# 无穷级数的收敛性

> ps.这部分由于复数是实数的有序序列，因此与实数一致

## 无穷级数的收敛与发散

如果级数的部分和

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

构成的序列$S_n$收敛，则称级数$\sum u_n$收敛，序列$S_n$的极限$S = \lim_{n\to\infty} S_n$，称为级数$\sum u_n$的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

否则，级数$\sum u_n$是发散的

而复数级数的收敛显然完全等价于复数的实部与虚部分别构成的实数级数收敛·

## 级数收敛的条件

### 充要条件

序列收敛的Cauchy条件

> 任意给定$\varepsilon > 0$，$\exists$正整数$N(\varepsilon) > 0$，$\forall$正整数$p$，有
>
> $$|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon$$

进而得到级数收敛的Cauchy充要条件

> 任意给定$\varepsilon > 0$，$\exists$正整数$N(\varepsilon) > 0$，$\forall$正整数$p$，有
>
> $$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

### 必要条件

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

## 级数收敛的基本性质

在不改变求和次数的前提下，可将收敛级数并项

$$u_1 + u_2 + \ldots = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \ldots = \ldots$$

## 绝对收敛

> 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛
>
> $$\text{绝对收敛} \Rightarrow \text{收敛}$$

绝对收敛的判断回归到实数范围

### 性质

1. 改换次序

$$u_0+u_1+u_2+\ldots=u_{k_0}+u_{k_1}+u_{k_2}+\ldots$$

2. 可以把一个绝对收敛级数拆分称几个子级数，每个子级数仍然绝对收敛
3. 两个绝对收敛级数之积仍然绝对收敛

$$\sum_k u_k\cdot\sum_l v_l=\sum_{k,l}u_kv_l$$

特别的，当$\sum_{k,l}u_kv_l=\sum_{k=0}^n u_kv_{n-k}$时，条件可放宽为

$$\begin{cases}\sum u_k,\sum v_l,\sum\limits_{k=0}^n u_kv_{n-k}\text{均收敛}\\ \sum u_k,\sum v_l\text{均收敛且有一个绝对收敛}\end{cases}$$

二者之一

证明可以将复数级数化为实部和虚部两个级数，然后利用实数级数证明

## 收敛的判别法

通过实数类推可得

### 比较判别法

可用于判断是否绝对收敛，完全等价于实数(毕竟复数也没法比较大小)

### 比值判别法

$$\begin{cases}\text{当}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\rho<1,\ \text{则}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n\text{绝对收敛}\\ \text{当}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|>\rho>1,\ \text{则}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n\text{发散}\end{cases}$$

### d'Alembert判别法

$$\begin{cases}\text{当}\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\rho<1,\ \text{则}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n\text{绝对收敛}\\ \text{当}\varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|>\rho>1,\ \text{则}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n\text{发散}\end{cases}$$

### Cauchy判别法

$$\begin{cases}\text{若}\varlimsup_{n\to\infty}|u_n|^{1/n}<1,\quad\text{则级数}\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|\text{收敛}\\ \text{若}\varliminf_{n\to\infty}|u_n|^{1/n}>1,\quad\text{则级数}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n\text{发散}\end{cases}$$

# 函数项级数

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在区域$G$内每一点都收敛，则称级数在$G$内收敛。其和函数$S(z)$是$G$内的单值函数

## 一致收敛

若任意给定$\varepsilon > 0$, 存在一个与 $z$无关的$N(\varepsilon)$, 使当$n > N(\varepsilon)$时

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon$$

则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$G$内一致收敛

## 一致收敛的判别法

#### Weierstrass的M-判别法

$$\begin{aligned}&\text{若在区域 } G \text{ 内 } |u_k(z)| < a_k, a_k \text{ 与 } z \text{ 无关,而} \\ &\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 收敛,则} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \text{ 在 } G \text{ 内绝对而且一致} \\ &\text{收敛}\end{aligned}$$

## 性质

1. 连续性

   若$u_k(z)$在$G$内收敛，级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$G$内一致收敛，则其和函数$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$也在$G$内连续

   此性质隐含了满足该条件的级数可以实现操作

   $$\lim_{z \to z_0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lim_{z \to z_0} u_k(z) \right\}$$

2. 逐项求积分

   设$C$是区域$G$内的一条分段光滑曲线，如果$u_k(z)$是$C$上的连续函数，则对于$C$上的一致收敛的级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$可以逐项求积分

   $$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z) \mathrm{d}z$$

3. 逐项求导数(Weierstrass定理)

   设$u_k(z)$在$\overline{G}$中单值解析，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$\overline{G}$中一致收敛，则此级数之和$f(z)$是$G$内的解析函数，$f(z)$，$f(z)$的各阶导数可以由$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$逐项求导数得到

   $$f^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$$

   求导后的级数在$G$内的任一闭区域中一致收敛

   > 由于$u_k(z)$单值解析，因此这玩意貌似可以通过Cauchy积分公式，由逐项求积分证明

# 含参量的反常积分

## 解析性

#### 定理（含参量反常积分的解析性）

设

1. $f(t,z)$是$t$和$z$的连续函数，$t>a,z\in\overline{G}$
2. $\forall t\geq a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数
3. 积分$\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致连续

则$F(z)=\int_a^\infty f(t,z)dt$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^\infty\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

> proof.
>
> 取定序列$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots,\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$
>
> 可将反常积分拆解为多个积分组成的函数项级数

对于$t$为复数，或者其它类型的反常积分可以通过参变量积分等得到类似的定理

而判断对$t$的无穷积分收敛性可以通过对复数函数值求模，参考实数函数级数证明充分性

# 幂级数

$$\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n\equiv c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots$$

## Abel定理

### Able(第一)定理

　　如果级数$\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a|\leq r(r<|z_0-a|)$中一致收敛

> proof.
>
> $$|c_n(z-a)^n|=\left|\frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^n}\right|\cdot|c_n(z_0-a)^n|$$
>
> 由于$\lim_{n\to\infty}|c_n(z-a_0)^n|=0$，且$\left|\frac{(z-a)}{(z_0-a)}\right|<1$，很容易推出区域内的绝对收敛

**推论：**

　　若级数$\sum_{n=0}^\infty$在某点$z_1$发散，则在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散

## 幂级数的收敛圆

对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

由Abel定理可知，有半径$R$使得$|z-a| < R$时，级数一致收敛，$|z-a| > R$时，级数发散

$R$为收敛半径，$a$为收敛点

> 收敛半径可以为0或$\infty$，但当收敛半径为$\infty$时，无穷远点必须得是奇点（否则就是常数函数了），这可以由前面一个定理得到

### 收敛半径的求法

- Cauchy-Hadamard公式

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{1}{c_n}\right|^{1/n}$$

  （实数里面那个😩）

- 根据d'Alembert判别法，有：

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

### 性质

- 幂级数在收敛圆内代表了一个解析函数
- 可以对幂级数进行逐项积分或求导
- 幂级数逐项求导与逐项积分后收敛半径不变

  > 直接写出来就行了，刚好能构成新的幂级数，直接求收敛半径即可

- 幂级数在收敛圆上一定有奇点（奇点的出现限制了幂级数的扩张），但在奇点幂级数仍然可能收敛（即由确定的函数值）