多様体論

v.1.0

mapsto

2023 年 12 月 2 日

本稿について

- 本稿は，多様体の定義から Stokes の定理を目標にしている．
- 前提として，集合・写像の基礎知識，位相空間論，多変数関数の微分，線形代数学，常微分方程式の初歩の知識があるとよい．
- 本稿により生じた不利益は一切の責任を負わない．
- 参考文献は以下の通りである:

参考文献

[1] 松本幸夫: 多様体の基礎. 東京大学出版会, 2022.

[2] 服部晶夫: 多様体. 岩波全書, 2008.

[3] みなずみ: 多様体論. https://minazumi.com/math/note/mfd/index.html

[4] 安藤直也: 幾何学特論 II. http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/ ando/geometryII.pdf

[5] 高間俊至: 微分幾何学 ノート. https://event.phys.s.u-tokyo.ac.jp/physlab2023/pdf/mat-article04.pdf

[6] yamyamtopo: パラコンパクト性をめぐって. https://yamyamtopo.files.wordpress.com/2017/05/paracompactness-revd.pdf

記号について

- $\mathbb{N} \coloneqq \{1, 2, \ldots\}$，$\mathbb{N}_0 \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．
- $A \subset B$ は $A = B$ の場合を含む．
- 集合は断らない限り空でないとする．

目 次

1 準備

多様体論に重要な定義や命題を厳選して列挙する．詳細は各分野の参考書を見よ．

定義 1.1. X を集合とする．部分集合族 $\mathcal{O} \subset 2^X$ が次を満たすとき，$\mathcal{O}$ を X の**位相** (topology)，対 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間** (topology space)，$\mathcal{O}$ の元を**開集合** (open set) という:Λ を添字集合として

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{O}$.

(2) $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

(3) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$.

命題 1.2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．部分集合 $A \subset X$ について

$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$$

とすると，$(A, \mathcal{O}_A)$ は位相空間になる．$\mathcal{O}_A$ を X における A の**相対位相** (relative topology)，$(A, \mathcal{O}_A)$ を X の**部分空間** (subspace) という．

定義 1.3. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が $V \in \mathcal{O}_Y$ ならば $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ を満たすとき，X から Y への**連続写像** (continuous map) という．連続写像 $f : X \to Y$ が全単射で f^{-1} も連続写像であるとき，f は X から Y への**同相写像** (homeomorphism) という．

定義 1.4. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．部分集合 $A \subset X$ と $A \subset W$ を満たす部分集合 $W \subset X$ に対し，$A \subset U \subset W$ を満たす $U \in \mathcal{O}$ が存在するとき，W を A の**近傍** (neighborhood) という．$A = \{x\}$ のとき，W を点 $x \in X$ の近傍という．$W \in \mathcal{O}$ のとき，W を**開近傍** (open neighborhood) という．

定義 1.5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x の近傍 U と y の近傍 V で $U \cap V = \varnothing$ となるものが存在するとき，X を **Hausdorff 空間** (Hausdorff space) であるという．

命題 1.6. $\mathbb{R}^n$ を数ベクトル空間とする．$\mathbb{R}^n$ 上の距離 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定める．このとき，

$$\mathcal{O}_d := \{U \subset \mathbb{R}^n \mid {}^\forall x \in U, {}^\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U\}$$

とすると，$(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_d)$ は位相空間になる．距離空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ を **Euclid 空間** (Euclidian space) という．以降，Euclid 空間にはこの位相が定義されているものとする．

定義 1.7. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を満たす $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B}$ となるものが存在するとき，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の**開基** (open base) であるという．

命題 1.8. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．このとき，$\{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ を開基とする直積集合 $X \times Y$ における位相 $\mathcal{O}_{X \times Y}$ が一意に定まる．$\mathcal{O}_{X \times Y}$ を $X \times Y$ の**積位相** (product topology)，$(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ を X と Y の**積空間** (product space) という．

命題 1.9. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係とする．写像 $\pi : X \to X/\sim$ を $\pi(x) \coloneqq [x]$ で定める．このとき，

$$\mathcal{O}_{X/\sim} \coloneqq \{U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$$

とすると，$(X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim})$ は位相空間になる．$\mathcal{O}_{X/\sim}$ を X の**商位相** (quoitent topology)，$(X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim})$ を X の**商空間** (quoitent space)，π を**標準的な射影** (canonical projection) という．

定義 1.10. $r \in \mathbb{N}_0$ とする．$U \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が C^r **級関数** (function of class C^r) であるとは，r 階までのすべての偏導関数が存在し連続であることをいう．U 上の C^r 級関数全体の集合を $C^r(U)$ と表す．

$$C^\infty(U) \coloneqq \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(U)$$

としたとき，$C^\infty(U)$ の元を C^∞ **級関数**という．

定義 1.11. $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が C^ω **級関数**または**実解析関数** (real analytic function) であるとは，$a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ のまわりで $|x_i - a_i| < \varepsilon_i \, (i = 1, \ldots, n)$ を満たす範囲で広義一様絶対収束する級数

$$\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}}(a)(x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n}$$

に展開されることをいう．C^ω 級関数ならば C^∞ 級関数であるが，逆は成り立たない．

2　多様体の定義

我々は地に足を着けて生活しているため，Euclid 的な地図を用いて物の位置を指定することができる．しかし，地球は丸いことを思い出すと，我々が体感している直線とは何か，今見えているのは本当に Euclid 空間なのかということさえ疑問に感じるだろう．しかし，現に不自由なく生活できているため Euclid 空間と考えて問題はない．多様体は「局所的に見れば Euclid 空間である」ものである．多様体に足を着けて住む人間は，自分たちが住んでいる空間は Euclid 空間であると錯覚せざるを得ないのである．

2.1　C^r 級多様体の定義

目標. 多様体を定義する．

$n \in \mathbb{N}$，Λ を添字集合，$\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間とする．

定義 2.1 (座標近傍)**.** M を位相空間，U を M の開集合，V を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\varphi : U \to V$ を同相写像[*1]とする．このとき，対 (U, φ) を M の n 次元**座標近傍** (coordinate neighborhood)，または n 次元**チャート** (chart) という．座標近傍 (U, φ) に対し，φ を U 上の**局所座標系** (local coordinate system) という．$p \in U$ に対し，

$$\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)) \in V$$

を p の (U, φ) に関する**局所座標** (local coordinate) という．$i = 1, \ldots, n$ に対し，連続写像

$$x_i : U \to \mathbb{R},\ p \mapsto x_i(p)$$

を U 上の**座標関数** (coordinate function) という．

注意 2.2. p の局所座標 $\varphi(p)$ は $\mathbb{R}^n$ の元であるから，実数 $x_1, \ldots, x_n$ を用いて $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_n)$ と表されるのが自然である．座標関数と実数を自然に同一視し，局所座標系を $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$，座標近傍を $(U; x_1, \ldots, x_n)$ と表すことがある．$x_1, \ldots, x_n$ は実数であったり，実関数であったりするので文脈に合わせて注意して読む必要がある．

定義 2.3 (局所 Euclid 空間)**.** M を位相空間とする．任意の $p \in M$ に対し，p の開近傍 $U \subset M$ と M の n 次元座標近傍 (U, φ) が存在するとき，M は n 次元**局所 Euclid 空間** (locally Euclidian space) であるという．

命題 2.4. M を位相空間とする．このとき，次は同値:

(1) M は局所 Euclid 空間である．

(2) ある M の n 次元座標近傍族 $\mathcal{S} := \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆である．すなわち，$M = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

(2) の $\mathcal{S}$ を M の n 次元**座標近傍系** (system of coordinate neighborhoods)，または n 次元**アトラス** (atlas) という．

[*1] φ は同相写像，すなわち全単射な開写像であるから，$V = \varphi(U)$ としてよい．

証明. (1)⇒(2)：$p \in M$ の開近傍を $U_p \subset M$ とすると，M の n 次元座標近傍族 $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p\in M}$ が存在する．このとき，明らかに $M = \bigcup_{p\in M} U_p$ である．
(2)⇒(1)：任意の $p \in M$ を取る．このとき，ある n 次元座標近傍 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ が存在し $p \in U_\lambda$ となるから，M は局所 Euclid 空間である． □

定義 2.5 (C^r 級可微分多様体). M を位相空間，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ とする．M の n 次元座標近傍系 $\mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次を満たすとき，対 $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r **級可微分多様体** (differentiable manifold of class C^r) という:

(1) M は Hausdorff 空間である．

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆である．

(3) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ を満たす[*2] $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，写像

$$\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は C^r 級である．

C^r 級可微分多様体を単に C^r **級多様体**，または**多様体**という．$\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1}$ を $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ から (U_μ, φ_μ) への**座標変換** (coordinate transformation) という．局所座標系が $\varphi_\lambda \coloneqq (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi_\mu \coloneqq (y_1, \ldots, y_n)$ であるとき，

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad\vdots \\ y_n = y_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

を $\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1}$ の**座標表示** (coordinate display) という．また，C^r 級多様体の**次元** (dimension) を $\dim M \coloneqq n$ と定める．C^r 級多様体 $(M, \mathcal{S})$ を単に M と表す．次元を明示するときは M^n と表す．

定義 2.6. (1) C^0 級多様体を n 次元**位相多様体** (topological manifold) という．

(2) C^∞ 級多様体を**可微分多様体** (differentiable manifold) という．

(3) C^ω 級多様体を**実解析多様体** (real analytic manifold)[*3]という．

注意 2.7. (1) $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$, $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \subset \mathbb{R}^n$ に注意．
(2) 定義 2.5 の条件 (2) は命題 2.4 より M が局所 Euclid 空間であることに置き換え可能である．
(3) M が局所 Euclid 空間かつ Hausdorff 空間のとき，座標変換は必ず連続であるから，位相多様体になる．(位相多様体の定義には定義 2.5 の条件 (3) は不要である．)
(4) $\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1}$ は $\varphi_\lambda \circ {\varphi_\mu}^{-1}$ を逆写像に持つから，C^r 級同相写像である．
(5) C^r 級多様体 M の 1 点の近傍を取るときには, M に付与されている C^r 級座標近傍系から取るものとする．
(6) 基本的な多様体の定義に「M は第 2 可算公理を満たす」という条件を加えることもある．第 2 可算公理を課すのは，考える対象を扱いやすいもののみに制限するためである．この場合，定義 2.4 の多様体は広義の多様体と呼ばれることもある．本稿では，第 2 可算公理は必要なときに課せば十分であると考え，第 2 可算公理を課さない．詳しくは 2.5 節で述べる．

[*2] $U_\lambda \cap U_\mu = \varnothing$ のとき，空写像となり自明に存在すると考えてよい．
[*3] 紹介にとどめ，以降考えない．よく現れる多様体は大体 C^ω 級である．

定義 2.8 (複素多様体)**.** M を位相空間，U を M の開集合，V を $\mathbb{C}^n$ の開集合，$\varphi : U \to V$ を同相写像とする．このとき，対 (U, φ) を M の**複素座標近傍** (complex coordinate neighborhood) という．複素座標近傍 (U, φ) に対し，φ を U 上の**局所複素座標系** (local complex coordinate system) という．$p \in U$ に対し，

$$\varphi(p) = (z_1(p), \ldots, z_n(p)) \in V$$

を p の (U, φ) に関する**局所複素座標** (local complex coordinate) という．$i = 1, \ldots, n$ に対し，連続写像

$$z_i : U \to \mathbb{C},\ p \mapsto z_i(p)$$

を U 上の**複素座標関数** (complex coordinate function) という．ある M の複素座標近傍族 $\mathcal{S} := \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して次を満たすとき，対 $(M, \mathcal{S})$ を**複素多様体** (complex manifold) という:

(1) M は Hausdorff 空間である．

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆である．

(3) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ を満たす $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，写像

$$\varphi_\mu \circ {\varphi_\lambda}^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は双正則写像[*4]である．

複素多様体 $(M, \mathcal{S})$ に対し，$\mathcal{S}$ を M の**複素座標近傍系** (system of complex coordinate neighborhoods) という．複素多様体の**複素次元** (complex dimension) を $\dim_{\mathbb{C}} M := n$ と定める．

注意 2.9. (1) $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視[*5]すると，$\dim_{\mathbb{C}} M = n$ のとき，$\dim M = 2n$ である．
(2) 複素多様体と区別して，定義 2.5 の多様体を**実多様体**ということもある．以降，複素多様体は詳しくは扱わず，多様体は実多様体のことを指す．

2.2 多様体の例

目標. 多様体の例を挙げる．

$n \in \mathbb{N}$，Λ を添字集合，$\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間とする．

例 2.10 ($\mathbb{R}^n$ その 1)**.** $\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間，$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を恒等写像とする．このとき，$(\mathbb{R}^n, \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

証明. writing □

例 2.11 ($\mathbb{R}^n$ その 2)**.** $\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の開被覆，$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$ を包含写像とする．このとき，$(\mathbb{R}^n, \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である．

証明. writing □

[*4] $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が双正則写像 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ f が正則かつ全単射かつ f^{-1} が正則．
[*5] ここでの同一視とは，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての同型のことである．

例 2.12 (グラフ). U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, $f : U \to \mathbb{R}$ を n 変数実数値連続関数とする. $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathrm{proj} : \Gamma(f) \to U$ を次で定める:

$$\Gamma(f) \coloneqq \{(\boldsymbol{x}, y) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(\boldsymbol{x})\}$$

$$\mathrm{proj}(\boldsymbol{x}, y) \coloneqq \boldsymbol{x}$$

このとき, $(\Gamma(f), \{(\Gamma(f), \mathrm{proj})\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である. $\Gamma(f)$ を f の**グラフ** (graph) という.

証明. writing □

例 2.13 (n 次元球面その 1). $S^n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とする. S^n を n 次元**球面** (sphere) という. 各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対し, 開集合 $U_i^\pm \subset S^n$, 写像 $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_i^\pm \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\},$$

$$\varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1} \ldots, x_{n+1})$$

(複合同順). このとき, $(S^n, \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1}^{n+1})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である.

証明. writing □

例 2.14 (n 次元球面その 2). S^n を n 次元球面とする. 開集合 $U^\pm \subset S^n$, 写像 $\varphi^\pm : U^\pm \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U^\pm \coloneqq S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, \pm 1)\},$$

$$\varphi^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq \left(\frac{x_1}{1 \pm x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 \pm x_{n+1}}\right)$$

(複合同順). このとき, $(S^n, \{(U^\pm, \varphi^\pm)\})$ は n 次元 C^∞ 級多様体である. $\varphi^\pm$ を $\{(0, \ldots, 0, \pm 1)\}$ からの**立体射影** (stereoscopic projection) という.

証明. writing □

例 2.15 (n 次元射影空間). $\mathbb{K}$ を (位相) 体とする. $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し,

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

商空間 $\mathbb{KP}^n \coloneqq (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}) / \sim$ を n 次元 $\mathbb{K}$ **射影空間** (projective space) という. 特に, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき, **実射影空間** (real projective space), $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき, **複素射影空間** (complex projective space) という. $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ を代表元とする同値類を $[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{KP}^n$ と表し, **同次座標** (homogeneous coordinate) という. 各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対し, $U_i \subset \mathbb{KP}^n$, 写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ を次で定める:

$$U_i \coloneqq \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{KP}^n \mid x_i = 1\},$$

$$\varphi_i([x_1 : \cdots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_{n+1}]) \coloneqq (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1} \ldots, x_{n+1}).$$

このとき, $(\mathbb{KP}^n, \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1})$ は C^∞ 級多様体である. 特に, $\dim \mathbb{RP}^n = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{CP}^n = n$ である.

証明. writing □

2.3　多様体の構成

目標. 既知の多様体から新たな多様体を構成する.

$n, m \in \mathbb{N}$, Λ を添字集合, $\mathbb{R}^n$ を Euclid 空間とする.

命題 2.16 (C^s 級多様体)**.** $r, s \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ が $0 \leq s \leq r \leq \infty$ を満たすとき, 任意の C^r 級多様体は C^s 級多様体である.

証明. 任意の C^r 級座標変換は C^s 級である. □

命題 2.17 (開部分多様体)**.** $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $(M, \mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ を C^r 級多様体, W を M の開部分集合とする. このとき,

$$\mathcal{S}|_W \coloneqq \{(U_\lambda \cap W, \varphi_\lambda|_{U_\lambda \cap W})\}_{\lambda \in \Lambda}$$

とすると, $(W, \mathcal{S}|_W)$ は C^r 級多様体である. $(W, \mathcal{S}|_W)$ を M の**開部分多様体** (open submanifold) という.

証明. writing □

命題 2.18 (積多様体)**.** $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $(M, \mathcal{S} \coloneqq \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ を m 次元 C^r 級多様体、$(N, \mathcal{T} \coloneqq \{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu \in \mathcal{M}})$ を n 次元 C^r 級多様体とする. このとき,

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} \coloneqq \{(U_\lambda \times V_\mu, \varphi_\lambda \times \psi_\mu)\}_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \mathcal{M}}$$

とすると, $(M \times N, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$ は $(m+n)$ 次元 C^r 級多様体である. $(M \times N, \mathcal{S} \times \mathcal{T})$ を M と N の**積多様体** (product manifold) という.

証明. writing □

系 2.19. $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ とする. 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し, $m_i \in \mathbb{N}$, $(M_i, \mathcal{S}_i \coloneqq \{(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i})\}_{\lambda_i \in \Lambda_i})$ を m_i 次元 C^r 級多様体とする. このとき,

$$\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n \coloneqq \{(U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_n}, \varphi_{\lambda_1} \times \cdots \times \varphi_{\lambda_n})\}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n}$$

とすると, $(M_1 \times \cdots \times M_n, \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n)$ は $(m_1 + \cdots + m_n)$ 次元 C^r 級多様体である.

証明. 命題 2.18 を繰り返し適用すればよい. □

例 2.20. S^1 を 1 次元球面とする. このとき,

$$T^n \coloneqq \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$$

は n 次元 C^∞ 級多様体である. T^n を n 次元**トーラス** (torus) という.

証明. 例 2.13, 系 2.19 より明らか. □

2.4　C^r 級微分構造

2.5　第二可算公理と多様体

3　C^r 級写像

3.1　C^r 級写像

3.2　C^r 級関数

3.3　1 の分割

3.4　Lie 群

4　接ベクトル空間

4.1　接ベクトル空間

4.2　C^r 級写像の微分

4.3　接ベクトル束

4.4　C^r 級写像の性質

5　はめ込みと埋め込み

5.1　はめ込みと埋め込み

5.2　正則点と臨界点

5.3　埋め込み定理

5.4　Sard の定理

6　ベクトル場

6.1　ベクトル場

6.2　積分曲線

7　微分形式

7.1　1 次微分形式

7.2　k 次微分形式

8　Stokes の定理

8.1　外微分

8.2　Stokes の定理