Taylor展开定理

设函数$f(z)$在以a为圆心的圆C内及C上解析，则对于圆内的任何z点，$f(z)$可用幂级数展开为（或者说，$f(z)$可在a点展开为幂级数）

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

> proof.
>
> 已知
>
> $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
>
> 对于圆C上任意一点ζ由于$|\zeta-a|>|z-a|$,因此
>
> $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$
>
> 代入上式，得到
>
> $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right](z-a)^n$$

- 很神奇，这里的解析半径的大小决定了可展开范围🤔

展开条件

1. 定理条件实际只要求在圆C内解析
2. 注意对于复变函数，圆域内解析就可以导出Taylor级数存在且收敛

   而对于实函数，$f(x)$的任意阶导数存在不能保证Taylor公式存在或收敛
3. 函数$f(z)$的奇点完全决定了Taylor级数的收敛半径，一般来说，收敛域内不能包括奇点，除非该奇点为可去奇点
4. Taylor的唯一性：给定一个在圆C内解析的函数，则它的Taylor展开是唯一的，即展开系数a_n是完全确定的

   > 由此
   >
   > 1. 不论用什么方法，都能得到一致的展开
   > 2. 对于由同一点为圆心展开的Taylor级数，可以直接逐项比较系数

基本函数展开式

> $$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,|z|<1$$
> $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,|z|<\infty$$
> $$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},|z|<\infty$$
> $$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},|z|<\infty$$
> $$(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n,|z|<1$$
> $$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n,|z|<1$$

泰勒展开的常见方法

1. 尝试化为常见函数的组合后展开，取公共收敛域
2. 先进行积分或微分，化为简单形式后进行展开

   （证明涉及到无穷级数的微分和积分🤔）
3. 似乎也可以通过实数域内展开，由泰勒展开的唯一性得出

   🤔这些函数定义的好完美啊🤔

级数乘法

理论依据

> 两个绝对收敛级数之积仍然绝对收敛，且乘积可以改变次序（可更改为$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$形式）

　　如果函数可以表示称两个（或几个）函数的乘积，而每一个因子的Taylor展开式比较容易求出时，可采用级数相乘的方法

> eg.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-3z-2z^2} &= \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^{k+l} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} 2^l\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n
\end{aligned}
$$

由于用到了$\frac{1}{1-2z}$的展开，因此$|z| < \frac{1}{2}$

待定系数法

综合考虑函数的各种性质（如对于某点的对称性等），得出系数满足的条件，依据泰勒展开的唯一性，可以根据得到的等式进行系数的比较

- 一般用于得出递推公式或者某几项，但一般不容易得出通项公式
- 数分里的讨论似乎没有强调这玩意😳

eg.

求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

考虑到$\tan z$为奇函数，且具有三角函数的某个性质性质，有

$$
\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} = \frac{\sin z}{\cos z}
$$

因此

$$
\sin z = \cos z \cdot \tan z
$$

写出左右两边展开式

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!}z^{2l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}a_{2k+1}\right)z^{2n+1}
\end{aligned}
$$

左右两边系数相等，此后，可以递推得到a_{2k+1}

多值函数的Taylor展开

对于多值函数，在适当规定了单值分支后，即可像单值函数那样作Taylor展开

eg.

对于函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)_\alpha|_{z=0}=1$

此时可以直接求出其各阶导数值（首先默认割线不能经过展开点）

> $$
> \begin{aligned}
> &f(0)=1\\
> &f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}|_{z=0}=\alpha\\
> &f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)\\
> &.\\
> &.\\
> &.\\
> &f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)
> \end{aligned}
> $$
>
> 这样就能得到$f(z)$在一个不与割线相交的圆域内的展开式
>
> 考虑到该函数的支点为$z=-1,z=\infty$可以的出该收敛圆域的最大收敛半径为$R=1$，具体收敛半径由割线作法决定

函数在∞点的展开

定义：

> $f(z)$在$z=\infty$的解析定义为：$f(\frac{1}{t})$在$t=0$处解析
>
> $f(\frac{1}{t})$在$t=0$点的Taylor展开定义为：
>
> $$f(\frac{1}{t})=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n+\ldots$$

由此，我们定义$z=\infty$的Taylor展开为

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}+\ldots$$

收敛范围由代换后的t决定

解析函数零点的孤立性和解析函数的唯一性

解析函数的零点

若$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

相应的，$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)(a)}=0,f^{(m)}\neq0$，称为$f(z)$的$m$阶零点

- 注：零点的阶数均为确定的正整数

对于$f(z)$的m阶零点有

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n\\
&=(z-a)^m\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+m}(z-a)^m\\
&=(z-a)^mg(z)
\end{aligned}
$$

解析函数零点的孤立性定理

若$f(z)\not\equiv 0$,且在包含$z=a$在内的区域内解析，则必能找到圆$|z-a|=\rho(\rho>0)$,使在圆内除了$z=a$可能为零点外，$f(z)$无其他零点

> proof.
>
> 若$\forall\delta>0,\exists|z_0-a|s.t.\,f(z_0)=0$，则:
>
> 对$f'(a)$
>
> $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> 若$f'(a)\neq 0$
>
> 由导数的定义，
>
> $$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0 s.t.\forall|h|<\delta_0,\left|f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right|<\varepsilon$$
>
> 而:
>
> $$\forall\delta>0,\exists|z_0-a|s.t.\,f(z_0)=0$$
>
> 因此，若$f'(a)$存在，则必须为0，此时$f(a)\equiv 0$由此得证

- 🤔其实和实函数差不多？解析这个概念的条件还是太强了

解析函数的唯一性

根据解析函数零点的孤立性定理，可以推出

推论1

> 设$f(z)$在G：$|z-a|<R$内解析。若在G内存在$f(z)$的无穷多个零点$\{z_n\}$，且
>
> $$\lim_{n\to\infty}z_n=a$$
>
> 但$z_n\neq a$，则$f(z)$在G内恒为0

可将其改写为解析函数的唯一性定理

> 设在区域 G 内有两个解析函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$，且在 G 内存在一个序列 $\{z_n\}$，$f_1(z_n)=f_2(z_n)$. 若 z_n 的一个极限点 $z=a(\neq z_n)$ 也落在 G 内，则在 G 内有 $f_1(z)\equiv f_2(z)$

推论2

> 设$f(z)$在$G:|z-a|<R$内解析. 若在G内存在过a点的一段弧l或含有a点的一个子区域g,在l上或g内$f(z)\equiv 0$,则在整个区域G内$f(z)\equiv 0$

- 该推论的成立范围为以a为圆心的区域，但很容易推广到一般区域
- 这玩意对于级数相乘有一点奇怪的作用

  对级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l$$

若右端两个级数的收敛半径为R_1与R_2，则左端级数的收敛半径$R \geq \min(R_1, R_2)$

- ps.这里是由于级数相乘后可能消除各自级数的奇点

推论3（推论2+有限开覆盖）

> 设 $f(z)$ 在 G 内解析. 若在 G 内存在一点 $z = a$ 及过 a 点的一段弧 l 或含有 a 点的一个子区域 g，在 l 上或 g 内 $f(z) \equiv 0$，则在整个区域 G 内 $f(z) \equiv 0$

将推论3改写可以得到推论4和5

推论4

> 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都在区域 G 内解析，且在 G 内的一段弧或一个子区域内相等，则在 G 内 $f_1(z) \equiv f_2(z)$

推论5

> 在实轴上成立的恒等式，在 z 平面上仍然成立，只要恒等式两端的函数在 z 平面上都解析

- 🫣这玩意和复数域内一些常见函数的定义得到的性质与实数域差不多有很大关系吧🫣