第二次课 对称性与守恒律

观前提醒

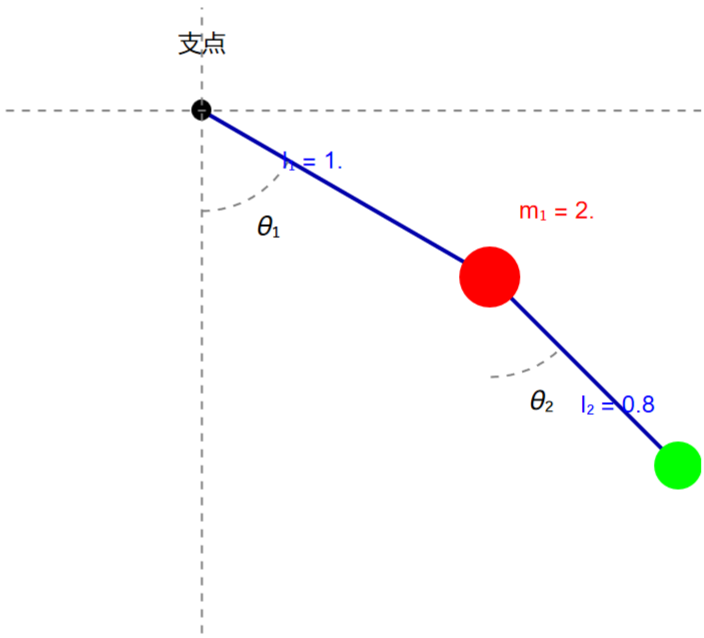
> 1. 我可能写了挺多小字部分，但其实可以不用太在意，尤其是看着就难算的玩意
> 2. 诸如这种角标为字母的玩意通常表示 q^a 位形 $\mathbf{q}$ 的第 a 个分量，其它带有角标的也类似，表示对应的第 a 个分量，此外 q^2 不一定代表平方，有可能是第二个指标或者第二个物体的坐标等，请自行辨别
> 3. 爱因斯坦求和约定：我们规定下面这种出现重复的上下标表示求和
>
> $$p_a q^a = \sum_a p_a q^a$$
>
> 这只是个约定，写习惯了，可能哪边不小心用到了

首先，我们上次课得到的运动方程为：

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \tag{1}$$

(达朗贝尔似乎并不一定要讲)

1. 首先声明，拉格朗日量中一般为 $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 的函数，这与我们通常能够在位形+速度的空间中唯一确定系统的演化有关，原则来说，拉格朗日量也可以含有 $\mathbf{q}$ 对时间的更高阶导数
2. 这里直接给出比较常见的拉格朗日量形式 $L = T - V$，不加证明，可以尝试将其应用于静电场，重力场等存在势能的场，代入 (1) 很容易得到与牛顿力学相近的结果，当然，这东西也可以用于求解一些牛顿力学难以求解以及难以定义力的环境

> e.g.双摆问题
>
> 
>
>
> 我们可以得到

> $$\begin{aligned}
> &\begin{cases}(x_1,y_1)=(l_1\sin\theta_1,l_1\cos\theta_1)\\(x_2,y_2)=(l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2,l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)\end{cases}\\
> &\Rightarrow\\
> &\begin{cases}(\dot{x}_1,\dot{y}_1)=\left(l_1\cos\theta_1\cdot\dot{\theta}_1,-l_1\sin\theta_1\cdot\dot{\theta}_1\right)\\(\dot{x}_2,\dot{y}_2)=\left(l_1\cos\theta_1\cdot\dot{\theta}_1+l_2\cos\theta_2\cdot\dot{\theta}_2,-l_1\sin\theta_1\cdot\dot{\theta}_1-l_2\sin\theta_2\cdot\dot{\theta}_2\right)\end{cases}\\
> &\Rightarrow\\
> &L\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)\\
> &=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)+m_1gy_1+m_2gy_2\\
> &=L\left(\theta_1,\theta_2,t\right)
> \end{aligned}$$
>
> 此处原则来说就可以求解运动方程了，具体的交给计算机😊😊😊
>
> > 注：此处将 (x,y) 代换为 θ 是必要的，因为θ_1,θ_2 为独立坐标(二者不会相互影响)，而对于 (x,y)，x 的变化必然导致相应 y 的变化，二者并不独立，当然，对此变分也不是不可以，只是需要额外引入限制，如
> >
> > $$x_1\delta x_1+y_1\delta y_1=0$$
> >
> > 等，对 $(y,\dot{y})$ 进行代换，否则，我们不能单纯的从
> >
> > $$\int(f\delta x+g\delta y)\mathrm{d}t=0$$
> >
> > 得出
> >
> > $$f=g=0$$

3. 我们将广义动量定义为

$$p_a=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_a}$$

   可以试试，一般情况下，取常规的三维坐标，其与我们一般认知中的动量一致。

4. **运动常数**：在真实运动的过程中，有一些量不随时间改变，只取决于初始值，我们称其为**运动常数**，如下面的函数 C

$$\frac{\mathrm{d}C\left(t,q(t),\dot{q}(t)\right)}{\mathrm{d}t}=0$$

5. 若拉格朗日量加上一个只与 $(t,\mathbf{q})$ 有关的函数对时间的全导数，可以证明，其不影响系统随着时间的演化

$$L'=L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)+\frac{\mathrm{d}F\left(t,\mathbf{q}\right)}{\mathrm{d}t}$$

   这也称为规范变换

   > proof.

> $$
> \begin{aligned}
> &S' = \int_{t_1}^{t_2}\left(L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)+\frac{\mathrm{d}F\left(t,\mathbf{q}\right)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \\
> &\Rightarrow \delta S' = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)+\delta\frac{\mathrm{d}F\left(t,\mathbf{q}\right)}{\mathrm{d}t}\right) \\
> &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\delta\frac{\mathrm{d}F\left(t,\mathbf{q}\right)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
> &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t \\
> &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \mathbf{q}}+\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \dot{\mathbf{q}}}+\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\right)\delta\dot{\mathbf{q}}\mathrm{d}t \\
> &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \mathbf{q}}+\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}+\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\delta\dot{\mathbf{q}}\mathrm{d}t \\
> &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \mathbf{q}}+\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}+\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\delta\dot{\mathbf{q}}\mathrm{d}t \\
> &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \mathbf{q}}+\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\right)\right)\delta\mathbf{q}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q}\right)\mathrm{d}t \\
> &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L\left(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\mathrm{d}t=0
> \end{aligned}
> $$
>
> 显然，这给出的运动方程必然与我们先前得到的一致

6. 变分的运算规则

$$
\begin{aligned}
\delta\left(fg\right)&=g\delta f+f\delta g \\
\delta\left(f^n\right)&=nf^{n-1}\delta f \\
\delta f\left(g\right)&=f'\left(g\right)\delta g
\end{aligned}
$$

   等等，与常规导数常见的运算规则一致

对称性

简而言之，对称性是系统在某种坐标变换下的不变性。

> 以单个质点在无场空间中的运动为例子，其具有如下对称性：
>
> > 1. 时间平移不变性（如让单个质点开始运动的时间向后一段时间）
> > 2. 空间平移不变性（如让单个质点开始运动的位置平移一段）
> > 3. 空间旋转不变性（如将整个空间旋转一定角度）
> >
> > 我们可以很容易发现，在这些变换下，粒子的运动轨迹本身不会发生变化，只是会在时空中平移/旋转

我们知道，拉格朗日量可以完全决定粒子在空间中的运动，因此，我们可以通过考察拉格朗日量来考察对于该粒子而言空间的对称性。

我们假设拉格朗日量 L 产生一个微小变化 δx 则有：

$$
\delta L=\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\delta\vec{x}
$$

> 显然，我们方便考虑的也只有微小变化，若要考虑较大的变化，则需要进行积分处理

要使该微扰下拉格朗日量不变，则有

$$\forall i \in n, \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

> 这里实际给出了运动方程
>
> $$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

或 $\delta\vec{x}$ 满足一定条件（不再是任意，而是有一定的方向，长度等的限制），使得

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\delta_S\vec{x}$$

我们称变换 $\delta_S\vec{x}$ 为对称变换

> 如我们有拉格朗日量
>
> $$L = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$
>
> 若我们要求变化满足
>
> $$\delta x + \delta y = 0$$
>
> 则对任意一点的拉格朗日量，考虑一个极小的变化
>
> $$L' = \frac{k}{2}\left[\left(x + \varepsilon x\right)^2 + \left(y + \varepsilon y\right)^2\right] = \frac{k}{2}\left(1 + \varepsilon^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$$
>
> 忽略二阶小量，则
>
> $$L' = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right) = L$$
>
> > 注：这里的变化是逐点的，并不是对整个空间的一个平移
> >
> > 此外，实际上，这里的无穷小变换进行叠加后其实就给出了旋转，这里表示的就是旋转不变性

诺特定理

我们考虑对 $\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ 重参数化，将一条世界线移动到另一极为接近，但又有所不同

$$\begin{gathered} t \to \tilde{t} = \tilde{t}\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) \\ q^a \to \tilde{q}^a\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) \end{gathered}$$

连续变换 若变换可以由某些连续参数刻化，则称之为**连续变换**，若变换参数为无穷小量时，被称为**无穷小变换**

对于时间参数，我们取无穷小变换

$$\delta_S t := \tilde{t} - t$$

> 显然，时间很适合作为无穷小变换的参数，因为一个在位形空间中，每一个时间都对应唯一的位形

接下来，我们定义广义坐标的无穷小变换

$$\delta_S q^a\left(t\right) := q^a\left(\tilde{t}\right) - q^a\left(t\right)$$

以及

$$\Delta q^a(t) := \tilde{q}^a\left(\tilde{t}\right) - q^a(t)$$

我们很容易推出

$$\Delta q^a(t) = \delta_S q^a + \delta_S t \dot{q}^a$$

接下来，我们考虑变化前后的作用量变化

$$\begin{aligned}\Delta S &= \tilde{S}[\tilde{\mathbf{q}}] - S[\mathbf{q}] \\ &= \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \mathrm{d}\tilde{t} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}\left(\tilde{t}\right), \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{q}}\left(\tilde{t}\right)}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\end{aligned}$$

要使变换保持原先运动方程，我们可以知道，可以允许

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}F(t, \mathbf{q})}{\mathrm{d}t}$$

> 这是由前面拉格朗日量可以相差一个全导数导出的