# Pitanja za usmeni ispit iz R. Mat

## MATEMATICKA LOGIKA

1. **Definicija suda i operacije sa sudovima.**

   S d (i ka ) je aka i la i ja a ece ica k j j e di i je li i i a ili la . S d e e i e e bi i i i i i la a . S d e aca a l i a abecede. S d e e egi a i i e i a i e ici a, kak bi d bili l e ije.

   Tak d la i d ih l gickih (B le ih) e acija a d i a. O aca a ih l gicki e ici a ( j. i b li a $\neg, \wedge$, i $\vee$) i i a 4 bi a e: $\wedge$ (i, di j kcija), $\vee$ (ili, k j kcija), $\rightarrow$ ("ak A da B", i likacija/k dici al), $\leftrightarrow$ ("A akk B", ek i ale cija/bik dici al), i jed a : $\neg$ (" e", egacija/k le e ).

   D da ak: **Negiranje logickih sudova (i, ili, kondicional, bikondicional) u obliku recenica**

   P i je d a:

   - A: "Da a je lije da ."
   - B: "Da a je ca da ."

   P i je i egacija:

   1. Negacija k j kcije: "Da a ije lije i ca da ." $\overline{A \wedge B} \rightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ - "Da a ije lije ili ije ca da ."
   2. Negacija di j kcije: "Da a ije lije ili ca da ." $\overline{A \vee B} \rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ - "Da a ije lije i ije ca da ."
   3. Negacija i likacije: "Ak je da a lije da , da je da a ca da ." $\overline{A \rightarrow B} \rightarrow A \wedge \overline{B}$ - "Da a je lije da i ije ca da ."
   4. Negacija ek i ale cije: "Da a je lije da a ak je da a ca da ." $\overline{A \leftrightarrow B} \rightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ - "Da a je lije da i ije ca da ili da a ije lije da i je ca da ."

   D da ak: **Jednakost formula, semanticke tablice, tautologija, primjeri tautologije**

   L gicke f le jed ake ak i i e ijed i a e ijed i a ijabli. O aca a ih a $\equiv$.

   Se a icke ablice ablice k ji a ih aca e g ce k bi acije ijed i a ijabli, a ali ci a ijed i ih l gickih e ika. U ad je c je ijed cijele f le.

   Ta l gija je f la k ja je i i i a a e ijed i a ijabli. O aca a je a $\top$. U e a ick j ablici a l gija i a a ijed $\top$ ad je c .

   P i je i a l gija:

   - $A \vee \overline{A}$
   - $A \rightarrow A$
   - $A \leftrightarrow A$
   - $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

2. **Svojstva operacija (asocijativnost, komutativnost...)**

   1. Ide e :
      - $A \wedge A = A$
      - $A \vee A = A$
   2. A cija i :
      - $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
      - $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
   3. K a i :
      - $A \wedge B = B \wedge A$
      - $A \vee B = B \vee A$
   4. Di ib i :
      - $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
      - $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   5. DeM ga a a ila:
      - $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
      - $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
   6. Ne al i ele e :
      - $A \wedge 1 = A$
      - $A \vee 0 = A$
   7. A ihilacija:
      - $A \wedge \bot = \bot$
      - $A \vee \top = \top$
   8. K le e a :
      - $A \wedge \overline{A} = \bot$
      - $A \vee \overline{A} = \top$
   9. I l i :
      - $\overline{\overline{A}} = A$
   10. A cija:
       - $A \wedge (A \vee B) = A$
       - $A \vee (A \wedge B) = A$

3. **Neke vazne tautologije i pravila zakljucivanja.**

   - M d e : $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$
   - M d lle : $(A \rightarrow B) \wedge \overline{B} \rightarrow \overline{A}$
   - Zak il gi a: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

   P a ila aklj ci a ja: ???

4. **Definicija algebre sudova odnosno skupovni izraz algebre sudova.**

   Neka je B k k je i ak a 2 a lici a ele e a, "i i a" ( aca a a $\top$) i "la " ( aca a a $\bot$). Neka ada e 3 e acije a B, jed a a a: "k le e i a je", i d ije bi a e: "di j kcija" i "k j kcija". Sk B a e 3 e acije a i a e B le a algeb a a d e i aca a $(B, \neg, {}^{\complement}, \wedge, \vee, \bot, \top)$ algeb a d a, ak ad lja a ih 10 j a e acija a d i a.

5. **Definicija formule racuna sudova, skupa izvodnica, te baze racuna sudova.**

   F la ac a d a je aka f la k ja e e d bi i i ba e ac a d a c l gickih e ika. O a je dalje a a lje a d d a i l gickih e ika, i e e dalje a a lja i a df le e d k e e d dje d a a ih d a.

   S a i d ica (ge e a a) ac a d a je k B le ih e acija ac a d a ( a ijabli) c k jih e e ika a i bil k ja f la ac a d a.

   Ba e ac a d a i i al i a i i d ica ac a d a, j. a i i d ica ciji ik ji a i d k i e ije a i d ica. N . $\{\wedge, \vee, \neg\}$ je a i d ica ac a d a, ali ije ba a, je je d k i g k a k ji e a i d ica ( . $\{\wedge, \neg\}$).

6. **Definicija Booleove algebre.**

   Neka je B k k je i ak a 2 a lici a ele e a, " la" ( aca a 0) i "jedi ica" ( aca a 1). Neka ada e 3 e acije a B, jed a a a: "k le e i a je", i d ije bi a e: " e je" i " b aja je". Sk B a e 3 e acije a i a e B le a algeb a i aca a $(B, \neg, \cdot, +, 0, 1)$ algeb a d a, ak ad lja a ih 10 j a B le e algeb e.

   Na e a: B le a algeb a k i i i a j a e acija ka i algeb a d a i algeb a k a.

   Na e a: Bil k ja algeb a e defi i a c edje e e ke ka i e i ad. Tak e defi i a i algeb a d a i k a.

7. **Booleove funkcije.**

   Tak dje e a i a B le a algeb a a ijabli.
   Neka je $B = \{0, 1\}$ i $(B, \neg, \cdot, +, 0, 1)$ B le a algeb a. B le a f kcija a ijabli je bil k ja f kcija $F : B^n \rightarrow B$. S ak B le f kcij e ada i ablic ih k bi acija la i jedi ica (" la a") i ijed i f kcije ("i la a"). B j ih g cih B le ih f kcija a ijabli je $2^{2^n}$.

## SKUPOVI

1. **Sto je skup, kako ga zapisujemo, koje su operacije, sto je (pravi) podskup, kojih je 9 svojstava operacija**

   Sk je jeda d f da e al ih j a a e a ici i e e defi i a eg e i a ka jed a d ih e elja. Sk e ce i je ka k lekcija bjeka a. Objek i k a e ele e i k a. Sk i e aca aj eliki l i a, a ele e i k a ali l i a. Sk e e a i a i e ab aja ja, . $A = \{1, 2, 3\}$, ili e ada a ja ek g j a, . $B = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 3\}$.

   O e acije a k i a :

   - U ija: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
   - P e jek: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
   - K le e : $\overline{A} = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$
   - Ra lika: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
   - Si e ic a a lika: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
   - Ka e ije d k: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$
   - P d k : $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$
   - P a i d k : $A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

   P d k je k k ji je ad a ek d g k , a e bi i jed ak k .
   P a i d k je d k k ji ije jed ak k . Na i je :

   $$A = \{1, 2, 3\} \tag{1}$$
   $$B = \{1, 2, 3\} \tag{2}$$
   $$C = \{1, 2, 3, 4\} \tag{3}$$
   $$A \subseteq B \tag{4}$$
   $$A \subset C \tag{5}$$

   K d k a ijede i ih 10 j a a ka i k d B le ih algeb i.

2. **Kada su dva skupa jednaka?**
   **Jesu li skupovi {1,2,3} i {2,1,3} jednaki?**

   D a k a jed aka ak i aj i e ele e e. F al ije e ka e da d a k a A i B jed aka akk ijedi $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Pi e : $A = B$.

   Sk i 1,2,3 i 2,1,3 jed aki je i aj i e ele e e.

## BINARNE RELACIJE

1. **Definirajte binarnu relaciju na skupu X i svojstva refleksivnosti, simetricnosti, antisimetricnosti i tranzitivnosti.**
   **Dajte primjer relacija koji zadovoljavaju po jednu od ovih uvjeta.**

   H ge a bi a a elacija a k X je aki d k k a $X \times X$. Ak je $R \subseteq X \times X$ bi a a elacija a k X, da a aki a $(x, y) \in R$ ka e da je elaciji R , i i e $xRy$.

   Bi a a elacija R a k X je:

   - Reflek i a: akk a aki $x \in X$ ijedi $xRx$.
   - Si e ic a: akk a aki $x, y \in X$ ijedi $xRy \rightarrow yRx$.
   - A i i e ic a: akk a aki $x, y \in X$ ijedi $xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$.
   - T a i i a: akk a aki $x, y, z \in X$ ijedi $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$.

   I a k $A = \{1, 2, 3\}$. P i je i elacija k je ad lja aj jed d ih j a a:

   - Reflek i a: $R = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$
   - Si e ic a: $R = \{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2)\}$
   - A i i e ic a: $R = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$
   - T a i i a: $R = \{(1,2),\ (2,3),\ (1,3)\}$

2. **Definirajte relaciju ekvivalencije, klasu ekvivalencije, i kvocijentni skup.**
   **Dajte primjer jedne relacije ekvivalencije, i odredite joj klasu ekvivalencije, i kvocijentni skup.**

   Ka e da je bi a a elacija R a k X ek i ale cija akk je eflek i a, i e ic a i a i i a.

   Kla a ek i ale cije ele e a je k ih ele e a a k ji elaciji ek i ale cije . Pi e $[x]$, a je defi i a ka $[x] = \{y \in X : xRy\}$.

   K cije i k k a X elaciji ek i ale cije R je k ih kla a ek i ale cije. Pi e $X/R$, a je defi i a ka $X/R = \{[x] : x \in X\}$.

   I a k $A = \{1, 2, 3\}$. P i je elacije ek i ale cije:
   $R = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (1,2),\ (2,1)\}$. Kla a ek i ale cije ele e a 1: $[1] = \{1, 2\}$.
   K cije i k k a A elaciji ek i ale cije R: $A/R = \{\{1, 2\},\ \{3\}\}$.

3. **Definirajte relaciju parcijalnog uredjaja i relaciju totalnog uredjaja.**
   **Dajte primjer za jedno i drugo i nacrtajte Hasseov dijagram.**

   Bi a a elacija R a k X je:

   - Pa cijal i edjaj: akk je eflek i a, a i i e ic a i a i i a.
   - T al i edjaj: akk je a cijal i edjaj i kada d a ele e a edj b edi a.

   I a k $A = \{1, 2, 3\}$. P i je i elacija k je ad lja aj jed d ih j a a:

   - Pa cijal i edjaj: e acija $\leq$ a k $\mathbb{N}$.
   - T al i edjaj: e acija $\leq$ a k $\mathbb{Z}$.

## KOMBINATORIKA

1. **Navedi osnovna pravila prebrojavanja.**

2. **Dirichletov princip**

   Ak ed e a bil kak a edi -1 k ija, da ce ba e jed a d jih ad a a i ba e d a ed e a.

   P ce : Ak je ed e a bil kak a je e k ija, da ba jed a k ija ad i ba $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ ed e a.

3. **Sto je podskup, a sto uredjena n-torka**

   P d k je aki k k ji je ad a ek d g k . N . k 1,2 je d k k a 1,2,3 .

   U edje a - ka je k lekcija ele e a a k j j je bi a ed lijed ele e a a. N . (1,2) je edje a 2- ka (d jka), a (2,1) je d ga edje a 2- ka (d jka). U - ka a je d lje da e ele e i a ljaj . N . (1,1) je edje a 2- ka (d jka).

4. **Napisi FUI (formulu ukljucivanja i iskljucivanja)**

   Ak i a k ac e k e $A_1$, $A_2$, i $A_3$, da ijedi:

   - $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
   - $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

   P ce : Ak i a k ac e k e $A_1, A_2, ..., A_n$, da ijedi:

   $$ A_1\c A_2\c \ld \c A_ =\ _ i=1 ^ A_i -\ _ 1\le i

5. **Sto su kombinacije i permutacije?**

   K bi acija be a lja ja eda (ili -k bi acija) je -cla i d k -cla g k a. B j -k bi acija -cla g k a je $\binom{n}{r}$.

   K bi acija a a lja je eda (ili -k bi acija) je -cla i d l i k -cla g k a. B j -k bi acija a a lja je -cla g k a je $\binom{n+r-1}{r}$.

   Pe acija be a lja ja je - ka a a lje a d ele e a a -cla g k a. B j e acija -cla g k a je $n!$.

   Pe acija a a lja je je - ka a a lje a d ele e a a -cla g l i k a. B j e acija -cla g l i k a je $\frac{m!}{\lambda_1! * \lambda_2! * ... * \lambda_n!}$, gdje $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ k a i ele e a a l i k a, a je ka di al l i k a ( d b j k a i ele e a a).

   Pe acija je eb i l caj - e acije ( ak dje a a a ijacija), gdje je = . B j - e acija -cla g k a je $\frac{n!}{(n-r)!}$.

6. **Sto su r-permutacije n-clanog skupa i koliko ih ima?**
   **Na koliko nacina moze 10 ljudi sesti ako na raspolaganju imaju 20 razlicitih stolica?**

   R- e acije -cla g k a e g ce e acije ( d - ke a a lje e d ele e a a k a) k je e g d bi i i -cla g k a. B j - e acija -cla g k a je $\frac{n!}{(n-r)!}$

   Na 20 aci a e 1. ba je i a ek d 20 lica. Na 19 aci a e 2. ba je i a ek d 19 e alih lica... Na 11 aci a e 10. ba je i a ek d 11 e alih lica. Uk a b j aci a je 20*19*...*11 = 20!/10!.

7. **Sto su permutacije n-clanog skupa i koliko ih je?**
   **Na koliko nacina moze 5 ljudi sjesti na 5 stolica?**

   Pe acije -cla g k a e g ce e acije ( d - ke a a lje e d ele e a a k a) k je e g d bi i i -cla g k a. B j e acija -cla g k a je $n!$.

   5 lj di e je i a 5 lica a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ aci a.

8. **Sto su r-kombinacije n-clanog skupa i koliko ih ima?**
   **Na koliko nacina mozemo od 5 zena i 7 muskaraca odabrati 2 zene i 3 muskarca?**

   R-k bi acije -cla g k a e g ce k bi acije ( d -cla i d k i k a) k je e g d bi i i -cla g k a. B j -k bi acija -cla g k a je $\binom{n}{r}$.

   Od 5 e a e dab a i 2 a $\binom{5}{2} = 10$ aci a. Od 7 ka aca e dab a i 3 a $\binom{7}{3} = 35$ aci a. Uk a b j aci a je $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot 35 = 350$ aci a.

9. **Sto je multiskup? Sto su r-permutacije multiskupa?**
   **Koliko se osmoslovnih rijeci moze naciniti od 30 slova abecede?**
   **Moze li se ta formula primijeniti u zadatku: Koliko ima 3-permutacija multiskupa M={a,a,b,c}? Zasto?**

   M l i k ili k ac i l i k je k k je e ele e i g a lja i. Ka e da je -cla i l i k aj gdje e i cla $x_1$ a lja $\lambda_1$ a, d gi cla $x_2$ $\lambda_2$ a, i d. e d ad jeg cla a $x_n$ k ji e a lja $\lambda_n$ a, i gdje je b j k a i ele e a a $\lambda_1 + \lambda + 2 + \ldots + \lambda_n = n$. M l i k M aca a a $M = \{x_1^{\lambda_1},\ x_2^{\lambda_2},\ \ldots,\ x_n^{\lambda_n}\}$.

   R- e acije l i k a ( ak dje a e - e acije a a lja je ) e g ce e acije ( d - ke a a lje e d ele e a a l i k a) k je e g d bi i i l i k a.

   Od 30 l a abecede e a a i i $30 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 30 = 30^8$ l ih ijeci.

   Ta f la e e e i je i i ada k je b j - e acija ek g l i k a M je b j ih e acija ih jeg ih -k bi acija. P aka -k bi acija g l i k a je ak dje l i k , i e a k a i ak g ele e a, a jedi ac i ac a i e e acije ih -k bi acija.

10. **Sto su permutacije konacnog multiskupa i koliko ih ima?**
    **Na koliko nacina mozemo 20 knjiga staviti na policu ako imamo tri razlicite knjige od po 4, 7, i 9 kopija?**

    Pe acije k ac g l i k a e g ce e acije ( d - ke a a lje e d ele e a a l i k a) k je e g d bi i i l i k a. T je i ka - e acije l i k a gdje je = . B j e acija k ac g l i k a je $\frac{k!}{\lambda_1! * \lambda_2! * ... * \lambda_n!}$, gdje je k ka di al l i k a ( d b j k a i ele e a a), a $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ k a i ele e a a l i k a.

    U ada k i a l i k k ji ad i 3 k jige A, B, C, a a i $M = \{A^4, B^7, C^9\}$. Ka di al g l i k a je 20. B j e acija g l i k a je $\frac{20!}{4! \cdot 7! \cdot 9!}$.

11. **Neka su X i Y konacni skupovi. Koliko ima injekcija i bijekcija sa X u Y i uz koje uvjete?**

    *ODGOVOR GENERIRAO AI, NE ZNAM JEL TOCNO*

    I jekcija je f kcija k ja ak ele e i X id je a lici ele e i Y. B j i jekcija je $n^m$, gdje je ka di al k a Y, a ka di al k a X.

    Bijekcija je f kcija k ja ak ele e i X id je a lici ele e i Y, i k ja je jekcija. B j bijekcija je $n!$, gdje je ka di al k a Y.

12. **Definirajte slabi i jaki rastav prirodnog broja.**
    **Na koliko nacina mozemo podijeliti 12 bombona na cetvero djece ako su: a) bomboni jednaki, b) bomboni jednaki i svako dijete mora dobiti barem jedan bombon, c) bomboni razliciti?**

    Ak eki b j $n \in \mathbb{N}$ a i e ka b j $k \in \mathbb{N}$ i d ih b je a ($\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n$ ), ka e da je edje a k- ka $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ k icija b ja .

    Ak je $n \geq k$, da je edje a k- ka $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ jaki a a b ja , i ji $\binom{n-1}{k-1}$ jakih a a a b ja .

    Ak aj je e ijedi, da a ijedi i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}_0$, a da ka e da je edje a k- ka $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ labi a a b ja , i ji $\binom{n+k-1}{k-1}$ labih a a a b ja .

    a) 12 b b a e dijeli i a 4 djece a $\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3}$ aci a. b) 12 b b a e jeli a 4 djece ( i da ak dije e a d bi i ba e jeda b b ) a $\binom{12-1}{4-1} = ($ a i a. c) Ak aci e a lici e b b e k A, da je k aci a a k e dijeli i 12 b b a i g k a a ce e djece - e acija, gdje je =4, = =1 . B j aci a je $\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!}$.

## REKURZIJA

3 l caja:

1. $f(n) = c$, g je a
   - $a_n^P =$
2. $f(n) =$ Po tupnja, . $f(n) = 2n + 3$ (1. a j) ili $f(n) = 3n^2 + 2n + 1$ (2. a j)
   - a) $x_n$ li a) ije jeda d k ije a ka ak e i ic e jed ad be:
     $a_n^P =$ $^0 + a_1 \cdot n^1 + \ldots + a_m \cdot n^m$
   - b) $x$ li a) je jeda d k ije a ka ak e i ic e jed ad be:
     $a_n^P$
3. $f(n) = c$ k a e
   - a) d ije j ije a ka ak e i ic e jed ad be:
     $a_n^P$ $A$
   - b) d e je e a ka ak e i ic e jed ad be:
     $a_n^P$ $A$
4. $f(n) = c$ $n^m$ c, d, i k a e
   - a) d je da je a ka ak e i ic e jed ad be:
     $a_n^P$ $p($
   - b) d je d k a ka ak e i ic e jed ad be:
     $a_n^P$ $n^k$ $p(n) \cdot$

P i je i:

- $a_n - 2a_{n}$ $+$ $_{-2} = 3n$
  Oblike 1. ja - l caj 2.
  K ije i k ic e jed a d be $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 1$ - l caj 2-a.
- $a_n - 5a$ $_{n-2} = 3^n$
  Oblik $c \cdot$ aj 3.
  K ije i ka ak ic e jed a d be $x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -1$ - l caj 3-a.
- $a_n + a_{n-1} -$ $_{-2} = n \cdot 3^n$
  Oblik $c \cdot n^m \cdot$ l caj 4.
  K ije i ka ak e i ic e jed a d be $x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1$ - l caj 4-a.
- $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = n^2 + 7n + 12$
  Oblike li a 2. ja - l caj 2.
  K ije i ka ak e i ic e jed a d be $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$ - jeda d k ije a $(x_1)$ je jed ak jed d k ije a ada e f le $(n_1)$ - l caj 2-b.