

Electrónica Digital 1

Lógica combinatorial -álgebra de boole

Ferney Alberto Beltrán Molina



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

2024

Contacto

Nombre: Ferney Alberto Beltrán Molina, Ing, MSc, PhD(c)
Email: fabeltranm@unal.edu.co
oficina: Centro de Investigación e Innovación

Contenido

Recordando

Introducción a la lógica combinacional

Álgebra de Boole

Índice

Recordando

Introducción a la lógica combinacional

Álgebra de Boole

Tipos de sistema de numeración

1. Sistema Hexadecimal
2. Sistema Decimal
3. Sistema Octal
4. Sistema binario

Ejm: 123 en base 10

(pesos)	1 10^2	2 10^1	3 10^0
$123_{10} =$	$1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 3 * 10^0$		
$123_{10} =$	$7B_{16}$		
$123_{10} =$	173_8		
$123_{10} =$	111101_2		

¿Cuántos símbolos tiene cada sistema ?

¿cómo es la conversión de un sistema de numeración a otro?

Índice

Recordando

Introducción a la lógica combinacional

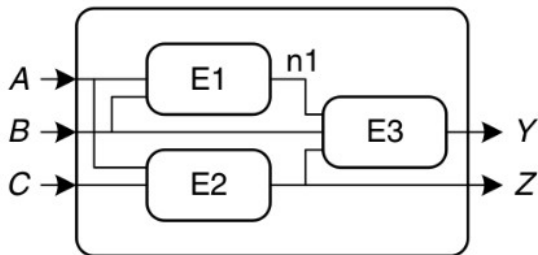
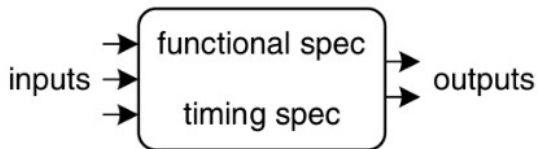
Álgebra de Boole

caja negra / caja funcional

En electrónica digital, un circuito es un sistema que procesa variables discretas, y se representa por:

- ▶ Uno o más terminales de entrada discretas.
- ▶ Uno o más terminales de salida de valor discreto.
- ▶ Especificación funcional que describe la relación entre las entradas y las salidas
- ▶ Especificación de tiempo que describe el retardo entre el cambio de las entradas y resultados que se reflejan en la salida

caja negra / caja funcional



Tipos de circuitos digitales

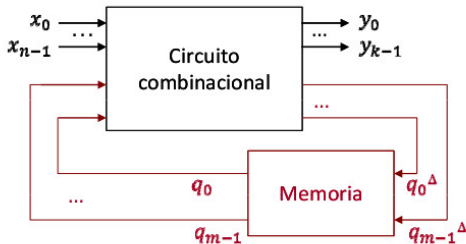
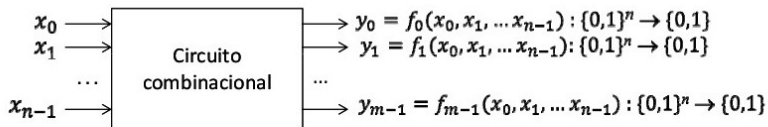
- ▶ **Circuitos combinacionales**

Las salidas del circuito en cada instante de tiempo dependen única de los valores de entrada. combina los valores de entrada en un instante de tiempo para calcular la salida

- ▶ **Circuitos secuenciales.**

Las salidas del circuito secuencial dependen tanto de los valores actuales como de los anteriores de las entradas; en otras palabras, depende de la secuencia de entrada.

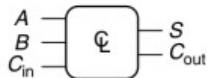
Tipos de circuitos digitales



ejemplo



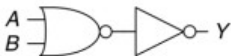
$$Y = F(A, B) = A + B$$



$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$
$$C_{out} = AB + AC_{in} + BC_{in}$$



(a)



(b)

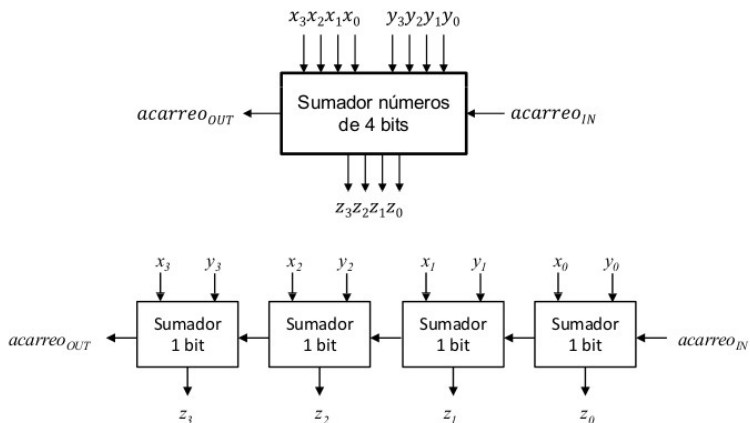


(a)

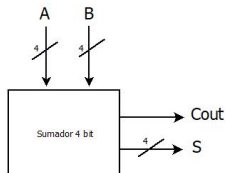


(b)

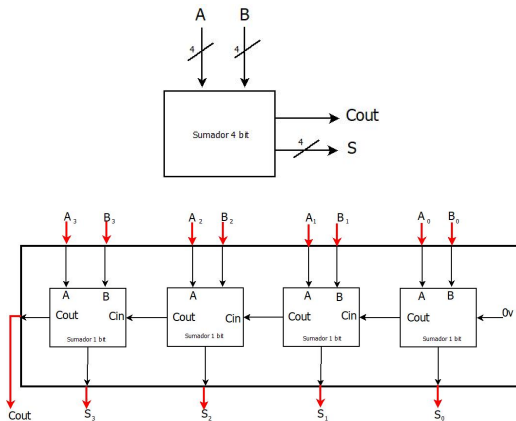
Sumador 4bit



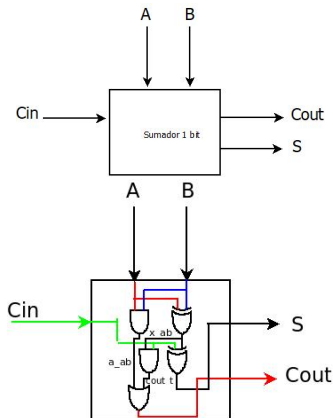
Sumador a partir de tablas de verdad



Sumador 4BCC a partir de tablas de verdad

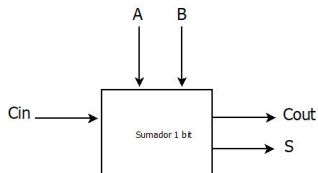


Sumador 1B a partir de tablas de verdad

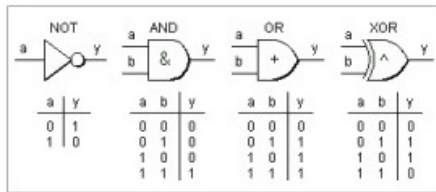


A	B	Cin	Cout	Out
0	0	0	0	0
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1	1	1

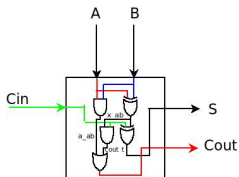
Sumador 1B a partir de tablas de verdad



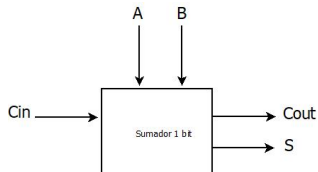
A	B	Cin	Out	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



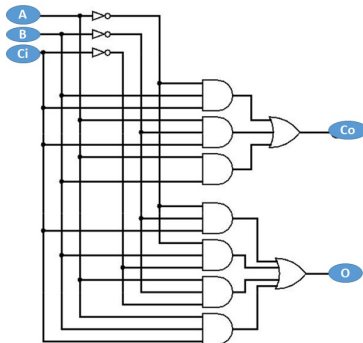
ÁLGEBRA DE BOOLE



A partir de puertas lógicas



A	B	Cin	Out	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



Índice

Recordando

Introducción a la lógica combinacional

Álgebra de Boole

Álgebra de Boole Postulados

- Conjunto finito de elementos sobre el cual se han definido dos operaciones: suma y producto

$$B = \{0, 1\}, \text{operación } +, \text{operación } \cdot$$

$$P1 - \forall a, b \in B, \quad a + b \in B \text{ y } a \cdot b \in B$$

$$P2 - \forall a \in B, \quad a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

$$P3 - \forall a \in B, \exists \bar{a} \in B \mid a + \bar{a} = 1, \quad a \cdot \bar{a} = 0$$

$$P4 - a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$P5 - a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$$

Álgebra de Boole Postulados

$$P1 - \forall a, b \in B, \quad a + b \in B \text{ y } a \cdot b \in B$$

$$P2 - \forall a \in B, \quad a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

$$P3 - \forall a \in B, \exists \bar{a} \in B \mid a + \bar{a} = 1, \quad a \cdot \bar{a} = 0$$

$$P4 - a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$P5 - a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$$

AND

$$x_1 \cdot x_2 \quad (\text{Also } x_1 x_2)$$

OR

$$x_1 + x_2$$

NOT

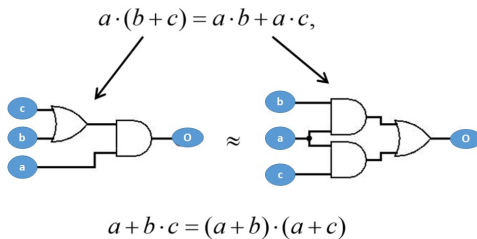
$$x_1'$$

Exclusive-OR

$$(x_1 x_2') + (x_1' x_2)$$

- ▶ Las operaciones $+$ y \cdot son internas
- ▶ Existe un elemento neutro para cada operación
- ▶ Existencia del elemento inverso
- ▶ Las operaciones son conmutativas
- ▶ Las operaciones son distributivas

Álgebra de Boole vs puertas lógicas



Álgebra de Boole propiedades

1 - Elemento inverso, $\bar{0}=1$, $\bar{1}=0$

2 - Idempotencia, $a + a = a$, $a \cdot a = a$

3 - Involución, $\overline{\overline{a}} = a$

4 - Asociatividad, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

5 - Absorción, $a + a \cdot b = a$, $a \cdot (a + b) = a$

6 - (sin nombre), $a + \bar{a} \cdot b = a + b$, $a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

7 - de Morgan, $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

8 - de Morgan generalizada, $\overline{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$, $\overline{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$

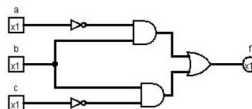
Funciones Booleanas - Tablas de Verdad

- ▶ Toda función booleana puede representarse explícitamente por una tabla de verdad
- ▶ Dada una tabla de verdad se puede encontrar su función Booleana (literal, MINTERM)
- ▶ Toda función booleana puede representarse de una manera única como la suma de sus minterms (Representación canónica)

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$f(a,b,c) = \Sigma(m_2, m_3, m_6)$$

$$f(a,b,c) = \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.b.c + a.b.\bar{c}$$



$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.b.c + a.b.\bar{c} = \\ &= \bar{a}.b(\bar{c} + c) + b.\bar{c}(\bar{a} + a) = \bar{a}.b + b.\bar{c} \end{aligned}$$

```
if ((b=1 and c=0) or (a=0 and b=1)) then f=1;  
    else f=0;  
end if;
```

puertas lógicas OR AND

		OR	AND
A	B	$A + B$	$A * B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

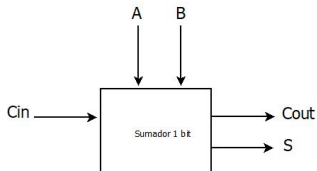
puertas lógicas NOR NAND

A	B	NOR	NAND
		$\overline{A + B}$	$\overline{A * B}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

EJERCICIO- COMPLEMENTEN LA TABLA DE VERDAD

A	B	\overline{A}	\overline{B}	S1 $\overline{A} + \overline{B}$	S2 $\overline{A} * \overline{B}$
0	0	1	1		
0	1	1	0		
1	0	0	1		
1	1	0	0		

A partir de puertas lógicas MINTERMINOS



A	B	Cin	Out	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

A partir de puertas lógicas Función booleana para OUT

A	B	Cin	Out	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

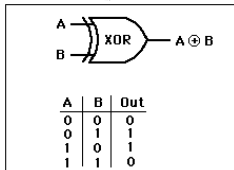
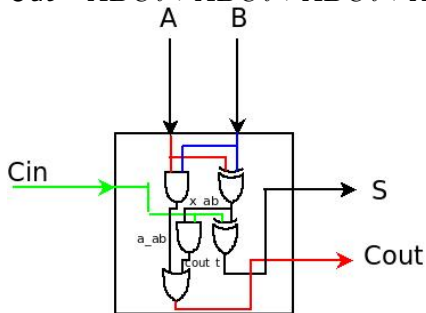
A partir de puertas lógicas Función booleana para OUT

A	B	Cin	Out	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\text{Out} = \overline{A}\overline{B}Ci + \overline{A}B\overline{Ci} + A\overline{B}\overline{Ci} + ABCi$$

Reducir términos Función booleana para OUT

$$\text{Out} = \overline{A}\overline{B}C_i + \overline{A}B\overline{C_i} + A\overline{B}\overline{C_i} + ABC_i$$

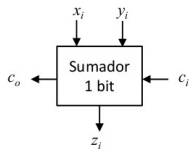


Ejercicio: A partir de puertas lógicas Función booleana para Cout

A	B	Cin	Out	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

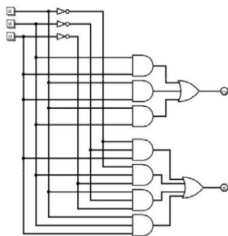
Funciones Booleanas - Resumiendo

► *Descripción Funcional* ► *Tabla de Verdad* ►
función(s) Booleana(s) ► *Circuito Digital*



```
s <= x_i + y_i + c_i;  
if s = 0 then z_i <= 0; c_o = 0;  
  elsif s = 1 then z_i <= 1; c_o <= 0;  
    elsif s = 2 then z_i <= 0; c_o <= 1;  
      else z_i <= 1; c_o <= 1;  
    end if;  
  end if;  
end if;
```

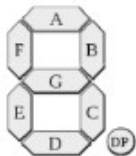
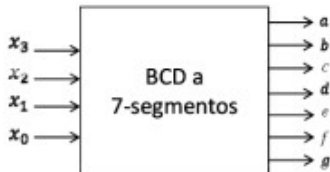
x_i	y_i	c_i	c_o	z_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



$$c_o = y_i \cdot c_i + x_i \cdot c_i + x_i \cdot y_i$$

$$z_i = \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i \cdot c_i + \bar{x}_i \cdot y_i \cdot \bar{c}_i + x_i \cdot \bar{y}_i \cdot \bar{c}_i + x_i \cdot y_i \cdot c_i$$

Funciones Booleanas - Ejemplo BCD2SSEG



x_3	x_2	x_1	x_0	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0							
1	0	1	1							
1	1	0	0							
1	1	0	1							
1	1	1	0							
1	1	1	1							

PREGUNTAS