2.4

(1)

额，不小心用k了，高中写惯了

考虑到 A、B 的球对称性，电荷显然均匀分布在其表面上，令A 及 B 内外净电荷分别为 q_1, q_2, q_3

$$\begin{cases} \varphi_2 = k\dfrac{(q_1+q_2+q_3)}{R_3} \\ \varphi_1 = k\dfrac{q_1}{R_1} + k\dfrac{q_2}{R_2} + k\dfrac{q_3}{R_3} \end{cases}$$

此外，对外球壳还有电荷守恒

$$q_2 + q_3 = 0$$

进而解得

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\varphi_2 R_3}{k} \\ q_2 = \left(\dfrac{\varphi_1}{k} - \dfrac{q_1}{R_1}\right) \cdot \left(\dfrac{R_3 R_2}{R_3 - R_2}\right) \\ q_3 = -q_2 \end{cases}$$

而电场分布可由高斯定理与导体性质得出

$$\begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{\varphi_2 R_3}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{\varphi_2 R_3}{r^2} & r > R_3 \end{cases}$$

(2)

考虑到导体的静电平衡条件，电荷必须均分布在 B 外侧，电荷量为 q_1 的电荷均匀分布在 B 外侧

$$\varphi = k\frac{q_1}{R_3} = \varphi_2$$

2.5

(1)

令6个版面电荷分别为 $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ ，则

$$\begin{cases} q_1 = q_2 + q_5 + q_6 + Q \\ q_6 = q_1 + q_2 + Q + q_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 + q_5 = -Q \\ q_1 = q_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = q_4 + q_5 + q_6 \\ q_3 + q_4 = Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_3 = -q_2 \\ q_4 = Q + q_2 = -q_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{CA} = \dfrac{-q_2}{S\varepsilon_0} \\ E_{BC} = \dfrac{-Q - q_2}{S\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$U_0 = -\int_B^C E\mathrm{d}x = \frac{Q}{3S\varepsilon_0} + \frac{q_2}{S\varepsilon_0} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = S\varepsilon_0 U_0 - \dfrac{Q}{3} \\ q_5 = -\dfrac{2Q}{3} - S\varepsilon_0 U_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_A = S\varepsilon_0 U_0 - \dfrac{Q}{3} \\ Q_B = -\dfrac{2Q}{3} - S\varepsilon_0 U_0 \end{cases}$$

(2)

$$\varphi_C = U_0 - \int_{2d/3}^{0} E_{AC}\mathrm{d}x = U_0 - \frac{2q_2}{3S\varepsilon_0} = \frac{U_0}{3} + \frac{2Q}{9S\varepsilon_0}$$

(3)

易知，

$$\begin{cases} q'_4 = 2q'_3 \\ q'_3 + q'_4 = Q \\ q'_1 = q'_6 \\ q'_2 + q'_3 = q'_4 + q'_5 = 0 \\ q'_1 + q'_2 + q'_5 + q'_6 = q_1 + q_2 + q_5 + q_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q'_1 = q'_6 = 0 \\ q'_3 = \dfrac{1}{3}Q \\ q'_4 = \dfrac{2}{3}Q \\ q'_2 = -\dfrac{1}{3}Q \\ q'_5 = -\dfrac{2}{3}Q \end{cases}$$

2.7

(1)

显然，球体上的电荷均分布于球体表面，以无穷远点为电势零点，我们显然能得到

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x} + \frac{Q}{R}\right)$$

而对于场强，由于导体处于静电平衡状态，显然场强为 0

(2)

易知，P 点合场强为 0 合电势与 V_0 一致，因此有

$$E_P = 0 - \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x - R/2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x - R/2)}$$

由 P 指向 q

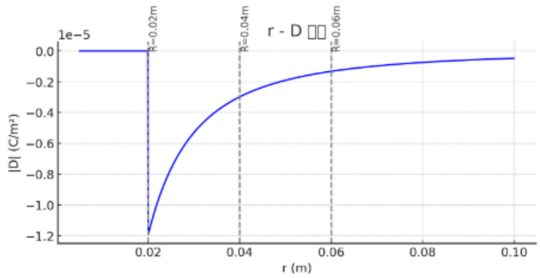
> 电势为
>
> $$V_P = V_0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x-R/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x}+\frac{Q}{R}-\frac{q}{x-R/2}\right)$$

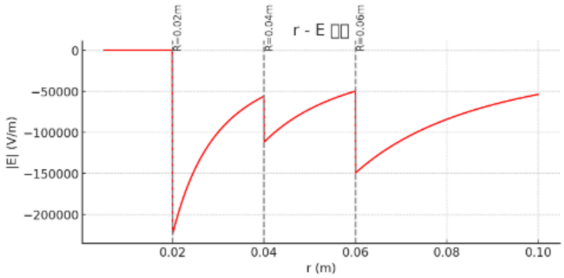
2.8

> (1)
>
> > 考虑接地以及导体的静电平衡， B 内侧电势为 0 。
> >
> > 由于外壳的屏蔽效应，内部电场完全由 q 诱导。
> >
> > 因此，可以计算电场并求出 A 的电势
> >
> > $$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{4\pi r^3}$$
> > $$V = -\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$
>
> (2)
>
> > 对于外部电荷，考虑没有 q 时的情况，显然内部电势处处为 0 ，我们取 O 讨论，令外部感应总电荷为 q_2 则
> >
> > $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{d}+\frac{q_2}{R_2}\right)=0$$
> >
> > 对内部电荷，考虑导体内部静电平衡以及高斯定理，易知 $q_1=-q$
> >
> > 因此
> >
> > $$Q_B = q_1+q_2 = -\frac{Q}{2}-q$$
>
> (3)
>
> > 显然，此时整体处于静电平衡状态， B 仅在外壳处有抵消 Q 的电荷 $-\frac{Q}{2}$

2.12

> (1)
>
> > $$\iint \mathbf{D}\mathbf{da} = Q \Rightarrow$$
> > $$|\mathbf{D}| = \begin{cases} 0, 0<r<R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}, r>R_1 \end{cases} \Rightarrow$$
> > $$|\mathbf{E}| = \begin{cases} 0, 0<r<R_1 \\ \dfrac{Q}{24\pi r^2\varepsilon_0}, R_1<r<R \\ \dfrac{Q}{12\pi r^2\varepsilon_0}, R<r<R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}, r>R_2 \end{cases}$$
> >
> > 图如下:





这里给出了电位移场 $|\mathbf{D}|$ 与电场强度 $|\mathbf{E}|$ 随半径 r 的分布图，虚线处对应三个关键半径：

- $R_1 = 0.02\,\mathrm{m}$：内球面，场由 0 突变为非零；
- $R = 0.04\,\mathrm{m}$：介质分界面，电场发生跳变；
- $R_2 = 0.06\,\mathrm{m}$：外表面，再次发生跳变。

(2)

$$\begin{aligned} U = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} &= -\left[\frac{Q}{24\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)+\frac{Q}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}\right)\right] \\ &= -\frac{Q}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R}-\frac{1}{R_2}\right) \end{aligned}$$

(3)

可以通过高斯定理取半径为 r 球面 $(R_1 < r < R)$ 计算

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q_1}{r^2} = \frac{Q}{24\pi r^2\varepsilon_0} \Rightarrow q_1 = -\frac{5}{6}Q$$

2.14

考虑高斯定理以及电介质性质，对于 $R_1 < r < R_2$我们有

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{k}{r^2} \Rightarrow \left|\vec{E}_{r_1}\right| = \frac{k}{r_1^2}$$

由于电势差不变，我们有

$$\begin{aligned} |U| = k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) &= \frac{|E_{r_1}|r_1\left(r_2-r_1\right)}{r_2} \\ &\leqslant \left(\frac{|E_{r_1}|\left(r_1+\left(r_2-r_1\right)\right)}{2r_2}\right) = \frac{|E_{r_1}|^2}{4} \end{aligned}$$

取等条件为

$$r_1 = \frac{r_2}{2}$$