de la recta real pels quals hi ha una antiimatge x real. Finalment, es diu gràfic de la funció f al conjunt

$$\mathcal{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\right\}$$

i, en paraules, és el conjunt de punts (x, y) del pla que representant-los i resseguint-los després dibuixen la gràfica de la funció.

1. Càlcul de dominis

Donada una funció f, el primer que s'ha de fer és determinar el seu domini perquè és on es troba ben definida. Donem a continuació els dominis de les funcions més habituals: considerem que $p(x)$ és un polinomi, llavors:

1. si $f(x) = p(x)$, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
2. si $f(x) = |p(x)|$, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
3. si $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, n parell, aleshores $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\}$
4. si $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, n senar, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
5. si $f(x) = e^{p(x)}$, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
6. si $f(x) = \ln p(x)$, aleshores $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}$
7. si $f(x) = \sin p(x)$, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
8. si $f(x) = \cos p(x)$, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

9. si $f(x) = \tan p(x)$, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : p(x) = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ i } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Donem ara les regles de càlcul de dominis per les operacions de funcions. Si f i g són funcions, $\mathcal{D}_f$ i $\mathcal{D}_g$ són els seus respectius dominis, llavors:

- Domini de la suma de funcions: $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
- Domini de la multiplicació d'una funció per un número real k: $\mathcal{D}_{k \cdot f} = \mathcal{D}_f$
- Domini de la multiplicació de funcions: $\mathcal{D}_{f \cdot g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
- Domini d'un quocient de funcions: $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$
- Dominio de la composició de funcions: $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathcal{D}_f \text{ i } f(x) \in \mathcal{D}_g\}$
- Domini d'una funció definida a trossos: per exemple, si A i B són subconjunts de la recta real, $A \cap B = \emptyset$ i

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in A \\ h(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

  aleshores

$$\mathcal{D}_f = (\mathcal{D}_g \cap A) \cup (\mathcal{D}_h \cap B)$$

  és a dir, primer es troba de forma separada el domini de cadascun dels trossos dins de la seva corresponent regió de definició i deprés es fa la unió del dominis.

Exemple 1 Troba el domini de la funció $f(x) = \ln \left(\frac{2x}{x-1} \right)$.
Solució: Observem que f és la composició de dues funcions: $f(x) = (g \circ h)(x)$ on

$$g(x) = \ln x \quad \text{i} \quad h(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Aleshores

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathcal{D}_h \text{ i } h(x) \in \mathcal{D}_g\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in R \setminus \{1\} \text{ i } \frac{2x}{x-1} \in (0, +\infty) \right\} \\ &= (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

perquè $\mathcal{D}_h = R \setminus \{1\}$ i $\mathcal{D}_g = (0, +\infty)$ i

$$\frac{2x}{x-1} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

■

2. Límits de funcions a l'infinit

Intuïtivament, el límit d'una funció f quan x tendeix cap a l'infinit positiu i negatiu que denotem com

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x),$$

respectivament, és veure cap a on van els valors de la funció $f(x)$ quan x pren valors suficientment grans i quan x pren valors negatius en valor absolut també suficientment grans. Això es pot fer mitjançant taules de valors. No donem aquí la definició rigorosa sinó només algunes propietats senzilles per al seu càlcul. Tot i això, cal saber que si el límit existeix aquest és únic.
Donem a continuació alguns límits a l'infinit de funcions elementals:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} k = k$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} k = k$, essent $k \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln x$ no existeix perquè el domini de la funció logaritme és $(0, +\infty)$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tan x$ no existeixen perquè aquestes funcions oscil·lant en els seus respectius dominis

Donem ara les regles aritmètiques per a calcular límits de funcions a l'infinit. Considerem que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = p$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = q$, on hem escrit ∞ sense signe perquè volem notar que tant pot ser $+\infty$ com $-\infty$. Llavors es compleix:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = p + q$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot p$, essent $k \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = p \cdot q$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{p}{q}$ $(q \neq 0)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)^{g(x)}\right) = p^q$ $(p > 0)$

Totes aquestes regles podran aplicar-se mentre no ens surti cap indeterminació. Se'n diu **indeterminació** a qualsevol de les set expressions següents que ens poden sortir en calcular el límit:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, \infty \cdot 0, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Què cal fer quan surt una indeterminació? Doncs depèn, cada indeterminació té associat algun procediment que ens permet superar-la i, per tant, calcular el límit. En els següents exemples resolts s'explica alguns d'aquests procediments.
També és convenient saber comparar l'infinit d'algunes funcions com la potencial x^n $(n > 0)$, exponencial e^x i logaritme $\ln x$

$$\ln(+\infty) \ll (+\infty)^n \ll e^{+\infty}$$

on ... $\ll$ ... es llegeix com "... és un infinit molt més petit que ...". Finalment, donen alguns casos de comparació per quocient d'infinits, què no són pròpiament indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$. Considerem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, aleshores:

- $f(x)$ i $g(x)$ són **infinits equivalents** quan $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$.
- $f(x)$ creix més ràpidament que $g(x)$ quan $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty$.
- $g(x)$ creix més ràpidament que $f(x)$ quan $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$.

Exemple 2 Les funcions $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $q(x) = a_n x^n$, $a_n \neq 0$, són infinits equivalents perquè

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

doncs cadascun dels sumants de la forma següent compleix

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_i}{a_n x^{n-i}}\right) = \frac{a_i}{a_n} \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)\right)^{n-i} = 0 \qquad (i = 0, ..., n-1)$$

Com a conseqüència podem escriure

$$\lim_{x\to+\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to+\infty} (a_n x^n)$$

i això vol dir que en les expressions polinòmiques i en l'infinit, el terme que té més grau és que el que mana sobre la resta.

Exemple 3 Si apliquem les regles de càlcul de límits s'obté

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = (+\infty) - \sqrt{(+\infty)^2 + 1}$$

què dòna indeterminació del tipus $\infty - \infty$. Llavors, veient que tenim una arrel quadrada, apliquem la següent transformació:

$$x - \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

i per tant s'obté

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{-1}{(+\infty)+\sqrt{(+\infty)^2+1}}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

doncs el denominador mana sobre el numerador.

Exemple 4 Si apliquem les regles de càlcul de límits s'obté

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+1}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+1}\right)^{\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+2)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2}{3x^2}\right)^{\lim\limits_{x\to-\infty}(3x)}=1^{-\infty}$$

que és indeterminat. Aquest tipus d'indeterminació la superem utilitzant aquesta propietat del número e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

quan $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. En efecte,

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+1}\right)^{3x+2}&=\left(1+\frac{3x^2-x}{3x^2+1}-1\right)^{3x+2}=\left(1+\frac{-x-1}{3x^2+1}\right)^{3x+2}\\&=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2+1}{-x-1}}\right)^{\frac{3x^2+1}{-x-1}}\right)^{\frac{-x-1}{3x^2+1}\,(3x+2)}\end{aligned}$$

i per tant

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2-x}{3x^2+1}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2+1}{-x-1}}\right)^{\frac{3x^2+1}{-x-1}}\right)^{\frac{-3x^2-5x-2}{3x^2+1}}=e^{-1}$$

perquè

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2-5x-2}{3x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{3x^2}=-1$$

3. Límits de funcions en un punt

Intuïtivament, el límit d'una funció f quan x tendeix cap a un punt o nombre real a, que denotem com $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, és veure cap a on van els valors de la funció $f(x)$ quan x pren valors suficientment aprop de a però mai sense arribar al punt. Això es pot fer mitjançant taules de valors, prenent valors a l'esquerra i a la dreta del punt. Es per això que també parlem de **límits laterals** a l'**esquerra** i a la **dreta** de a, que denotem com $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ i $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, respectivament. Igual que hem fet en els límits a l'infinit, aquí no donem la definició rigorosa de límit en un punt sinó algunes propietats de càlcul.
És natural però que $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existeix si i només si existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ i $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ i són iguals. També s'ha de saber que si el límit existeix en un punt, aquest és únic. Per tant, s'han de complir les igualtats següents

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)$$

perquè existeixi el límit en el punt a.
Donem a continuació alguns límits en un punt de funcions elementals:

- $\lim_{x \to a} k = k$ essent $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to a} x = a$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{a}$ si $a \neq 0$ i $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ i $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$
- $\lim_{x \to a} e^x = e^a$
- $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$ si $a > 0$ i $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ i $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$
- $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a$ si $a \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty$ i $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$

Donem ara les regles aritmètiques per a calcular límits de funcions en un punt. Considerem que $\lim_{x \to a} f(x) = p$ i $\lim_{x \to a} g(x) = q$. Llavors es compleix:

1. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = p + q$
2. $\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot p$, essent $k \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = p \cdot q$
4. $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$
5. $\lim_{x \to a} \left(f(x)^{g(x)}\right) = p^q$ $(p > 0)$

Igual que els límits a l'infinit, totes aquestes regles podran aplicar-se mentre no ens surti cap indeterminació.
També és convenient per calcular límits saber comparar infinitèsims d'algunes funcions. Se'n diu **infinitèsim** a una funció que tendeix a zero cuando la variable independent tendeix cap a un punt; formalment, $f(x)$ és un infinitèsim en el punt a si només si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Per exemple, $\sin x$ és un infinitèsim en l'origen perquè $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$.
Finalment, donen alguns casos de comparació per quocient d'infinitèsims en un punt, què no són pròpiament indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$. Considerem $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ i $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, aleshores:

- $f(x)$ i $g(x)$ són **infinitèsims equivalents** en el punt a si $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$.

- $f(x)$ es fa més petit més ràpidament que $g(x)$ en el punt a si $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$.
- $g(x)$ es fa més petit més ràpidament que $f(x)$ en el punt a si $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \infty$.

Donem a continuació alguns infinitèsims equivalents en l'origen:

1. $\sin x$ i x
2. $\cos x$ i $1 - \frac{x^2}{2}$
3. $\tan x$ i x
4. $e^x - 1$ i x
5. $\ln(1+x)$ i x

Exemple 5 Calculem $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{3x^2+x}$. De

$$\frac{\ln(1+x)}{3x^2+x} = \frac{1}{3x+1} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

s'obté

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{3x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3x+1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

4. Asímptotes d'una funció

Una recta horitzonal $y = n$ és **asímptota horitzontal** (AH) de la funció f quan x tendeix cap a $+\infty$ o per la dreta si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = n$. Anàlogament, $y = n$ és asímptota horitzontal quan x tendeix cap a $-\infty$ o per l'espquerra si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = n$.
Una recta $y = mx + n$ és **asímptota obliqua** (AO) de la funció f quan x tendeix cap a $+\infty$ o per la dreta si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

Això passa si i només si

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

Tanmateix, $y = mx + n$ és asímptota obliqua de f quan x tendeix cap a $-\infty$ o per l'esquerra si

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

o sigui si

$$m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

Observació 1 S'ha de tenir present que si una funció té asímptota horitzontal $y = n$ ja no té asímptota obliqua doncs

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - n) = 0$$

i per tant l'asímptota oblíqua és l'horitzontal.

Una recta vertical $x = k$ és **asímptota vertical** (AV) per l'esquerra de la funció f en el punt d'abscissa k si $\lim_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$, i és asímptota vertical per la dreta de f en el punt k si $\lim_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$.

Exemple 6 Determinem les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$.
Les possibles asímptotes verticals d'aquesta funció es trobaran en els punts que anul·len el denominador què són -1 i 2 perquè és quan pot tendir cap a infinit. Mirem-ho:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3} \neq \pm\infty$$

per tant no n'hi ha en el punt -1. Per altra banda tenim

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$$

i

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

i per tant $x = 2$ és asímptota vertical.
Mirem si hi ha asímptota horitzontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2 - x - 2} = 0$$

i per tant $y = 0$ és asímptota horitzontal.

Exemple 7 Determinem l'asimptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$.
Observem que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{xe^x}{e^x - 1}}{x} = \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

i per tant

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) = 1$$

A més tenim

$$f(x) - mx = \frac{xe^x}{e^x - 1} - x = \frac{x}{e^x - 1}$$

i per tant

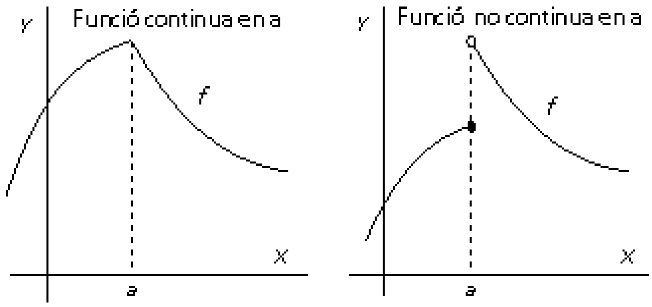
$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = 0$$

perquè el denominador és un infinit que domina sobre el numerador. L'asímptota obliqua per la dreta és $y = x$. Per l'esquerra hi ha asímptota horitzontal $y = 0$ doncs

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 0$$

5. Continuïtat de funcions

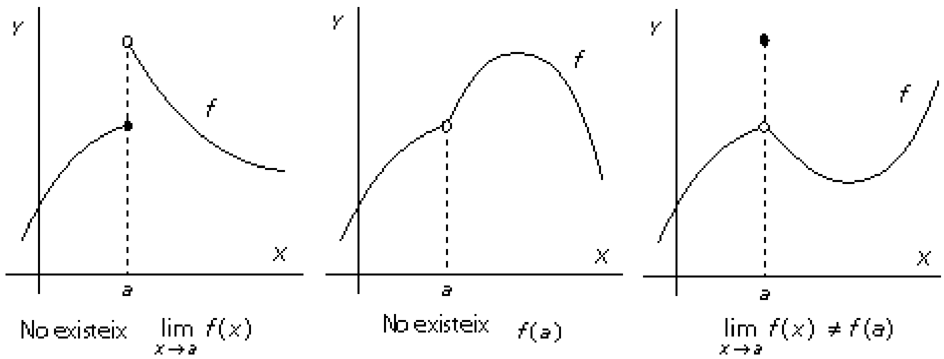
Intuïtivament, una funció és contínua quan la seva gràfica no presenta cap interrupció.



No donarem el concepte rigorós de continuïtat de funcions, només el criteri operatiu que reuneixi les condicions que s'han de complir perquè una funció sigui contínua en un punt. Així doncs direm que una funció f és **contínua** en un punt d'abscissa $x = a$ si compleix les tres condicions següents:

1. El punt a és del domini dela funció f,
2. Existeix el límit de la funció en el punt a,
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Una funció és **contínua en un conjunt** quan ho és en cadascun dels seus punts. Una funció f té un punt de **discontinuïtat** quan en aquest punt no compleix alguna de les tres condicions anteriors. Les gràfiques següents mostren tres casos de discontinuïtat.

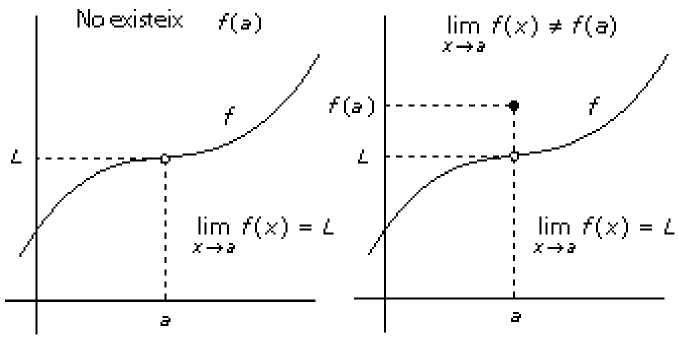


5.1. Tipus de discontinuïtat

Diem que a és un punt de discontinuïtat **evitable** de f si existeix $\lim_{x \to a} f(x)$ però no existeix $f(a)$ o bé

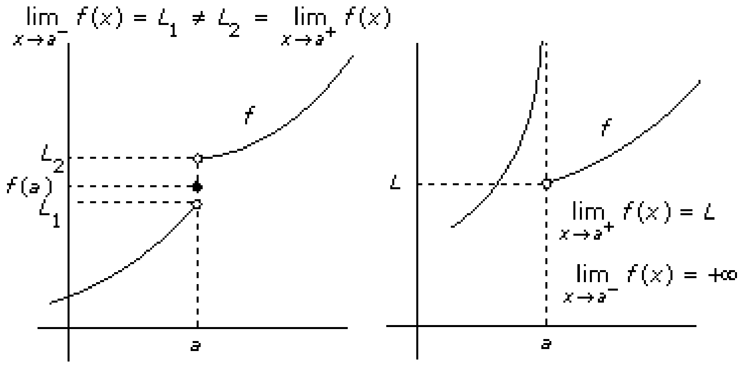
$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

La raó per la qual se'n diu evitable és perquè f pot ser contínua si es defineix $f(a)$ com el valor del límit de la funció en el punt a. Les gràfiques següents són exemples de discontinuïtats d'aquest tipus.



Discontinuïtat evitable en a

Se'n diu que la funció f té una discontinuïtat de **salt** en un punt si els límits laterals en aquest punt existeixen però són diferents. Distinguim casos particulars: (i) **salt finit** si els límits laterals son dos nombres reals, (ii) **salt infinit** o **asimptòtica** si un límit lateral és un nombre real i l'altre és infinit o ho són tots dos. Les gràfiques següents són exemples de discontinuïtats d'aquest tipus.



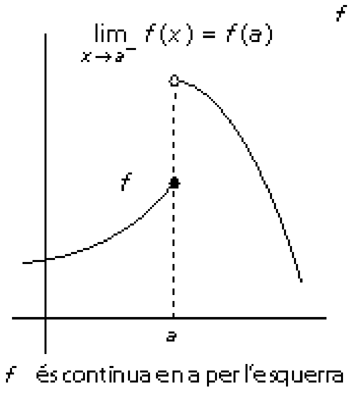
Se'n diu que la funció f té una discontinuïtat **essencial** en un punt si no existeixen cap dels límits laterals i, si és el cas, només un d'ells.
Podem definir la continuïtat lateral d'una funció en un punt de la mateixa manera com es va fer en el cas dels límits laterals d'una funció en un punt. Així diem que la funció f és **contínua lateralment** per l'esquerra (resp. per la dreta) en un punt a si compleix:

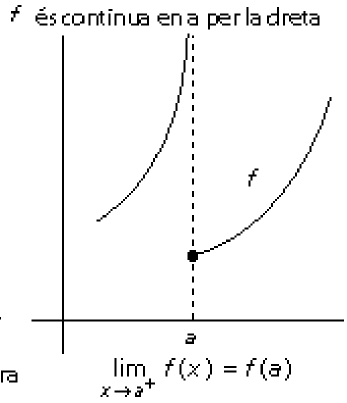
1. El punt a és del domini dela funció f,
2. Existeix el límit per l'esquerra (resp. per la dreta) de la funció en el punt a,
3. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$).

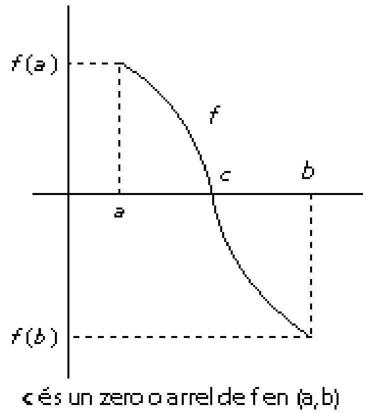
5.2. Propietats de les funcions contínues

Per estudiar la continuïtat de les funcions ens cal tenir propietats que permetin fer aquest estudi. Ara donem algunes propietats de les funcions contínues:

1. Les funcions elementals són contínues en els seus dominis.
2. Si f i g són contínues en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, llavors $f+g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$ són contínues en $\mathcal{D}$, essent $k \in \mathbb{R}$.







3. Si f i g són contínues en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ i $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in \mathcal{D}$, llavors $\dfrac{f}{g}$ és contínua en $\mathcal{D}$.

4. Si f és contínua en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, llavors el valor absolut de la funció $|f|$, definida com $|f|(x) = |f(x)|$, és contínua en $\mathcal{D}$.

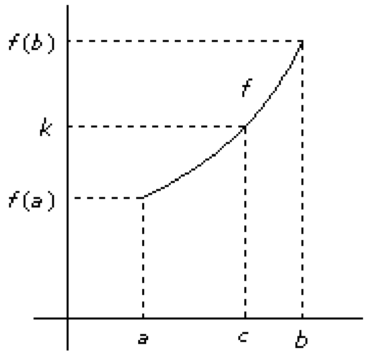
5. Si f és contínua en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ i g és contínua en $f(\mathcal{D})$, aleshores $g \circ f$ és contínua en $\mathcal{D}$.

Per exemple, d'aquestes propietats es dedueix que les funcions polinòmiques són contínues, i les funcions racionals (quocients de polinomis) són contínues en els seus dominis respectius.

6. Teoremes de funcions contínues

1. **Teorema de la conservació del signe**: Si f és contínua en un punt a, aleshores f conserva el signe a prop de a. Més en concret, si a i b són dos zeros consecutius d'una funció contínua, llavors $f(x) > 0$ (o bé, $f(x) < 0$) per a tot $x \in (a, b)$.

2. **Teorema de Bolzano**: Si f és contínua en un interval $[a, b]$ i $f(a)$ i $f(b)$ tenen signes contraris, aleshores existeix un punt intermedi $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Exemple 8 Prova que l'equació $x^5 = 5 - 3x$ té una solució compresa entre 1 i 2. Troba-la amb dues xifres decimals exactes.
Solució: Observem que trobar una solució de l'equació donada equival a trobar un zero de la funció següent:

$$f(x) = x^5 + 3x - 5$$

Com és una funció polinòmica, f és contínua a $\mathbb{R}$. A més, com $f(1) < 0$ i $f(2) > 0$, pel teorema de Bolzano, existeix un punt $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, o sigui que compleix

$$c^5 + 3c - 5 = 0$$

i per tant és una solució de l'equació.
Per a calcular c amb dues xifres decimals exactes aplicarem successivament el teorema de Bolzano fins a aconseguir la localització de c en un interval que permeti assegurar dues xifres decimals exactes. Procedim de la manera següent:

$c \in (a, b)$	Punt mitjà m	Signe $f(a)$	Signe $f(m)$	Signe $f(b)$
$(1, 2)$	1,5	$-$	$+$	$+$
$(1, 1{,}5)$	1,25	$-$	$+$	$+$
$(1, 1{,}25)$	1,125	$-$	$+$	$+$
$(1, 1{,}125)$	1,0625	$-$	$-$	$+$
$(1{,}0625, 1{,}125)$	1,09375	$-$	$-$	$+$
$(1{,}09375, 1{,}125)$	1,109375	$-$	$+$	$+$
$(1{,}09375, 1{,}109375)$	1,1015625	$-$	$-$	$+$
$(1{,}1015625, 1{,}109375)$				

i com $c \in (1{,}1015625, 1{,}109375)$, aleshores $c = 1{,}10...$, amb dues xifres decimals exactes. ■

El següent resultat és una generalització de l'anterior; assegura que una funció contínua en un interval aconsegueix almenys una vegada qualsevol número que estigui comprès entre dos dels seus valors.

3. **Teorema dels valors intermedis**: Sigui I un interval i $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en aquest interval. Si $a, b \in I$ i k és un nombre real tal que $f(a) < k < f(b)$, llavors existeix un punt intermedi $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Aquest resultat és una generalització de l'anterior. Assegura que una funció contínua en un interval aconsegueix almenys una vegada qualsevol número que estigui comprès entre dos dels seus valors.

4. **Teorema de Weierstrass**: Si f és una funció definida sobre un interval tancat $[a, b]$, aleshores f assoleix màxim i mínim absoluts.

   Recordem que una funció $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assoleix **màxim absolut** o **global** en $\mathcal{D}$ (resp. **mínim absolut**) si existeix un punt $c \in \mathcal{D}$ tal que $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(c) \leq f(x)$) per a tot $x \in \mathcal{D}$. En tal cas, es diu que $c \in \mathcal{D}$ és el punt màxim absolut (resp. mínim absolut) de f en $\mathcal{D}$ i el seu valor és $f(c)$.