§ 2 可导与可微

可导&可微

可导：

> 设$\omega = f(z)$是区域G内的**单值函数**，如果在G内某点z，
>
> $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.1}$$
>
> 存在，则称函数$f(z)$在z点**可导**，此极限值即称为$f(z)$在z点的**导数**，记为$f'(z)$

可微：

>

tips：

> - $\Delta z \to 0$并不规定趋近方式，可导与可微要求任意方式趋于0均为定值
> - 与实数情形一样：
>   - 如果$f(z)$在z点可导，则在z点必连续
>   - 函数在某点连续，并不能推出函数在该点可导
>   - 导数定义在形式上与实数一致，可以将实数中各种求导公式搬运

Cauchy-Riemann条件

考察两种$\Delta z \to 0$的特定方式

$\Delta x \to 0, \Delta y = 0$	$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$
$\Delta y \to 0, \Delta x = 0$	$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

由此得到可导的**必要条件—Cauchy-Riemann条件**：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

特别的，可以证明，当实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$**均可微**，且满足**Cauchy-Riemann条件**，则$f(z)$可导

§ 3 解析函数

在区域G内**每一点**都可导的函数，称为G内的**解析函数**，或者说函数在G内解析.

> 注：对于无穷远点，作$w = \frac{1}{z}$后判断😳

解析函数的求解

解析函数由于满足Cauchy-Riemann条件，可以通过实部或虚部求解整个函数：

一、微商求解

> 给定函数$u(x,y)$，则：

$$dv=\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

求积分可以得到虚部$v(x,y)$的表达式，进而得到$f(z)$的表达式

二、代入求解

给定函数$u(x,y)$，则易得：

$$x=\frac{z+z^*}{2},y=\frac{z-z^*}{2} \tag{1}$$

$$u=\frac{f(z)+f(z)^*}{2},v=\frac{f(z)-f(z)^*}{2} \tag{2}$$

将(1)代入$u(x,y)$，尝试化为(2)的形式，之后可以得到两解

$$f(z),f(z)^*$$

根据Cauchy-Riemann条件判断解是否为解析函数

三、积分求解

$$f'(z)dz=df(z)$$

由于

$$\begin{aligned}f'(z)dx&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\end{aligned}$$

得到：

$$f(z)=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz+C$$

之后取定起始点和终止点以及路径

（一般取$(0,0)\rightarrow(x,0)\rightarrow(x,y)$）

四

该方法基于解析函数的特殊性导致的对积分路径不具有依赖性

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)\\&=\int((-\frac{\partial u}{\partial y})dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy)\\&=-\int\frac{\partial u}{\partial y}dx+\int\frac{\partial u}{\partial x}dy\end{aligned}$$

由于该积分不具有路径依赖性，可令：

> $$\Phi(y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy$$
>
> 得到
>
> $$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\partial u}{\partial y}dx+\Phi'(y)$$
>
> 可将前一个积分的$\frac{\partial}{\partial y}$提进积分号中，得到
>
> $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\int\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx+\Phi'(y)$$
>
> 由此可以得到$\Phi'(y)$的解析式：
>
> $$\Phi'(y)=\frac{\partial u}{\partial x}+\int\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx$$
>
> 由此反解出$\Phi(x)$
>
> 同样的，$-\int\frac{\partial u}{\partial y}dx$也可以用类似方式解出
>
> $$\frac{d}{dx}\left(-\int\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)=-\frac{\partial u}{\partial y}-\int\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dy$$
>
> > 值得一提的是，二者被表示成x/y的函数是由于选取不同路径导致的，如$\Phi(y)$最方便的路径为$(x_1,y_1)\to(x_2,y_1)\to(x_2,y_2)$，前一段由于没有出现$dy$的变化，因此略去，使得积分完全变为$y$的函数

调和函数

可以证明，作为解析函数的实部和虚部，$u(x,y)$和$v(x,y)$的二阶偏导数一定存在且连续

根据Cauchy-Riemann条件：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

因此，u和v均满足二维$Laplace$方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0,\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v=0$$

奇点

z_0为函数的奇点，则：

> - f在z_0点无定义
> - 或者在z_0点有定义但不可导
> - 或者在z_0点可导但不解析

性质

- $$\frac{\partial f}{\partial z^*}=0$$

  且$f^*(z)$的每一项都必须含有z^*常数项除外

  因此，对于式子

  $$g(f(z),f^*(z))=h(z,z^*)$$

  $h(z)$中只包含z的项必定来自$f(z)$，其余项（除常数项）均不来自$f(z)$，由此可以很容易得到$f(z)$的表达式

$\S 4$常见初等函数

基本概念：

初等函数

　　由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及它们经过有限次的有理运算及有限次函数复合所产生、并且能用一个解析式表示的函数

有理运算

　　加、减、乘、除、有理数次乘方、有理数次开方

幂函数z^n

- 当$n=0,1,2,...$时，z^n在全平面解析，且此时$z=\infty$为奇点
- 当$n=-1,-2,..$时，z^n在除$z=0$外处处解析，在$z=\infty$也解析

运算法则

> - $z^m\cdot z^n=z^{m+n}$
> - $\frac{z^m}{z^n}=z^{m-n}$
> - $\frac{z^m}{z^m}=z^0=1$

(n次)多项式

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0$$

有理函数

$$R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

其中$P_n(z),Q_m(z)$均为多项式

奇点为：$Q_m(z_0)=0$，除z_0外全平面解析，当$n\leq m$时，在$z=\infty$解析

指数函数e^z

定义：

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to0} e^{iy} &= \lim_{y\to0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iy)^n}{n!} \\
&= \lim_{y\to0}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\
&= \cos y + i\sin y
\end{aligned}
$$

$$
e^z = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)
$$

性质：

- $e^{2\pi i} = 1$
- $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- e^z在全平面解析，且$(e^z)' = e^z$
- 指数函数具有周期性
- e^z在$z=\infty$处无定义

三角函数

定义：

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \\
\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}
\end{aligned}
$$

由$e^{i\theta}$定义拓展，由于$e^{i\theta}$与e^{iz}在导数，运算等方面的相似性，$\sin z$与$\sin\theta$有许多相似性

性质：

- $\sin z, \cos z$在全平面解析

$$
(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z
$$

- $\sin z$和$\cos z$的模可以大于1
- 此外，其它复三角函数可以用该二者定义：

$$
\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \sec z = \frac{1}{\cos z}, \csc z = \frac{1}{\sin z}
$$

  可以证明，实三角函数的各种等式仍然成立

> **三角函数的各种等式：**
>
> $$
> \begin{aligned}
> \sin(z_1\pm z_2) &= \sin z_1\cos z_2 \pm \cos z_1\sin z_2 \\
> \cos(z_1\pm z_2) &= \cos z_1\cos z_2 \mp \sin z_1\sin z_2 \\
> \tan(z_1+z_2) &= \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1\mp\tan z_1\tan z_2}
> \end{aligned}
> $$

> **反函数：**
>
> $$\arccos z = -i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$
> $$\arcsin z = -i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$
> $$\arctan z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$
>
> 只取+号似乎与实数域内的定义有关(不过你有的时候硬要用—)🤔

双曲函数

定义：

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$
$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

其它双曲函数：

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$
$$\mathrm{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z},\quad \mathrm{csch}\, z = \frac{1}{\sinh z}$$

性质：

- 双曲函数与三角函数可以互化

  $$\sinh z = -i\sin iz, \cosh z = \cos iz, \tanh z = -i\tan iz, \dots$$

  因此，双曲函数性质可由三角函数推导

- 导数公式

  $$(\sinh z)' = \cosh z, (cosh z)' = \sinh z, (\tanh z)' = \mathrm{sech}^2\, z$$

§6多值函数

多值函数与根式函数

多值函数：

> 设由复平面上的一个区域G，如果给定G内的z值，有多个复数值ω与之对应，则称$\omega = f(z)$为z的多值函数

- 根式函数，对数函数，反三角函数都是多值函数
- 其余的多值函数均可以通过根式函数和对数函数表达

根式函数：

> 给定一个自变量值z，凡是满足等式$\omega^2 = z-a$的ω值，就是根式函数$\omega = \sqrt{z-a}$的函数值，或者说，ω是z的平方根

- 对于任意自变量z，$\omega = \sqrt{z-a}$至少可取两个值

- 多值性来源于宗量$z-a$(而非自变量z)辐角的多值性

  表现为函数ω的辐角的多值

因此，为明确定义，将$w=\sqrt{z-a}$定义为：

> $$|w|=\sqrt{z-a}, \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$$

根式函数的分支点

为了进一步揭示多值函数$w=\sqrt{z-a}$的性质， 现在不妨规定好z平面上某一点 $\arg(z-a)$的值，而后研究z沿简单闭合曲线 (即自身不相交的闭合曲线)连续变化时，相应w值的连续变化

此时出现两种情况：

> - 曲线不包含a，则$\arg(z-a)$先增加（或减少）后减少（或增加），最终$\arg(z-a)$不变
> - 曲线不包含a，则$\arg(z-a)$增加（或减少）2π，$\arg w$改变π,不保持原值

因为a在函数多值性中的作用，称a为多值函数$w=\sqrt{z-a}$的分支点

同时，对于该函数，$z=\infty$也为一个分支点，从曲线外部观点看（也可以从复数球面来理解），上述两种情况变为：

> - 曲线包含两个分支点，二者作用抵消
> - 曲线包含一个分支点，作用未抵消

关于分支点的讨论：

对于任意单个点，取轨迹**仅绕指定点一圈**，根据是否函数值是否变化判断，对于无穷远点，则拓展到复数球面上的仅绕无穷远点的轨迹，表现在平面和函数值上则是绕其它所有特殊点一圈，以判断无穷远点是否为分支点，如：对于函数$w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$有特殊点$z=a, z=b, z=\infty$，经过判断$z=a, z=b$为支点，而$z=\infty$不为支点

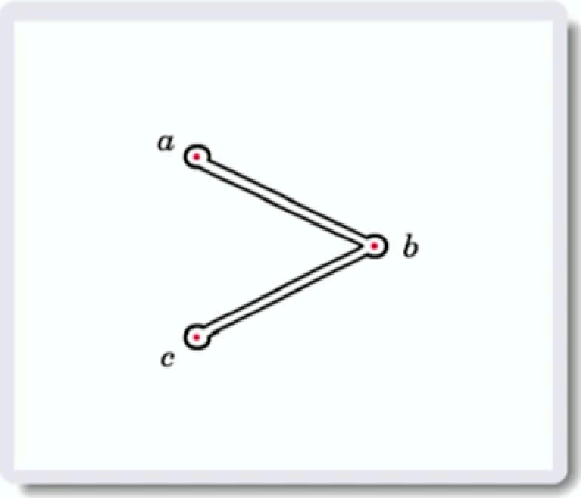
根式函数的单值化

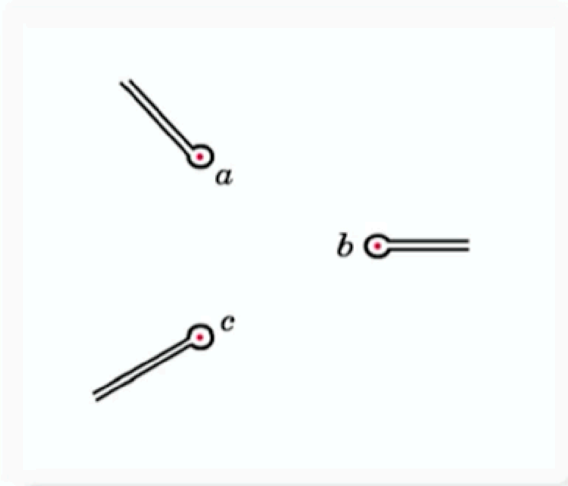
比较简单的一种方法为规定宗量$z-a$的辐角变化范围，规定的几何意义可以由图得到

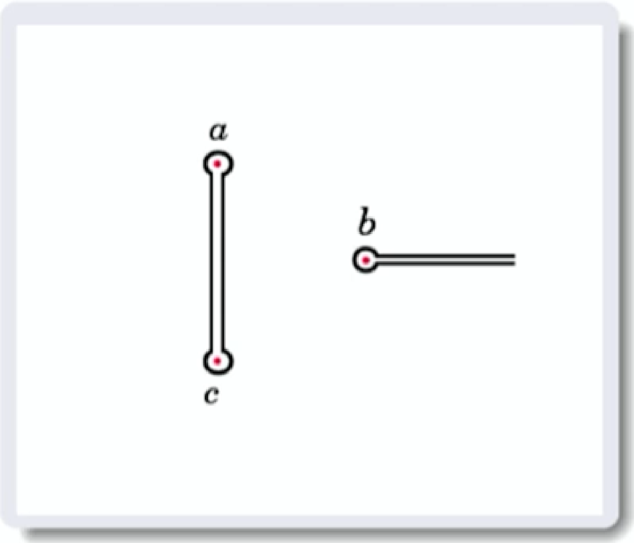
- 因此，只要适当规定宗量的辐角变化范围，就可以将多值函数单值化
- 辐角变化的各个周期给出多值函数的各个单值分支
- 将多值函数划分为多个单值分支，其实质就是限制z的变化方式，如在$w=\sqrt{z-a}$中，限制$0\le\arg(z-a)<2\pi$实际上就是限制z的路径无法绕a一圈
- 分支点处的函数值w仍然保持单值

基于上面的方法，可以通过做割线（不一定要是直线），限制z的变化无法通过割线，以保证函数值辐角的单值性

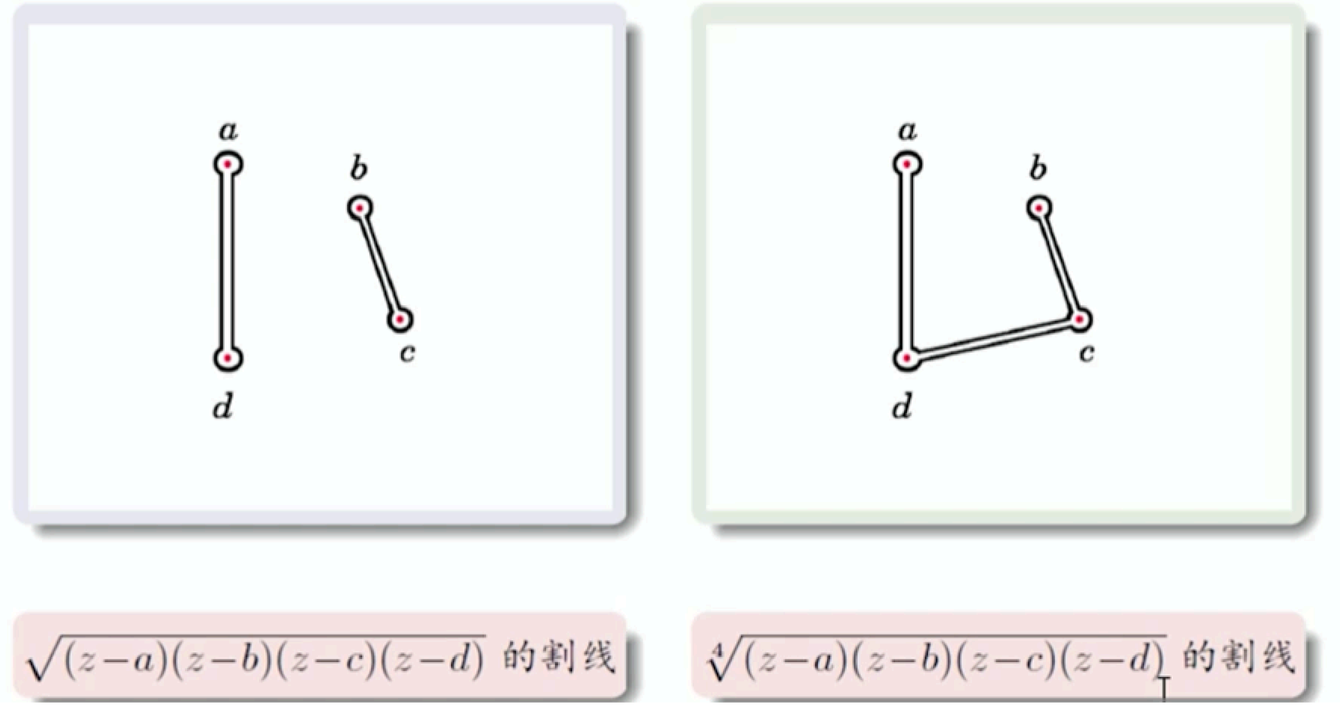
多值函数 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)(z-c)}$ 的割线







$\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ 的割线



割线的具体做法依照问题而定，以$\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$为例，令：

$$z_1 = z - a, z_2 = z - b, z_3 = z - 3$$

则当其中任意两个量辐角改变2π或不变时原函数值不变（$\sqrt{(e^{2\pi i})^2} = e^{2\pi i} = 1$），因此割线作法为连接任意两个点，并将剩余点与无穷远点连接，

而对于$\sqrt[4]{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$，其则有绕4个点的宗量均改变$2\pi$时函数值保持不变($\sqrt[4]{(e^{2\pi i})^4} = e^{2\pi i} = 1$)，因而割线表述成上面类型

- 🤔这样似乎方便表示复杂函数很多，但是一个函数可能有多个割线绘制形式，每种对应的所谓的**单值性**也有所不同，似乎可以通过某种割线制作方式确定这种变化形式保持单值性，但不能因为该变化方式经过割线就断言其不保持单值性

根式函数的$Riemann$面

单值化的优缺点

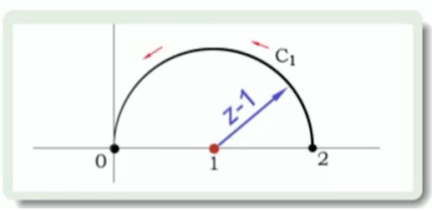
优点：

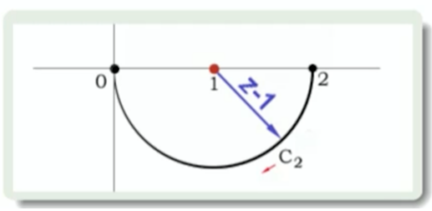
> -

缺点：

> - 限制了宗量的辐角变化范围，难以讨论复杂问题

解决方案:**规定函数w在某一点z_0的值**，并明确说明z的连续变化路线.当z沿这曲线连续变化时，函数w也随之连续变化，如：令$w = \sqrt{z-1}$，规定$w(2) = 1$，则下面两种方式$w(0)$的值不同





，前者为$w(0) = i$，后者为$w(0) = -i$

$Riemann$面

采用这种方法，z的变化路线不受限制，因而可以从一个单值分支运动到另一个单值分支

在几何图形上，这相当于将两个隔开的z平面粘接起来，从而构成$Riemann$面，由此可以将多值函数的每个值与$Riemann$面上的点一一对应

多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的 Riemann 面

对数函数

定义：

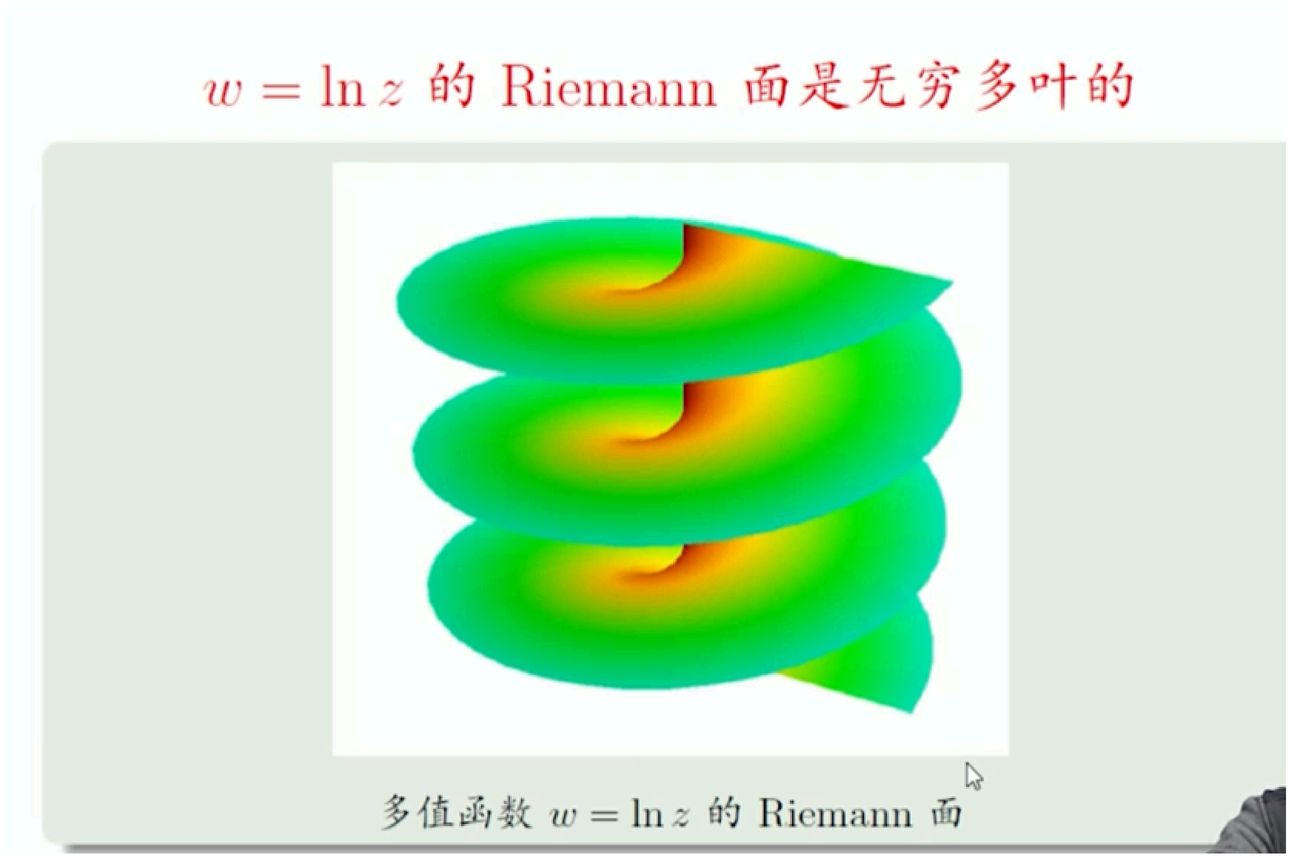
> $w=\ln z$的定义是$e^{w}=z$,即给定自变量z的一个数值，凡是满足$\mathrm{e}^{w}=z$的所有w值均称为对
>
> 数函数$w=\ln z$的函数值

明确表示为：

$$w=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2n\pi)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$$

- 多值性由宗量辐角的多值性导致，且有无穷多个w
- 支点为$z=0, z=\infty$
- 每个单值分支内，均有：

$$\frac{d}{dz}(\ln z)=\frac{1}{z}$$



其它多值函数

反三角函数

$$
\begin{aligned}
\arcsin z &= \frac{1}{\mathrm{i}} \ln\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right) \\
\arccos z &= \frac{1}{\mathrm{i}} \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \\
\arctan z &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \ln \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}
\end{aligned}
$$

多值性可由对数函数和根式函数得到

一般幂函数

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$