Pitanja za usmeni ispit iz R. Mat

MATEMATICKA LOGIKA

1. **Definicija suda i operacije sa sudovima.**

   Sud (iskaz) je svaka suvisla izjavna recenica kojoj mozemo utvrditi je li istina ili laz. Sud ne moze istovremeno biti istinit i lazan. Sudove oznacavamo slovima abecede. Sudove mozemo negirati i povezivati veznicima, kako bismo dobili slozenije.

   Tako dolazimo do osnovnih logickih (Booleovih) operacija sa sudovima. Oznacavamo ih logickim veznicima (tj. simbolima $\neg$,$\wedge$, i $\vee$) i imamo 4 binarne: $\wedge$ (i, disjunkcija), $\vee$ (ili, konjunkcija), $\rightarrow$ ("ako A onda B", implikacija/kondicional), $\leftrightarrow$ ("A akko B", ekvivalencija/bikondicional), i jednu unarnu: $\neg$ ("ne", negacija/komplement).

   Dodatak: **Negiranje logickih sudova (i, ili, kondicional, bikondicional) u obliku recenica**

   Primjer sudova:

   - A: "Danas je lijep dan."
   - B: "Danas je suncan dan."

   Primjeri negacija:

   1. Negacija konjunkcije: "Danas nije lijep i suncan dan." $\overline{A \wedge B} \rightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ - "Danas nije lijep ili nije suncan dan."
   2. Negacija disjunkcije: "Danas nije lijep ili suncan dan." $\overline{A \vee B} \rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ - "Danas nije lijep i nije suncan dan."
   3. Negacija implikacije: "Ako je danas lijep dan, onda je danas suncan dan." $\overline{A \rightarrow B} \rightarrow A \wedge \overline{B}$ - "Danas je lijep dan i nije suncan dan."
   4. Negacija ekvivalencije: "Danas je lijep dan samo ako je danas suncan dan." $\overline{A \leftrightarrow B} \rightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ - "Danas je lijep dan i nije suncan dan ili danas nije lijep dan i jest suncan dan."

   Dodatak: **Jednakost formula, semanticke tablice, tautologija, primjeri tautologije**

   Logicke formule su jednake ako su im iste vrijednosti za sve vrijednosti varijabli. Oznacavamo ih sa $\equiv$.

   Semanticke tablice su tablice u kojima su u prvih n stupaca sve moguce kombinacije vrijednosti n varijabli, a u ostalim stupcima vrijednosti svih logickih veznika. U zadnjem stupcu je vrijednost cijele formule.

   Tautologija je formula koja je istinita za sve vrijednosti varijabli. Oznacavamo je sa $\top$. U semantickoj tablici tautologija ima samo vrijednost $\top$ u zadnjem stupcu.

   Primjeri tautologija:

   - $A \vee \overline{A}$
   - $A \rightarrow A$
   - $A \leftrightarrow A$
   - $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

2. **Svojstva operacija (asocijativnost, komutativnost...)**

   1. Idempotentnost:
      - $A \wedge A = A$
      - $A \vee A = A$
   2. Asocijativnost:
      - $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
      - $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
   3. Komutativnost:
      - $A \wedge B = B \wedge A$
      - $A \vee B = B \vee A$
   4. Distributivnost:
      - $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
      - $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   5. DeMorganova pravila:
      - $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
      - $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
   6. Neutralni element:
      - $A \wedge 1 = A$
      - $A \vee 0 = A$
   7. Anihilacija:
      - $A \wedge \bot = \bot$
      - $A \vee \top = \top$
   8. Komplementarnost:
      - $A \wedge \overline{A} = \bot$
      - $A \vee \overline{A} = \top$
   9. Involutivnost:
      - $\overline{\overline{A}} = A$
   10. Apsorpcija:
       - $A \wedge (A \vee B) = A$
       - $A \vee (A \wedge B) = A$

3. **Neke vazne tautologije i pravila zakljucivanja.**

   - Modus ponens: $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$
   - Modus tollens: $(A \rightarrow B) \wedge \overline{B} \rightarrow \overline{A}$
   - Zakon silogizma: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

   Pravila zakljucivanja: ???

4. **Definicija algebre sudova odnosno skupovni izraz algebre sudova.**

   Neka je B skup u kojem su istaknuta 2 razlicita elementa, "istina" (oznacavamo sa $\top$) i "laz" (oznacavamo sa $\bot$). Neka su zadane 3 operacije na B, jedna unarna: "komplementiranje", i dvije binarne: "disjunkcija" i "konjunkcija". Skup B sa ove 3 operacije naziva se Booleova algebra za sudove i oznacava $(B, \neg, {}^{\complement}, \wedge, \vee, \bot, \top)$ algebra sudova, ako zadovoljava svih 10 svojstva operacija sa sudovima.

5. **Definicija formule racuna sudova, skupa izvodnica, te baze racuna sudova.**

   Formula racuna sudova je svaka formula koja se moze dobiti iz baze racuna sudova pomocu logickih veznika. Ona je dalje sastavljena od sudova i logickih veznika, i moze se dalje rastavljati na podformule sve dok se ne dodje do atomarnih sudova.

   Sustav izvodnica (generatora) racuna sudova je skup Booleovih operacija racuna sudova (s n varijabli) pomocu kojih se moze prikazati bilo koja formula racuna sudova.

   Baze racuna sudova su minimalni sustavi izvodnica racuna sudova, tj. sustavi izvodnica ciji nikoji pravi podskup vise nije sustav izvodnica. Npr. $\{\wedge, \vee, \neg\}$ je sustav izvodnica racuna sudova, ali nije baza, jer postoje podskupovi tog skupa koji su opet sustav izvodnica (npr. $\{\wedge, \neg\}$).

6. **Definicija Booleove algebre.**

   Neka je B skup u kojem su istaknuta 2 razlicita elementa, "nula" (oznacavamo 0) i "jedinica" (oznacavamo 1). Neka su zadane 3 operacije na B, jedna unarna: "komplementiranje", i dvije binarne: "mnozenje" i "zbrajanje". Skup B sa ove 3 operacije naziva se Booleova algebra i oznacava $(B, \neg, \cdot, +, 0, 1)$ algebra sudova, ako zadovoljava svih 10 svojstva Booleove algebre.

   Napomena: Booleova algebra koristi ista svojstva operacija kao i algebra sudova i algebra skupova.

   Napomena: Bilo koja algebra se definira pomocu uredjene sestorke kao sto pise iznad. Tako se definira i algebra sudova i skupova.

7. **Booleove funkcije.**

   Takodjer se naziva Booleova algebra u n varijabli.
   Neka je $B = \{0, 1\}$ i $(B, \neg, \cdot, +, 0, 1)$ Booleova algebra. Booleova funkcija n varijabli je bilo koja funkcija $F : B^n \rightarrow B$. Svaku Booleovu funkciju mozemo zadati tablicom svih kombinacija nula i jedinica ("ulaza") i vrijednosti funkcije ("izlaza"). Broj svih mogucih Booleovih funkcija n varijabli je 2^{2^n}.

SKUPOVI

1. **Sto je skup, kako ga zapisujemo, koje su operacije, sto je (pravi) podskup, kojih je 9 svojstava operacija**

   Skup je jedan od fundamentalnih pojmova u matematici i on se ne definira nego se uzima kao jedna od osnovnih temelja. Skup se cesto opisuje kao kolekcija objekata. Objekti skupa se zovu elementi skupa. Skupovi se oznacavaju velikim slovima, a elementi skupa malim slovima. Skupove mozemo zapisati putem nabrajanja, npr. $A = \{1, 2, 3\}$, ili putem zadavanja nekog svojstva, npr. $B = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leq x \leq 3\}$.

   Operacije sa skupovima su:

   - Unija: $A \cup B = \{x \,:\, x \in A \,\vee\, x \in B\}$
   - Presjek: $A \cap B = \{x \,:\, x \in A \,\wedge\, x \in B\}$
   - Komplement: $\overline{A} = \{x \,:\, x \in U \,\wedge\, x \notin A\}$
   - Razlika: $A \setminus B = \{x \,:\, x \in A \,\wedge\, x \notin B\}$
   - Simetricna razlika: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
   - Kartezijev produkt: $A \times B = \{(a, b) \,:\, a \in A \,\wedge\, b \in B\}$
   - Podskup: $A \subseteq B \,\leftrightarrow\, \forall x \,(x \in A \,\rightarrow\, x \in B)$
   - Pravi podskup: $A \subset B \,\leftrightarrow\, A \subseteq B \,\wedge\, A \neq B$

   Podskup je skup koji je sadrzan u nekom drugom skupu, a moze biti jednak tom skupu.
   Pravi podskup je podskup koji nije jednak skupu. Na primjer:

   $$A = \{1, 2, 3\} \tag{1}$$
   $$B = \{1, 2, 3\} \tag{2}$$
   $$C = \{1, 2, 3, 4\} \tag{3}$$
   $$A \subseteq B \tag{4}$$
   $$A \subset C \tag{5}$$

   Kod skupova vrijede istih 10 svojstava kao i kod Booleovih algebri.

2. **Kada su dva skupa jednaka?**
   Jesu li skupovi {1,2,3} i {2,1,3} jednaki?

   Dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente. Formalnije se kaze da su dva skupa A i B jednaka akko vrijedi $A \subseteq B \,\wedge\, B \subseteq A$. Pisemo: $A = B$.

   Skupovi {1,2,3} i {2,1,3} su jednaki jer imaju iste elemente.

BINARNE RELACIJE

1. **Definirajte binarnu relaciju na skupu X i svojstva refleksivnosti, simetricnosti, antisimetricnosti i tranzitivnosti.**
   Dajte primjer relacija koji zadovoljavaju po jednu od ovih uvjeta.

   Homogena binarna relacija na skupu X je svaki podskup skupa $X \times X$. Ako je $R \subseteq X \times X$ binarna relacija na skupu X, onda za svaki par $(x, y) \in R$ kazemo da je x u relaciji R s y, i pisemo xRy.

   Binarna relacija R na skupu X je:

   - Refleksivna: akko za svaki $x \in X$ vrijedi xRx.
   - Simetricna: akko za svaki $x, y \in X$ vrijedi $xRy \ \rightarrow \ yRx$.
   - Antisimetricna: akko za svaki $x, y \in X$ vrijedi $xRy \ \wedge \ yRx \ \rightarrow \ x = y$.
   - Tranzitivna: akko za svaki $x, y, z \in X$ vrijedi $xRy \ \wedge \ yRz \ \rightarrow \ xRz$.

   Imamo skup $A = \{1, 2, 3\}$. Primjeri relacija koje zadovoljavaju po jednu od ovih svojstava:

   - Refleksivna: $R = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$
   - Simetricna: $R = \{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2)\}$
   - Antisimetricna: $R = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$
   - Tranzitivna: $R = \{(1,2),\ (2,3),\ (1,3)\}$

2. **Definirajte relaciju ekvivalencije, klasu ekvivalencije, i kvocijentni skup.**
   Dajte primjer jedne relacije ekvivalencije, i odredite joj klasu ekvivalencije, i kvocijentni skup.

   Kazemo da je binarna relacija R na skupu X ekvivalencija akko je refleksivna, simetricna i tranzitivna.

   Klasa ekvivalencije elementa x je skup svih elemenata koji su u relaciji ekvivalencije s x. Pisemo $[x]$, a on je definiran kao $[x] = \{y \in X \ : \ xRy\}$.

   Kvocijentni skup skupa X po relaciji ekvivalencije R je skup svih klasa ekvivalencije. Pisemo X/R, a on je definiran kao $X/R = \{[x] \ : \ x \in X\}$.

   Imamo skup $A = \{1, 2, 3\}$. Primjer relacije ekvivalencije: $R = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (1,2),\ (2,1)\}$. Klasa ekvivalencije elementa 1: $[1] = \{1, 2\}$. Kvocijentni skup skupa A po relaciji ekvivalencije R: $A/R = \{\{1,2\},\ \{3\}\}$.

3. **Definirajte relaciju parcijalnog uredjaja i relaciju totalnog uredjaja.**
   Dajte primjer za jedno i drugo i nacrtajte Hasseov dijagram.

   Binarna relacija R na skupu X je:

   - Parcijalni uredjaj: akko je refleksivna, antisimetricna i tranzitivna.
   - Totalni uredjaj: akko je parcijalni uredjaj i kada su dva elementa medjusobno usporediva.

   Imamo skup $A = \{1, 2, 3\}$. Primjeri relacija koje zadovoljavaju po jednu od ovih svojstava:

   - Parcijalni uredjaj: operacija $\leq$ na skupu $\mathbb{N}$.
   - Totalni uredjaj: operacija $\leq$ na skupu $\mathbb{Z}$.

KOMBINATORIKA

1. **Navedi osnovna pravila prebrojavanja.**

2. **Dirichletov princip**

   Ako n predmeta bilo kako rasporedimo u n-1 kutija, onda ce barem jedna od njih sadrzavati barem dva predmeta.

   Poopceno: Ako je m predmeta bilo kako razmjesteno u n kutija, onda bar jedna kutija sadrzi bar $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmeta.

3. **Sto je podskup, a sto uredjena n-torka**

   Podskup je svaki skup koji je sadrzan u nekom drugom skupu. Npr. skup {1,2} je podskup skupa {1,2,3}.

   Uredjena n-torka je kolekcija elemenata u kojoj je bitan redoslijed elemenata. Npr. (1,2) je uredjena 2-torka (dvojka), a (2,1) je druga uredjena 2-torka (dvojka). U n-torkama je dozvoljeno da se elementi ponavljaju. Npr. (1,1) je uredjena 2-torka (dvojka).

4. **Napisi FUI (formulu ukljucivanja i iskljucivanja)**

   Ako imamo konacne skupove A_1, A_2, i A_3, onda vrijedi:

   - $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
   - $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

   Poopceno: Ako imamo konacne skupove A_1, A_2, ..., A_n, onda vrijedi:

   `$$ |A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{i=1}^n|A_i|-\sum_{1\le i`

5. **Sto su kombinacije i permutacije?**

   Kombinacija bez ponavljanja reda r (ili r-kombinacija) je r-clani podskup n-clanog skupa. Broj r-kombinacija n-clanog skupa je $\binom{n}{r}$.

   Kombinacija sa ponavljanjem reda r (ili r-kombinacija) je r-clani podmultiskup n-clanog skupa. Broj r-kombinacija sa ponavljanjem n-clanog skupa je $\binom{n+r-1}{r}$.

   Permutacija bez ponavljanja je n-torka sastavljena od elemenata n-clanog skupa. Broj permutacija n-clanog skupa je $n!$.

   Permutacija sa ponavljanjem je n-torka sastavljena od elemenata n-clanog multiskupa. Broj permutacija n-clanog multiskupa je $\frac{m!}{\lambda_1! * \lambda_2! * \ldots * \lambda_n!}$, gdje su $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ kratnosti elemenata multiskupa, a m je kardinalnost multiskupa (odnosno zbroj kratnosti elemenata).

   Permutacija je posebni slucaj r-permutacije (takodjer zvana varijacija), gdje je r=n. Broj r-permutacija n-clanog skupa je $\frac{n!}{(n-r)!}$.

6. **Sto su r-permutacije n-clanog skupa i koliko ih ima?**
   Na koliko nacina moze 10 ljudi sesti ako na raspolaganju imaju 20 razlicitih stolica?

   R-permutacije n-clanog skupa su sve moguce permutacije (odnosno r-torke sastavljene od elemenata skupa) koje se mogu dobiti iz n-clanog skupa. Broj r-permutacija n-clanog skupa je $\frac{n!}{(n-r)!}$

   Na 20 nacina moze 1. osoba sjesti na neku od 20 stolica. Na 19 nacina moze 2. osoba sjesti na neku od 19 preostalih stolica... Na 11 nacina moze 10. osoba sjesti na neku od 11 preostalih stolica. Ukupan broj nacina je 20*19*...*11 = 20!/10!.

7. **Sto su permutacije n-clanog skupa i koliko ih je?**
   Na koliko nacina moze 5 ljudi sjesti na 5 stolica?

   Permutacije n-clanog skupa su sve moguce permutacije (odnosno n-torke sastavljene od elemenata skupa) koje se mogu dobiti iz n-clanog skupa. Broj permutacija n-clanog skupa je $n!$.

   5 ljudi moze sjesti na 5 stolica na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ nacina.

8. **Sto su r-kombinacije n-clanog skupa i koliko ih ima?**
   Na koliko nacina mozemo od 5 zena i 7 muskaraca odabrati 2 zene i 3 muskarca?

   R-kombinacije n-clanog skupa su sve moguce kombinacije (odnosno r-clani podskupovi skupa) koje se mogu dobiti iz n-clanog skupa. Broj r-kombinacija n-clanog skupa je $\binom{n}{r}$.

   Od 5 zena mozemo odabrati 2 na $\binom{5}{2} = 10$ nacina. Od 7 muskaraca mozemo odabrati 3 na $\binom{7}{3} = 35$ nacina. Ukupan broj nacina je $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot 35 = 350$ nacina.

9. **Sto je multiskup? Sto su r-permutacije multiskupa?**
   Koliko se osmoslovnih rijeci moze naciniti od 30 slova abecede?
   Moze li se ta formula primijeniti u zadatku: Koliko ima 3-permutacija multiskupa M={a,a,b,c}? Zasto?

   Multiskup ili konacni multiskup je skup u kojem se elementi mogu ponavljati. Kazemo da je n-clani multiskup onaj gdje se prvi clan x_1 ponavlja λ_1 puta, drugi clan x_2 λ_2 puta, itd. sve do zadnjeg clana x_n koji se ponavlja λ_n puta, i gdje je zbroj kratnosti elemenata $\lambda_1 + \lambda + 2 + \ldots + \lambda_n = n$. Multiskup M oznacavamo sa $M = \{x_1^{\lambda_1},\ x_2^{\lambda_2},\ \ldots,\ x_n^{\lambda_n}\}$.

   R-permutacije multiskupa (takodjer zvane r-permutacije sa ponavljanjem) su sve moguce permutacije (odnosno r-torke sastavljene od elemenata multiskupa) koje se mogu dobiti iz multiskupa.

   Od 30 slova abecede mozemo napraviti $30 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 30 = 30^8$ osmoslovnih rijeci.

   Ta formula se ne moze primjeniti u tom zadatku jer broj r-permutacija nekog multiskupa M je zbroj svih permutacija svih njegovih r-kombinacija. Posto svaka r-kombinacija tog multiskupa je takodjer multiskup, i ne znamo kratnosti svakog elementa, moramo pojedinacno izracunati sve permutacije svih r-kombinacija.

10. **Sto su permutacije konacnog multiskupa i koliko ih ima?**
    Na koliko nacina mozemo 20 knjiga staviti na policu ako imamo tri razlicite knjige od po 4, 7, i 9 kopija?

    Permutacije konacnog multiskupa su sve moguce permutacije (odnosno n-torke sastavljene od elemenata multiskupa) koje se mogu dobiti iz multiskupa. To je isto kao r-permutacije multiskupa gdje je r=n. Broj permutacija konacnog multiskupa je $\frac{k!}{\lambda_1! * \lambda_2! * \ldots * \lambda_n!}$, gdje je k kardinalnost multiskupa (odnosno zbroj kratnosti elemenata), a $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ kratnosti elemenata multiskupa.

    U zadatku imamo multiskup koji sadrzi 3 knjige A, B, C, sa zapisom $M = \{A^4, B^7, C^9\}$. Kardinalnost ovog multiskupa je 20. Broj permutacija tog multiskupa je $\frac{20!}{4! \cdot 7! \cdot 9!}$.

11. **Neka su X i Y konacni skupovi. Koliko ima injekcija i bijekcija sa X u Y i uz koje uvjete?**

    ODGOVOR GENERIRAO AI, NE ZNAM JEL TOCNO

    Injekcija je funkcija koja svakom elementu iz X pridruzuje razlicit element iz Y. Broj injekcija je n^m, gdje je n kardinalnost skupa Y, a m kardinalnost skupa X.

    Bijekcija je funkcija koja svakom elementu iz X pridruzuje razlicit element iz Y, i koja je surjekcija. Broj bijekcija je $n!$, gdje je n kardinalnost skupa Y.

12. **Definirajte slabi i jaki rastav prirodnog broja.**
    Na koliko nacina mozemo podijeliti 12 bombona na cetvero djece ako su: a) bomboni jednaki, b) bomboni jednaki i svako dijete mora dobiti barem jedan bombon, c) bomboni razliciti?

    Ako neki broj $n \in \mathbb{N}$ napisemo kao zbroj $k \in \mathbb{N}$ prirodnih brojeva ($\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n$), kazemo da je uredjena k-torka $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ kompozicija broja n.

    Ako je $n \geq k$, onda je uredjena k-torka $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ jaki rastav broja n, i postoji $\binom{n-1}{k-1}$ jakih rastava broja n.

    Ako taj uvjet ne vrijedi, onda mora vrijediti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}_0$, pa onda kazemo da je uredjena k-torka $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ slabi rastav broja n, i postoji $\binom{n+k-1}{k-1}$ slabih rastava broja n.

    a) 12 bombona mozemo podijeliti na 4 djece na $\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3}$ nacina. b) 12 bombona mozemo podijeliti na 4 djece (s tim da svako dijete mora dobiti barem jedan bombon) na $\binom{12-1}{4-1} = \binom{11}{3}$ nacina. c) Ako oznacimo sve razlicite bombone skupom A, onda je skup nacina na koji mozemo podijeliti 12 bombona iz tog skupa na cetvero djece r-permutacija, gdje je r=4, a n=|A|=12. Broj nacina je $\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!}$.

REKURZIJA

3 slucaja:

1. $f(n) = c$, gdje je c konstanta
   - $a_n^P = A$
2. $f(n) =$ Polinom n-tog stupnja, npr. $f(n) = 2n + 3$ (1. stupanj) ili $f(n) = 3n^2 + 2n + 1$ (2. stupanj)
   - a) x_n (od zadanog polinoma) nije jedan od korijenova karakteristicne jednadzbe:
     $a_n^P = p(n) = a_0 \cdot n^0 + a_1 \cdot n^1 + \ldots + a_m \cdot n^m$
   - b) x_n (od zadanog polinoma) je jedan od korijenova karakteristicne jednadzbe:
     $a_n^P = n^k \cdot p(n)$
3. $f(n) = c \cdot d^n$, gdje su c i d konstante
   - a) d nije jedan od korijenova karakteristicne jednadzbe:
     $a_n^P = A \cdot d^n$
   - b) d je jedan od korijenova karakteristicne jednadzbe:
     $a_n^P = A \cdot n^k \cdot d^n$
4. $f(n) = c \cdot n^m \cdot d^n$, gdje su c, d, i m konstante
   - a) d nije jedan od korijenova karakteristicne jednadzbe:
     $a_n^P = p(n) \cdot d^n$
   - b) d je jedan od korijenova karakteristicne jednadzbe:
     $a_n^P = n^k \cdot p(n) \cdot d^n$

Primjeri:

- $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 3n$
  Oblike polinoma 1. stupnja - slucaj 2.
  Korijeni karakteristicne jednandzbe su $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 1$ - slucaj 2-a.
- $a_n - 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n$
  Oblik $c \cdot d^n$ - slucaj 3.
  Korijeni karakteristicne jednandzbe su $x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -1$ - slucaj 3-a.
- $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = n \cdot 3^n$
  Oblik $c \cdot n^m \cdot d^n$ - slucaj 4.
  Korijeni karakteristicne jednandzbe su $x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -1$ - slucaj 4-a.
- $a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = n^2 + 7n + 12$
  Oblike polinoma 2. stupnja - slucaj 2.
  Korijeni karakteristicne jednandzbe su $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$ - jedan od korijenova (x_1) je jednak jednom od korijenova zadane formule (n_1) - slucaj 2-b.