§ 1复变积分

定义

设C是复平面上的曲线，函数$f(z)$在C上由定义。将曲线C分割为n段，分点为$z_0=A,z_1,z_2,\ldots,z_n=B$，$\zeta$是$z_{k-1}\to z_k$段上的任意一点，作和数

$$\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\left(z_k-z_{k-1}\right)\equiv\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$$

若当$n\to\infty$，使得$\max|\Delta z_k|\to 0$时，此和数的极限存在，且与ζ_k的选取无关，则称此极限值为函数$f(z)$沿曲线C的积分，记为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$$

- 复变积分实际上是两个实变线积分的**有序组合**

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z&=\int_C(u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\&=\int_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

- 如果C是分段光滑曲线，$f(z)$是C上的连续函数，则复变积分一定存在

基本性质

1. 若积分$\int_C f_1(z)dz,\int_C f_2(z)dz,\ldots,\int_C f_n(z)dz$均存在，则：
$$\begin{aligned}&\int_C\left[f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)\right]\mathrm{d}z\\&=\int_C f_1(z)\mathrm{d}z+\int_C f_2(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_C f_n(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$
2. 若$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，则：
$$\begin{aligned}&\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n}f(z)\mathrm{d}z\\&=\int_C f(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$
3. $\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z=-\int_C f(z)\mathrm{d}z$，$C-$为$C$的逆向
4. $\int_C af(z)\mathrm{d}z=a\int_C f(z)\mathrm{d}z$，$a$为常数
5. $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|$

> proof.
>
> $$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z&=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k\\&=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)\Delta z_k|\end{aligned}$$

由此可导出：

$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant Ml$，其中$M$为$|f(z)|$在$C$上的上界，$l$为$C$的长度

§ 2Cauchy定理

$Cauchy$定理

如果函数$f(z)$在区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$的边界C有：

$$\oint_C \mathrm{f}(z)dz = 0$$

> 为简单起见，先默认定理$f'(z)$在$\overline{G}$中连续
>
> 由格林公式：
>
> $$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C [udx - vdy] + i\oint_C [vdx + udy] \\ &= \iint_{\overline{G}} [-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}] + i\iint_{\overline{G}} [\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}] \\ &= 0\end{aligned}$$

对单连通域，C就是一个简单的有向曲线，对复连通域，可通过增添路径变为单连通域，得到相似结论

$$\oint_{C_0} f(z)dz + \sum_i^n \oint_{C_i^-} f(z)dz = 0$$

> 注：
>
> - 此处的区域只能是一个有界区域，不能是(绕∞点的)无界区域
> - 即使$f(z)$在∞点解析，它绕∞点一周的积分也可以并不为0
> - $Cauchy-Riemann$方程与$Cauchy$定理描述的东西有一定相似性🤔

$$\oint_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, n=-1, & \text{且}C\text{内包含}a\text{点} \\ 0, & \text{其它}n\in\mathbb{Z}\text{的情况}\end{cases}$$

解析函数的不定积分

对于单连通区域，固定起点z_0令终点z为变点，则作为积分上限的函数

$$\int_{z_0}^z f(z)dz = F(z)$$

是单连通区域G内的单值函数，称为$f(z)$的不定积分（基于单连通域的单值性）

> 如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^z f(z)dz$也在G内解析，且
>
> $$F'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^z f(z)\mathrm{d}z = f(z)$$
>
> 具体证明可由$F(z)$与$F'(z)$的定义以及$f(z)$的连续性得出

原函数

定义

> 若$\Phi'(z)=f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

可用于求解积分：

$$\int_a^b f(z)dz=\Phi(b)-\Phi(a)$$

§3两个重要引理

> 这两个引理的核心是$\frac{dz}{z-a}$的特殊性

小圆弧引理

若函数$f(z)$在$z=a$点的(空心)邻域内连续，且当$\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$，且$|z-a|\to0$时，$(z-a)f(z)\Rightarrow k$(
$(z-a)f(z)$一致趋于k)，则

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=ik(\theta_1-\theta_2)$$

其中C_δ是以$z=a$为圆心，δ为半径，夹角为$\theta_2-\theta_1$的圆弧

> proof.
>
> 易得：
>
> $$\int_{C_\delta}\frac{dz}{z-a}=i(\theta_2-\theta_1)$$
>
> 而：
>
> $$\begin{aligned}\left|\int_{C_\delta}f(z)dz-ik(\theta_2-\theta_1)\right|&=\left|\int_{C_\delta}\left(f(z)-\frac{k}{z-a}dz\right)\right|\\&\le\int_{C_\delta}\left(|(z-a)f(z)-k|\frac{|dz|}{|z-a|}\right)\end{aligned}$$
>
> 当$\delta\to0$时，
>
> $$|(z-a)f(z)|\to0$$
> $$\frac{|dz|}{|z-a|}=\frac{i\delta e^{i\theta}d\theta}{\delta e^{i\theta}}=id\theta$$
>
> 由此可得
>
> $$\left|\int_{C_\delta}f(z)dz-ik(\theta_2-\theta_1)\right|\to0$$

大圆弧引理

若函数$f(z)$在$z=\infty$点的(实心)邻域内连续(此处结合后续条件即$f(z)\to 0$🤔这0还你妈有方向就很神奇)，且当$\theta_1\leq\arg(z-a)\leq\theta_2$，且$z\to\infty$时，$zf(z)\Rightarrow K$($zf(z)$一致趋于$K$)，则

$$\lim_{R\to 0}\int_{C_R} f(z)dz=iK(\theta_1-\theta_2)$$

其中C_R是以$z=0$为圆心，R为半径，夹角为$\theta_2-\theta_1$的圆弧

证明过程与小圆弧引理相似

§4Cauchy积分公式

有界区域的 Cauchy 积分公式

设 $f(z)$ 是区域 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，$\overline{G}$ 的边界 C 是分段光滑曲线，a 为 G 内一点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分路线沿 C 的正向

> 要点是解析函数解析域内的变形定理和小圆弧定理

特殊形式

取C为以a为圆心，R为半径的圆周，$z-a=Re^{i\theta}$

$$\mathrm{d}z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$
$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

由此得出均值定理:

　　解析函数$f(z)$在解析区域G内任意一点a的函数值$f(a)$,等于 (完全位于G内的)以a为圆心 的任一圆周上的函数值的平均

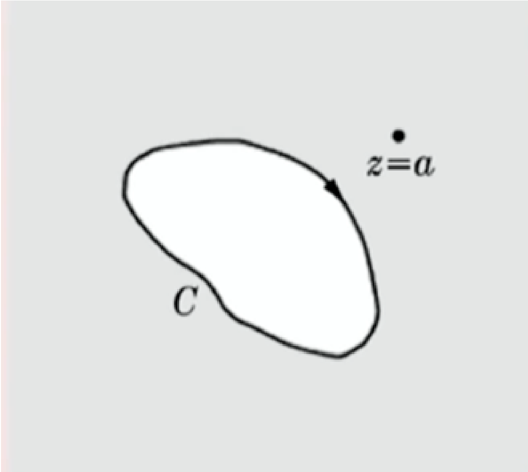
无界区域的Cauchy积分公式

如果 $f(z)$ 在简单闭合围道 C 上及 C 外解析，且当 $z\to\infty$ 时，$f(z)\to 0$（即$f(z)$在C的包含∞的轨迹内解析），则 Cauchy 积分公式

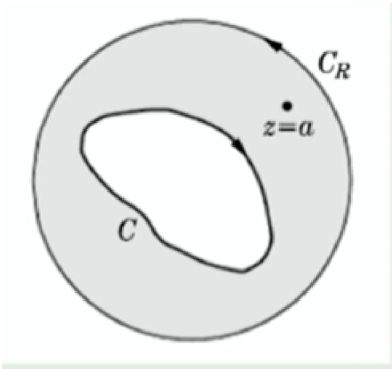
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

仍然成立，此处 a 为 C 外一点，积分路线 C 为顺时针方向

> proof.
>
> 对于无界区域，需要假设 $f(z)$ 在简单闭合围道 C 上及 C 外 (包括无穷远点) 单值解析. 类似地，现在计算
>
> $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$
>
> 其中 a 为 C 外一点，积分路线 C 的走向是顺时针方向，即绕无穷远点的正向



在C外再作一个以原点为圆心，R为半径的大圆C_R，



这样，对于C和C_R所包围的复连通区域，根据有界区域的 Cauchy 积分公式，有：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z = f(a)$$

当$R \to \infty$时，显然C_R必然能够包括C和a，此时，由大圆弧引理

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z = f(\infty)$$

因此，当$f(\infty) \Rightarrow 0$时，可以得到无界区域的Cauchy积分公式

§5高阶导数公式

高阶导数公式

从Cauchy积分公式，可以推导出高阶导数公式：

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析(这保证了Cauchy积分公式的使用)，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

其中C是$\overline{G}$的正向边界，$z \in G$

> proof.
>
> 对于$f'(z)$

> $$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h}\left(\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}d\zeta-\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}d\zeta\right) \end{aligned}$$
>
> 现在，需要证明
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}d\zeta\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$
>
> 对于任何轨迹，其与点z有最短距离，设其为ζ，则:
>
> $$\begin{aligned} \oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}d\zeta-\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta &= h\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}d\zeta \\ &= h\oint_C\frac{f(\zeta)}{\delta^2(\delta-|h|)}d\zeta \\ &\to 0(h\to 0) \end{aligned}$$
>
> 而对于$f^{(n-1)}(z)\to f^{(n)}(z)$，类似的，可以得到

- 这个结果说明，一个复变函数，只要在一个区域中一阶导数处处存在(因此是区域内的解析函数),则它的任何阶导数都存在，并且都是这个区域内的解析函数

推论

Cauchy不等式

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}}$$

其中 l是边界C的周长，d是z到边界的最短距离，$M=\max|f(z)|$

特别的，当边界为半径为R的圆时：

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}}$$

最大模定理

若$f(z)$是闭区域$\overline{G}$中的解析函数，则模$|f(z)|$的最大值在$\overline{G}$的边界上

> proof.
>
> 根据高阶导数公式
>
> $$f^m(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f^m(\zeta)}{(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$
>
> 由此得到
>
> $$|f(z)|^m=|f^m(z)|\leq\frac{M^ml}{2\pi d}$$

> 得到
>
> $$|f(z)| \le M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{m}}$$
>
> 显然可令$m \to +\infty$，得到：
>
> $$|f(z)| \le M$$
>
> 得证

Liouville定理

若$f(z)$在全平面上解析（无穷远点可能除外），且当$z \to \infty$时$|f(z)|$有界，则$f(z)$是一个常数

> proof.
>
> 根据Cauchy不等式易证明$f'(z) = 0$

Cauchy型积分

在一条分段光滑的(闭合或不闭合)曲线 C 上连续的函数 $\varphi(\zeta)$ 所构成的积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

(称为 Cauchy 型积分) 是曲线外点 z 的解析函数, $f^{(p)}(z)$ 可通过积分号下求导而得到

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\mathrm{d}\zeta$$

> 注：
>
> 1. 只要求$\varphi(\zeta)$连续，不要求解析
> 2. 注意，由于Cauchy积分公式和高阶导公式，在该区域内只能有z一个分支点，此时才可以通过该方式求积分

含参量积分

利用Cauchy型积分，可以推出定理：

> 设
>
> 1. $f(t, z)$是t和z的连续函数，$t \in [a, b], z \in \overline{G}$
> 2. $\forall t \in [a, b], f(t, z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数
>
> 则$F(z) = \int_a^b f(t, z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且
>
> $$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$
>
> 😳喵的，怎么又到淑芬去了😳
>
> 对于分段光滑的曲线C也可以如此

> proof.

$$\int_a^b f(t,z)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \int_C \frac{f(t,\zeta)}{\zeta - z} d\zeta dt$$

由于$f(t,z)$的连续性，对ζ的积分和对t的积分可换序

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t,z)dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \int_a^b \frac{f(t,\zeta)}{\zeta - z} dt d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{\zeta - z}\int_a^b f(t,\zeta) dt d\zeta\end{aligned}$$

由于$f(t,\zeta)$的连续性，$\int_a^b f(t,\zeta)dt$为连续的复变函数

根据复变积分公式，以证明，存在解析函数$F(z)$

而$F'(z)$，则根据交换后的式子对z求导后换序即可