数学物理方法第二次作业
肖雨枫

§ 3.2

3. (1)

$$\frac{1}{r}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e\Rightarrow r=\frac{1}{e}$$

收敛圆为 $|z|^2=\frac{1}{e^2}$

(3)

$$\frac{1}{r}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{k}=0\Rightarrow r=\infty$$

在全平面收敛(不包含无穷远点)

(5)

$$\frac{1}{r}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^k}=k=\infty\Rightarrow r=0$$

仅在点 $z=3$ 收敛

4. (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-b_k)z^k=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k-\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k$$
$$\Rightarrow R\leqslant\min\{R_1,R_2\}$$

(4)

R_1,R_2 均为有限数，且均不为 0

§ 3.3

1. (2)

考虑邻域 $|z-\mathrm{i}|<1$，我们规定 $z_0=\mathrm{i}$ 的辐角为 $\frac{\pi}{2}$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-3n}{3}\right)}z_0^{\frac{1}{3}-n}=\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-3n}{3}\right)}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}-n\right)}$$
$$\Rightarrow z^{\frac{1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-3n}{3}\right)}(z-z_0)^ne^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}-n\right)}$$

(4)

> 考虑邻域 $|z-1|<1$ 我们规定 $z_0=1$ 的辐角为 0
>
> $$f^{(n)}\left(z_0\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1-n\right)}z_0^{\frac{1}{m}-n}=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1-nm}{m}\right)}$$
>
> $$\Rightarrow z^{\frac{1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1-nm}{m}\right)}\left(z-z_0\right)^n$$

(6)

> 考虑邻域 $|z|<\pi$，我们规定 $1+e^z$ 的辐角为 $[0,2\pi)$
>
> $$\begin{aligned}\ln\left(1+e^z\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}e^{nz}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nz)^k}{k!}\right)\\&=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\frac{(nz)^k}{k!}\\&=\ln 2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{k-1}\frac{z^k}{k!}\\&=\ln 2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^k-1\right)\frac{B_k}{k\cdot k!}z^k\end{aligned}$$
>
> 这换序是有问题，但问AI把那个-1的求和换成什么伯努利数好像就对了🤔

(8)

> $$\begin{aligned}&\sin^2 z\\&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^2\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{(k+l)}\frac{z^{2(k+l)+2}}{(2k+1)!\,(2l+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(2m+1)!\,(2n-2m+1)!}z^{2n+2}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{2^{1+2n}}{(2(1+n))!}z^{2n+2}\right]\end{aligned}$$

> > $$
> > \begin{aligned}
> > &\cos^2 z\\
> > &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\right)^2\\
> > &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{(k+l)}\frac{z^{2(k+l)}}{(2k)!\,(2l)!}\\
> > &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(2m)!\,(2n-2m)!}z^{2n}\right]\\
> > &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{2^{-1+2n}}{(2n)!}z^{2n}\right]
> > \end{aligned}
> > $$

§ 3.5

(2)

> 在 $0<|z-1|<1$ 内洛朗展开
>
> $$
> \begin{aligned}
> &\frac{1}{z^2\,(z-1)}\\
> &= \frac{1}{z-1}\frac{1}{((z-1)+1)^2}\\
> &= \frac{1}{z-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k\right)^2\\
> &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{k+l}(z-1)^{k+l-1}\\
> &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)(z-1)^{n-1}\\
> &= \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,(n+2)(z-1)^n
> \end{aligned}
> $$

(4)

> 在 $|z|>1$ 内展开

$$
\begin{aligned}
e^{1/(1-z)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1-z)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1/z-1)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1-1/z)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}\right)^n
\end{aligned}
$$

我们记 $f(n,k)$ 表示 $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}\right)^n$ 中 z^{-k} 的系数，则有

$$
\begin{cases}
f(0,k) = 0 \quad k > -1 \\
f(1,k) = 1 \quad k > 0 \\
f(n,k) = \displaystyle\sum_{m=1}^{k-n+1} f(n-1, k-m) \quad k > n-1
\end{cases}
$$

因此，原则上可以递推求出

$$
\begin{cases}
e^{1/(1-z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{-\infty} a_n z^{-n} \\
a_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{1}{n!} f(n,k)
\end{cases}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
&\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} \\
&= 1 + \frac{6}{z-3} - \frac{2}{z-4} \\
&= 1 + \frac{1}{z} \frac{6}{1-3/z} - \frac{1}{z} \frac{2}{1-4/z} \\
&= 1 + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{-\infty} 6 \cdot 3^{-n} z^n - 2 \cdot 4^{-n} z^n \\
&= 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(6 \cdot 3^{-n-1} - 2 \cdot 4^{-n-1}\right) z^n
\end{aligned}
$$

(8)

> $$
> \begin{aligned}
> &\frac{1}{z^2-3z+2}\\
> &=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}\\
> &=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}\\
> &=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{-\infty}\left(1-2^{-n}\right)z^n\\
> &=\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(1-2^{-n-1}\right)z^n
> \end{aligned}
> $$

(10)

> 奇点为 $z_0=0$，展开域为 $|z|>0$
>
> $$
> \begin{aligned}
> &\frac{1-\cos z}{z}\\
> &=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\
> &=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}
> \end{aligned}
> $$

(12)

> 奇点为 $z_n=n\pi$，$n\in\mathbb{Z}$，对 z_n 的展开域为 $|z-z_n|<\pi$
>
> 考虑到 $\lim\limits_{z\to z_n}\cot z\cdot z=1$ 以及 $\cot(z_n-z)=-\cot(z_n+z)$
>
> 不妨令
>
> $$
> \cot z=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k-1}(z-z_n)^{2k-1}
> $$
>
> 考虑到 $\cot z\sin z=\cos z$ 对 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在奇点展开，得到
>
> $$
> \begin{aligned}
> &k\in\mathbb{Z}\\
> &n=2k:\\
> &\begin{cases}
> \cos z=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z-z_n)^{2m}}{(2m)!}\\
> \sin z=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z-z_n)^{2m+1}}{(2m+1)!}
> \end{cases}\\
> &n=2k+1:\\
> &\begin{cases}
> \cos z=-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z-z_n)^{2m}}{(2m)!}\\
> \sin z=-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z-z_n)^{2m+1}}{(2m+1)!}
> \end{cases}
> \end{aligned}
> $$
>
> 于是有：

> $$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z-z_n)^{2m}}{(2m)!}=\sum_{-\infty}^{\infty}a_{2k-1}(z-z_n)^{2k-1}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z-z_n)^{2m+1}}{(2m+1)!}$$
> $$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{m}\frac{(-1)^t}{(2t+1)!}a_{2m-2t-1}(z-z_n)^{2m}$$
>
> 比较左右两边，原则上可以从 a_{-1} 开始递推求解

(14)

> $$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2(z-1)}$$
>
> 1. 在 $|z|<1$
>
> $$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)z^n$$
>
> 2. 在 $1<|z|<2$
>
> $$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n$$
>
> 3. 在 $|z|>2$
>
> $$=1+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(2^{-n}-\frac{1}{2}\right)z^n$$