Actividad 1: Preparando documentos científicos con LATEX

Martin Alejandro Paredes Sosa

Enero 2016

1. Introducción

Las matemáticas de los péndulos son generalmente complicadas. Se pueden asumir suposiciones simplificadas, entrando entonces en el caso del péndulo simple. De esta forma las ecuaciones de movimiento pueden ser resueltas analíticamente para oscilaciones con amplitudes pequeñas.

2. Péndulo Simple

Es una idealización de un "péndulo real"pero aislado utilizando las siguinetes supuestos:

- El cable o cuerda del péndulo se considera sin masa, no esxtendible y siempre tensa.
- Es considerada una masa puntual.
- El movimiento es bidimensional(dos direcciones) y sigue al movimiento de un arco.
- EL movimiento no pierde energía contra la fricción a o resistencia al aire.
- El campo gravitacional es uniforme.
- El soporte no se mueve.

La ecuación diferencial que representa el movimiento del péndulo es la siguiente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0 \tag{1}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad, l la longitud del péndulo y θ es el ángulo de desplazamiento.

2.1. Derivación de “Fuerza”de la ecuación 1

Usando como referencia a la Figura 1, que muestra las fuerzas que actuan sobre el péndulo. el camino que recorre el péndulo es un arco. El ángulo θ se mide en radianes lo cual es crucial. La flecha azul representa la fuerza gravitacional, las flechas moradas son la misma fuerza nomas que descompuestas en sus diferentes componentes paralelas y perpendiculares al movimiento en el instante. La dirección de la velocidad instantánea siempre es sobre el eje rojo, que se considera el eje tangencial porque su dirección siempre es tangencial al circulo.

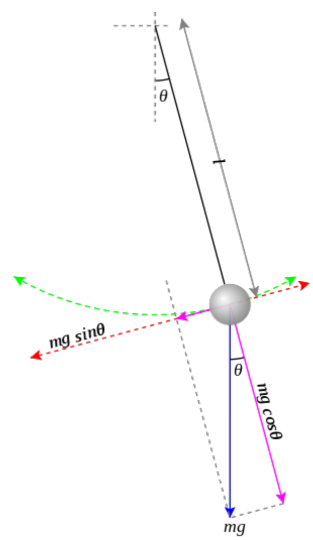

Figura 1: Diagrama de fuerzas del péndulo simple [1].

Considerando la segunda ley de Newton,

$$F = ma$$

donde F es la suma de fuerzas en un objeto, m es la masa y a es la aceleración. Porque solo consideramos con los cambios en la velocidad y porque el péndulo esta forzado a seguir un camino circular, aplicamos la ecuación de Newton al eje tangencial solamente. La flecha violeta representa la componente de la fuerza gravitacional del eje tangencial y la trigonométria puede ser usada para determinar su magnitud. Así,

$$F = -mg \sin\theta = ma$$

$$a = -g \sin\theta$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie. El signo negativo implica que θ y a siempre apuntan en direcciones opuestas. Esto tiene sentido porque cuando

un péndulo oscila más a la izquierda, se espera que su aceleración de regreso a la derecha.
Esta aceleración lineal a a lo largo del eje rojo puede relacionarse al cambio en el ángulo θ por las formulas de cambio de longitud de arco; s es longitud de arco.

$$s = \ell\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

así:

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}g\sin\theta = 0$$

2.2. Derivación de "Torque"de la ecuación 1

La ecuación (1) puede ser obtenida dos definiciones de torque.

$$\tau = r \times F = \frac{dL}{dt}$$

Primero hay que definir el torque de un péndulo usando la fuerza dada por la gravedad.

$$\tau = l \times F_g$$

donde l es el vector longitud del péndulo y F_g es la fuerza de la gravedad.
Por el momento solo consideremos la magnitud del torque en el péndulo.

$$|\tau| = -mgl\sin\theta$$

donde m es la masa del péndulo, g la aceleración de la gravedad, l es la longitud del péndulo y θ es el ángulo entre la longitud del vector y la fuerza de la gravedad.
Sigue reescribir momento angular.

$$L = r \times p = mr \times (\omega \times r).$$

Otra vez solo consideremos la magnitud del momento angular.

$$|L| = mr^2\omega = ml^2\frac{d\theta}{dt}$$

ahora es momento de derivar

$$\frac{d}{dt}|L| = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

De acuerdo a $\tau = \frac{dL}{dt}$, podemos obtener mediante la comparación de las magnitudes

$$-mgl \sin\theta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

asi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} g \sin\theta = 0$$

el mismo resultado obtenido mediante el análisis de fuerzas.

2.3. Derivación de "Energía"de la ecuación 1●

También se puede obtener mediante los principios de la conservación de la energía mecánica: cualquier objeto cayendo una distancia vertical h va adquirir energía cinética igual a la que se pierde en la caída. En otras palabras, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética.

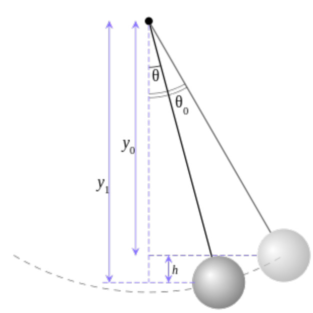

Figura 2: Trigonometría de un péndulo simple gravitacional [2].

El cambio de energía potencial esta dada por

$$\Delta U = mgh$$

el cambio en la energía cinética (cuerpo inicia en el reposo) esta dada por

$$\Delta = \frac{1}{2} mv^2$$

Dado que no se pierde energía, la ganancia en uno debe ser igual a la perdida en el otro

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh$$

el cambio en la velocidad para un cambio dado en la altura se puede

$$v = \sqrt{2gh}$$

Utilizando la formula de longitud de arco anterior, esta ecuación puede reescribirse en términos de $\frac{d\theta}{dt}$

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\ell}\sqrt{2gh}$$

h es la distancia vertical que el péndulo cae. Viendo la Figura 2, que representa la trigonometría de un péndulo simple. Si el péndulo comienza a oscilar a partir de un ángulo θ_o inicial, entonces y_o, la distancia vertical desde el tornillo, esta dada por

$$y_o = \ell\cos\theta_o$$

similar para y_1, obtenemos

$$y_1 = \ell\cos\theta$$

luego h es la diferencia de las dos

$$h = \ell(\cos\theta - \cos\theta_o)$$

En términos de $\frac{d\theta}{dt}$, nos da

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_o)} \tag{2}$$

Esta ecuación es conocida como la *primeraintegraldemovimiento*, la cual da la velocidad en términos de la ubicación y incluye una constante de integración relacionada al desplazamiento inicial (θ_o). Podemos diferenciar, mediante la aplicación de la regla de la cadena, con respecto al tiempo para obtener aceleración

$$\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_o)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/l)\sin\theta}{\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_o)}}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(2g/l)\sin\theta}{\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_o)}}\sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_o)} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}g\sin\theta = 0$$

el mismo resultado obtenido mediante el análisis de fuerzas.

3. Aproximación con ángulo pequeño

La ecuación diferencial dada anteriormente no es simple de resolver y no existe solución que pueda ser escrita en términos de funciones elementales. Pero, si se pone restricción al tamaño de la amplitud de la oscilación nos permite encontrar una solución sencilla. Si se asume que el angulo es mucho menor a un radian, o

$$\theta \ll 1$$

luego se sustituye en (1) usando la aproximación de ángulo pequeño,

$$\sin\theta \approx \theta$$

se obtiene la ecuación de un oscilador armónico,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

El error dado por la aproximación es de orden θ^3.

Dado la condición inicial $\theta(0) = \theta_0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$, la solución es:

$$\theta(t) = \theta_o \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \qquad \theta_o \ll 1$$

El movimiento es un movimiento armónico simple donde θ_o es la semi-amplitud de la oscilación (este es el máximo angulo entre la cuerda del péndulo y la vertical). El periodo del movimiento, el tiempo para completar una oscilación es:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \theta_o \ll 1$$

a lo que se le conoce como la ley de Christiaan Huygens para el periodo. Note que el ángulo debajo de la aproximación del pequeño ángulo, el periodo es independiente de la amplitud θ_o; esta es la característica de isocronismo que Galileo descubrió.

3.1. Regla de oro para la longitud del péndulo

$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ puede ser expresada como $\ell = \frac{g}{\pi^2} \times \frac{T_o^2}{4}$

Si las unidades SI son usadas($\frac{m}{s}$), y asumimos que las mediciones se hacen en la superficie de la tierra, donde g $\approx 9.81\frac{m}{s^2}$, y $g/\pi^2 \approx 1$. Por lo tanto, una aproximación relativamente razonable para la longitud y el periodo son,

$$\ell \approx \frac{T_o^2}{4}$$

$$T_o \approx 2\sqrt{\ell}$$

donde T_o el numero en segundos entre dos pulsaciones, y ℓ se mide en metros.

4. Periodo-amplitud arbitrario

Para amplitudes más allá de la aproximación de una ángulo pequeño, se puede calcular el período exacto invirtiendo la ecuación para velocidad angular obtenida a partir del método de energía(Eq.2),

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_o}}$$

y luego integrando sobre un ciclo completo,

$$T = t(\theta_o \to 0 \to -\theta_o \to 0 \to \theta)$$

o dos veces la mitad del ciclo

$$T = 2t(\theta_o \to 0 \to -\theta_o)$$

o 4 veces un cuarto de ciclo

$$T = t(\theta_o \to 0)$$

Lo que lleva a

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_o} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_o}} d\theta$$

Notese que la integral diverge cuando θ_o se aproxima a la vertical

$$\lim_{\theta_o \to \pi} T = \infty$$

de manera que un péndulo con la energia suficiente para ir a la vertical, no pueda llegar.

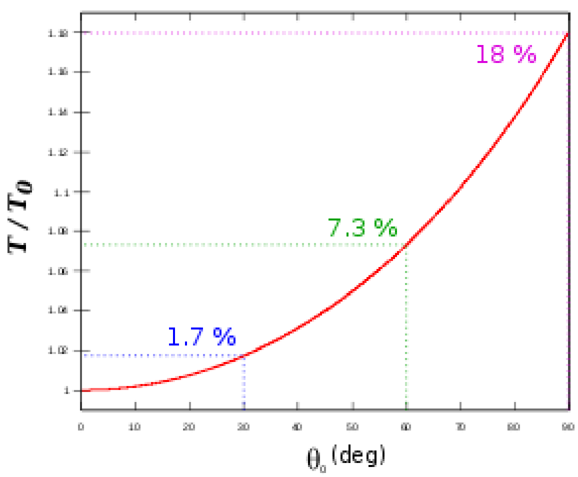

Figura 3: Desviación del "verdadero"periodo de un péndulo de la aproximación del ángulo pequeño del periodo. "Verdadero"valor se obtuvo usando Matlab para evaluar numéricamente la integral elíptica [3].

Esta integral se puede reescribir en términos de integrales elípticas como

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} F\left(\frac{\theta_o}{2}, \csc\frac{\theta_o}{2}\right)\csc\frac{\theta_o}{2}$$

donde F es la integral elíptica incompleta de primer tipo definida por

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} du$$

o mas concisamente por la sustitución $\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_o}{2}}$ expresando θ en términos de u,

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K\left(\sin\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\right) \tag{3}$$

donde K es la integral elíptica completa del primer tipo definida por

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} du$$

Para la comparación de la aproximación a la solución completa, considere el periodo de un péndulo de longitud 1 m en la Tierra(g=9.80665 m/s^2) con ángulo inicial de 10 grados es

$$4\sqrt{\frac{1m}{g}} K\left(\sin^2\left(\frac{10^\circ}{2}\right)\right) \approx 2.0102s$$

la aproximación lineal da

$$2\pi\sqrt{\frac{1m}{g}} \approx 2.0064s$$

La diferencia entre los dos valores es menos del 0.2 %, es mucho menor que la causada por la vibración de g con la ubicación. A partir de aquí hay muchas formas de proceder para calcular la integral elíptica:

4.1. Solución del polinomio de Legendre de la integral elíptica

Dado (3) y la solución del polinomio de Legendre para integrales elípticas:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} + \cdots\right\}$$

donde $n!!$ denota el doble factorial, una solución exacta al periodo del péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \cdots\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\theta_o}{2}\right)\right].$$

La figura 4 muestra los errores relativos utilizando la serie de potencias. T_o es la aproximación lineal y T_2 a T_{10} incluyen respectivamente los términos desde la segunda a la décima potencia.

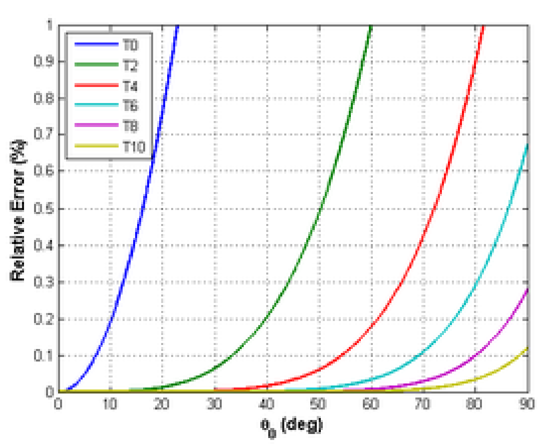

Figura 4: Errores relativos usando serie de potencias[4].

4.2. Serie de potencias para la integral elíptica

Otra formulación de la solución anterior se puede encontrar si la siguiente serie de Maclaurin:

$$\sin\frac{\theta_o}{2} = \frac{1}{2}\theta_o - \frac{1}{48}\theta_o^3 + \frac{1}{3840}\theta_o^5 - \frac{1}{645120}\theta_o^7 + \cdots.$$

es usada en la solución del polinomio de Legendre anteriormente. La serie de potencias resultante es [5]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_o^2 + \frac{11}{3072}\theta_o^4 + \frac{173}{737280}\theta_o^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta_o^8 + \frac{1319183}{951268147200}\theta_o^{10} + \cdots\right)$$

4.3. Solución media aritmético-geométrica para la integral elíptica

Dada (3) y la solución media aritmético-geométrica para la integral elíptica:

$$K(k) = \frac{\pi/2}{M(1-k, 1+k)}$$

donde $M(x, y)$ es la media aritmético-geométrica de x y y.
Esto da una alternativa y una formula de rápida convergencia para el periodo [6]

$$T = \frac{2\pi}{M(1, \cos(\theta_o/2))}\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

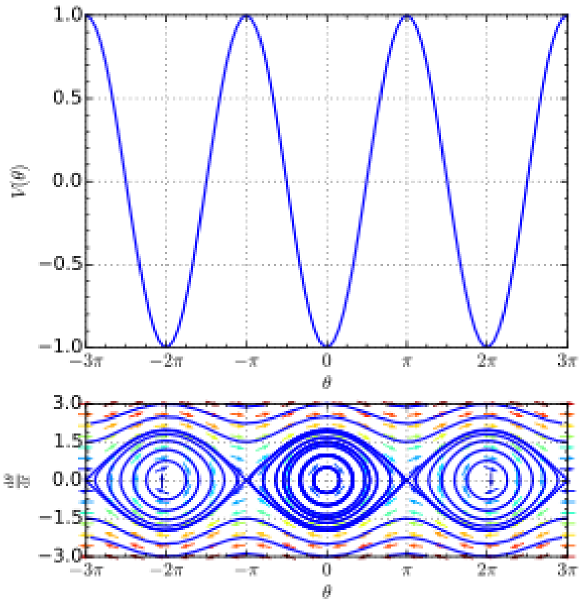

Figura 5: Energía potencial y el retrato de fase de un péndulo simple. Tenga en cuenta que el eje x, siendo el ángulo, se envuelve sobre si mismo después de cada 2π radianes [7].

Referencias

[1] Krishnavedala (2013), *A simple pendulum in gravity and the forces acting on it*. Recuperado el 19 de enero de 2016 de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/66/Pendulum_gravity.svg

[2] Krishnavedala (2012), *Simple pendulum*. Recuperado el 19 de enero de 2016 de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Simple_pendulum_height.svg

[3] Damato, A (2012), *Pendulum period*. Recuperado el 19 de enero de 2016 de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Pendulum_period.svg

[4] Ferreire, R. (2007), *Pendulum Relative Error 90a*. Recuperado el 19 de enero de 2016 de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/6/60/Pendulum_Rel_Error90a.png

[5] Nelson, R; Olsson, M. G. (1986), *The pendulum-Rich physics from a simple system*. American Journal of Physics, 54 (2).

[6] Carvalhaes, C.; Suppes, P. (2008), *Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean*. American Journal of Physics, 76 (12).

[7] Krishnavedala (2014), *Pendulum phase portrait*. Recuperado el 19 de enero de 2016 de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Pendulum_phase_portrait.svg

[8] Wikipedia. *Pendulum (mathematics)*. Recuperado el 22 de enero de 2016 de https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)