多様体論　定義命題集

v.2.5

mapsto

2024 年 2 月 25 日

本稿について

本稿では，幾何学の重要な研究対象である多様体を定義し，多様体論序論としての一つの重要な結果である Stokes の定理を目標として，様々な話題を網羅することを目的として進める．多様体論は，参考書や個人ごとに流儀や議論の順序が異なり、初学者にとって混乱の要因となる．本稿では，そうした差異を極力カバーすることを目指す．一方，筆者の能力不足ではあるものの，多様体論は厳密な証明が大変な命題が非常に多いため，潔く証明をすべて省略し，定義や命題，例などを多く挙げるように努める．証明は各自考えたり，参考書を見たりするなどして確認してほしい．前提として，集合・写像の基礎，位相空間論，多変数関数の微積分，線形代数学，常微分方程式論の，いずれも初歩の知識があるとよい．本稿により生じた不利益は一切の責任を負わない．

本稿の注意点

- 集合は断らない限り空でないとする．
- 自然数全体の集合を $\mathbb{N} \coloneqq \{1, 2, \ldots\}$，$\mathbb{N}_0 \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体の集合とする．
- $G = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, x \in G$ について，$G_{>x} \coloneqq \{y \in G \mid y > x\}$ とする．$G_{<x}, G_{\leq x}, G_{\geq x}$ も同様．
- $A \subset B$ は $A = B$ の場合を含む．
- $n \in \mathbb{N}$ について，$\mathbb{R}^n$ は断らない限り Euclid 空間，すなわち標準的な距離が定義されているとする．位相空間と考えるときは，通常の距離から定まる位相が定義されているとする．
- 位相空間の同相 (位相同型) を $\approx$，ベクトル空間の同型 (線形同型) を $\cong$，C^r 級多様体の微分同相を $\cong_{C^r}$ で表す．

目 次

1 多様体の定義

1.1 C^r 級多様体の定義

定義 1.1.1. $n \in \mathbb{N}, M$ を位相空間，U を M の開集合，V を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\varphi : U \to V$ を同相写像とする．このとき，

(1) 対 (U, φ) を M の n **次元座標近傍** (coordinate neighborhood)，または M の n **次元チャート** (chart) という．

(2) M のチャート (U, φ) に対し，φ を U 上の**局所座標系** (local coordinate system) という．

(3) $p \in M$ に対し，$p \in U$ を満たす M のチャート (U, φ) を p の n **次元座標近傍**，または p の n **次元チャート**という．

(4) $p \in M$ のチャート (U, φ) に対し，

$$\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)) \in V$$

を p の (U, φ) に関する**局所座標** (local coordinate) という．

(5) $i = 1, \ldots, n$ に対し，局所座標における実数値関数

$$x_i : U \to \mathbb{R},\ p \mapsto x_i(p)$$

を U 上の**座標関数** (coordinate function) という．

(6) M のチャート (U, φ) に対し，U 上の局所座標系 φ を，座標関数を用いて $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$，チャートを $(U; x_1, \ldots, x_n)$ と表すことがある．

注意 1.1.2. $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_n)$ と $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ とでは，$(x_1, \ldots, x_n)$ の意味が異なることに十分注意する．

定義 1.1.3. M を位相空間とする．任意の $p \in M$ に対し，p の n 次元チャート (U, φ) が存在するとき，M は n **次元局所 Euclid 空間** (locally Euclidian space) であるという．

系 1.1.4. M を位相空間とする．このとき，次は同値:

(1) M は n 次元局所 Euclid 空間である．

(2) ある M の n 次元チャート族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆である．すなわち，

$$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

定義 1.1.5. 系 1.1.4 (2) を満たす M の n 次元チャート族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の n **次元座標近傍系** (system of coordinate neighborhoods)，または n **次元アトラス** (atlas) という．

定義 1.1.6. 位相空間 M が次を満たすとき，M は n **次元位相多様体** (topological manifold) であるという:

(1) M は Hausdorff 空間である．

(2) M は n 次元局所 Euclid 空間である．

定義 1.1.7. M を位相空間，$(U,\varphi),(V,\psi)$ を，$U\cap V\neq\varnothing$ を満たす M の n 次元チャートとする．このとき，写像

$$\psi|_{U\cap V}\circ\varphi|_{U\cap V}{}^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

を (U,φ) から (V,ψ) への**座標変換** (coordinate transformation) という．$\varphi\coloneqq(x_1,\dots,x_n),\psi\coloneqq(y_1,\dots,y_n)$ であるとき，

$$\begin{cases} y_1=y_1(x_1,\dots,x_n)\\ \quad\vdots\\ y_n=y_n(x_1,\dots,x_n)\end{cases}$$

を $\psi|_{U\cap V}\circ\varphi|_{U\cap V}{}^{-1}$ の**座標表示** (coordinate display) という．以降，座標変換 $\psi|_{U\cap V}\circ\varphi|_{U\cap V}{}^{-1}$ を省略して $\psi\circ\varphi^{-1}$ と表す．

注意 1.1.8. $\varphi(p)=(x_1,\dots,x_n)$, $\psi(p)=(y_1,\dots,y_n)$ とする．$p=\varphi^{-1}(x_1,\dots,x_n)$ であるから，$(\psi\circ\varphi^{-1})_i:\varphi(U\cap V)\to\mathbb{R}\,(i=1,\dots,n)$ を用いて

$$(y_1,\dots,y_n)=\psi\circ\varphi^{-1}(x_1,\dots,x_n)=((\psi\circ\varphi^{-1})_1(x_1,\dots,x_n),\dots,(\psi\circ\varphi^{-1})_n(x_1,\dots,x_n))$$

となる．すなわち，座標表示は $((\psi\circ\varphi^{-1})_1,\dots,(\psi\circ\varphi^{-1})_n)$ を省略して $(y_1,\dots,y_n)=\psi$ と表記すると宣言している．

定義 1.1.9. M を位相空間，$r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ とする．M の n 次元アトラス $\mathcal{S}\coloneqq\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次を満たすとき，対 $(M,\mathcal{S})$ を n **次元** C^r **級微分可能多様体** (differentiable manifold of class C^r) という:

(1) M は n 次元位相多様体である．

(2) $U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ を満たす $(U_\lambda,\varphi_\lambda),(U_\mu,\varphi_\mu)\in\mathcal{S}$ に対し，座標変換

$$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda{}^{-1}:\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)$$

は C^r 級である．

C^r 級微分可能多様体を単に C^r **級多様体**，または**多様体**という．C^∞ 級多様体を**滑らかな多様体** (smooth manifold) ということもある．C^r 級多様体 $(M,\mathcal{S})$ に対し，$\mathcal{S}$ を C^r **級座標近傍系**または C^r **級アトラス**という．また，C^r 級多様体の**次元** (dimension) を $\dim M\coloneqq n$ と定める．アトラスが明らかなとき，C^r 級多様体 $(M,\mathcal{S})$ を単に M と表す．次元を明示するときは M^n と表す．

注意 1.1.10. (1) C^0 級多様体は位相多様体そのものである．

(2) 座標変換 $\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda{}^{-1}$ は $\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu{}^{-1}$ を逆写像に持つから，C^r 級微分同相写像である．

(3) 考える対象を扱いやすいもののみに制限するため，多様体の定義に「第 2 可算公理を満たす」という条件を加えることもある．この場合，定義 1.1.9 の多様体は**広義の多様体**と呼ばれることもある．本稿では，第 2 可算公理は必要なときに課せば十分であると考え，第 2 可算公理を課さない．

定義 1.1.11. M を位相空間，U を M の開集合，V を $\mathbb{C}^n$ の開集合，$\varphi : U \to V$ を同相写像とする．このとき，対 (U, φ) を M の n **次元正則座標近傍** (holomorphic coordinate neighborhood) という．正則座標近傍 (U, φ) に対し，φ を U 上の n **次元複素局所座標系** (complex local coordinate system) という．$p \in U$ に対し，

$$\varphi(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p)) \in V$$

を p の (U, φ) に関する n **次元複素局所座標** (complex local coordinate) という．$i = 1, \dots, n$ に対し，連続写像

$$z_i : U \to \mathbb{C},\ p \mapsto z_i(p)$$

を U 上の**複素座標関数** (complex coordinate function) という．ある M の正則座標近傍 $\mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して次を満たすとき，対 $(M, \mathcal{S})$ を n **次元複素多様体** (complex manifold) という:

(1) M は Hausdorff 空間である．

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆である．

(3) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ を満たす $(U_\lambda, \varphi_\lambda), (U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathcal{S}$ に対し，座標変換

$$\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は正則写像である．

複素多様体 $(M, \mathcal{S})$ に対し，$\mathcal{S}$ を M の n **次元正則座標近傍系** (system of holomorphic coordinate neighborhoods) という．複素多様体の**複素次元** (complex dimension) を $\dim_{\mathbb{C}} M \coloneqq n$ と定める．

注意 1.1.12. 複素多様体と区別して，定義 1.1.9 の多様体を**実多様体**ということもある．

1.2 C^r 級多様体の例

1.2.1 多様体の例

例 1.2.1. $\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間，$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を恒等写像とする．このとき，$(\mathbb{R}^n, \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．$(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ を $\mathbb{R}^n$ の**標準的なチャート** (standard chart) という．

例 1.2.2. $\mathbb{R}$ を Euclid 空間，$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi(x) \coloneqq x^3$ とする．このとき，$(\mathbb{R}, \{(\mathbb{R}, \varphi)\})$ は 1 次元 C^∞ 級多様体である．

例 1.2.3. $\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の開被覆，$\varphi_\lambda : U_\lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を包含写像とする．このとき，$(\mathbb{R}^n, \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

例 1.2.4. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f : U \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$，$\mathrm{proj} : \Gamma(f) \to U$ を次で定める:

$$\Gamma(f) \coloneqq \{(\boldsymbol{x}, y) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(\boldsymbol{x})\},$$

$$\mathrm{proj}(\boldsymbol{x}, y) \coloneqq \boldsymbol{x}.$$

このとき，$(\Gamma(f), \{(\Gamma(f), \mathrm{proj})\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．$\Gamma(f)$ を f の**グラフ** (graph) という．

例 1.2.5. M を離散空間とする．任意の $p \in M$ に対し，$\{p\}$ は M の開集合で，$\{p\}$ 上の局所座標系

$$\imath_p : \{p\} \to \mathbb{R}^0 = \{0\},\ \imath_p(p) \coloneqq 0$$

が自然に定まる．したがって，離散空間 $(M, \{(\{p\}, \imath_p)\}_{p \in M})$ は 0 次元多様体である．0 次元多様体は任意の $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ に対し，C^r 級多様体であるとみなす．

1.2.2 n 次元球面

定義 1.2.6. $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$S^n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$$

を n **次元球面** (sphere) という．

命題 1.2.7. S^n を n 次元球面とする．各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対し，開集合 $U_i^{\pm} \subset S^n$，写像 $\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_i^{\pm} \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\},$$

$$\varphi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1} \ldots, x_{n+1})$$

(複合同順)．このとき，$(S^n, \{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}_{i=1}^{n+1})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

命題 1.2.8. S^n を n 次元球面とする．開集合 $U_N, U_S \subset S^n$，写像 $\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^n, \varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_N \coloneqq S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}, U_S \coloneqq S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\},$$

$$\varphi_N(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right),$$

$$\varphi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right).$$

このとき，$(S^n, \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．φ_N, φ_S をそれぞれ $(0, \ldots, 0, 1), (0, \ldots, 0, -1)$ からの**立体射影** (stereoscopic projection) という．

1.2.3 n 次元射影空間

定義 1.2.9. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def.}}{\iff} \text{ある} \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ が存在して } \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

$\sim$ による商空間

$$\mathbb{R}P^n \coloneqq (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\})/{\sim}$$

を n **次元実射影空間** (real projective space) という．このとき，自然な射影を

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{R}P^n$$

とし，$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ を代表元とする同値類を $\pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n$ と表し，**同次座標** (homogeneous coordinate) という．

命題 1.2.10. $\mathbb{R}P^n$ を n 次元実射影空間とする．各 $i = 1, \dots, n+1$ に対し，$U_i \subset \mathbb{R}P^n$，写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_i \coloneqq \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\},$$

$$\varphi_i([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) \coloneqq \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i} \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right).$$

このとき，$(\mathbb{R}P^n, \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

射影空間の定義の仕方はいくつかあるが，命題 1.2.12 によって $S^n/{\sim}$ と $\mathbb{R}P^n$ は同一視できる．

命題 1.2.11 (商空間の普遍性)**.** X, Y を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係，$\sim$ による商空間を $X/{\sim}$，自然な射影を $\pi : X \to X/{\sim}$ とする．連続写像 $g : X \to Y$ が任意の $x, x' \in X$ に対して $x \sim x' \Rightarrow g(x) = g(x')$ を満たすならば，連続写像 $f : X/{\sim} \to Y$ であって $g = f \circ \pi$ を満たすものが一意に存在する．このとき，g は f を**誘導** (induce) するという．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X/{\sim} \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

命題 1.2.12. S^n を n 次元球面とする．S^n 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^n$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{x}.$$

$\sim$ による商空間を $S^n/{\sim}$*1，自然な射影を $\pi' : S^n \to S^n/{\sim}$ とする*2．$i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ を包含写像とするとき、$\pi \circ i : S^n \to \mathbb{R}P^n$ は同相写像 $\tilde{i} : S^n/{\sim} \to \mathbb{R}P^n$ を誘導する．すなわち，$S^n/{\sim} \approx \mathbb{R}P^n$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi\circ i"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \arrow[d, "\pi"] \\ S^n/{\sim} \arrow[r, "\tilde{i}"'] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し，$-\boldsymbol{x} \in S^n$ を**対蹠点** (antipodal point) という．

1.2.4 複素多様体の例

例 1.2.13. $\mathbb{C}^n$ を複素 Euclid 空間，$\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を恒等写像とする．このとき，$(\mathbb{C}^n, \{(\mathbb{C}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})\})$ は n 次元複素 C^∞ 級多様体である．

定義 1.2.14. $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分集合

$$Q^n \coloneqq \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid {z_1}^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1\}$$

を n **次元複素球面** (complex sphere) という．

*1 $S^n/{\sim}$ を $S^n/\{\pm 1\}$ と表すことがある．この表記は，位相空間 X と位相群 G に対し，G の X への群作用の軌道空間を X/G と表すことに由来する．

*2 π' は 2 重被覆写像である．

注意 1.2.15. 複素数体 $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間であるから，$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視する．このとき，$j = 1, \ldots, n+1$ に対し，

$$z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j \in \mathbb{C} \ \ (x_j, y_j \in \mathbb{R})$$

とすると，$|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$ より

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2n+2} \supset S^{2n+1} &= \{(x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid {x_1}^2 + {y_1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 1\} \\ &= \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}\end{aligned}$$

となる．したがって，$(2n+1)$ 次元球面 S^{2n+1} は $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分集合であるとみなせる．

命題 1.2.16. Q^n を n 次元複素球面とする．開集合 $U_N, U_S \subset Q^n$，写像 $\varphi_N : U_N \to \mathbb{C}^n, \varphi_S : U_S \to \mathbb{C}^n$ を次で定める:

$$\begin{aligned} U_N \coloneqq Q^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}, &U_S \coloneqq Q^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\}, \\ \varphi_N(z_1, \ldots, z_{n+1}) &\coloneqq \left(\frac{z_1}{1 - z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{1 - z_{n+1}}\right), \\ \varphi_S(z_1, \ldots, z_{n+1}) &\coloneqq \left(\frac{z_1}{1 + z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{1 + z_{n+1}}\right). \end{aligned}$$

このとき，$(Q^n, \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\})$ は n 次元 C^∞ 級複素多様体である．

定義 1.2.17. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対し，

$$\boldsymbol{z} \sim \boldsymbol{w} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \text{ある}\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{が存在して } \boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{z}.$$

$\sim$ による商空間

$$\mathbb{C}P^n \coloneqq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$$

を n **次元複素射影空間** (complex projective space) という．このとき，自然な射影を

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{C}P^n$$

とし，$(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ を代表元とする同値類を $\pi(z_1, \ldots, z_{n+1}) \coloneqq [z_1 : \cdots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$ と表し，**複素同次座標** (complex homogeneous coordinate) という．

命題 1.2.18. $\mathbb{C}P^n$ を n 次元複素射影空間とする．各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対し，$U_i \subset \mathbb{C}P^n$，写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ を次で定める:

$$\begin{aligned} U_i &\coloneqq \{[z_1 : \cdots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n \mid z_i \neq 0\}, \\ \varphi_i([z_1 : \cdots : z_{n+1}]) &\coloneqq \left(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i} \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right). \end{aligned}$$

このとき，$(\mathbb{C}P^n, \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1})$ は n 次元 C^∞ 級複素多様体である．

命題 1.2.19. 注意 1.2.15 より，S^{2n+1} を $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分集合とみなす．S^n 上の同値関係 $\sim$ を命題 1.2.12 と同様に定める．$\sim$ による商空間を $S^{2n+1}/\sim$，自然な射影を $\pi' : S^{2n+1} \to S^{2n+1}/\sim$ とする．$i : S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ を包含写像とするとき、$\pi \circ i : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ は同相写像 $\tilde{i} : S^{2n+1}/\sim \to \mathbb{C}P^n$ を誘導する．すなわち，$S^{2n+1}/\sim \approx \mathbb{C}P^n$.

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi \circ i"] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "\pi"] \\ S^{2n+1}/\sim \arrow[r, "\tilde{i}"'] & \mathbb{C}P^n \end{tikzcd}$$

1.2.5　多様体でない例

例 1.2.20. $\mathbb{R}$ の閉部分空間 $[0,1]$ は位相多様体でない．

定義 1.2.21. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ とする．$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\overline{D}^n(\boldsymbol{a}, r) \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leq r\}$$

を中心 $\boldsymbol{a}$, 半径 r の n **次元閉円板** (closed disk) という．$\overline{D}^n \coloneqq \overline{D}^n(\boldsymbol{0}, 1)$ とする．

例 1.2.22. 閉円板 $\overline{D}^n(\boldsymbol{a}, r)$ は位相多様体でない．

注意 1.2.23. 例 1.2.20 及び例 1.2.22 は境界付き多様体の例である (7 章を参照).

例 1.2.24. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdots x_n = 0\}$ は位相多様体でない．

例 1.2.25. $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ を通常の位相空間，$0' \notin \mathbb{R}, X \coloneqq \mathbb{R} \sqcup \{0'\}$ とする．

$$\mathcal{O} \cup \{(a, 0) \cup \{0'\} \cup (0, b) \mid a < 0 < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

を開基とする位相を X に定める．このとき，X は Hausdorff 空間でないが，局所 Euclid 空間である．また，X は第 2 可算公理を満たす．X を **2 つの原点を持つ直線** (line with two origins) という．

1.3　多様体の構成

1.3.1　多様体の構成

命題 1.3.1. $r, s \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ が $0 \leq s \leq r \leq \infty$ を満たすとき，任意の C^r 級多様体は C^s 級多様体である．

命題 1.3.2. $(M, \mathcal{S}), (N, \mathcal{T})$ を n 次元 C^r 級多様体とする．$M \cap N = \varnothing$ であるとき，$(M \sqcup N, \mathcal{S} \sqcup \mathcal{T})$ は n 次元 C^r 級多様体である．

命題 1.3.3. $(M, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を C^r 級多様体，W を M の開部分集合とする．このとき，

$$\mathcal{S}|_W \coloneqq \{(U_\lambda \cap W, \varphi_\lambda|_{U_\lambda \cap W})\}_{\lambda \in \Lambda}$$

とすると，$(W, \mathcal{S}|_W)$ は C^r 級多様体である．$(W, \mathcal{S}|_W)$ を M の**開部分多様体** (open submanifold) という．

例 1.3.4. $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合，例えば $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $(0,1)^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開部分多様体である．

定義 1.3.5. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ とする．$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$D^n(\boldsymbol{a}, r) \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$$

を中心 $\boldsymbol{a}$, 半径 r の n **次元開円板** (open disk) という．$D^n \coloneqq D^n(\boldsymbol{0}, 1)$ とする．

例 1.3.6. 開円板 $D^n(\boldsymbol{a}, r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開部分多様体である．

命題 1.3.7. $(M, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を m 次元 C^r 級多様体，$(N, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} \coloneqq \{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ を n 次元 C^r 級多様体とする．このとき，

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} \coloneqq \{(U_\lambda \times V_\mu, \varphi_\lambda \times \psi_\mu)\}_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \mathcal{M}},$$

$$\varphi_\lambda \times \psi_\mu : U_\lambda \times V_\mu \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \psi_\mu(V_\mu), \quad (\varphi_\lambda \times \psi_\mu)(p, q) \coloneqq (\varphi_\lambda(p), \psi_\mu(q))$$

とすると，$(M \times N, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$ は $(m+n)$ 次元 C^r 級多様体である．$(M \times N, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$ を M と N の**積多様体** (product manifold) という．

系 1.3.8. $i = 1, \dots, n$ に対し，$m_i \in \mathbb{N}, (M_i, \mathcal{S}_i)$, $\mathcal{S}_i \coloneqq \{(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i})\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ を m_i 次元 C^r 級多様体とする．このとき，

$$\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n \coloneqq \{(U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_n}, \varphi_{\lambda_1} \times \cdots \times \varphi_{\lambda_n})\}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n}$$

とすると，$(M_1 \times \cdots \times M_n, \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n)$ は $(m_1 + \cdots + m_n)$ 次元 C^r 級多様体である．

例 1.3.9. S^n を n 次元球面とする．このとき，

$$I^n \coloneqq S^n \times \mathbb{R}$$

は $(n+1)$ 次元 C^∞ 級多様体である．I^n を**超円柱** (hypercylinder) という．

1.3.2 n 次元トーラス

例 1.3.10. $n \in \mathbb{N}, S^1$ を 1 次元球面とする．このとき，

$$\mathbb{T}^n \coloneqq \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$$

は n 次元 C^∞ 級多様体である．$\mathbb{T}^n$ を n **次元トーラス** (torus) という．

例 1.3.11. $R, r \in \mathbb{R}_{>0}, R > r$ とする．このとき，

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

これを**回転トーラス** (torus of revolution) といい，xz 平面上の中心が $(R, 0)$，半径 r の円を z 軸の周りに 1 回転させて得られる．

例 1.3.12. $\mathbb{R}^n$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def.}}{\iff} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n.$$

このとき，商集合 $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \coloneqq \mathbb{R}^n / {\sim}$ を**平坦トーラス** (flat torus) という．

例 1.3.13. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ に注意すると，

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}$$

と表せる．また，この $\mathbb{T}^2$ を原点中心に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍縮小した S^3 の部分集合として

$$\mathbb{T}^2_{\mathrm{cl}} = \left\{ (x, y, z, w) \in S^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

と表せる．これらを **Clifford トーラス** (Clifford torus) という．注意 1.2.15 より，S^3 を $\mathbb{C}^2$ の部分集合とみなすと，Clifford トーラスは S^3，すなわち $\mathbb{C}^2$ の部分集合とみなせる．

1.3.3 有限次元ベクトル空間

命題 1.3.14. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，Y を集合，$f : Y \to X$ を写像とする．Y の部分集合族 $\mathcal{O}_f$ を

$$\mathcal{O}_f \coloneqq \{f^{-1}(U) \subset Y \mid U \in \mathcal{O}_X\}$$

と定めると，$(Y, \mathcal{O}_f)$ は位相空間になる．$\mathcal{O}_f$ を Y の f による**誘導位相** (induced topology) という．また，f が Y に誘導位相を与えるとき，f は連続である．

命題 1.3.15. V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．このとき，次は同値:

(1) $V \cong W$.

(2) $\dim V = \dim W$.

命題 1.3.16. V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，$n \coloneqq \dim V$ とする．命題 1.3.15 より線形同型写像 $f : V \to \mathbb{R}^n$ が存在し，この f による Y の誘導位相を $\mathcal{O}_f$ とすることで V を位相空間とみる．このとき，$(V, \{(V, f)\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．また，誘導位相 $\mathcal{O}_f$ は f，すなわち基底の取り方によらない．以降，$\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間はこのアトラスにより多様体とする．

例 1.3.17. 複素数体 $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間であるから，$2n$ 次元 C^∞ 級多様体である．

例 1.3.18. 複素多様体 M が $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ のとき，$\dim M = 2n$ である．特に，$\dim \mathbb{C}^n = \dim Q^n = \dim \mathbb{C}P^n = 2n$.

例 1.3.19. m 行 n 列の実行列全体の集合 $M(m \times n, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の mn 次元ベクトル空間であるから，mn 次元 C^∞ 級多様体である．また，m 行 n 列の複素行列全体の集合 $M(m \times n, \mathbb{C})$ は $\mathbb{R}$ 上の $2mn$ 次元ベクトル空間であるから，$2mn$ 次元 C^∞ 級多様体である．以降，n 次正方行列全体を $M(n, \mathbb{R}) \coloneqq M(n \times n, \mathbb{R})$，$M(n, \mathbb{C}) \coloneqq M(n \times n, \mathbb{C})$ と表す．

1.4 第 2 可算公理と多様体

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする．

1.4.1 位相空間の諸性質

定義 1.4.1. X の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^X$ が

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の**被覆** (covering) という．また，部分集合 $A \subset X$ に対し，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^X$ が

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の**被覆**という．

定義 1.4.2. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X(または部分集合 $A \subset X$) の被覆とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し，$U_\lambda \in \mathcal{O}$ となるとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X(または A) の**開被覆** (open covering) という．

定義 1.4.3. $\mathcal{U}$ を X(または部分集合 $A \subset X$) の被覆とする．部分集合 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ が X(または A) の被覆であるとき，$\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の**部分被覆** (subcovering) という．

定義 1.4.4. X の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^X$ が $\#\Lambda < \infty$ を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は**有限** (finite) であるという．

定義 1.4.5. X の任意の開被覆に対して，有限部分被覆が存在するとき，X は**コンパクト** (compact) である，またはコンパクト空間であるという．部分集合 $A \subset X$ について，X の部分空間 A がコンパクトであるとき，A はコンパクトであるという．

命題 1.4.6. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト空間である．

命題 1.4.7. コンパクト空間の積空間はコンパクト空間である．

命題 1.4.8. Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合である．

例 1.4.9. $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{T}^n$ はコンパクト空間である．

定義 1.4.10. $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ を X の被覆とする．任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して，ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $V \subset U$ となるとき，$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の**細分** (refinement) である（または $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ を細分する）という．

定義 1.4.11. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の被覆とする．$x \in X$ に対し，x のある開近傍 V が存在し，

$$\#\{\lambda \in \Lambda \mid V \cap U_\lambda \neq \varnothing\} < \infty$$

を満たすとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は x で**局所有限** (locally finite) であるという．任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{U}$ が x で局所有限であるとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は**局所有限**であるという．

定義 1.4.12. X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，$\mathcal{U}$ の細分であり，かつ局所有限な開被覆 $\mathcal{V}$ が存在するとき，X は**パラコンパクト** (paracompact) であるという．

定義 1.4.13. $U \in \mathcal{O}$ に対し，閉包 $\overline{U}$ がコンパクトであるとき，U は**相対コンパクト** (relative compact) であるという．

定義 1.4.14. 任意の $x \in X$ に対し，相対コンパクトな x の開近傍が存在するとき，X は**局所コンパクト** (locally compact) であるという．

定義 1.4.15. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の被覆とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，U_λ がコンパクトかつ $\#\Lambda \leq \aleph_0$ を満たすとき，X は **σ コンパクト** (σ compact) であるという．

定義 1.4.16. 部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**開基** (open base) であるとは，任意の $U \in \mathcal{O}$ に対し，ある部分集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ が存在し，U の被覆となることをいう．

定義 1.4.17. X(または部分集合 $A \subset X$) の高々可算個の開集合からなる開基が存在するとき，X(または A) は**第 2 可算公理** (second axiom of countability) を満たすという．

命題 1.4.18. $\mathcal{U}$ を X の被覆とする．任意の $U \in \mathcal{U}$ が第 2 可算公理を満たすならば，X は第 2 可算公理を満たす．

命題 1.4.19. 第 2 可算公理を満たす位相空間の部分空間は第 2 可算公理を満たす．

命題 1.4.20. 第 2 可算公理を満たす位相空間の積空間は第 2 可算公理を満たす．

例 1.4.21. $\mathbb{R}^n$ は第 2 可算公理を満たす.

定義 1.4.22. X の任意の開被覆に対して，高々可算な部分被覆が存在するとき，X は **Lindelöf 空間** (Lindelöf space) であるという.

定義 1.4.23. ある $U, V \in \mathcal{O}$ が存在し，$U \neq \varnothing, V \neq \varnothing, U \cap V = \varnothing, U \cup V = X$ を満たすとき，X は**非連結** (disconnected) であるという．X が非連結でないとき，X は**連結** (connected) であるという．部分集合 $A \subset X$ について，X の部分空間 A が連結であるとき，A は**連結部分空間** (connected subspace) であるという.

例 1.4.24. X 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $x, y \in X$ に対し，

$$x \sim y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \text{ある } X \text{ の連結部分空間 } A \text{ が存在して } x, y \in A.$$

このとき，商集合 $X/\sim$ の同値類を X の**連結成分** (connected component) という.

命題 1.4.25. 次は同値:

(1) X は連結である.

(2) 部分集合 $A \subset X$ が開集合かつ閉集合ならば，$A = X$ または $A = \varnothing$.

1.4.2 第 2 可算公理と多様体

命題 1.4.26. コンパクト空間はパラコンパクト空間である.

命題 1.4.27. パラコンパクト空間の閉集合はパラコンパクト空間である.

命題 1.4.28. パラコンパクト空間の直和空間はパラコンパクト空間である．特に，離散空間はパラコンパクト空間である.

命題 1.4.29. 局所コンパクト Hausdorff 空間である Lindelöf 空間はパラコンパクト空間である

命題 1.4.30. 第 2 可算公理を満たす位相空間は Lindelöf 空間である.

系 1.4.31. 第 2 可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクト空間である.

命題 1.4.32. 第 2 可算公理を満たす局所コンパクト空間は σ コンパクトである.

命題 1.4.33. 局所コンパクト Hausdorff 空間かつ σ コンパクト空間はパラコンパクト空間である.

命題 1.4.34. コンパクト空間は σ コンパクト空間である.

命題 1.4.35. σ コンパクト空間は Lindelöf 空間である.

定理 1.4.36 (A.H.Stone の定理)**.** 距離空間はパラコンパクト空間である.

命題 1.4.37. 多様体は局所コンパクト空間である.

命題 1.4.38. 多様体 M の各連結成分は多様体であり，M は連結成分の直和空間である.

$$
\begin{tikzcd}
\text{第 2 可算公理} \arrow[r] \arrow[d, "\text{loc.cpt.,Haus.}"'] \arrow[dr, "loc.cpt.,Haus."] & \text{Lindelöf} \arrow[d, "loc.cpt.,Haus."] \\
\sigma\text{コンパクト} \arrow[r, "loc.cpt.,Haus."'] \arrow[ur] & \text{パラコンパクト} \\
\text{コンパクト} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

命題 1.4.39. M を連結な多様体とする．このとき，次は同値:

(1) M はパラコンパクトである．

(2) M は第二可算公理を満たす．

(3) M は σ コンパクトである．

(4) M は Lindelöf 空間である．

系 1.4.40. M を多様体とする．このとき，次は同値:

(1) M はパラコンパクトである．

(2) M の各連結成分は第二可算公理を満たす．

(3) M の各連結成分は σ コンパクトである．

(4) M の各連結成分は Lindelöf 空間である．

1.4.3　1 次元多様体の分類

命題 1.4.41. コンパクトな任意の連結 1 次元多様体は S^1 と同相である．

命題 1.4.42. パラコンパクトでありコンパクトでない任意の連結 1 次元多様体は $\mathbb{R}$ と同相である．

定義 1.4.43. $(X, \leq)$ を全順序集合とする。X に形式的に最大元 $+\infty$ と最小元 $-\infty$ を付け加えた全順序集合 $X^* \coloneqq X \cup \{\pm\infty\}$ に対し，$a, b \in X^*, a < b$ について

$$(a, b) \coloneqq \{x \in X^* \mid a < x < b\}$$

と定義する．このとき，(a, b) は X の部分集合である．

$$\{(a, b) \mid a < b, a, b \in X^*\}$$

を開基とする X の位相 $\mathcal{O}_{\leq}$ を，X の**順序位相** (order topology) という．

定義 1.4.44. ω_1 を最小の非可算順序数，$[0,1) \subset \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{L}_{\geq 0} \coloneqq \omega_1 \times [0,1)$ 上に，辞書式順序 $\leq_L$，すなわち $(\alpha, s), (\beta, t) \in \mathbb{L}_{\geq 0}$ に対し

$$(\alpha, s) \leq_L (\beta, t) \overset{\text{def.}}{\iff} \alpha < \beta \text{ または } (\alpha = \beta \text{ かつ } s \leq t)$$

を定める．全順序集合 $(\mathbb{L}_{\geq 0}, \leq_L)$ を**閉じた長い半直線** (closed long ray) という．

定義 1.4.45. 閉じた長い半直線 $(\mathbb{L}_{\geq 0}, \leq_L)$ の部分集合

$$\mathbb{L}_+ \coloneqq \mathbb{L}_{\geq 0} \setminus \{(0,0)\}$$

に $(\mathbb{L}_{\geq 0}, \leq_L)$ からの相対位相を入れた部分空間を**開いた長い半直線** (open long ray) または **Alexandroff 直線** (Alexandroff line) という．

定義 1.4.46. 閉じた長い半直線を $\mathbb{L}_{\geq 0}$，開いた長い半直線を $\mathbb{L}_+$ とする．$\mathbb{L} \coloneqq \mathbb{L}_+ \sqcup \mathbb{L}_{\geq 0}$ に次の順序 $<$ を入れる: $x, y \in \mathbb{L}, x \neq y$ に対し，

$$x < y \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} x \in \mathbb{L}_+ \text{ かつ } y \in \mathbb{L}_{\geq 0} \\ y < x \ (x, y \in \mathbb{L}_+) \\ x < y \ (x, y \in \mathbb{L}_{\geq 0}). \end{cases}$$

$(\mathbb{L}, <)$ は全順序集合であり，$(\mathbb{L}, <)$ に順序位相を入れた空間を**長い直線** (long line) という．

命題 1.4.47. $\mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ は，第 2 可算公理を満たさない連結 1 次元多様体である．

命題 1.4.48. 任意の連結 1 次元多様体は，$S^1, \mathbb{R}, \mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ のいずれかと同相である．

2 多様体間の写像

2.1 C^s 級写像

2.1.1 C^s 級写像の定義

$(M^m, \mathcal{S}), (N^n, \mathcal{T})$ を C^r 級多様体，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ とする．

定義 2.1.1. $f : M \to N$ を (位相空間の) 連続写像，$(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を M のチャート，$(V, \psi) \in \mathcal{T}$ を N のチャートとする．このとき，写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

を (U, φ) と (V, ψ) に関する f の**局所座標表示** (locally coordinate display) という．局所座標系が $\varphi \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$,$\psi \coloneqq (y_1, \ldots, y_n)$ であるとき，$i = 1, \ldots, n$, $f_i : U \cap f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ について

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \qquad \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases}$$

を $f|_U$ の**座標表示** (coordinate display) という．

注意 2.1.2. $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$, $\psi(f(p)) = (y_1, \ldots, y_n)$ とすると，$p = \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$ であるから，

$$(y_1, \ldots, y_n) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$$

となり，y_i は $x_1, \ldots, x_m$ の関数である．座標表示は，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ を $f = (f_1, \ldots, f_n)$ と表記している言える．

定義 2.1.3. 連続写像 $f : M \to N$, $p \in M$, $s \leq r$ とする．$p \in M$ のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ と，$f(p) \in N$ のチャート $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ に対し，局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ で C^s 級であるとき，f は p で **C^s 級** (class C^s) であるという．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & V \arrow[d, shift left, "\psi"] \\ \varphi(U) \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"'] & \psi(V) \arrow[u, shift left, "\psi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

命題 2.1.4. 定義 2.1.3 の f は well-defined である．すなわち，$p \in U' \neq U$ を満たす M のチャート $(U', \varphi') \in \mathcal{S}$ と，$f(p) \in V' \neq V$ を満たす N のチャート $(V', \psi') \in \mathcal{T}$ に対し，局所座標表示 $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ は C^s 級である．

注意 2.1.5. (1) $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ に注意.

(2) $U \subset f^{-1}(V)$，すなわち $f(U) \subset V$ となるようにチャートを選べば，(U, φ) と (V, ψ) に関する f の局所座標表示は次のようにしてよい:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

(3) C^r 級多様体間の写像には $s \leq r$ として C^s 級までしか定義されない．

定義 2.1.6. 任意の $p \in M$ に対し，$f : M \to N$ が p で C^s 級であるとき，f は **C^s 級**，または f は M から N への **C^s 級写像** (C^s map) であるという．M から N への C^s 級写像全体の集合を $C^r(M, N)$ と表す.

注意 2.1.7. (1) 定義 2.1.6 は明らかに次のように言える:

任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$, $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ に対し，局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が C^s級.

(2) $C(M, N) \coloneqq C^0(M, N)$ は位相空間の間の連続写像全体の集合としてみてよい．

定義 2.1.8. $C^s(M) \coloneqq C^s(M, \mathbb{R})$ の元を M 上の **C^s 級関数** (C^s function) という．ただし，$\mathbb{R}$ には標準的なチャートが定義されているとする．

注意 2.1.9. (1) $V = \mathbb{R}$, $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ より，丁寧に述べると次のようになる: 連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$, $p \in M$, $s \leq r$ とする．$p \in U$ を満たす M のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対し，(U, φ) に関する f の局所座標表示

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

が C^s 級であるとき，f は p で C^s **級**であるという．任意の $p \in M$ に対し，$f : M \to \mathbb{R}$ が p で C^s 級であるとき，f は M 上の C^s **級関数**であるという．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & \mathbb{R} \\ \varphi(U) \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[ur, "f\circ\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

局所座標系が $\varphi \coloneqq (x_1, \ldots, x_m)$ であるとき，$f : U \to \mathbb{R}$ について，$y = f(x_1, \ldots, x_m)$ を $f|_U$ の**座標表示** (coordinate display) という．

(2) 注意 2.1.7 と同様に，定義 2.1.8 は次のように言える:

$$\text{任意の } (U, \varphi) \in \mathcal{S} \text{ に対し，局所座標表示 } f \circ \varphi^{-1} \text{ が } C^s\text{級.}$$

(3) $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$, $f(p) = y$ とすると，$p = \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$ であるから，

$$y = f(\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)) = f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$$

となり，y は $x_1, \ldots, x_m$ の関数である．座標表示は，$f \circ \varphi^{-1}$ を f と表記している言える．

命題 2.1.10. M, N, L を C^r 級多様体，$f \in C^s(M, N)$, $g \in C^s(N, L)$, $s \leq r$ とする．このとき，$g \circ f \in C^s(M, L)$ である．

定義 2.1.11. $s \leq r$ とする．連続写像 $f : M \to N$ が次を満たすとき，f は C^s **級微分同相写像** (C^s diffeomorphism) であるという:

(1) f は全単射である．

(2) $f \in C^s(M, N)$ かつ $f^{-1} \in C^s(N, M)$.

C^s 級微分同相写像 $f : M \to N$ が存在するとき，M と N は C^s **級微分同相** (C^s diffeomorphic) であるといい，$M \cong_{C^r} N$ と表す．M から N への C^s 級微分同相写像全体の集合を $\mathrm{Diff}^s(M, N)$ と表す．明らかに $\mathrm{Diff}^s(M, N) \subset C^s(M, N)$ である．

命題 2.1.12. $\mathrm{Diff}^s(M) \coloneqq \mathrm{Diff}^s(M, M)$ とする．$\mathrm{Diff}^s(M)$ は，合成

$$\circ : \mathrm{Diff}^s(M) \times \mathrm{Diff}^s(M) \to \mathrm{Diff}^s(M),\ (f, g) \mapsto g \circ f$$

を演算として群になる．単位元は恒等写像 id_M，f の逆元は f^{-1} である．$\mathrm{Diff}^s(M)$ の元を M 上の C^s **級自己同相写像** (C^s automorphism) という．

2.1.2　C^s 級写像に関する命題

2.2　C^r 級写像の例

2.3　C^r 級微分構造

M を C^r 級多様体とする．また，M のチャート全体の集合を $\mathfrak{C}_M$，M の C^r 級アトラス全体の集合を $\mathfrak{U}^r_M$ と表す．

$$\mathfrak{C}_M \coloneqq \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ は } M \text{ のチャート}\}$$

$$\mathfrak{U}^r_M \coloneqq \{\mathcal{U} \subset \mathfrak{C}(M) \mid \mathcal{U} \text{ は } M \text{ の } C^r\text{級アトラス}\}$$

定義 2.3.1. $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}^r_M$, $(V,\psi) \in \mathfrak{C}_M$ が $\mathcal{U} \cup \{(V,\psi)\} \in \mathfrak{U}^r_M$ を満たすとき，(V,ψ) は $\mathcal{U}$ と**両立** (compartible) するという．$\mathcal{U}$ と両立するチャート全体の集合を $\mathfrak{C}_M(\mathcal{U})$ と表す．

$$\mathfrak{C}_M(\mathcal{U}) \coloneqq \{(V,\psi) \in \mathfrak{C}_M \mid (V,\psi) \text{ は } \mathcal{U} \text{ と両立する } \}$$

注意 2.3.2. (1) 明らかに $\mathcal{U} \subset \mathfrak{C}_M(\mathcal{U})$ である．

(2) もちろん，$\{(V,\psi)\} \in \mathfrak{U}^r_M$ である必要はない．

定義 2.3.3. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ が $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ を満たすとき，$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は C^r **級同値** (C^r equivalent) であるという．

命題 2.3.4. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，次は同値:

(1) $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は C^r 級同値である．

(2) 任意の $(U,\varphi) \in \mathcal{U}$ に対し，(U,φ) は $\mathcal{V}$ と両立する．

(3) 任意の $(V,\psi) \in \mathcal{V}$ に対し，(V,ψ) は $\mathcal{U}$ と両立する．

命題 2.3.5. $\mathfrak{U}^r_M$ 上の関係 $\sim$ を次で定める: $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，

$$\mathcal{U} \sim \mathcal{V} \overset{\text{def.}}{\iff} \mathcal{U}, \mathcal{V} \text{ は } C^r \text{級同値である } (\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M).$$

このとき，$\sim$ は $\mathfrak{U}^r_M$ 上の同値関係である．

命題 2.3.6. $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}^r_M$ とする．任意の $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathfrak{U}$ に対し，$\mathcal{U} \sim \mathcal{U}'$ ならば

$$\tilde{\mathcal{U}} \coloneqq \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}} \mathcal{U} \in \mathfrak{U}^r_M.$$

が成り立つ．特に，任意の $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ に対し，$\mathcal{U} \sim \tilde{\mathcal{U}}$ である．

定義 2.3.7. $(M,\mathcal{U})$ を C^r 級多様体とする．$[\mathcal{U}] \in \mathfrak{U}^r_M/\sim$ について

$$\mathcal{M}^r(\mathcal{U}) \coloneqq \bigcup_{\mathcal{U}' \in [\mathcal{U}]} \mathcal{U}' \in \mathfrak{U}^r_M$$

を M の C^r **級極大座標近傍系** (maximal system of coordinate neighborhoods)，または C^r **級極大アトラス** (maximal atlas)，または C^r **級微分構造** (differental structure) という．$\mathcal{M}^r(\mathcal{U})$ の元を M の C^r **級座標近傍**，または C^r **級チャート**という．

注意 2.3.8. 定義 2.3.7 における極大とは，次の意味である:

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{U} \text{ を満たす } \mathcal{R} \in \mathfrak{U}^r_M \text{に対し}, \mathcal{M}^r(\mathcal{U}) \subset \mathcal{R} \text{ ならば } \mathcal{R} = \mathcal{M}^r(\mathcal{U}) \text{ が成り立つ.}$$

系 2.3.9. $\mathcal{U} \sim \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$ が成り立つ．また，$\mathcal{U}' \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，$\mathcal{U} \sim \mathcal{U}'$ ならば $\mathcal{U}' \subset \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$.

命題 2.3.10. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}^r_M$ に対し，次は同値:

(1) $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$.

(2) $\mathcal{M}^r(\mathcal{U}) = \mathcal{M}^r(\mathcal{V})$.

命題 2.3.11. $\mathfrak{C}_M(\mathcal{U}) = \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$ が成り立つ．すなわち，$\mathcal{U} \in \mathfrak{U}^r_M$, $(V,\psi) \in \mathfrak{C}(M)$ に対し，次は同値:

(1) $(V,\psi) \in \mathcal{M}^r(\mathcal{U})$.

(2) (V,ψ) は $\mathcal{U}$ と両立する．

2.4　1 の分割

3　接ベクトル空間

3.1　接ベクトル空間

3.2　C^r 級写像の微分

3.3　接ベクトル束

4　はめ込みと埋め込み

4.1　陰関数定理と逆関数定理

4.2　はめ込みと埋め込み

4.3　正則点と臨界点

4.4　埋め込み定理

4.5　Sard の定理

5　ベクトル場

5.1　ベクトル場

5.2　積分曲線

5.3　Lie 微分

6　微分形式

6.1　1 次微分形式

6.2　k 次微分形式

7　Stokes の定理

7.1　外微分

7.2　Stokes の定理

8　Lie 群

8.1　Lie 群

8.2　Lie 環

9　Riemann 多様体

9.1　Riemann 多様体

参考文献

[1] 松本幸夫: 多様体の基礎. 東京大学出版会, 2022.

[2] 服部晶夫: 多様体. 岩波全書, 2008.

[3] 藤岡敦: 具体例から学ぶ多様体. 裳華房, 2019.

[4] みなずみ: 多様体論. https://minazumi.com/math/note/mfd/index.html

[5] 安藤直也: 幾何学特論 II. http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/ ando/geometryII.pdf

[6] 高間俊至: 微分幾何学 ノート. https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/pdf/mat-article04.pdf

[7] yamyamtopo: パラコンパクト性をめぐって. https://yamyamtopo.files.wordpress.com/2017/05/paracompactness-revd.pdf

[8] yamyamtopo: 1 次元多様体の分類. https://yamyamtopo.files.wordpress.com/2020/06/one_dimensional_mfd_revd.pdf

[9] yamyamtopo: 射影空間の Hausdorff 性. https://yamyamtopo.files.wordpress.com/2019/08/projective_space_hausdorff.pdf