最优化作业一

麻超 201300066

南京大学人工智能学院

2021 年 10 月 25 日

Problem 1

a

Prove: 由柯西不等式:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

得到:

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+2x_iy_i)} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2} \\
&= \|x\|+\|y\|
\end{aligned}$$

b

$$\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\|x+y\|^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon})\|y_i\|^2 &= (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon})\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 + \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon x_i^2 + \frac{1}{\varepsilon}y_i^2) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ &= \|x+y\|^2\end{aligned}$$

Problem 2

a

对于任意的 $x,y \in P$, 由定义:$Ax \leq b$ and $Ay \leq b$. 因此:

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

即 $x + (1-\lambda)y \in P$

故集合 P 是一个凸集.

b

对于任意的 $\vec{a},\vec{b} \in S$, 由于 S 为凸集, 故任取 $x \in [0,1]$:

$$xA\vec{a} + (1-x)A\vec{b} = A(x\vec{a} + (1-x)\vec{b}) \in A(S)$$

故 $A(S)$ 为凸集.

c

对于任意的 $\vec{a},\vec{b} \in A^{-1}S$, 由于 S 为凸集, 故 $A\vec{a}, A\vec{b} \in S$, 且任取 $x \in [0,1]$:

$$xA\vec{a} + (1-x)A\vec{b} \in S$$
$$\therefore A(x\vec{a} + (1-x)\vec{b}) \in S$$
$$\therefore x\vec{a} + (1-x)\vec{b} \in A^{-1}S$$

故 $A^{-1}S$ 为凸集.

Problem 3

设超平面的法向量为 a, 经过第一个超平面上的点 x_1 的法线为:$x = x_1 + ta, (t \in R)$. 故该法线与第二个超平面的交点满足 $a^T(x_1 + ta) = c$

因此 $t = (c - a^T x_1)/a^T a$, 故 $x_2 = x_1 + \frac{(c-a^T x_1)a}{a^T a} = x_1 + \frac{(c-b)a}{a^T a}$

所以两个平行超平面的距离是:

$$\|x_1 - x_2\| = |c-b|/\|a\|$$

Problem 4

a

如果集合与任意直线 $\hat{x} + tv | t \in R$ 的交点是凸的，则该集合是凸集.

因为

$$(\hat{x}+tv)^T A(\hat{x}+tv) + b^T(\hat{x}+tv) + c = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

且

$$\alpha = v^T Av, \beta = b^T v + 2\hat{x}^T Av, \gamma = c + b^T \hat{x} + \hat{x}^T A\hat{x}.$$

C 与该直线集合的交点所组成的集合为

$$\hat{x}+tv|\alpha t^2+\beta t+\gamma\leq 0$$

当 $\alpha\geq 0$ 时, 该集合是一个凸集. 对于 v 而言, 当 $v^TAv\geq 0$ 时即可满足, 即 $A\succeq 0$. 反之不成立.

b

It is True.

令 $H=x|g^Tx+h=0$. 定义 α,β,γ 为 a) 的题解. 另有 $\delta=g^Tv,\varepsilon=g^T\hat{x}+h$.

可以设 $\hat{x}\in H$, 即 $\varepsilon=0$. 则 $C\cap H$ 与由 $\hat{x},v$ 所定义的线的集合的交点集合是

$$\hat{x}+tv|\alpha t^2+\beta t+\gamma\leq 0,\delta t=0$$

如果 $\delta=g^Tv\neq 0$: 当 $\gamma\leq 0$, 或者其为空时交点就是一个单独的 $\hat{x}$. 如果不是的话, 那么它是一个凸集.

如果 $\delta=g^Tv=0$, 则该集合等价于

$$\hat{x}+tv|\alpha t^2+\beta t+\gamma\leq 0$$

由上一问的结论, 如果 $\alpha\leq 0$, 则其为凸集. 因此 $C\cap H$ 在 $g^Tv=0$, 即 $v^TAv\geq 0$ 时为凸集.

当存在 λ 满足 $A+\lambda gg^T\succeq 0$ 时可以成立.

Problem 5

a

K^* 是一组齐次半空间（即包含原点作为边界点的半空间）的交集. 因此它是一个封闭的凸锥.

b

如果 $y \in K_2^*$, 则表示对于任意的 $x \in K_2$, 都有 $x^T y \geq 0$, 包括了 K_1 在内. 因此对于所有的 $x \in K_1$, 都有 $x^T y \geq 0$. 即 $K_1 \subseteq K_2$.