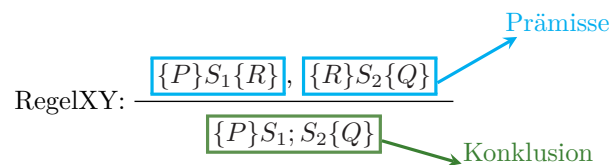


Axiome und Inferenzschemata des Hoare-Kalküls

Anja Wolffgramm

5. Juni 2017

Wie sind die Regeln zu lesen?



Wenn die **Prämisse(n)** gezeigt wurde(n), dann gilt nach **RegelXY** die **Konklusion**.

Stärkere und schwächere Aussagen (Statements) unterscheiden

Im Nachfolgenden beschäftigen wir uns mit Logik und wollen stärkere und schwächere Aussagen unterscheiden lernen.

Aussage A	Aussage B	Implikation
„Zum Bestehen der Klausur benötigt man $\geq 50\%$ der Punkte“	„Zum Bestehen der Klausur benötigt man $\geq 50\%$ der Punkte und muss Anja einen Kuchen backen“	B ist stärker, da A eine Teilmenge ist. Es gilt: $B \implies A$
„Zum Bestehen der Klausur benötigt man $\geq 50\%$ der Punkte“	„Zum Bestehen der Klausur benötigt man $\geq 50\%$ der Punkte oder muss Anja einen Kuchen backen“	A ist stärker, da B eine Teilmenge ist. Es gilt: $A \implies B$
„Zum Bestehen der Klausur benötigt man $\geq 50\%$ der Punkte“	„Zum Bestehen der Klausur muss man Anja einen Kuchen backen“	A und B sind nicht vergleichbar, da sie disjunkt sind. Keine von beiden ist stärker.
„True“	„ $n = 2k + 1$ “	B ist stärker, da A keine Einschränkungen hat. Es gilt: $B \implies A$
„False“	„ $n = 2k + 1$ “	A ist stärker, da es kein Tupel (n, k) geben kann, sodass A erfüllt wäre. Es gilt: $A \implies B$

Regeln

1. **Nullaxiom** (es findet keine Zuweisung zwischen P und Q statt und $P \equiv Q$)

$$\{P\} \quad \{Q\}$$

$$\begin{array}{l} \{P\} \equiv \{n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}\} \\ \{Q\} \equiv \{n > 0 \wedge n \in \mathbb{N}\} \end{array} \quad \text{Nullaxiom}$$

2. **Zuweisungsaxiom** (ersetzt alle Vorkommen von x in Q durch expr)

$$\{Q\langle x \leftarrow \text{expr} \rangle\} \quad x = \text{expr}\{Q\}$$

$$\begin{array}{l} \{P\} \equiv \{2x + y > 5 \wedge y = 7\} \\ x = 2 * x + y \\ \{Q\} \equiv \{x > 5 \wedge y = 7\} \end{array} \quad \text{Zuweisungsaxiom}$$

3. **Sequenzregel**

- Sequenzregel

$$\frac{\{P\}S_1\{R\}, \{R\}S_2\{Q\}}{\{P\}S_1; S_2\{Q\}}$$

Sequenzregel

$$\begin{array}{l} \{P\} \equiv \{(x + 5)^2 > 0\} \\ x = x + 5 \\ \{R\} \equiv \{x^2 \neq 0\} \equiv \{x^2 > 0\} \\ x = x * x \\ \{Q\} \equiv \{x \neq 0\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Zuweisungsaxiom} \\ \text{Zuweisungsaxiom} \end{array}$$

- erweiterte Sequenzregel: Per Induktion lässt sich nachweisen, dass beliebig viele Sequenzen mit der Sequenzregel zusammen gefasst werden können:

$$\frac{\{P\}S_1\{R_1\}, \{R_1\}S_2\{R_2\}, \dots, \{R_{k-1}\}S_k\{Q\}}{\{P\}S_1; S_2; \dots; S_k\{Q\}}$$

4. **Konsequenzregel**

- Konsequenzregel I (Regel der schwächeren Nachbedingung)

$$\frac{\{P\}S\{R\}, \begin{array}{l} \text{stärker} \\ R \Rightarrow Q \\ \text{schwächer} \end{array}}{\{P\}S\{Q\}} \quad \text{Konsequenzregel I}$$

$$\begin{array}{l} \{P\} \equiv \{\text{True} \wedge x \geq 0\} \\ \text{res} = \text{math.sqrt}(x) \\ \{R\} \equiv \{\text{res} = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\} \\ \{Q\} \equiv \{\text{res} = \sqrt{x}\} \end{array} \quad \text{Zuweisungsaxiom}$$

Und aus R folgt Q , da R stärker ist.

- Konsequenzregel II (Regel der stärkeren Vorbedingung)

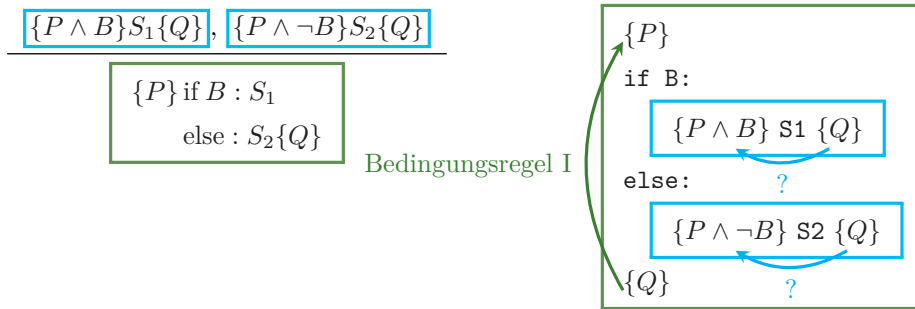
$$\frac{\begin{array}{l} \text{stärker} \\ P \Rightarrow R \\ \text{schwächer} \end{array}, \{R\}S\{Q\}}{\{P\}S\{Q\}} \quad \text{Konsequenzregel II}$$

$$\begin{array}{l} \{P\} \equiv \{x = 42\} \\ \{R\} \equiv \{(2x) \text{ gerade}\} \equiv \{\text{True}\} \\ x = x * 2 \\ \{Q\} \equiv \{x \text{ gerade}\} \end{array} \quad \text{Zuweisungsaxiom}$$

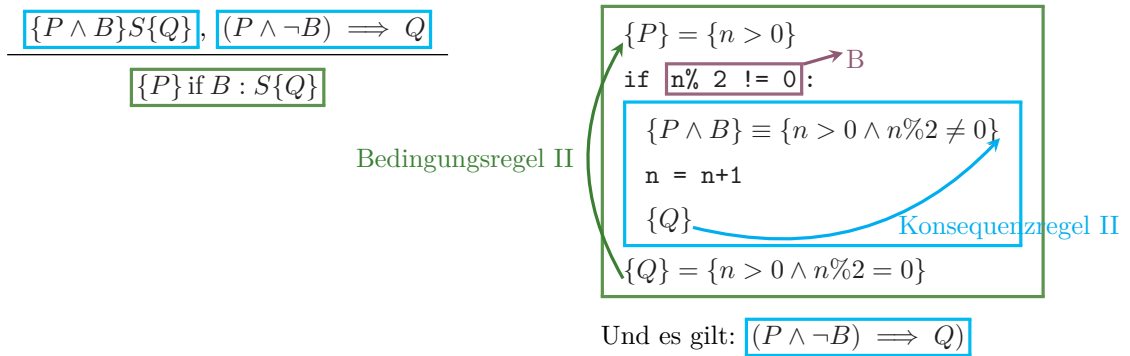
Und aus P folgt R , da P stärker ist.

5. Bedingungsregel

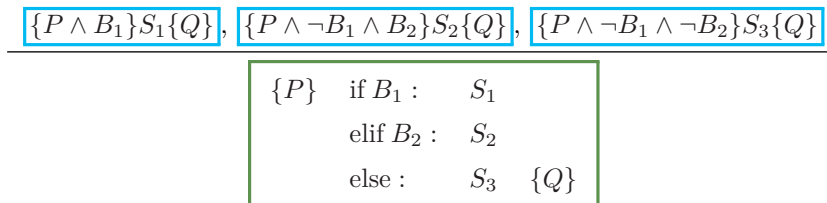
- Bedingungsregel I



- Bedingungsregel II (ohne else-Fall)



- erweiterte Bedingungsregel (if-elif-else)



6. while-Regel

