复变函数

一、复数和复变函数

$1 复数与复数运算

- 定义

  复数由实数进行数系的拓展得到，用有序实数对(x, y)加以定义，其满足如下运算规则：

  > 加法：$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$
  > 乘法：$(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1, y_2, x_1y_2+x_2y_1)$

  其中x称为复数z的实部，y称为复数z的虚部，记作

  > $x = Re\ z \quad y = Im\ z$

  z也可记为$z = x + iy$

  与实数域$\mathbb{R}$相似，所有复数构成复数域$\mathbb{C}$

- 复数的表示

  几何表示

  > 复数$z = x + iy$可用二维平面内横坐标x，纵坐标y的点表示，这样的二维平面称为**复平面**，x轴称为**实轴**
  > y轴称为**虚轴**
  >
  > 这样构造的平面内每一个点都与复数一一对应，整个平面内所有点的集合构成$\mathbb{C}$
  >
  > 在该观点下，复数的加减法可视为向量的加减法

  极坐标表示

  > 令$x = rcos\theta$，$y = rsin\theta$，则$z = r(cos\theta + sin\theta)$
  > 其中$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = arg\ z$
  > 由于三角函数的周期性，θ的值并不唯一，通常将$\theta \in (-\pi, \pi]$的辐角值称为辐角的**主值**

  > 在极坐标观点下，复数的乘法和除法具有良好的运算规则：
  > $z_1z_2 = r_1r_2(cos(\theta_1+\theta_2), sin(\theta_1+\theta_2))$
  > $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1z_2^*}{z_2z_2^*} = \frac{z_1}{z_2}(cos(\theta_1-\theta_2), sin(\theta_1-\theta_2))$

  复数表示

  > 将$Euler$公式
  >
  > $$e^{i\theta} = cos\theta + sin\theta$$
  >
  > 作为**纯虚数指数函数**的定义，则z可表示为$z = re^{i\theta}$

  > 此时

> $$\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
> $$\frac{z_1}{z_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

二、复数序列

- **有界序列和无界序列**

  给定序列z_n，如果$\exists M > 0$ s.t. $\forall n$都有$|z_n < M|$则称序列$\{z_n\}$使有界的，否则就是无界的

- **Bolzano - Weierstrass定理**

  一个有界序列至少由一个聚点.