

# Actividad 9: Aproximación al calculo del periodo del péndulo

Martin Alejandro Paredes Sosa

Abril, 2016

## 1. Introducción

El calculo del periodo de un péndulo se puede aproximar considerando que  $\sin \theta \approx \theta$  para ángulos pequeño, pero este resultado diverge rápidamente para ángulos mayores. Tambien hemos aproximado el periodo por medio de integración numérica y medimos el error relativo al hacer la consideración anterior. Ahora se abordara ese mismo problema del periodo utilizando el álgebra para aproximar el valor.

Como sabemos, el periodo de un péndulo se puede expresar de la siguiente manera:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \quad (1)$$

Si se analiza cuando  $\theta_0 \rightarrow \pi = \infty$  vemos que la integral diverge, por lo que conviene expresarla de una manera mas simple, como se vera mas adelante.

Si ahora expresamos (1) como la integral elíptica

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du \quad (2)$$

Y pensamos en series de potencias para aproximar esta integral, podemos comprobar que el periodo se puede aproximar por medio de la siguiente expresión.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n!)}{(2^n n!)^2} \right) \cdot \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \quad (3)$$

## 2. Producto 1

A partir de (3), calculamos los errores relativos al tomar un número finito de términos de la sumatoria. Cada  $T_i$  del gráfico representa un desarrollo en serie hasta el  $i$ -ésimo término. Este fue el código que se utilizó para realizar los cálculos.

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 import numpy as np
3 import math
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 #Parametros
7 g,l,n = 9.81 , 1.0 , 5000
8 RadGrad = 180.0 / np.pi
9 eps = 0.001
10
11 #Definir una serie de valores
12 thetaI = np.linspace(eps, np.pi-eps,n)
13
14 #Arrays
15 Int = [0 for i in range(n)]
16 IntI = [0 for i in range(n)]
17 Perio = [0 for i in range(n)]
18 Sin = [0 for i in range(n)]
19 Err = [0 for i in range(n)]
20
21 #Aprox Angulos pequenos
22 PerioTeo = 2.*np.pi*np.sqrt(l/g)
23
24 #Calculo Error Rel
25 # m terminos
26 m = 10
27 for i in range(0,m):
28     for j in range(0,n):
29         facto0 = float(math.factorial(2.*(i)))
30         facto1 = float((2.**i * math.factorial(i))**2.)
31         Sin [j] = np.sin(thetaI[j]/2.)*(2.*(i))
32         Int [j] = ((facto0/facto1)**2.)*Sin[j]
33         IntI[j] = IntI[j] +Int[j]
34         Perio[j] = 2.*np.pi*np.sqrt(l/g)*IntI[j]
35         Err [j] = Perio[j]/PerioTeo
```

Listing 1: Código ErrorRe.py

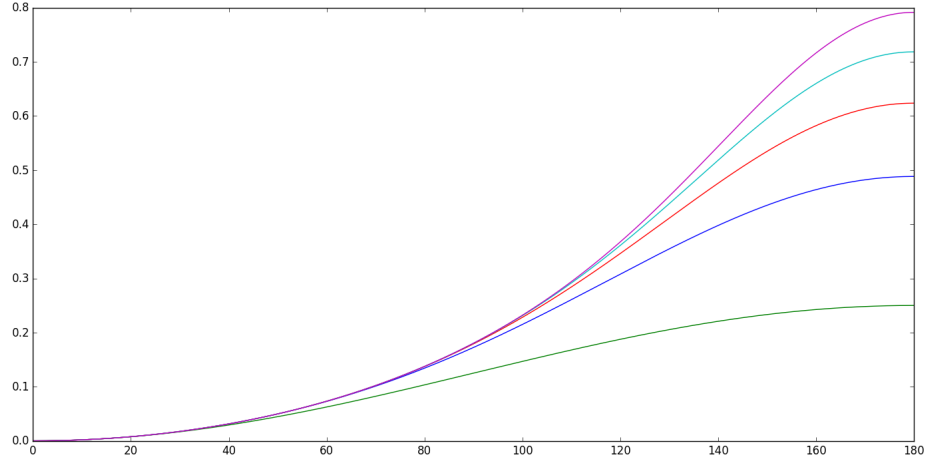


Figura 1: Angulo vs Error relativo

### 3. Producto 2

Aplicamos una serie de Maclaurin para  $\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$  y trabajando la ecuación (2) llegamos al siguiente resultado:

```
(%i1) /*Función dependiente de K */
      Fk1(k) := 1/sqrt(1-(k*sin(u))^2);
(%o1) Fk1(k) := 
$$\frac{1}{\sqrt{1 - (k \cdot \sin(u))^2}}$$

(%i2) Desarrollo en serie de Taylor */
      taylor(1/sqrt(1-(k*sin(u))^2),u,0,8);
(%o2) 
$$1 + \frac{k^2 \cdot u^2}{2} + \frac{(9 \cdot k^4 - 4 \cdot k^2) \cdot u^4}{24} + \frac{(225 \cdot k^6 - 180 \cdot k^4 + 16 \cdot k^2) \cdot u^6}{720} + \frac{(11025 \cdot k^8 - 12600 \cdot k^6 + 3024 \cdot k^4 - 64 \cdot k^2) \cdot u^8}{40320} + \dots$$

...
(%i3) /*Definir Fk2 como la expansión de Taylor */
      define(Fk2(k),\%);
(%o3) 
$$Fk2(k) := 1 + \frac{k^2 \cdot u^2}{2} + \frac{(9 \cdot k^4 - 4 \cdot k^2) \cdot u^4}{24} + \frac{(225 \cdot k^6 - 180 \cdot k^4 + 16 \cdot k^2) \cdot u^6}{720} + \frac{(11025 \cdot k^8 - 12600 \cdot k^6 + 3024 \cdot k^4 - 64 \cdot k^2) \cdot u^8}{40320} + \dots$$

(%i4) /*Definir al sen(theta)*/
      define(x(\theta),sin(\theta));
(%o4)  $x(\theta) := \sin(\theta)$ 
(%i5) /*Integramos Fk2 dedes 0 a 90 grados*/
      expand(integrate(Fk2(k),u,0,\pi/2));
(%o5) 
$$\frac{35 \cdot \pi^9 \cdot k^8}{589824} - \frac{5 \cdot \pi^9 \cdot k^6}{73728} + \frac{5 \cdot \pi^7 \cdot k^6}{14336} + \frac{\pi^9 \cdot k^4}{61440} - \frac{\pi^7 \cdot k^4}{3584} + \frac{3 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{1280} - \frac{\pi^9 \cdot k^2}{2903040} +$$

```

$$\frac{\pi^7 \cdot k^2}{40320} - \frac{\pi^5 \cdot k^2}{960} + \frac{\pi^3 \cdot k^2}{48} + \frac{\pi}{2}$$

(%i6) /\*Sustituimos al sen(theta)\*/  
subst(x(\theta/2),k,\%);

$$\begin{aligned} (\%o6) \quad & \frac{35 \cdot \pi^9 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{589824} - \frac{5 \cdot \pi^9 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{73728} + \frac{5 \cdot \pi^7 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{14336} + \frac{\pi^9 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{61440} - \frac{\pi^7 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{3584} + \\ & \frac{3 \cdot \pi^5 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1280} - \frac{\pi^9 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{2903040} + \frac{\pi^7 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{40320} - \frac{\pi^5 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{960} + \frac{\pi^3 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{48} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(%i7) /\*Factorizamos\*/  
expand(\%\*2/\pi);

$$\begin{aligned} (\%o7) \quad & \frac{35 \cdot \pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{294912} - \frac{5 \cdot \pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{36864} + \frac{5 \cdot \pi^6 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{7168} + \frac{\pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{30720} - \frac{\pi^6 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1792} + \\ & \frac{3 \cdot \pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{640} - \frac{\pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{1451520} + \frac{\pi^6 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{20160} - \frac{\pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{480} + \frac{\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{24} + 1 \end{aligned}$$

(%i8) /\*Definimos la Funcion que solo depende de theta\*/  
define(Fk(\theta),\%);

$$\begin{aligned} (\%o8) \quad & Fk(\theta) := \frac{35 \cdot \pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^8}{294912} - \frac{5 \cdot \pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{36864} + \frac{5 \cdot \pi^6 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{7168} + \frac{\pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{30720} - \\ & \frac{\pi^6 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1792} + \frac{3 \cdot \pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{640} - \frac{\pi^8 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{1451520} + \frac{\pi^6 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{20160} - \frac{\pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{480} + \frac{\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{24} + \\ & 1 \end{aligned}$$

(%i9) /\*Definimos la ecuación del Periodo\*/  
define(T(theta),(2\*pi)\*sqrt(l/g)\*(Fk(theta)));

$$(\%o9) \quad T(\theta) := 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left( \frac{\pi^6 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{20160} - \frac{\pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{480} + \frac{\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{24} + 1 + \dots \right)$$