概率论与数理统计第四次作业

麻超　201300066

南京大学人工智能学院

2021 年 10 月 12 日

3.1

证明：由二项分布的定义，P(X=k) 表示 n 重伯努利实验中 A 发生的次数，故 $P(X)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, 故

$$E(x)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$E(x)=(1-p)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(\frac{p}{1-p})^k$$

由二项展开式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{n-1}$$

两边同求导数，得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$$
$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k}$$

由于 x=p/(1-p), 故代入可得

$$E(x)=(1-p)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(\frac{p}{1-p})^k=(1-p)^n\frac{np}{(1-p)^n}=np$$

对于方差，有：

$$
\begin{aligned}
D(x) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= (1-p)^n \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \frac{p}{1-p}^k + np
\end{aligned}
$$

对上方二项展开式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 求导两次可得，

$$
\begin{aligned}
n(n-1)(1+x)^{n-2} &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} \\
n(n-1)(1+x)^{n-2} x^2 &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k}
\end{aligned}
$$

代入 x=p/(1-p) 可得:

$$
\begin{aligned}
E(x^2) &= n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 + np(1-p) \\
E(X)^2 &= n^2 p^2
\end{aligned}
$$

$\therefore Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p).$

3.2

由几何分布的定义，几何分布 X G(p) 得分布列为 $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

故对几何分布有：

$$
E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k - 1
$$

对级数展开式 $(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 两边求导有：

$$
\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}
$$

令 x=1-p, 有:

$$E(X) = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

对于方差，有:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} + 1/p$$

对级数展开式 $(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 两边求二阶导得:

$$\sum_{k=}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{k=}^{\infty} k(k-1)x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

令 x=1-p 得,$E(X^2) = (2-p)/p^2 \ldots$

$$\therefore Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (2-p)/p^2 - 1/p^2 = (1-p)/p^2$$

3.3

对于负二项分布, 有 $P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r} p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k = r, r+1 \ldots$

故对于期望 E(X) 有:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=r}^{\infty} k\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\ &= \frac{r}{p}\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} p^{r+1}(1-p)^{k-r} \end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k+1-1}{r+1-1} p^{r+1}(1-p)^{k-r} = 1.$$

故

$$E(X)=\frac{r}{p}$$

对于方差的计算, 类似地有:

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\\&=\frac{r}{p}\sum_{k=r}^{\infty}(k+1-1)\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}\\&=\frac{r(r+1)}{p^2}\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k+1}{r+1}p^{r+1}(1-p)^{k-r}-\frac{r}{p}\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}\\&=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}\end{aligned}$$

所以可以得到

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}-\frac{r^2}{p^2}=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

3.4

对于泊松分布有:P(X=k)=$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},(k=0,1,2...)$ 所以对于期望有:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

由于泰勒展开式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ 所以其期望为

$$E(X)=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

对于方差, 有:

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\&=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\&=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1+1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

令 m=k-1, 则有:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \lambda e^{-\lambda}(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m\lambda^m}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}) \\
&= \lambda e^{-\lambda}(\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}) \\
&= \lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}) \\
&= \lambda(\lambda+1)
\end{aligned}
$$

故计算得方差

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\lambda(\lambda+1)-\lambda^2=\lambda$$

3.5

用 H 表示某个叶节点的高度, 设 X_i 表示第 i 轮中该叶节点是否被选中, 选中时有 $X_i=1$, 否则其等于 0.

在第 i 轮时一共有 i 个节点, 故该节点选中的概率 $P(X_i=1)=\frac{1}{i}$.

则 $E(X_i)=1\cdot P(X_i=1)=\frac{1}{i}$

所以有 $E(H)=E(\sum_{i=1}^{k}X_i)=\sum_{i=1}^{k}=\sum_{i=1}^{k}\approx O(\ln k)$

3.6

1

在有放回的情况下,X 可能的取值一共有 1 到 10, 共 10 种可能性. 其中 P(1)=$\frac{1}{10^5}$, 而 P(2)=(($\frac{2}{10}$)^5-P(1))=$\frac{31}{10^5}$ 分布列如下:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{31}{10^5}$	$\frac{211}{10^5}$	$\frac{781}{10^5}$	$\frac{2101}{10^5}$	$\frac{4651}{10^5}$	$\frac{9031}{10^5}$	$\frac{15961}{10^5}$	$\frac{26281}{10^5}$	$\frac{40951}{10^5}$

在无放回情况下,X 可能取值为 5,6,7,8,9,10. 总情况为 $\binom{10}{5}=252$. 对于 X=5 来说, 只有一种情况, 故 P(X=5)=$\frac{1}{252}$, 其他情况类似. 分布列如下:

X	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

3.7

由题意, 这种情况下, 令 M 表示在这 100+x 个元件中不合格元件数, 即 M 服从 n=100+x 和 p=0.01 的二项分布, 记事件 A 为至少有 100 个合格零件, 则 $P(A) = \sum_{k=1}^{x}\binom{100+x}{k}(0.01)^k(0.99)^{100+x-k}$.

利用泊松定理近似模拟, 得到 P(A)=$\sum_{k=1}^{x}\frac{e^{-1}}{k!}$

当 x=0,1,2,3 时, 上式中 P(A) 分别等于 0.368,0.736,0.920,0.981. 故 x 的最小值为 3.

3.8

3.8.2

这道题和 3.6.2 类似, 直接写出分布列:

X	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

3.8.3

X 所有可能的取值为 0,1,2. 其中, 由于为不放回抽样, 故求得概率:

$$P(X=0)=\binom{13}{3}/\binom{15}{3}=\frac{286}{455}$$
$$P(X=1)=\binom{13}{2}\binom{2}{1}/\binom{15}{3}=\frac{156}{455}$$
$$P(X=2)=\binom{13}{1}\binom{2}{2}/\binom{15}{3}=\frac{13}{455}$$

分布列如下:

X	0	1	2
P(X)	$\frac{286}{455}$	$\frac{156}{455}$	$\frac{13}{455}$

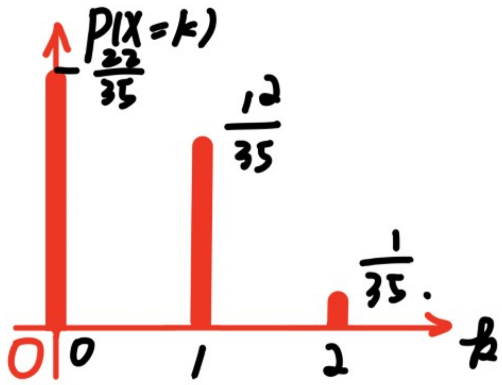

图 1: 3.8.3 附图

3.9

3.9.2

首先求检验一次决定需要调整设备的概率, 记为 p.

设每次抽检次品数量为 X, 则 X∼b(10,0.1). 则有:

$$p = P(Y > 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - 0.9^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.9^9 \cdot 0.1 = 0.264$$

又因为每一次实验结果相互独立, 于是有

$$X \sim b(4, 0.264)$$

于是有

$$E(X) = np = 1.056$$

3.9.3

易知共有 $4^3=64$ 种可能性,X 的所有可能的取值为 1,2,3,4.

3 只球都放在 4 号盒子的放法只有 1 种, 故 $P(X=4)=\frac{1}{64}$

X=3 表示 1,2 号盒子是空的, 球都在 3,4 号盒子里面放, 共有 $2^3=8$ 种放法, 但其中一种与 X=4 重复, 故只有 7 种. 即 $P(X=3)=\frac{7}{64}$

同理,$P(X=2)=\frac{19}{64}$,$P(X=1)\frac{37}{64}$.

于是有:

$$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}.$$

3.10

3.10.4

(1)

因为级数

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}P(X=(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j})\\&=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\cdot\frac{2}{3^j}= \qquad 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\end{aligned}$$

不是一个绝对收敛的级数, 故按照定义可知其数学期望不存在.

(2)

记 A_k 表示第 k 次摸到了黑球, 同时记 $\overline{A_k}$ 表示第 k 次摸到了白球. 以 B_k 表示游戏在第 k 次结束, 由题意可知:

$C_k=A_1A_2...A_{k-1}\overline{A_k}$

$P(C_k)=P(\overline{A_k}|A_1A_2...A_{k-1})P(A_{k-1}|A_1A_2...A_{k-2})...P(A_2|A_1)P(A_1).$

于是由定义:

$P(X=1)=P(\overline{A_1})=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=P(\overline{A_2}|A_1)P(A_1)=\frac{1}{6}$

$P(X=3)=P(\overline{A_3}|A_2A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_1)=\frac{1}{12}$

故

$$\begin{aligned}P(X=k)&=P(\overline{A_k}|A_1A_2...A_{k-1})P(A_{k-1}|A_1A_2...A_{k-2})...P(A_2|A_1)P(A_1)\\&=\frac{1}{k+1}\frac{k-1}{k}\frac{k-2}{k-1}...\frac{2}{3}\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{k(k+1)}\end{aligned}$$

但是

$$\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{k+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\infty$$

故 E(X) 不存在.

3.10.6

(1)

$$E(X)=(-2)\times 0.4+0+2\times 0.3=-0.2$$

$$E(X^2)=(-2)^2\times 0.4+0+2^2\times 0.3=2.8$$

$$E(3X^2+5)=3E(X^2)+5=8.4+5=13.4$$

(2)

由于 $X\sim\pi(\lambda)$, 故 $P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

所以有:

$$\begin{aligned}
E(\frac{1}{X+1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) \\
&= \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}).
\end{aligned}$$