

# 概率论与数理统计第一次作业

麻超 201300066

南京大学人工智能学院

## 1

解：频率是随机事件有限次实验下所得到的结果，概率是实现次数接近无限大时所得到的频率。频率是一个可变值，概率是一个固定的准确值。

在一次随机实验之前无法确定该次实验得到什么结果，这被称为随机现象的偶然性，但是经过大量实验，结果的分布往往能够体现一定的规律。以上体现了随机现象中的二重性。

若事件 A 和 B 不能同时发生，则称它们为互不相容事件。而所有不属于事件 A 的基本事件的集合称为 A 的对立事件。对立事件一定是互不相容事件，但反之则不。在集合中，A 的对立事件表示为 A 相对于全集的补集，该补集的任意一个子集都称为 A 的对立事件。

## 2

解：

### 2.1

$$(A - AB) \cup B = A \cup B$$
$$\overline{(\bar{A} \cup B)} = A \cap \bar{B} = A - B$$

### 2.2

$$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap \bar{C} = A \cup B$$

## 3

- $\overline{A_1} \cap (\bigcap_{k=2}^n A_k)$
- $1 - \bigcap_{k=1}^n A_k$
- $\bigcup_{k=1}^n (\overline{A_k} \cap \bigcap_{j \neq k} A_j)$
- $\overline{\bigcup_{k=1}^n (\overline{A_k} \cap \bigcap_{j \neq k} A_j) \cup (\bigcap_{k=1}^n A_k)}$
- $\bigcup_{i=1, j > i}^n (\bigcap_{k \neq i, k \neq j}^n A_k)$
- $\bigcap_{k=1}^n A_k$

## 4

## 4.1

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= \overline{A_1} \cap \overline{\bigcup_{i=2}^n A_i} \\
 &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{\bigcup_{i=3}^n A_i} \\
 &= \\
 &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_n} \\
 &= \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}
 \end{aligned}$$

## 4.2

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} &= \overline{A_1} \cup \overline{\bigcap_{i=2}^n A_i} \\
 &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{\bigcap_{i=3}^n A_i} \\
 &= \\
 &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \dots \cup \overline{A_n} \\
 &= \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}
 \end{aligned}$$

## 5

解:

$$\bullet P(\overline{AB}) = 2/3 \times 1/5 = 2/15$$

- $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(AB) = 19/20$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$   
 $= 1/3 + 1/5 + 1/6 - 1/20 - 1/20 - 1/60 + 1/100$   
 $= 89/150$
- $P(\overline{ABC}) = 2/3 \times 4/5 \times 5/6 = 4/9$
- $P(\overline{ABC}) = 2/3 \times 4/5 \times 1/6 = 4/45$
- $P(\overline{AB} \cup C) = P(\overline{AB}) + P(C) - P(\overline{AB}C) = 2/3 \times 4/5 + 1/6 - 4/45 = 11/18$

## 6

解：  $\because P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$\therefore$  当  $A \subseteq B$  时， $P(AB)$  最大，为 0.6.

当  $A \cup B$  最大，即  $P(A \cup B) = 1$  时， $P(AB)$  最小，为 0.5.

## 7

解：  $\because P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$\therefore 1 - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$\because P(B) = 1/4$

$\therefore P(A) = 3/4$

## 8

解：  $\because P(B - A) = P(A \cup B) - P(A)$

$P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.7 \therefore P(A \cup B) = 0.3 \therefore P(B - A) = 0.2$

## 9

证明：由数学归纳法：

奠基：当  $n=2$  时， $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ，成立。

归纳：设当  $n=k$  时原式成立，

即  $P(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{k-1} P(A_1, A_2, \dots, A_k)$  成立。

则当  $n=k+1$  时，有：  $P(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^k A_i) + P(A_{k+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \cap A_{k+1})$

$= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{k+1} P(A_1, A_2, \dots, A_k) - P(\bigcup_{i=1}^s (A_i \cap A_{s+1}))$

$= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^k P(A_1, A_2, \dots, A_k + 1)$

故当  $n=k+1$  时，仍然成立。由数学归纳法，得证。