Tarea 1. Solución de ecuaciones no lineales.

1. El TFC dice: Todo polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n ceros (contando multiplicidades) en el plano complejo. ¿Todo polinomio real de grado n tiene n ceros reales? ¿funciones del tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un número infinito de ceros?
2. Si $a = -1$ y $b = 1$, ¿cuántos pasos del método de bisección se necesitan para determinar la raíz con un error a lo más de $\frac{1}{2} \times 10^{-8}$?
3. Denote los intervalos sucesivos que surgen en el método de bisección por $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2]$ y así sucesivamente.
   a. Muestre que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ y que $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$.
   b. ¿Puede suceder que $a_0 = a_1 = a_2 \cdots$?
4. Realice estos ejercicios con una rutina eligiendo el programa que guste y lo agrega en la tarea.
   a. Determine la raíz real de $\mathrm{x}^{10} = 1$ usando el método de bisección con valores iniciales 0 y 1.3
   b. El mismo ejercicio con los mismos valores iniciales pero usando el método de falsa posición.
   c. Analice la solución de $\mathrm{x}^{10} = 1$ mediante el método de newton con valor inicial de 0.5
5. Use a) el algoritmo de punto fijo, b) el método de newton para determinar una raíz de $f(x) = -0.9x^2 + 1.7x + 2.5$ usando $x_0 = 0$.
6. Con el método de 'divide y promedia', un antiguo método para aproximar la raíz cuadrada de cualquier número positivo a, se puede formular como
$$x = \frac{x + {}^{a}/_{x}}{2}$$
   Demuestre que esta fórmula está basada en el método de Newton.
7. Deduzca una fórmula para el método de Newton para la función $F(x) = {}^{f(x)}\Big/_{f'(x)}$, donde $f(x)$ es una función con ceros simples que es tres veces continuamente derivable. Sug. Asegúrese que F cumple las condiciones requeridas.
8. Investigue el método de la secante y muestre que su iteración también se puede escribir como
$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$
   ¿se parece a la fórmula de falsa posición? Explique las diferencias entre estos dos métodos.
9. Realice 3 iteraciones de punto fijo para aproximar una raíz de $q(x) = x^3 - 13x + 18$ mediante dos funciones g distintas.
10. Evalúe el número
$$s = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots}}}$$
   Sug. Considere $g(x) = \sqrt[3]{6 + x}$, encuentre un punto fijo de esta función con valor inicial 0.