概率论与数理统计第三次作业

麻超　201300066

南京大学人工智能学院

2021 年 9 月 25 日

2.1

两个事件独立是指它们的发生不会相互影响，即 A 发生与否与 B 发生与否没有关系，不代表不可以同时发生，其满足公式 $P(AB)=P(A)P(B)$. 但是两个事件互不相容是指其不能够同时发生, 即发生了 A 就不会发生 B, 发生了 B 就不会发生 A, 满足 $P(AB)=0$.

2.2

事件 ABC 相互独立, 则有 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C), P(AB)=P(A)P(B), P(BC)=P(B)P(C), P(AC)=P(A)P(C)$.

由容斥原理,$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)$

$\therefore P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)=P(AB)+P(BC)-P(ABC)$

$P(A)P(B\cup C)=P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)=P(AB)+P(BC)-P(ABC)$

$\therefore P(A(B\cup C))=P(A)P(B\cup C)$

2.3.22

1

设第一次及格为事件 A, 第二次及格为事件 B, 能取得某种资格为事件 S, 由题:

$P(A)=p, P(\overline{A})=1-p, P(B|A)=p, P(B|\overline{A})=p/2$

则 $P(S)=P(A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=p+(1-p)p/2=(-p^2+3p)/2$

2

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{p^2}{p^2+\frac{p}{2}(1-p)}=\frac{2p}{p+1}$

2.3.27

1

$P(AB|A)=P(AB)/P(A), P(AB|A\cup B)=P(AB)/P(A\cup B)$

$\because A\subseteq(A\cup B)$

$\therefore P(A)\leq P(A\cup B)$

$\therefore P(AB|A)\geq P(AB|A\cup B)$

2

$\because P(A|B)=1$

$\therefore P(AB)=P(B)$, 即 $B\subseteq A$

$\therefore \overline{A}\subseteq\overline{B}$

$\therefore P(\overline{AB})=P(\overline{A})$

$\therefore P(\overline{B}|\overline{A})=P(\overline{AB})/P(\overline{A})=1$

3

$P(AC)\geq P(BC)(1), P(A\overline{C})\geq P(B\overline{C})(2)$

设全集为 U, 则对 (2) 式有 $P(A(U-C))\geq P(B(U-C))$

$\therefore P(A)-P(AC)\geq P(B)-P(BC)$

由 (1) 式,$P(A)-P(B)\geq P(AC)-P(BC)$

$\therefore P(A)\geq P(B)$

2.3.28

设第一种花籽发芽为事件 A, 第二种花籽发芽为事件 B

1

$P1 = P(A)P(B) = 0.72$

2

$P2 = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0.02 = 0.98$

3

$P3 = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0.18 + 0.08 = 0.26$

2.3.30

1

i

A 为掷骰子掷到奇数,B 为掷骰子掷到大于 3 的数, 则有 $P(A|B) = 1/3, P(A) = 1/2$

ii

A 为掷骰子掷到奇数,B 为掷骰子掷到大于 0 的数, 则有 $P(A|B) = P(A) = 1/2$

iii

A 为掷骰子掷到奇数,B 为掷骰子掷到小于 4 的数, 则有 $P(A|B) = 2/3, P(A) = 1/2$

2

由于事件 ABC 相互独立, 故 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C), P(AB) = P(A)P(B), P(BC) = P(B)P(C), P(AC) = P(A)P(C)$.

i

$P(C(AB)) = P(CAB) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C)$, 故 C 与 AB 相互独立.

ii

$P(C(A\cup B))=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(C)P(A\cup B)$, 故 C 与 $A\cup B$ 相互独立.

3

$AB\subset A$, 所以若 P(A)=0, 则 $0\leq P(AB)\leq P(A)$
由定义,$P(AB)=0=P(B)\times 0=P(A)P(B)$
所以 A,B 相互独立.

4

1. 若 A,B 相互独立, 则 A,$\overline{B}$ 也相互独立.
所以 $P(A|B)=P(A),P(A|\overline{B})=P(A),P(A|B)=P(A|\overline{B})$
2. 设 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$, 则 $\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$
$\therefore \frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)+P(A\overline{B})}{P(B)+P(\overline{B})}=1$
$\therefore P(AB)=P(A)P(B)$, 即 A 与 B 相互独立.

2.3.31

1

必然错. 若互不相容, 则 $P(AB)=0\neq P(A)P(B)$, 不满足相互独立.

2

必然错. 理由同上.

3

必然错. 此时 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, 故 $P(AB)$ 最小为 0.2, 不可能为 0, 不满足互不相容.

4

可能对. 相互独立与其概率无关系.

2.3.32

设第 i 个人报导为假阳性为事件 A_i, 于是 $P(A_i) = 0.005, P(\overline{A_i}) = 0.095$

$\therefore P = 1 - P(\prod_{i=1}^{140} P(A_i)) = 1 - 0.095^{140}$

2.3.33

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2.$

P(AB),P(AC),P(BC),P(ABC) 均表示取得 1 号球, 故 $P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = 1/4$

即满足 $P(AB) = P(A)P(B), P(BC) = P(B)P(C), P(AC) = P(A)P(C)$, 但 $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$

2.3.37

1

$P1 = 1 - 4/7 \times 7/9 = 5/9$

2

$P2 = 3/7 \times 4/9 + 2/7 \times 2/9 = 16/63$

3

$P = p2/(p1 + p2) = 16/35$

2.3.39

$P(B|A_1) = 0.98^3, P(B|A_2) = 0.9^3, P(B|A_1) = 0.1^3$

又 $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05.$

由贝叶斯公式得

$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{0.98^3 \times 0.8}{0.98^3 \times 0.8 + 0.9^3 \times 0.15 + 0.1^3 \times 0.05} = 0.873$

同理,$P(A_2|B) = \frac{0.9^3 \times 0.15}{0.98^3 \times 0.8 + 0.9^3 \times 0.15 + 0.1^3 \times 0.05} = 0.0.127$

$P(A_3|B) = \frac{0.1^3 \times 0.05}{0.98^3 \times 0.8 + 0.9^3 \times 0.15 + 0.1^3 \times 0.05} = 0.0001.$