

# 離散力学系

v.0.0

mapsto

2024年1月14日

## 本稿について

本稿では、離散力学系の解説を行う。前提として、集合・写像の基礎知識、位相空間論、微分積分学、線形代数学、多様体論の初歩の知識があるとよい。本稿により生じた不利益は一切の責任を負わない。本稿は筆者の卒業研究のノートの役割も兼ねる。自分なりにまとめてみるつもりではあるが、基礎的な部分までしか完成しないであろう。その点、優秀な参考書は本稿よりもはるかに多くの発展的な議論が書いてあるので、力学系を本格的に学習したい方は参考文献を参照してほしい。

## はじめに

力学系の字面を見ると、いかにも物理学の分野にありそうである。力学系理論は、起源こそ物理学、特に天体の3体問題に由来するが、紛れもない数学の1分野であり、大域的には幾何学に属する。力学系とは「時間経過によるシステムの状態変化を数学的に記述する」ことを目標とする。初期状態では非常に近くにあった2点が、しばらく後では全く異なる挙動を示すカオスの話を聞いたことがあるかもしれない。力学系ではそういったことを直線上や球面上、トーラス上などで議論する(ここで多様体論があるとよい)。目次には力学系で扱う用語が多く並ぶ。面白そうと思った方はぜひ力学系を学んでみてほしい。

## 本稿の注意点

- 集合は断らない限り空でないとする。
- 自然数全体の集合を  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  とする。
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  をそれぞれ整数, 有理数, 実数, 複素数全体の集合とする。
- $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, x \in G$  について,  $G_{>x} := \{y \in G \mid y > x\}$  とする。  $G_{<x}, G_{\leq x}, G_{\geq x}$  も同様。
- $A \subset B$  は  $A = B$  の場合を含む。
- $n \in \mathbb{N}$  について,  $f^n$  を関数  $f$  の  $n$  回合成,  $f^{(n)}$  を関数  $f$  の  $n$  階微分とする。
- $n \in \mathbb{N}$  について,  $\mathbb{R}^n$  は断らない限り Euclid 空間, すなわち標準的な距離が定義されているとする。

# 目次

<b>1</b>	<b>力学系の基礎概念</b>	<b>4</b>
1.1	力学系の定義	4
1.2	周期点	4
1.3	不変集合	4
1.4	双曲性	4
1.5	回帰性	4
<b>2</b>	<b>区間上の力学系</b>	<b>4</b>
2.1	2次写像族	4
2.2	記号力学系	4
2.3	位相共役	4
2.4	カオス	4
2.5	Sharkovskii の定理	4
2.6	有限型記号力学系	4
2.7	$C^r$ 構造安定	4
2.8	周期3の周期点をもつ2次写像族	4
2.9	Schwarz 微分	4
2.10	1-パラメータ写像族	4
2.11	ホモクリニック点と分岐	4
2.12	くり込み作用素	4
2.13	折り畳み理論	4
2.14	単峰写像の周期点	4
<b>3</b>	<b>円周上の力学系</b>	<b>5</b>
3.1	回転数と周期点	5
3.2	Morse-Smale 系	5
3.3	安定系の稠密性	5
3.4	Denjoy の定理	5
3.5	極小性をもつ微分同相写像	5
3.6	微分同相写像族と回転数	5
<b>4</b>	<b>トーラス上の力学系</b>	<b>5</b>
4.1	固有値の連続性	5
4.2	Lyapounov 関数	5
4.3	双曲型トーラス自己同型写像	5
4.4	Markov 分割と記号力学系	5
4.5	周期点の局所安定多様体	5
<b>5</b>	<b>球面上の力学系</b>	<b>5</b>
5.1	馬蹄形微分同相写像	5
5.2	追跡性	5
5.3	双曲型集合の摂動	5

6	力学系の大局的性質	5
6.1	双曲型集合の性質 . . . . .	5
6.2	Hénon 写像 . . . . .	5
6.3	DA-微分同相写像 . . . . .	5
6.4	基本集合 . . . . .	5
7	微分同相写像族	6
8	基礎定理	6
9	エントロピー	6
10	複素力学系	6
11	エルゴード理論	6

# 1 力学系の基礎概念

## 1.1 力学系の定義

## 1.2 周期点

## 1.3 不変集合

## 1.4 双曲性

## 1.5 回帰性

# 2 区間上の力学系

## 2.1 2次写像族

## 2.2 記号力学系

## 2.3 位相共役

## 2.4 カオス

## 2.5 Sharkovskii の定理

## 2.6 有限型記号力学系

## 2.7 $C^r$ 構造安定

## 2.8 周期3の周期点をもつ2次写像族

## 2.9 Schwarz 微分

## 2.10 1-パラメータ写像族

## 2.11 ホモクリニック点と分岐

## 2.12 くり込み作用素

## 2.13 折り畳み理論

## 2.14 単峰写像の周期点

### 3 円周上の力学系

#### 3.1 回転数と周期点

#### 3.2 Morse-Smale 系

#### 3.3 安定系の稠密性

#### 3.4 Denjoy の定理

#### 3.5 極小性をもつ微分同相写像

#### 3.6 微分同相写像族と回転数

### 4 トーラス上の力学系

#### 4.1 固有値の連続性

#### 4.2 Lyapunov 関数

#### 4.3 双曲型トーラス自己同型写像

#### 4.4 Markov 分割と記号力学系

#### 4.5 周期点の局所安定多様体

### 5 球面上の力学系

#### 5.1 馬蹄形微分同相写像

#### 5.2 追跡性

#### 5.3 双曲型集合の摂動

### 6 力学系の大局的性質

#### 6.1 双曲型集合の性質

#### 6.2 Hénon 写像

#### 6.3 DA-微分同相写像

#### 6.4 非遊走集合とスペクトル分解

## 7 微分同相写像族

### 7.1 Cantor 集合の厚さ

### 7.2 孤立的ブロック上のベクトル場

### 7.3 局所安定性と厚さの連続性

### 7.4 馬蹄形微分同相写像の変形

### 7.5 公理 A 系の非稠密性

### 7.6 周期アトラクターの発生

## 8 基礎定理

### 8.1 周期点の局所安定多様体定理

### 8.2 双曲型集合の安定多様体定理

### 8.3 孤立的ブロック上の葉層構造

### 8.4 $\lambda$ -補題

### 8.5 ホモクリニック点定理

## 9 エントロピー

### 9.1 開被覆とエントロピー

### 9.2 軌道の増大率とエントロピー

### 9.3 周期点とエントロピー

## 10 エルゴード理論

## 11 複素力学系

## 参考文献

[1] 青木統夫: 力学系・カオス 非線形現象の幾何学的構成. 共立出版, 1996.

[2] 新訂版 カオス力学系入門 第2版: Robert L. Devaney. 共立出版, .

[3] 青木統夫・白石謙一: 力学系とエントロピー. 共立出版, .

[4] 浅岡正幸・志賀啓成・大鹿健一: 朝倉書店: 幾何学百科 III 力学系と大域幾何. 朝倉書店, .