NIZOVI I REDOVI

Vježbe 9

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Broj a_n nazivamo općim članom niza.
Realan broj L je granična vrijednost ili limes niza (a_n) ako vrijedi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

Pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
Niz može imati najviše jedan limes.Ako niz ima limes kažemo da konvergira ,a ako nema tada on divergira.
Niz (a_n) divergira prema $+\infty$ ako vrijedi:

$$(\forall r > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow a_n > r$$

Niz (a_n) divergira prema $-\infty$ ako vrijedi:

$$(\forall r < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow a_n < r$$

Primjer. Ispitajte konvergenciju nizova:

- $$a_n = \frac{2n^3 - 1}{3 - n^3}$$

- $$a_n = \frac{(n+1)(3^n + 1)}{2 \cdot 3^n + 1}$$

Red realnih brojeva je uredjeni par $((a_n), (S_k))$ koji se sastoji od nizova (a_n) i (S_k), pri čemu je $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ koju nazivamo k-ta parcijalna suma.
Red zapisivamo kao $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
Primjer. Ispišite članove reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$$

NUŽAN UVJET KONVERGENCIJE. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Kriteriji konvergencije:

- Poredbeni kriterij
- D'Alembertov kriterij
- Cauchyev kriterij
- Leibnizov kriterij
- Raabeov kriterij

D'Alembertov kriterij.Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red pozitivnih članova. Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

onda vrijedi:

1. Ako je $d < 1$ red konvergira
2. Ako je $d > 1$ red divergira
3. Ako je $d = 1$ nema odluke

1. Ispitajte konvergenciju redova:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$$

Cauchyev kriterij.Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red nenegativnih članova. Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$$

onda vrijedi:

1. Ako je $c < 1$ red konvergira
2. Ako je $c > 1$ red divergira
3. Ako je $c = 1$ nema odluke

2.Ispitajte konvergenciju redova:

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$$

Raabeov kriterij. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red pozitivnih članova. Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = g$$

onda vrijedi:

- Ako je $g > 1$ red konvergira
- Ako je $g < 1$ red divergira
- Ako je $g = 1$ nema odluke

Raabeov kriterij koristimo kad zakaže D'Alembertov kriterij.
1. Ispitajte konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Red potencija. Red funkcija oblika

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ..$$

ili kraće

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

zovemo redom potencija gdje su a_n njegovi koeficijenti, a x_0 realna konstanta.
Radijus konvergencije reda potencija je broj:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ili

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergira apsolutno za svaki $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, a divergira za svaki $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, \infty)$.
Interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ naziva se interval konvergencije reda potencija.
1. Odredi radijus i interval konvergencije redova:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$$

Taylorov red. Neka funkcija f ima na intervalu (a, b) derivacije proizvoljnog reda. Tada za proizvoljnu točku x_0 iz (a, b) i za svaki x iz (a,b) vrijedi:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Ovaj red potencija zove se Taylorov red u točki x_0.
Ako je $x_0 = 0$ tada imamo Maclaurenov red.
1. Odredite razvoj funkcije $\sin x$ u red po potencijama od x i odredite područje konvergencije.
2. Odredite razvoj funkcije $e^{\frac{x}{2}}$ u red po potencijama od $x - 2$ i odredite područje kovergencije reda.