Actividad 1: Preparando documentos científicos con LATEX

Martin Alejandro Paredes Sosa

Enero 2016

1. Péndulo Simple

Es una idealización de un "péndulo real"pero aislado utilizando las siguinetes supuestos:

- El cable o cuerda del péndulo se considera sin masa, no esxtendible y siempre tensa.
- Es considerada una masa puntua.l
- El movimiento es bidimensional(sos direcciones) y sigue al movimiento de un arco.
- EL movimiento no pierde energia contra la fricción a o resistencia al aire.
- El campo gravitacional es uniforme.
- El soporte no se mueve.

La ecuación diferencial que representa el movimento del pédulo es la siguiente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

donde g es la acerelación debida a la gravedad, l la longitud del péndulo y θ es el ángulo de desplazamiento.

2. Aproximación con ángulo pequeño

La ecuación diferencial dada anteriormente no es simple de resolver y no exite solución que pueda ser escrita en terminos de funciones elementales. Pero, si se pone restrición al tamaño de la amplitud de la oscilación nos permite encontrar una solución sencilla. Si se asume que el angulo es mucho menor a un radian, o

$$\theta \ll 1$$

luego se sustituye en (1) usando la aproximación de ángulo pequeño,

$$\sin\theta \approx \theta$$

se obtiene la ecuación de un oscilador armonico,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

El error dado por la aproximación es de orden θ^3.

Dado la condición inicial $\theta(0) = \theta_0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$, la solucion es:

$$\theta(t) = \theta_o \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \qquad \theta_o \ll 1$$

El movimeiento es un movimeintos armónico simple donde θ_o es la semi-amplitud de la oscilación (este es el maximo angulo entre la cuerda del péndulo y la vertical). El periodo del movimiento, el tiempo para completar una oscilación es:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \theta_o \ll 1$$

a lo que se le conoce como la ley de Christiaan Huygens para el periodo. Note que el ángulo debajo de la aproximación del pequeño ángulo, el periodo es independiente the la amplitud θ_o; esta es la caracteristica de isocronismo que Galileo descubrió.

2.1. Regla de oro para la longitud del péndulo

$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ puede ser expresada como $\ell = \frac{g}{\pi^2} \times \frac{T_o^2}{4}$
Si las unidades SI son usadas($\frac{m}{s}$), y asumimos que las mediciones se hacen en la superficie de la tierra, donde g $\approx 9.81\frac{m}{s^2}$, y $g/\pi^2 \approx 1$. Por lo tanto, una aproximación relativamente razonable para la longitud y el periodo son,

$$\ell \approx \frac{T_o^2}{4}$$

$$T_o \approx 2\sqrt{\ell}$$

donde T_o el numero en segundos entre dos pulsaciones, y ℓ se mide en metros.

3. Periodo-amplitud arbitrario

Para amplitudes más allá de la aproximación de una ángulo pequeño, se puede calcular el período exacto invirtiendo la ecuación para velocidad angular obtenida a partir del método de energía(Eq.2),

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_o}}$$

y luego integrando sobre un ciclo completo,

$$T = t(\theta_o \to 0 \to -\theta_o \to 0 \to \theta)$$

o dos veces la mitad del ciclo

$$T = 2t(\theta_o \to 0 \to -\theta_o)$$

o 4 veces un cuarto de ciclo

$$T = t(\theta_o \to 0)$$

Lo que lleva a

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_o} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_o}} d\theta$$

Notese que la integral diverge cuando θ_o se aproxima a la vertical

$$\lim_{\theta_o \to \pi} T = \infty$$

de manera que un péndulo con la energia suficiente para ir a la vertical, no pueda llegar.
Esta integral se puede reescribir en terminos de integrales elipticas como

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} F(\frac{\theta_o}{2}, \csc\frac{\theta_o}{2}) \csc\frac{\theta_o}{2}$$