博弈论第一次作业

Question 1

Solve:
令$c = \frac{a_1}{2}$.
已知$S_{n+1} \geq 2S_n$,则$S_{n+1} - S_n \geq S_n$,即$a_{n+1} \geq S_n$.
利用数学归纳法,有:
当n=1时,$a_1 \geq 2 \times \frac{a_1}{2} = a_1$成立
假设当$n = k$时,有:
$a_k \geq 2^k \frac{a_1}{2} = 2^{k-1} a_1$
成立,那么当$n = k + 1$时,有:
$a_{k+1} \geq S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} a_1 = (2^k - 1)a_1 \geq (2^{k+1} - 2)\frac{a_1}{2}$.
由于当$k > 1$时,$2^{k+1} - 2 > 2^k$,所以原式成立,得证.

Question 2

Solve
因为$v = (1, 1, -1)$是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & b \\ 5 & a & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

的特征向量,所以有:$Av = \lambda v$,那么:

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & -1 & b \\ 5 & a & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} (1, 1, -1)^T = (-b + 1, a + 2, 2)^T$$
$$\therefore \lambda v = (\lambda, \lambda, -\lambda)^T = (-b + 1, a + 2, 2)^T$$
$$\therefore \lambda = -2, a = -4, b = 3$$

Question 3

Solve

要证明$for\ \epsilon \in [0, 1]$, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2})e^{1-\sqrt{1-4\epsilon^2}} \leq e^{-(\epsilon^2-\epsilon^3)/2}$,即要求:
$f(\epsilon) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2})e^{1-\sqrt{1-4\epsilon^2}} - e^{-(\epsilon^2-\epsilon^3)/2} \leq 0\ \forall \epsilon \in [0, 1]$恒成立.
同取对数,即:
$g(\epsilon) = \ln(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2}) - \ln 2 - \sqrt{1 + 4\epsilon^2} + 1 - \frac{1}{2}\epsilon^3 + \frac{1}{2}\epsilon^2 \leq 0\ \forall\ \epsilon \in [0, 1]$成立
令$x = \sqrt{1 + 4\epsilon^2}$,则$\epsilon = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$, $x \in [1, \sqrt{5}]$.
$\therefore g(x) = \ln(1 + x) - \ln 2 - \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{16} + \frac{x^2-1}{8} - x + 1, x \in [1, \sqrt{5}]$.
$\therefore g^{'}(x) = -\frac{3x\sqrt{x^2-1}}{16} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x+1} - 1$
$g^{''}(x) = -\frac{3}{16}(\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}) + \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+1)^2} \leq -\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+1)^2}$
令$h(x) = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{(x+1)^2}$.
$h^{'}(x) = \frac{3}{8} - \frac{2}{(x+1)^3}$
$h^{''}(x) = \frac{6}{(x+1)^4} \geq 0\ \forall\ x \in [1, \sqrt{5}]$.

$\therefore h^{'}(x) \geq h^{'}(1) = \frac{1}{8} > 0.$
$\therefore h(x) \geq h(1) = \frac{3}{8}.$
$\therefore g^{'}(x) \leq g^{'}(1) = -\frac{1}{4} < 0.$
$\therefore g(x) \leq g(1) = 0.$
得证.

Question 4

Solve:
玩家i的收益函数由以下公式给出:
$U_i(q_i, q_{-i}) = aq_i - b(q_i)^2 - c\sum_{k=1,k\neq i}^{n} q_k$

为了找到玩家i的最佳策略，我们需要找到在给定的q_{-i}下使$U_i(q_i, q_{-i})$最大化的q_i的值。取U_i相对于q_i的导数并将其设为零，我们可以得到:
$\frac{dU_i}{dq_i} = a - 2bq_i - c\sum_{k=1,k\neq i}^{n} \delta_{ik} = 0$

其中，δ_{ik}是Kronecker delta函数，如果i = k，它等于1，否则等于0。

从其中求解q_i，我们得到:
$q_i = \frac{a-c-b\sum_{k=1,k\neq i}^{n} \delta_{ik}}{2b}$。

因此，玩家i的最佳反应是由:
$B_i(q_{-i}) = max(0, \frac{a-c-b\sum_{k=1,k\neq i}^{n} q_k}{2b}$)给出.

如果方程的右边是正数，那么$q_i > 0$，这是玩家i的最优策略。否则，玩家i的最优策略是根本不玩，即$q_i = 0$。