概率论与数理统计第一次作业

麻超　201300066

南京大学人工智能学院

1

解：频率是随机事件有限次实验下所得到的结果，概率是实现次数接近无限大时所得到的频率。频率是一个可变值，概率是一个固定的准确值。

在一次随机实验之前无法确定该次实验得到什么结果，这被称为随机现象的偶然性，但是经过大量实验，结果的分布往往能够体现一定的规律。以上遍体现了随机现象中的二重性。

若事件 A 和 B 不能同时发生，则称它们为互不相容事件。而所有不属于事件 A 的基本事件的集合称为 A 的对立事件。对立事件一定是互不相容事件，但反之则不。在集合中，A 的对立事件表示为 A 相对于全集的补集，该补集的任意一个子集都称为 A 的对立事件。

2

解：

2.1

$$(A-AB)\cup B = A\cup B$$
$$\overline{(\overline{A}\cup B)} = A\cap\overline{B} = A-B$$

2.2

$$(A\cup B)-C = (A\cup B)\cap\overline{C} = A\cup B$$

3

- $\overline{A_1} \cap (\bigcap_{k=2}^{n} A_k)$
- $1 - \bigcap_{k=1}^{n} A_k$
- $\bigcup_{k=1}^{n} (\overline{A_k} \cap \bigcap_{j \neq i} A_j)$
- $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} (\overline{A_k} \cap \bigcap_{j \neq i} A_j) \cup (\bigcap_{k=1}^{n} A_k)}$
- $\bigcup_{i=1, j>i}^{n} (\bigcap_{k \neq i, k \neq j}^{n} A_k)$
- $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$

4

4.1

解： $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \overline{A_1} \cap \overline{\bigcup_{i=2}^{n} A_i}$

$= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{\bigcup_{i=3}^{n} A_i}$

$=$

$= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \cap A_n$

$= \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

4.2

解： $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \overline{A_1} \cup \overline{\bigcap_{i=2}^{n} A_i}$

$= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{\bigcap_{i=3}^{n} A_i}$

$=$

$= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \cup A_n$

$= \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

5

解：

- $P(\overline{A}B) = 2/3 \times 1/5 = 2/15$

- $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1-P(AB) = 19/20$
- $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
  $= 1/3+1/5+1/6-1/20-1/20-1/60+1/100$
- $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 2/3\times 4/5\times 5/6 = 4/9$
- $P(\overline{A}\overline{B}C) = 2/3\times 4/5\times 1/6 = 4/45$
- $P(\overline{A}\overline{B}\cup C) = P(\overline{A}\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\overline{B}C) = 2/3\times 4/5+1/6-4/45 = 11/18$

6

解：$\because P(AB) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$\therefore$ 当 $A\subseteq B$ 时，P(AB) 最大，为 0.6.

当 $A\cup B$ 最大，即 $P(A\cup B)=1$ 时，P(AB) 最小，为 0.5.

7

解：$\because P(AB) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B)$

$\therefore 1-P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$\because P(B) = 1/4$

$\therefore P(A) = 3/4$

8

解：$\because P(B-A) = P(A\cup B)-P(A)$

$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 0.7 \therefore P(A\cup B) = 0.3 \therefore P(B-A) = 0.2$

9

证明：由数学归纳法：

奠基：当 n=2 时，$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$，成立。

归纳：设当 n=k 时原式成立，

即 $P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + +(-1)^{k-1}P(A_1,A_2,,A_k)$ 成立。

则当 n=k+1 时，有：$P(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) + P(A_{k+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \cap A_{k+1})$
$= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + + (-1)^{k+1} P(A_1, A_2, , A_k) - P(\bigcup_{i=1}^{s} (A_i \cap A_{s+1}))$
$= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + + (-1)^{k} P(A_1, A_2, , A_k + 1)$
故当 n=k+1 时，仍然成立。由数学归纳法，得证。