概率论与数理统计第五次作业

麻超 201300066

南京大学人工智能学院

2021 年 10 月 17 日

4.1.18

X 的分布函数为 $F(x)=P(X\leqslant x)\cdot$

当 x<0 时,F(x)=0;

当 $x>a$ 时，由题意可知 F(x)=1.

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，由题意，$P(0\leqslant X\leqslant x)=kx.$

由于只在区间 [0,a] 上投掷, 所以有 $P(0\leqslant X\leqslant a)=ka=1$, 故 k=$\frac{1}{a}$.

所以得到:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{a}, & 0\leqslant x<a\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$$

4.1.19

解:(1):P(至多三分钟)=$P(X\leqslant 3)=F_X(3)=1-e^{-1.2}$

(2):P(至少 4 分钟)=$1-P(X<4)=1-P(X\leqslant 4)=1-F_X(4)=e^{-1.6}$

(3):P(3-4 分钟之间)=$P(3<X\leqslant 4)=F_X(4)-F_X(3)=e^{-1.2}-e^{-1.6}$

(4):P(至多 4 分钟或至少 3 分钟)=$1-P(3-4)=1-e^{-1.2}+e^{-1.6}$.

(5):P(恰好 2.5 分钟)=0

4.1.20

1

$P(X < 2) = P(X \leqslant 2) = F_X(2) = \ln 2$

$P(0 < X \leqslant 3) = F_X(3) - F_X(0) = 1$

$P(2 < X < 2.5) = P(2 < X \leqslant 2.5) = F_X(2.5) - F_X(2) = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln \frac{5}{4}$

2

在 $f_X(x)$ 的连续点处有 $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

故有:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 < x \leqslant e \\ 0, & x \leqslant 1 \ or \ x < e \end{cases}$$

4.1.21

1

由于概率密度函数 f(x) 在 $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ 处都等于 0, 故有:

当 x<1 时,$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0,$

当 x>2 时,$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1 - \int_{x}^{\infty} 0dx = 1,$

当 $x \in [1, 2]$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x} 2(1 - \frac{1}{x^2})dx) \\ &= 2(x + \frac{1}{x}\Big|_{1}^{x}) = 2(x + \frac{1}{x} - 2) \end{aligned}$$

所以分布函数 F(x) 是:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2(x + \frac{1}{x} - 2), & 1 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

2

f(x) 在 x<0,$x\geqslant 2$ 处都等于 0, 故

当 x<0 时,F(x)=0, 当 x⩾ 2 时,F(x)=1.

当 $0\leqslant x<1$ 时

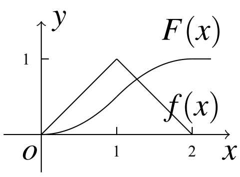
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{0}^{x}xdx=\frac{x^2}{2}$$

当 $1\leqslant x<2$ 时

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{x}(2-x)dx\\&=\frac{1}{2}+(2x-\frac{x^2}{2})\Big|_{1}^{x}=2x-\frac{x^2}{2}-1\end{aligned}$$

故所求分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 2x-\frac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$



4.1.23

任取一只该种零件, 其寿命大于 1500h 的概率为

$$p=\int_{1500}^{\infty}\frac{1000}{x^2}dx=-\frac{1000}{x^2}\Big|_{1500}^{\infty}=\frac{2}{3}$$

记其中寿命大于 1500 小时的只数为 X, 则 $X\sim b(5,2/3)$.

故所求概率为

$$
\begin{aligned}
P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X \geqslant 0) - P(X \geqslant 1) \\
&= 1 - (\frac{1}{3})^5 - \binom{5}{1}\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^4 \\
&= \frac{232}{243}
\end{aligned}
$$

4.1.24

顾客等待超过 10min 的概率为

$$P = \int_{10}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = e^{-2}$$

故 Y 服从二项分布, 即 $Y \sim b(5, e^{-2})$.Y 的分布律为

$$P(Y = k) = \binom{5}{k} e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k}, k = 0,1,2,3,4,5$$

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1-e^{-2})^5$$

4.1.25

若要让原式有实根, 则需要满足 $\Delta = 16K^2 - 16K - 32 \geqslant 0$.
即需要满足 $(K+1)(K-2) \geqslant 0$
解得 $K \geqslant 2$ or $K \leqslant -1$
假设 K 在区间 (0,5) 上服从均匀分布, 则有实根的概率 $P = \frac{3}{5}$

4.1.18(P115)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

令 $t = x^2/(2\sigma^2)$, 得到

$$E(x) = \sqrt{2}\sigma \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$$

令 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$
则 $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
于是有

$$E(X) = \sqrt{2}\sigma\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}\sigma\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$
$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

同理可以得到

$$E(X^2) = 2\sigma^2$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

4.2

设长方形的宽为 b, 长为 a, 则 $a * b = 10, a = \frac{10}{b}$
周长 l=(a+b)*2=2(b+10/b). 所以

$$E(l) = 2E(b) + 2E(10/b) = 2(E(b) + 10E(b^{-1}))$$
$$E(b) = \frac{a+b}{2} = 1$$
$$E(b^{-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} f(t) dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^{-1} dt = \infty$$

所以 $E(l) = \infty$
欲求方差, 则因为 $Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 dt = \frac{3}{4}$$

故其方差依然不存在.

4.3

易知 A 一定大于 0. 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{0}^{\infty} Ae^{-t}dt = [-Ae^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

故一定有 A=1.

所以有当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x) = e^{-x}$.

$$E(Y) = E(e^{-2x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-2x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{3}$$

4.4

正态分布的随机变量 X 的概率密度满足

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

由概率密度函数的规范性, 考虑

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 1$$

考虑到在固定的正态分布中,μ, σ 都是确定的值, 故原式与下式相等

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

令 $(x-\mu)/\sigma = t$, 得到:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
=&\frac{1}{2\pi}\cdot I \\
&I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+\mu^2)/2}dtdu
\end{aligned}$$

利用极坐标转化为累次积分, 得到

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr d\theta = 2\pi$$

由于 I>0, 故 $I = \sqrt{2\pi}$, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

所以有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1$$

于是有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$