多様体論　定義命題集

mapsto

最終更新日: 2024/08/02 version 3.0

version 3.0 をもって，本文書の更新を完全停止し，最終版とする．

はじめに

本文書では，幾何学の重要な研究対象である多様体を定義し，多様体論序論としての一つの重要な結果である Stokes の定理を目標として，様々な話題を網羅することを目的として進める．多様体論は，参考書や個人ごとに流儀や議論の順序が異なり、初学者にとって混乱の要因となる．本稿では，そうした差異を極力カバーすることを目指す．一方，筆者の能力不足ではあるものの，多様体論は厳密な証明が大変な命題が非常に多いため，潔く証明をすべて省略し，定義や命題，例などを多く挙げるように努める．証明は各自考えたり，参考書を見たりするなどして確認してほしい．

注意事項

文書全体を通して，誤りを含んでいる可能性があります．その点に注意していただければ，ご自由に使って構いません．誤りを発見した場合は Twitter(`@mapsto_math`) にて教えていただけると嬉しいです．

前提知識

集合・写像の基礎，位相空間論，多変数関数の微積分，線形代数学，常微分方程式論の，いずれも初歩の知識があるとよい．

用語・記号

- 集合は断らない限り空でないとする．空集合は $\varnothing$ で表す．
- 自然数全体の集合を $\mathbb{N} \coloneqq \{1, 2, \ldots\}$，$\mathbb{N}_0 \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体の集合とする．
- $G = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, x \in G$ について，$G_{>x} \coloneqq \{y \in G \mid y > x\}$ とする．$G_{<x}, G_{\leq x}, G_{\geq x}$ も同様．
- 集合の包含 $\subset$ は $\subseteq$ の意味で使う．真の包含は $\subsetneq$ で表す．
- $f : (X, U) \to (Y, V)$ は，$f : X \to Y$, $f(U) \subset V$ を表す．
- 距離空間はその距離によって定まる距離位相によって位相空間であるとする．
- $n \in \mathbb{N}_0$ に対し，$\mathbb{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間とする．$\mathbb{R}^0 = \{0\}$ である．すなわち，$\mathbb{R}$ の n 個の直積に Euclid 距離を定めた距離空間とする．
- 位相空間の同相 (位相同型) を $\approx$，ベクトル空間の同型 (線形同型) を $\cong$，C^r 級多様体の微分同相を $\cong_{C^r}$ で表す．

目次

1　多様体の定義

1.1　C^r 級多様体の定義

定義 1.1.1. $n \in \mathbb{N}, M$ を位相空間，U を M の開集合，V を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\varphi : U \to V$ を同相写像とする．このとき，

(1) 対 (U, φ) を M の n **次元座標近傍** (coordinate neighborhood)，または M の n **次元チャート** (chart) という．

(2) M のチャート (U, φ) に対し，φ を U 上の**局所座標系** (local coordinate system) という．

(3) $p \in M$ に対し，$p \in U$ を満たす M のチャート (U, φ) を p の n **次元座標近傍**，または p の n **次元チャート**という．

(4) $p \in M$ のチャート (U, φ) に対し，
$$\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)) \in V$$
を p の (U, φ) に関する**局所座標** (local coordinate) という．

(5) $i = 1, \ldots, n$ に対し，局所座標における実数値関数
$$x_i : U \to \mathbb{R};\ p \mapsto x_i(p)$$
を U 上の**座標関数** (coordinate function) という．

注意 1.1.2. (1) M のチャート (U, φ) に対し，U 上の局所座標系 φ 及びチャート (U, φ) を，座標関数を用いてそれぞれ $\varphi = (x_1, \ldots, x_n), (U; x_1, \ldots, x_n)$ と表すことがある．

(2) $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_n)$ と $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ とでは，$(x_1, \ldots, x_n)$ の意味が異なることに十分注意する．

定義 1.1.3. M を位相空間とする．任意の $p \in M$ に対し，p の n 次元チャート (U, φ) が存在するとき，M は n **次元局所 Euclid 空間** (locally Euclidian space) であるという．

系 1.1.4. M を位相空間とする．このとき，次は同値:

(1) M は n 次元局所 Euclid 空間である．

(2) ある M の n 次元チャート族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆である．すなわち，
$$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

定義 1.1.5. 系 1.1.4 (2) を満たす M の n 次元チャート族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の n **次元座標近傍系** (system of coordinate neighborhoods)，または n **次元アトラス** (atlas) という．

定義 1.1.6. 位相空間 M が次を満たすとき，M は n **次元位相多様体** (topological manifold) であるという:

(1) M は Hausdorff 空間である．

(2) M は n 次元局所 Euclid 空間である．

定義 1.1.7. M を位相空間，$(U,\varphi),(V,\psi)$ を，$U\cap V\neq\varnothing$ を満たす M の n 次元チャートとする．このとき，写像

$$\psi|_{U\cap V}\circ\varphi|_{U\cap V}{}^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

を (U,φ) から (V,ψ) への**座標変換** (coordinate transformation) という．$\varphi\coloneqq(x_1,\ldots,x_n)$,$\psi\coloneqq(y_1,\ldots,y_n)$ であるとき，

$$\begin{cases} y_1=y_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \quad\vdots\\ y_n=y_n(x_1,\ldots,x_n)\end{cases}$$

を $\psi|_{U\cap V}\circ\varphi|_{U\cap V}{}^{-1}$ の**座標表示** (coordinate display) という．以降，座標変換 $\psi|_{U\cap V}\circ\varphi|_{U\cap V}{}^{-1}$ を省略して $\psi\circ\varphi^{-1}$ と表す．

注意 1.1.8. $\varphi(p)\coloneqq(x_1,\ldots,x_n)$, $\psi(p)\coloneqq(y_1,\ldots,y_n)$ とする．$p=\varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_n)$ であるから，$i=1,\ldots,n$ とし，$(\psi\circ\varphi^{-1})_i:\varphi(U\cap V)\to\mathbb{R}$ を用いて

$$(y_1,\ldots,y_n)=\psi\circ\varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_n)=((\psi\circ\varphi^{-1})_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,(\psi\circ\varphi^{-1})_n(x_1,\ldots,x_n))$$

となる．すなわち，座標表示は $\psi\circ\varphi^{-1}=((\psi\circ\varphi^{-1})_1,\ldots,(\psi\circ\varphi^{-1})_n)$ を省略して $\psi=(y_1,\ldots,y_n)$ と表記すると宣言している．

例 1.1.9.

$$U\coloneqq\mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\}),$$
$$\varphi:U\to(0,\infty)\times(-\pi,\pi);$$
$$\varphi(x,y)\coloneqq\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+y^2},\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ((x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty))\\ \left(\sqrt{x^2+y^2},-\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ((x,y)\in\mathbb{R}\times(-\infty,0))\\ \left(\sqrt{x^2+y^2},\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ((x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R})\end{cases}$$

とする．このとき，$(U,\varphi),(\mathbb{R}^2,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ は $\mathbb{R}^2$ のチャートである．(U,φ) から $(\mathbb{R}^2,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ への座標変換

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\circ\varphi^{-1}:(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to U;\ (r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

を**極座標表示** (polar coordinate display) という．

定義 1.1.10. M を位相空間，$r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ とする．M の n 次元アトラス $\mathcal{S}\coloneqq\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次を満たすとき，対 $(M,\mathcal{S})$ を **n 次元 C^r 級微分可能多様体** (differentiable manifold of class C^r) という:

(1) M は n 次元位相多様体である．

(2) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ を満たす $(U_\lambda, \varphi_\lambda), (U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathcal{S}$ に対し，座標変換

$$\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は C^r 級である．

- C^r 級微分可能多様体を単に **C^r 級多様体**，または**多様体**という．
- C^∞ 級多様体を**滑らかな多様体** (smooth manifold) ということもある．
- C^r 級多様体 $(M, \mathcal{S})$ に対し，$\mathcal{S}$ を **C^r 級座標近傍系**または **C^r 級アトラス**という．
- C^r 級多様体の**次元** (dimension) を $\dim M \coloneqq n$ と定める．
- アトラスが明らかなとき，C^r 級多様体 $(M, \mathcal{S})$ を単に M と表す．次元を明示するときは M^n と表す．

注意 1.1.11. (1) C^0 級多様体は位相多様体そのものである．

(2) 座標変換 $\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1}$ は $\varphi_\lambda \circ {\varphi_\mu}^{-1}$ を逆写像に持つから，C^r 級微分同相写像である．

(3) 考える対象を扱いやすいもののみに制限するため，多様体の定義に「第 2 可算公理を満たす」という条件を加えることもある．この場合，定義 1.1.10 の多様体は**広義の多様体**と呼ばれることもある．本稿では，第 2 可算公理は必要なときに課せば十分であると考え，第 2 可算公理を課さない．

定義 1.1.12. M を位相空間，U を M の開集合，V を $\mathbb{C}^n$ の開集合，$\varphi : U \to V$ を同相写像とする．このとき，対 (U, φ) を M の **n 次元正則座標近傍** (holomorphic coordinate neighborhood) という．正則座標近傍 (U, φ) に対し，φ を U 上の **n 次元複素局所座標系** (complex local coordinate system) という．$p \in U$ に対し，

$$\varphi(p) = (z_1(p), \ldots, z_n(p)) \in V$$

を p の (U, φ) に関する **n 次元複素局所座標** (complex local coordinate) という．$i = 1, \ldots, n$ に対し，連続写像

$$z_i : U \to \mathbb{C};\ p \mapsto z_i(p)$$

を U 上の**複素座標関数** (complex coordinate function) という．ある M の正則座標近傍 $\mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して次を満たすとき，対 $(M, \mathcal{S})$ を **n 次元複素多様体** (complex manifold) という:

(1) M は Hausdorff 空間である．

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆である．

(3) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ を満たす $(U_\lambda, \varphi_\lambda), (U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathcal{S}$ に対し，座標変換

$$\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は正則写像である．

複素多様体 $(M, \mathcal{S})$ に対し，$\mathcal{S}$ を M の n **次元正則座標近傍系** (system of holomorphic coordinate neighborhoods) という．複素多様体の**複素次元** (complex dimension) を $\dim_{\mathbb{C}} M \coloneqq n$ と定める．

注意 1.1.13. 複素多様体と区別して，定義 1.1.10 の多様体を**実多様体**ということもある．

1.2 C^r 級多様体の例

1.2.1 多様体の例

例 1.2.1. $\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間，$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を恒等写像とする．このとき，$(\mathbb{R}^n, \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．$\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ を $\mathbb{R}^n$ の**標準的なアトラス** (standard atlas) という．

例 1.2.2. $\mathbb{R}$ を Euclid 空間，$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi(x) \coloneqq x^3$ とする．このとき，$(\mathbb{R}, \{(\mathbb{R}, \varphi)\})$ は 1 次元 C^∞ 級多様体である．

例 1.2.3. $\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の開被覆，$\varphi_\lambda : U_\lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を包含写像とする．このとき，$(\mathbb{R}^n, \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

例 1.2.4. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f : U \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$，$\mathrm{proj} : \Gamma(f) \to U$ を次で定める:

$$\Gamma(f) \coloneqq \{(\boldsymbol{x}, y) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(\boldsymbol{x})\},$$
$$\mathrm{proj}(\boldsymbol{x}, y) \coloneqq \boldsymbol{x}.$$

このとき，$(\Gamma(f), \{(\Gamma(f), \mathrm{proj})\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．$\Gamma(f)$ を f の**グラフ** (graph) という．

例 1.2.5. 任意の離散空間は 0 次元多様体である．0 次元多様体は，任意の $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ に対し，C^r 級多様体であるとみなす．

1.2.2 n 次元球面

定義 1.2.6. $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$S^n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$$

を n **次元球面** (sphere) という．

命題 1.2.7. S^n を n 次元球面とする．各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対し，開集合 $U_i^\pm \subset S^n$，写像 $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_i^\pm \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\},$$
$$\varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1} \ldots, x_{n+1})$$

(複合同順)．このとき，$(S^n, \mathcal{S}_1 \coloneqq \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1}^{n+1})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

命題 1.2.8. S^n を n 次元球面とする．開集合 $U_N, U_S \subset S^n$，写像 $\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^n, \varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_N \coloneqq S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}, U_S \coloneqq S^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\},$$
$$\varphi_N(x_1,\dots,x_{n+1}) \coloneqq \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right),$$
$$\varphi_S(x_1,\dots,x_{n+1}) \coloneqq \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right).$$

このとき，$(S^n, \mathcal{S}_2 \coloneqq \{(U_N,\varphi_N),(U_S,\varphi_S)\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．φ_N, φ_S をそれぞれ $(0,\dots,0,1),(0,\dots,0,-1)$ からの**立体射影** (stereoscopic projection) という．

1.2.3　n 次元射影空間

定義 1.2.9. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def.}}{\iff} \text{ある} \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ が存在して } \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

$\sim$ による商空間

$$\mathbb{R}P^n \coloneqq (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/{\sim}$$

を n **次元実射影空間** (real projective space) という．このとき，自然な射影を

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}P^n$$

とし，$(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ を代表元とする同値類を $\pi(x_1,\dots,x_{n+1}) \coloneqq [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n$ と表し，**同次座標** (homogeneous coordinate) という．

命題 1.2.10. $\mathbb{R}P^n$ を n 次元実射影空間とする．各 $i = 1,\dots,n+1$ に対し，$U_i \subset \mathbb{R}P^n$，写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_i \coloneqq \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\},$$
$$\varphi_i([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) \coloneqq \left(\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i}\dots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right).$$

このとき，$(\mathbb{R}P^n, \{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{n+1})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

射影空間の定義の仕方はいくつかあるが，命題 1.2.12 によって $S^n/{\sim}$ と $\mathbb{R}P^n$ は同一視できる．

命題 1.2.11 (商空間の普遍性)**.** X, Y を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係，$\sim$ による商空間を $X/{\sim}$，自然な射影を $\pi : X \to X/{\sim}$ とする．連続写像 $g : X \to Y$ が任意の $x, x' \in X$ に対して $x \sim x' \Rightarrow g(x) = g(x')$ を満たすならば，連続写像 $f : X/{\sim} \to Y$ であって $g = f \circ \pi$ を満たすものが一意に存在する．このとき，g は f を**誘導** (induce) するという．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X/{\sim} \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

命題 1.2.12. S^n を n 次元球面とする．S^n 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^n$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{y} = \pm \boldsymbol{x}.$$

$\sim$ による商空間を $S^n/\sim$[*1]，自然な射影を $\pi' : S^n \to S^n/\sim$ とする[*2]．$i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ を包含写像とするとき、$\pi \circ i : S^n \to \mathbb{R}P^n$ は同相写像 $\tilde{i} : S^n/\sim \to \mathbb{R}P^n$ を誘導する．すなわち，$S^n/\sim \approx \mathbb{R}P^n$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi \circ i"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "\pi"] \\ S^n/\sim \arrow[r, "\tilde{i}"'] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し，$-\boldsymbol{x} \in S^n$ を**対蹠点** (antipodal point) という．

1.2.4 複素多様体の例

例 1.2.13. $\mathbb{C}^n$ を複素 Euclid 空間，$\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を恒等写像とする．このとき，
$(\mathbb{C}^n, \{(\mathbb{C}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})\})$ は n 次元複素 C^∞ 級多様体である．

定義 1.2.14. $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分集合

$$Q^n \coloneqq \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid {z_1}^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1\}$$

を n 次元**複素球面** (complex sphere) という．

注意 1.2.15. 複素数体 $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間であるから，$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視する．このとき，$j = 1, \ldots, n+1$ に対し，

$$z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j \in \mathbb{C} \ \ (x_j, y_j \in \mathbb{R})$$

とすると，$|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$ より

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n+2} \supset S^{2n+1} &= \{(x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid {x_1}^2 + {y_1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 1\} \\ &= \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \end{aligned}$$

となる．したがって，$(2n+1)$ 次元球面 S^{2n+1} は $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分集合であるとみなせる．

命題 1.2.16. Q^n を n 次元複素球面とする．開集合 $U_N, U_S \subset Q^n$，写像 $\varphi_N : U_N \to \mathbb{C}^n, \varphi_S : U_S \to \mathbb{C}^n$ を次で定める:

$$U_N \coloneqq Q^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}, U_S \coloneqq Q^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\},$$

[*1] $S^n/\sim$ を $S^n/\{\pm 1\}$ と表すことがある．この表記は，位相空間 X と位相群 G に対し，G の X への群作用の軌道空間を X/G と表すことに由来する．

[*2] π' は 2 重被覆写像である．

$$\varphi_N(z_1, \dots, z_{n+1}) \coloneqq \left(\frac{z_1}{1 - z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{1 - z_{n+1}} \right),$$

$$\varphi_S(z_1, \dots, z_{n+1}) \coloneqq \left(\frac{z_1}{1 + z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{1 + z_{n+1}} \right).$$

このとき，$(Q^n, \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\})$ は n 次元 C^∞ 級複素多様体である．

定義 1.2.17. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対し，

$$\boldsymbol{z} \sim \boldsymbol{w} \overset{\text{def.}}{\iff} \text{ある}\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ が存在して } \boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{z}.$$

$\sim$ による商空間

$$\mathbb{C}P^n \coloneqq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/{\sim}$$

を n 次元複素射影空間 (complex projective space) という．このとき，自然な射影を

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{C}P^n$$

とし，$(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ を代表元とする同値類を $\pi(z_1, \dots, z_{n+1}) \coloneqq [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$ と表し，複素同次座標 (complex homogeneous coordinate) という．

命題 1.2.18. $\mathbb{C}P^n$ を n 次元複素射影空間とする．各 $i = 1, \dots, n+1$ に対し，$U_i \subset \mathbb{C}P^n$，写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ を次で定める:

$$U_i \coloneqq \{[z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n \mid z_i \neq 0\},$$

$$\varphi_i([z_1 : \dots : z_{n+1}]) \coloneqq \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i} \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right).$$

このとき，$(\mathbb{C}P^n, \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1})$ は n 次元 C^∞ 級複素多様体である．

命題 1.2.19. 注意 1.2.15 より，S^{2n+1} を $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分集合とみなす．S^n 上の同値関係 $\sim$ を命題 1.2.12 と同様に定める．$\sim$ による商空間を $S^{2n+1}/{\sim}$，自然な射影を $\pi' : S^{2n+1} \to S^{2n+1}/{\sim}$ とする．$i : S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ を包含写像とするとき、$\pi \circ i : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ は同相写像 $\tilde{i} : S^{2n+1}/{\sim} \to \mathbb{C}P^n$ を誘導する．すなわち，$S^{2n+1}/{\sim} \approx \mathbb{C}P^n$.

$$\begin{tikzcd}
S^{2n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi \circ i"] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "\pi"] \\
S^{2n+1}/{\sim} \arrow[r, "\tilde{i}"'] & \mathbb{C}P^n
\end{tikzcd}$$

1.2.5　多様体でない例

例 1.2.20. $\mathbb{R}$ の閉部分空間 [0,1] は位相多様体でない．

定義 1.2.21. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ とする．$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\overline{D}^n(\boldsymbol{a}, r) \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leq r\}$$

を中心 $\boldsymbol{a}$, 半径 r の n **次元閉円板** (closed disk) という．$\overline{D}^n \coloneqq \overline{D}^n(\mathbf{0}, 1)$ とする．

例 1.2.22. 閉円板 $\overline{D}^n(\boldsymbol{a}, r)$ は位相多様体でない．

注意 1.2.23. 例 1.2.20 及び例 1.2.22 は境界付き多様体の例である (7 章を参照).

例 1.2.24. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdots x_n = 0\}$ は位相多様体でない．

例 1.2.25. $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ を通常の位相空間，$0' \notin \mathbb{R}, X \coloneqq \mathbb{R} \sqcup \{0'\}$ とする．

$$\mathcal{O} \cup \{(a, 0) \cup \{0'\} \cup (0, b) \mid a < 0 < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

を開基とする位相を X に定める．このとき，X は Hausdorff 空間でないが，局所 Euclid 空間である．また，X は第 2 可算公理を満たす．X を **2 つの原点を持つ直線** (line with two origins) という．

1.3 多様体の構成

1.3.1 多様体の構成

命題 1.3.1. $r, s \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ が $0 \leq s \leq r \leq \infty$ を満たすとき，任意の C^r 級多様体は C^s 級多様体である．

命題 1.3.2. $(M, \mathcal{S}), (N, \mathcal{T})$ を n 次元 C^r 級多様体とする．$M \cap N = \varnothing$ であるとき, $(M \sqcup N, \mathcal{S} \sqcup \mathcal{T})$ は n 次元 C^r 級多様体である．

命題 1.3.3. $(M, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を C^r 級多様体，W を M の開部分集合とする．このとき，

$$\mathcal{S}|_W \coloneqq \{(U_\lambda \cap W, \varphi_\lambda|_{U_\lambda \cap W})\}_{\lambda \in \Lambda}$$

とすると，$(W, \mathcal{S}|_W)$ は C^r 級多様体である．$(W, \mathcal{S}|_W)$ を M の**開部分多様体** (open submanifold) という．

例 1.3.4. $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合，例えば $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $(0, 1)^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開部分多様体である．

定義 1.3.5. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ とする．$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$D^n(\boldsymbol{a}, r) \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$$

を中心 $\boldsymbol{a}$, 半径 r の n **次元開円板** (open disk) という．$D^n \coloneqq D^n(\mathbf{0}, 1)$ とする．

例 1.3.6. 開円板 $D^n(\boldsymbol{a}, r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開部分多様体である．

命題 1.3.7. $(M, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を m 次元 C^r 級多様体，$(N, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} \coloneqq \{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu\in\mathcal{M}}$ を n 次元 C^r 級多様体とする．このとき，

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} \coloneqq \{(U_\lambda \times V_\mu, \varphi_\lambda \times \psi_\mu)\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathcal{M}},$$

$$\varphi_\lambda \times \psi_\mu : U_\lambda \times V_\mu \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \psi_\mu(V_\mu), \quad (\varphi_\lambda \times \psi_\mu)(p, q) \coloneqq (\varphi_\lambda(p), \psi_\mu(q))$$

とすると，$(M \times N, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$ は $(m + n)$ 次元 C^r 級多様体である．$(M \times N, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$ を M と N の**積多様体** (product manifold) という．

系 1.3.8. $i = 1, \ldots, n$ に対し，$m_i \in \mathbb{N}, (M_i, \mathcal{S}_i)$, $\mathcal{S}_i \coloneqq \{(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i})\}_{\lambda_i\in\Lambda_i}$ を m_i 次元 C^r 級多様体とする．このとき，

$$\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n \coloneqq \{(U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_n}, \varphi_{\lambda_1} \times \cdots \times \varphi_{\lambda_n})\}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\Lambda_1\times\cdots\times\Lambda_n}$$

とすると，$(M_1 \times \cdots \times M_n, \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n)$ は $(m_1 + \cdots + m_n)$ 次元 C^r 級多様体である．

例 1.3.9. S^n を n 次元球面とする．このとき，

$$I^n \coloneqq S^n \times \mathbb{R}$$

は $(n + 1)$ 次元 C^∞ 級多様体である．I^n を**超円柱** (hypercylinder) という．

1.3.2 n 次元トーラス

例 1.3.10. $n \in \mathbb{N}, S^1$ を 1 次元球面とする．このとき，

$$\mathbb{T}^n \coloneqq \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$$

は n 次元 C^∞ 級多様体である．$\mathbb{T}^n$ を n **次元トーラス** (torus) という．

例 1.3.11. $R, r \in \mathbb{R}_{>0}, R > r$ とする．このとき，

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

これを**回転トーラス** (torus of revolution) といい，xz 平面上の中心が $(R, 0)$，半径 r の円を z 軸の周りに 1 回転させて得られる．

例 1.3.12. $\mathbb{R}^n$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n.$$

このとき，商集合 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \coloneqq \mathbb{R}^n/\!\sim$ を**平坦トーラス** (flat torus) という．

例 1.3.13. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ に注意すると，

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}$$

と表せる．また，この $\mathbb{T}^2$ を原点中心に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍縮小した S^3 の部分集合として

$$\mathbb{T}^2_{\mathrm{cl}} = \left\{ (x,y,z,w) \in S^3 \middle| x^2+y^2=z^2+w^2=\frac{1}{2} \right\}$$

と表せる．これらを **Clifford トーラス** (Clifford torus) という．注意 1.2.15 より，S^3 を $\mathbb{C}^2$ の部分集合とみなすと，Clifford トーラスは S^3，すなわち $\mathbb{C}^2$ の部分集合とみなせる．

1.3.3　有限次元ベクトル空間

命題 1.3.14. $(X,\mathcal{O}_X)$ を位相空間，Y を集合，$f:Y\to X$ を写像とする．Y の部分集合族 $\mathcal{O}_f$ を

$$\mathcal{O}_f \coloneqq \{f^{-1}(U)\subset Y \mid U\in\mathcal{O}_X\}$$

と定めると，$(Y,\mathcal{O}_f)$ は位相空間になる．$\mathcal{O}_f$ を Y の f による**誘導位相** (induced topology) という．また，f が Y に誘導位相を与えるとき，f は連続である．

命題 1.3.15. V,W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．このとき，次は同値:

(1) $V\cong W$.
(2) $\dim V=\dim W$.

命題 1.3.16. V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，$n\coloneqq\dim V$ とする．命題 1.3.15 より線形同型写像 $f:V\to\mathbb{R}^n$ が存在し，この f による Y の誘導位相を $\mathcal{O}_f$ とすることで V を位相空間とみる．このとき，$(V,\{(V,f)\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．また，誘導位相 $\mathcal{O}_f$ は f，すなわち基底の取り方によらない．以降，$\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間はこのアトラスにより多様体とする．

例 1.3.17. 複素数体 $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間であるから，$2n$ 次元 C^∞ 級多様体である．

例 1.3.18. 複素多様体 M が $\dim_{\mathbb{C}} M=n$ のとき，$\dim M=2n$ である．特に，$\dim\mathbb{C}^n=\dim Q^n=\dim\mathbb{C}P^n=2n$.

例 1.3.19. m 行 n 列の実行列全体の集合 $M(m\times n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の mn 次元ベクトル空間であるから，mn 次元 C^∞ 級多様体である．また，m 行 n 列の複素行列全体の集合 $M(m\times n,\mathbb{C})$ は $\mathbb{R}$ 上の $2mn$ 次元ベクトル空間であるから，$2mn$ 次元 C^∞ 級多様体である．以降，n 次正方行列全体を $M(n,\mathbb{R})\coloneqq M(n\times n,\mathbb{R})$，$M(n,\mathbb{C})\coloneqq M(n\times n,\mathbb{C})$ と表す．

1.4　第 2 可算公理と多様体

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間，$(M,\mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする．

1.4.1 位相空間の諸性質

定義 1.4.1. X の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^X$ が

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の**被覆** (covering) という．また，部分集合 $A \subset X$ に対し，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^X$ が

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の**被覆**という．

定義 1.4.2. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X(または部分集合 $A \subset X$) の被覆とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $U_\lambda \in \mathcal{O}$ となるとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X(または A) の**開被覆** (open covering) という．

定義 1.4.3. $\mathcal{U}$ を X(または部分集合 $A \subset X$) の被覆とする．部分集合 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ が X(または A) の被覆であるとき，$\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の**部分被覆** (subcovering) という．

定義 1.4.4. X の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^X$ が $\#\Lambda < \infty$ を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は**有限** (finite) であるという．

定義 1.4.5. X の任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在するとき, X は**コンパクト** (compact) である，またはコンパクト空間であるという．部分集合 $A \subset X$ について，X の部分空間 A がコンパクトであるとき，A はコンパクトであるという．

命題 1.4.6. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト空間である．

命題 1.4.7. コンパクト空間の積空間はコンパクト空間である．

命題 1.4.8. Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合である．

例 1.4.9. $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{T}^n$ はコンパクト空間である．

定義 1.4.10. $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ を X の被覆とする．任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して，ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $V \subset U$ となるとき，$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の**細分** (refinement) である（または $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ を細分する）という．

定義 1.4.11. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の被覆とする．$x \in X$ に対し，x のある開近傍 V が存在し，

$$\#\{\lambda \in \Lambda \mid V \cap U_\lambda \neq \varnothing\} < \infty$$

を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は x で**局所有限** (locally finite) であるという．任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{U}$ が x で局所有限であるとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は**局所有限**であるという．

定義 1.4.12. X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，$\mathcal{U}$ の細分であり，かつ局所有限な開被覆 $\mathcal{V}$ が存在するとき，X は**パラコンパクト** (paracompact) であるという．

定義 1.4.13. $U \in \mathcal{O}$ に対し，閉包 $\overline{U}$ がコンパクトであるとき，U は**相対コンパクト** (relative compact) であるという．

定義 1.4.14. 任意の $x \in X$ に対し，相対コンパクトな x の開近傍が存在するとき，X は**局所コンパクト** (locally compact) であるという．

定義 1.4.15. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の被覆とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，U_λ がコンパクトかつ $\#\Lambda \leq \aleph_0$ を満たすとき，X は **σ コンパクト** (σ compact) であるという．

定義 1.4.16. 部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**開基** (open base) であるとは，任意の $U \in \mathcal{O}$ に対し，ある部分集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ が存在し，U の被覆となることをいう．

定義 1.4.17. X(または部分集合 $A \subset X$) の高々可算個の開集合からなる開基が存在するとき，X(または A) は**第 2 可算公理** (second axiom of countability) を満たすという．

命題 1.4.18. $\mathcal{U}$ を X の被覆とする．任意の $U \in \mathcal{U}$ が第 2 可算公理を満たすならば，X は第 2 可算公理を満たす．

命題 1.4.19. 第 2 可算公理を満たす位相空間の部分空間は第 2 可算公理を満たす．

命題 1.4.20. 第 2 可算公理を満たす位相空間の積空間は第 2 可算公理を満たす．

例 1.4.21. $\mathbb{R}^n$ は第 2 可算公理を満たす．

定義 1.4.22. X の任意の開被覆に対して，高々可算な部分被覆が存在するとき，X は **Lindelöf 空間** (Lindelöf space) であるという．

定義 1.4.23. ある $U, V \in \mathcal{O}$ が存在し，$U \neq \varnothing, V \neq \varnothing, U \cap V = \varnothing, U \cup V = X$ を満たすとき，X は**非連結** (disconnected) であるという．X が非連結でないとき，X は**連結** (connected) であるという．部分集合 $A \subset X$ について，X の部分空間 A が連結であるとき，A は**連結部分空間** (connected subspace) であるという．

例 1.4.24. X 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $x, y \in X$ に対し，

$$x \sim y \overset{\text{def.}}{\iff} \text{ある } X \text{ の連結部分空間 } A \text{ が存在して } x, y \in A.$$

このとき，商集合 $X/{\sim}$ の同値類を X の**連結成分** (connected component) という．

命題 1.4.25. 次は同値:

(1) X は連結である．
(2) 部分集合 $A \subset X$ が開集合かつ閉集合ならば，$A = X$ または $A = \varnothing$.

1.4.2　第 2 可算公理と多様体

命題 1.4.26. コンパクト空間はパラコンパクト空間である．

命題 1.4.27. パラコンパクト空間の閉集合はパラコンパクト空間である．

命題 1.4.28. パラコンパクト空間の直和空間はパラコンパクト空間である．特に，離散空間はパラコンパクト空間である．

命題 1.4.29. 局所コンパクト Hausdorff 空間である Lindelöf 空間はパラコンパクト空間である

命題 1.4.30. 第 2 可算公理を満たす位相空間は Lindelöf 空間である．

系 1.4.31. 第 2 可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクト空間である．

命題 1.4.32. 第 2 可算公理を満たす局所コンパクト空間は σ コンパクトである．

命題 1.4.33. 局所コンパクト Hausdorff 空間かつ σ コンパクト空間はパラコンパクト空間である．

命題 1.4.34. コンパクト空間は σ コンパクト空間である．

命題 1.4.35. σ コンパクト空間は Lindelöf 空間である．

定理 1.4.36 (A.H.Stone の定理)**.** 距離空間はパラコンパクト空間である．

命題 1.4.37. 多様体は局所コンパクト空間である．

命題 1.4.38. 多様体 M の各連結成分は多様体であり，M は連結成分の直和空間である．

$$
\begin{tikzcd}
\text{第 2 可算公理} \arrow[r] \arrow[d, "\text{loc.cpt.,Haus.}"'] \arrow[dr, "\text{loc.cpt.,Haus.}"] & \text{Lindelöf} \arrow[d, "\text{loc.cpt.,Haus.}"] \\
\sigma\text{コンパクト} \arrow[r, "\text{loc.cpt.,Haus.}"'] \arrow[ur] & \text{パラコンパクト} \\
\text{コンパクト} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

命題 1.4.39. M を連結な多様体とする．このとき，次は同値:

(1) M はパラコンパクトである．
(2) M は第二可算公理を満たす．

(3) M は σ コンパクトである.

(4) M は Lindelöf 空間である.

系 1.4.40. M を多様体とする．このとき，次は同値:

(1) M はパラコンパクトである.

(2) M の各連結成分は第二可算公理を満たす.

(3) M の各連結成分は σ コンパクトである.

(4) M の各連結成分は Lindelöf 空間である.

系 1.4.41. $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{T}^n$ はパラコンパクト空間である.

1.4.3　1 次元多様体の分類

命題 1.4.42. コンパクトな任意の連結 1 次元多様体は S^1 と同相である.

命題 1.4.43. パラコンパクトでありコンパクトでない任意の連結 1 次元多様体は $\mathbb{R}$ と同相である.

定義 1.4.44. $(X, \leq)$ を全順序集合とする。X に形式的に最大元 $+\infty$ と最小元 $-\infty$ を付け加えた全順序集合 $X^* \coloneqq X \cup \{\pm\infty\}$ に対し，$a, b \in X^*, a < b$ について

$$(a, b) \coloneqq \{x \in X^* \mid a < x < b\}$$

と定義する．このとき，(a, b) は X の部分集合である.

$$\{(a, b) \mid a < b, a, b \in X^*\}$$

を開基とする X の位相 $\mathcal{O}_{\leq}$ を，X の**順序位相** (order topology) という.

定義 1.4.45. ω_1 を最小の非可算順序数，$[0, 1) \subset \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{L}_{\geq 0} \coloneqq \omega_1 \times [0, 1)$ 上に，辞書式順序 $\leq_L$，すなわち $(\alpha, s), (\beta, t) \in \mathbb{L}_{\geq 0}$ に対し

$$(\alpha, s) <_L (\beta, t) \overset{\text{def.}}{\iff} \alpha < \beta \text{ または } (\alpha = \beta \text{ かつ } s < t)$$

を定める．全順序集合 $(\mathbb{L}_{\geq 0}, <_L)$ に順序位相 $\mathcal{O}_{<_L}$ を定めた位相空間を**閉じた長い半直線** (closed long ray) という.

定義 1.4.46. 閉じた長い半直線 $(\mathbb{L}_{\geq 0}, <_L)$ の部分集合

$$\mathbb{L}_+ \coloneqq \mathbb{L}_{\geq 0} \setminus \{(0, 0)\}$$

に $(\mathbb{L}_{\geq 0}, \leq_L)$ からの相対位相を入れた部分空間を**開いた長い半直線** (open long ray) または **Alexandroff 直線** (Alexandroff line) という.

定義 1.4.47. 閉じた長い半直線を $\mathbb{L}_{\geq 0}$，開いた長い半直線を $\mathbb{L}_{+}$ とする．$\mathbb{L} \coloneqq \mathbb{L}_{+} \sqcup \mathbb{L}_{\geq 0}$ に次の順序 $<$ を入れる: $x, y \in \mathbb{L}, x \neq y$ に対し，

$$x < y \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} x \in \mathbb{L}_{+} \text{ かつ } y \in \mathbb{L}_{\geq 0} \\ y <_L x \ (x, y \in \mathbb{L}_{+}) \\ x <_L y \ (x, y \in \mathbb{L}_{\geq 0}). \end{cases}$$

$(\mathbb{L}, <)$ は全順序集合であり，$(\mathbb{L}, <)$ に順序位相を入れた空間を**長い直線** (long line) という．

命題 1.4.48. $\mathbb{L}_{+}, \mathbb{L}$ は，第 2 可算公理を満たさない連結 1 次元多様体である．

命題 1.4.49. $\mathbb{L}$ の任意の連結開集合は，$\mathbb{R}, \mathbb{L}_{+}, \mathbb{L}$ のいずれかと同相である．

命題 1.4.50. 任意の連結 1 次元多様体は，$S^1, \mathbb{R}, \mathbb{L}_{+}, \mathbb{L}$ のいずれかと同相である．

2 多様体間の写像

2.1 C^s 級写像

2.1.1 C^s 級写像の定義

$(M^m, \mathcal{S}), (N^n, \mathcal{T})$ を C^r 級多様体，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ とする．

定義 2.1.1. $f : M \to N$ を (位相空間の) 連続写像，$(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を M のチャート，$(V, \psi) \in \mathcal{T}$ を N のチャートとする．このとき，写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

を (U, φ) と (V, ψ) に関する f の**局所座標表示** (locally coordinate display) という．局所座標系が $\varphi \coloneqq (x_1, \ldots, x_m), \psi \coloneqq (y_1, \ldots, y_n)$ であるとき，$i = 1, \ldots, n$, $f_i : U \cap f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ について

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \qquad \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases}$$

を $f|_U$ の**座標表示** (coordinate display) という．

注意 2.1.2. $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$, $\psi(f(p)) = (y_1, \ldots, y_n)$ とすると，$p = \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$ であるから，

$$(y_1, \ldots, y_n) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$$

となり，y_i は $x_1, \ldots, x_m$ の関数である．座標表示は，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ を $f = (f_1, \ldots, f_n)$ と表記している言える．

定義 2.1.3. 連続写像 $f : M \to N$, $p \in M$, $s \leq r$ とする．$p \in M$ のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ と，$f(p) \in N$ のチャート $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ に対し，局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ で C^s 級であるとき，f は p で **C^s 級** (class C^s) であるという．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & & V \arrow[d, shift left, "\psi"] \\
\varphi(U) \arrow[rr, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"'] \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}"] & & \psi(V) \arrow[u, shift left, "\psi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

命題 2.1.4. 定義 2.1.3 の f は well-defined である．すなわち，$p \in U' \neq U$ を満たす M のチャート $(U', \varphi') \in \mathcal{S}$ と，$f(p) \in V' \neq V$ を満たす N のチャート $(V', \psi') \in \mathcal{T}$ に対し，局所座標表示 $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は C^s 級である．

注意 2.1.5. (1) $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ に注意.

(2) $U \subset f^{-1}(V)$，すなわち $f(U) \subset V$ となるようにチャートを選べば，(U, φ) と (V, ψ) に関する f の局所座標表示は次のようにしてよい:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

(3) C^r 級多様体間の写像には $s \leq r$ として C^s 級までしか定義されない.

定義 2.1.6. 任意の $p \in M$ に対し，$f : M \to N$ が p で C^s 級であるとき，f は **C^s 級**，または f は M から N への **C^s 級写像** (C^s map) であるという．M から N への C^s 級写像全体の集合を $C^r(M, N)$ と表す．

注意 2.1.7. (1) 定義 2.1.6 は明らかに次のように言える:

任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$, $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ に対し，局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が C^s級.

(2) $C(M, N) \coloneqq C^0(M, N)$ は位相空間の間の連続写像全体の集合としてみてよい.

定義 2.1.8. $C^s(M) \coloneqq C^s(M, \mathbb{R})$ の元を M 上の **C^s 級関数** (C^s function) という．ただし，$\mathbb{R}$ には標準的なチャートが定義されているとする．

注意 2.1.9. (1) $V = \mathbb{R}$, $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ より，丁寧に述べると次のようになる: 連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$, $p \in M$, $s \leq r$ とする．$p \in U$ を満たす M のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対し，(U, φ) に関する f の局所座標表示

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

が C^s 級であるとき，f は p で **C^s 級**であるという．任意の $p \in M$ に対し，$f : M \to \mathbb{R}$ が p で C^s 級であるとき，f は M 上の **C^s 級関数**であるという．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & & \mathbb{R} \\
\varphi(U) \arrow[urr, "f\circ\varphi^{-1}"'] \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}"] & &
\end{tikzcd}$$

局所座標系が $\varphi := (x_1, \dots, x_m)$ であるとき，$f : U \to \mathbb{R}$ について，$y = f(x_1, \dots, x_m)$ を $f|_U$ の**座標表示** (coordinate display) という．

(2) 注意 2.1.7 と同様に，定義 2.1.8 は次のように言える:

$$\text{任意の } (U, \varphi) \in \mathcal{S} \text{ に対し，局所座標表示 } f \circ \varphi^{-1} \text{ が } C^s\text{級.}$$

(3) $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_m)$, $f(p) = y$ とすると，$p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)$ であるから，

$$y = f(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)) = f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)$$

となり，y は $x_1, \dots, x_m$ の関数である．座標表示は，$f \circ \varphi^{-1}$ を f と表記している言える．

命題 2.1.10. M, N, L を C^r 級多様体，$f \in C^s(M, N)$, $g \in C^s(N, L)$, $s \le r$ とする．このとき，$g \circ f \in C^s(M, L)$ である．

定義 2.1.11. $s \le r$ とする．連続写像 $f : M \to N$ が次を満たすとき，f は C^s **級微分同相写像** (C^s diffeomorphism) であるという:

(1) f は全単射である．
(2) $f \in C^s(M, N)$ かつ $f^{-1} \in C^s(N, M)$.

C^s 級微分同相写像 $f : M \to N$ が存在するとき，M と N は C^s **級微分同相** (C^s diffeomorphic) であるといい，$M \cong_{C^r} N$ と表す．M から N への C^s 級微分同相写像全体の集合を $\mathrm{Diff}^s(M, N)$ と表す．明らかに $\mathrm{Diff}^s(M, N) \subset C^s(M, N)$ である．

命題 2.1.12. $\mathrm{Diff}^s(M) := \mathrm{Diff}^s(M, M)$ とする．$\mathrm{Diff}^s(M)$ は，合成

$$\circ : \mathrm{Diff}^s(M) \times \mathrm{Diff}^s(M) \to \mathrm{Diff}^s(M),\ (f, g) \mapsto g \circ f$$

を演算として群になる．単位元は恒等写像 id_M，f の逆元は f^{-1} である．$\mathrm{Diff}^s(M)$ の元を M 上の C^s **級自己同相写像** (C^s automorphism) という．

2.1.2 C^s 級写像に関する命題

2.2 C^r 級写像の例

2.3 C^r 級微分構造

M を C^r 級多様体とする．また，M のチャート全体の集合を $\mathfrak{C}_M$，M の C^r 級アトラス全体の集合を $\mathfrak{U}^r_M$ と表す．

$$\mathfrak{C}_M := \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ は } M \text{ のチャート }\}$$

$$\mathfrak{U}^r_M := \{\mathcal{U} \subset \mathfrak{C}(M) \mid \mathcal{U} \text{ は } M \text{ の } C^r\text{級アトラス }\}$$

定義 2.3.1. $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}^r_M$, $(V, \psi) \in \mathfrak{C}_M$ が $\mathcal{U} \cup \{(V, \psi)\} \in \mathfrak{U}^r_M$ を満たすとき，(V, ψ) は $\mathcal{U}$ と**両立** (compartible) するという．$\mathcal{U}$ と両立するチャート全体の集合を $\mathfrak{C}_M(\mathcal{U})$ と表す．

$$\mathfrak{C}_M(\mathcal{U}) \coloneqq \{(V,\psi) \in \mathfrak{C}_M \mid (V,\psi) \text{ は } \mathcal{U} \text{ と両立する }\}$$

注意 2.3.2. (1) 明らかに $\mathcal{U} \subset \mathfrak{C}_M(\mathcal{U})$ である．

(2) もちろん，$\{(V,\psi)\} \in \mathfrak{U}^r_M$ である必要はない．

定義 2.3.3. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ が $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ を満たすとき，$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は C^r **級同値** (C^r equivalent) であるという．

命題 2.3.4. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，次は同値:

(1) $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は C^r 級同値である．

(2) 任意の $(U,\varphi) \in \mathcal{U}$ に対し，(U,φ) は $\mathcal{V}$ と両立する．

(3) 任意の $(V,\psi) \in \mathcal{V}$ に対し，(V,ψ) は $\mathcal{U}$ と両立する．

命題 2.3.5. $\mathfrak{U}^r_M$ 上の関係 $\sim$ を次で定める: $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，

$$\mathcal{U} \sim \mathcal{V} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{U}, \mathcal{V} \text{ は } C^r \text{級同値である } (\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M).$$

このとき，$\sim$ は $\mathfrak{U}^r_M$ 上の同値関係である．

命題 2.3.6. $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}^r_M$ とする．任意の $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathfrak{U}$ に対し，$\mathcal{U} \sim \mathcal{U}'$ ならば

$$\tilde{\mathcal{U}} \coloneqq \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}} \mathcal{U} \in \mathfrak{U}^r_M.$$

が成り立つ．特に，任意の $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ に対し，$\mathcal{U} \sim \tilde{\mathcal{U}}$ である．

定義 2.3.7. $(M, \mathcal{U})$ を C^r 級多様体とする．$[\mathcal{U}] \in \mathfrak{U}^r_M/{\sim}$ について

$$\mathcal{M}^r(\mathcal{U}) \coloneqq \bigcup_{\mathcal{U}' \in [\mathcal{U}]} \mathcal{U}' \in \mathfrak{U}^r_M$$

を M の C^r **級極大座標近傍系** (maximal system of coordinate neighborhoods)，または C^r **級極大アトラス** (maximal atlas)，または C^r **級微分構造** (differental structure) という．$\mathcal{M}^r(\mathcal{U})$ の元を M の C^r **級座標近傍**，または C^r **級チャート**という．

注意 2.3.8. 定義 2.3.7 における極大とは，次の意味である:

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{U} \text{ を満たす } \mathcal{R} \in \mathfrak{U}^r_M \text{に対し，} \mathcal{M}^r(\mathcal{U}) \subset \mathcal{R} \text{ ならば } \mathcal{R} = \mathcal{M}^r(\mathcal{U}) \text{ が成り立つ．}$$

系 2.3.9. $\mathcal{U} \sim \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$ が成り立つ．また，$\mathcal{U}' \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，$\mathcal{U} \sim \mathcal{U}'$ ならば $\mathcal{U}' \subset \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$.

命題 2.3.10. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，次は同値:

(1) $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$.

(2) $\mathcal{M}^r(\mathcal{U}) = \mathcal{M}^r(\mathcal{V})$.

命題 2.3.11. $\mathfrak{C}_M(\mathcal{U}) = \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$ が成り立つ．すなわち，$\mathcal{U} \in \mathfrak{U}^r_M$, $(V,\psi) \in \mathfrak{C}(M)$ に対し，次は同値:

(1) $(V,\psi) \in \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$.
(2) (V,ψ) は $\mathcal{U}$ と両立する．

2.4 1 の分割

多様体論に重要な定義や命題を厳選して列挙する．詳細は各分野の参考書を見よ．(未完成)

3 基礎数学から

定義 3.0.1. X を集合とする．集合族 $\{A \mid A \subset X\}$ を X の**冪集合** (power set) といい，2^X, $\mathcal{P}(X)$, $\mathfrak{P}(X)$ と表す．

4 位相空間論から

定義 4.0.1. X を集合とする．部分集合族 $\mathcal{O} \subset 2^X$ が次を満たすとき，$\mathcal{O}$ を X の**位相** (topology)，対 $(X,\mathcal{O})$ を**位相空間** (topological space)，$\mathcal{O}$ の元を**開集合** (open set) という:Λ を添字集合として

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{O}$.
(2) $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.
(3) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{O}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$.

命題 4.0.2. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．部分集合 $A \subset X$ について

$$\mathcal{O}_A \coloneqq \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$$

とすると，$(A,\mathcal{O}_A)$ は位相空間になる．$\mathcal{O}_A$ を X における A の**相対位相** (relative topology)，$(A,\mathcal{O}_A)$ を X の**部分空間** (subspace) という．

定義 4.0.3. $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が $V \in \mathcal{O}_Y$ ならば $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ を満たすとき，X から Y への**連続写像** (continuous map) という．連続写像 $f : X \to Y$ が全単射で f^{-1} も連続写像であるとき，f は X から Y への**同相写像** (homeomorphism) という．

定義 4.0.4. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．部分集合 $A \subset X$ と $A \subset W$ を満たす部分集合 $W \subset X$ に対し，$A \subset U \subset W$ を満たす $U \in \mathcal{O}$ が存在するとき，W を A の**近傍** (neighborhood) という．$A = \{x\}$ のとき，W を点 $x \in X$ の近傍という．$W \in \mathcal{O}$ のとき，W を**開近傍** (open neighborhood) という．

定義 4.0.5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し，x の近傍 U と y の近傍 V で $U \cap V = \varnothing$ となるものが存在するとき，X を **Hausdorff 空間** (Hausdorff space) であるという．

命題 4.0.6. Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff 空間である．

命題 4.0.7. $\mathbb{R}^n$ を数ベクトル空間とする．$\mathbb{R}^n$ 上の距離 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \coloneqq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定める．このとき，

$$\mathcal{O}_d \coloneqq \{U \subset \mathbb{R}^n \mid {}^\forall x \in U, {}^\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U\}$$

とすると，$(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_d)$ は位相空間になる．距離空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ を **Euclid 空間** (Euclidean space) という．以降，Euclid 空間にはこの位相が定義されているものとする．

定義 4.0.8. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を満たす $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B}$ となるものが存在するとき，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の**開基** (open base) であるという．

命題 4.0.9. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．このとき，$\{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ を開基とする直積集合 $X \times Y$ における位相 $\mathcal{O}_{X \times Y}$ が一意に定まる．$\mathcal{O}_{X \times Y}$ を $X \times Y$ の**積位相** (product topology)，$(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ を X と Y の**積空間** (product space) という．

命題 4.0.10. Hausdorff 空間の積空間は Hausdorff 空間である．

命題 4.0.11. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係とする．写像 $\pi : X \to X/{\sim}$ を $\pi(x) \coloneqq [x]$ で定める．このとき，

$$\mathcal{O}_{X/\sim} \coloneqq \{U \subset X/{\sim} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$$

とすると，$(X/{\sim}, \mathcal{O}_{X/\sim})$ は位相空間になる．$\mathcal{O}_{X/\sim}$ を X の**商位相** (quotient topology)，$(X/{\sim}, \mathcal{O}_{X/\sim})$ を X の**商空間** (quotient space)，π を**標準的な射影** (canonical projection) という．

5　代数学から

6　解析学から

定義 6.0.1. $r \in \mathbb{N}_0$ とする．$U \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が C^r **級関数** (function of class C^r) であるとは，r 階までのすべての偏導関数が存在し連続であることをいう．U 上の C^r 級関数全体の集合を $C^r(U)$ と表す．

$$C^\infty(U) \coloneqq \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(U)$$

としたとき，$C^\infty(U)$ の元を C^∞ **級関数**という．

定義 6.0.2. $r \in \mathbb{N}_0$，開集合 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ とする．写像 $f : U \to V$ が C^r **級微分同相写像** (diffeomorphism of class C^r) であるとは，f が全単射かつ C^r 写像であり，$f^{-1} : V \to U$ が C^r 写像であることをいう．

参考文献

[1] 松本幸夫. 多様体の基礎. 東京大学出版会. 2022.

[2] 服部晶夫. 多様体. 岩波全書. 2008.

[3] 藤岡敦. 具体例から学ぶ多様体. 裳華房. 2019.

[4] みなずみ. 多様体論. https://minazumi.com/math/note/mfd/index.html

[5] 安藤直也. 幾何学特論 II. http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/ ando/geometryII.pdf

[6] 高間俊至. 微分幾何学 ノート.
https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/pdf/mat-article04.pdf

[7] yamyamtopo. パラコンパクト性をめぐって.
https://yamyamtopo.files.wordpress.com/2017/05/paracompactness-revd.pdf

[8] yamyamtopo. 1 次元多様体の分類.
https://yamyamtopo.files.wordpress.com/2020/06/one_dimensional_mfd_revd.pdf

[9] yamyamtopo. 射影空間の Hausdorff 性.
https://yamyamtopo.files.wordpress.com/2019/08/projective_space_hausdorff.pdf