

Actividad 1: Preparando documentos científicos con LATEX

Martin Alejandro Paredes Sosa

Enero 2016

1. Péndulo Simple

Es una idealización de un “péndulo real” pero aislado utilizando las siguientes supuestas:

- El cable o cuerda del péndulo se considera sin masa, no extendible y siempre tensa.
- Es considerada una masa puntual.
- El movimiento es bidimensional (dos direcciones) y sigue al movimiento de un arco.
- El movimiento no pierde energía contra la fricción o resistencia al aire.
- El campo gravitacional es uniforme.
- El soporte no se mueve.

La ecuación diferencial que representa el movimiento del péndulo es la siguiente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad, ℓ la longitud del péndulo y θ es el ángulo de desplazamiento.

2. Aproximación con ángulo pequeño

La ecuación diferencial dada anteriormente no es simple de resolver y no existe solución que pueda ser escrita en términos de funciones elementales. Pero, si se pone restricción al tamaño de la amplitud de la oscilación nos permite encontrar una solución sencilla. Si se asume que el ángulo es mucho menor a un radian, o

$$\theta \ll 1$$

luego se sustituye en (1) usando la aproximación de ángulo pequeño,

$$\sin \theta \approx \theta$$

se obtiene la ecuación de un oscilador armónico,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

El error dado por la aproximación es de orden θ^3 .

Dado la condición inicial $\theta(0) = \theta_0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$, la solución es:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \quad \theta_0 \ll 1$$

El movimiento es un movimiento armónico simple donde θ_0 es la semi-amplitud de la oscilación (este es el máximo ángulo entre la cuerda del péndulo y la vertical). El periodo del movimiento, el tiempo para completar una oscilación es:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \theta_0 \ll 1$$

a lo que se le conoce como la ley de Christiaan Huygens para el periodo. Note que el ángulo debajo de la aproximación del pequeño ángulo, el periodo es independiente de la amplitud θ_0 ; esta es la característica de isocronismo que Galileo descubrió.

2.1. Regla de oro para la longitud del péndulo

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ puede ser expresada como } \ell = \frac{g}{\pi^2} \times \frac{T_0^2}{4}$$

Si las unidades SI son usadas ($\frac{m}{s}$), y asumimos que las mediciones se hacen en la superficie de la tierra, donde $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$, y $g/\pi^2 \approx 1$.