MÉTODOS PROBABILÍSTICOS

UNIDAD II: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES DE MÁS DE UNA VARIABLE

Temas:

2.1 Distribución de probabilidades conjunta de variables aleatorias discretas.

2.2 Independencia de variables aleatorias discretas.

OBJETIVO DE LA UNIDAD

Calcular esperanzas, varianzas, covarianzas y coeficientes de correlación de casos bivariados usando una herramienta computacional.

INTRODUCCIÓN

Existen muchos casos donde no es una simple variable la que se necesita observar, sino que son dos o más las variables que se deben observar para estudiar un fenómeno de la realidad. Estás variables pueden estar o no relacionadas entre sí, lo que denominamos "dependencia". Existen procedimientos estadísticos para validar la dependencia o no, entre las variables aleatorias. De eso trata esta unidad.

Aquí se inicia con el concepto de la distribución de probabilidades conjunta de dos variables aleatorias en el caso discreto, y luego se analiza su independencia. Se sigue con el estudio similar para el caso continuo. Finalizando la unidad con las formas de cálculo de esperanzas matemáticas, varianzas, covarianzas y coeficiente de correlación para casos bivariados.

Este procedimiento estudiado para el caso bivariado se puede hacer extensible para más de dos variables aleatorias, dejaremos que el estudiante investigue por su cuenta este caso si desea profundizar en este estudio.

2.1. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES CONJUNTA DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

Existen muchos casos de la vida diaria en los que participan más de una variable aleatoria para su descripción. Por ejemplo, cuando se trata de pronosticar el tiempo (o las

Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.

condiciones atmosféricas) de una región, se relacionan variabas variables, tales como la temperatura, la velocidad del viento, la humedad entre otras. Ya se conoce, por ejemplo, que hay cierta dependencia entre ellas, por ejemplo, cuando hay lluvia, viene acompañada de fuertes vientos y la temperatura disminuye. Aunque no es modelo determinístico, ya que no ocurre siempre de la misma forma, se trata mas bien de una tendencia. El modelo que describa exactamente este comportamiento deberá incluir muchas variables que son aleatorias, y ese es un tema que, aunque se escapa de los alcances de este curso, tiene su origen en los temas que estudiaremos aquí.

Iniciamos con entender la relación de dependencia que pueda existir entre dos variables aleatorias. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas, definidas sobre el mismo espacio muestral.

Mostraremos el concepto por medio de un ejemplo, suponga que lanzamos una moneda tres veces, la siguiente figura ilustra el número de resultados posibles de este experimento:

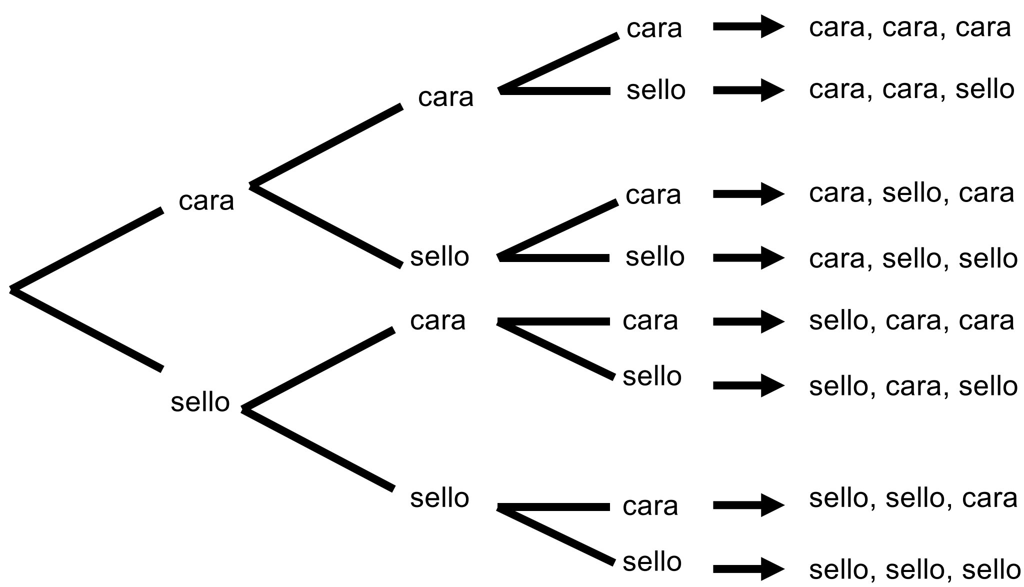


Figura 2.1.1 Diagrama de árbol del caso del lanzamiento de una moneda tres veces.

De allí resulta que el espacio de estados es S = {ccc, ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss}. Vamos ahora a definir dos variables aleatorias sobre dicho espacio muestral. Sea X el número de caras en los tres lanzamientos, y sea Y el número del lanzamiento en el que ocurrió la primera cara.

Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.

Entonces el espacio muestral asociado a X es $S_X = \{3, 2, 1, 0\}$ y el de Y es $S_Y = \{1, 2, 3, 0\}$. Donde el 0 en S_X, indica que no hubo cara en los tres lanzamientos, y el 0 en S_Y significa que nunca se obtuvo una cara en los tres lanzamientos.

Vamos ahora a resumir los datos del espacio muestral en la siguiente tabla, donde además se incluye la probabilidad de ocurrencia de los resultados del espacio muestral original.

Resultados	ccc	ccs	csc	css	scc	scs	ssc	sss
X	3	2	2	1	2	1	1	0
Y	1	1	1	1	2	2	3	0
Probabilidad	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Tabla 2.1.1 Resultado del experimento de lanzar una moneda tres veces y valores posibles de las variables aleatorias X y Y.

De la tabla anterior, vamos a construir una nueva tabla de doble entrada, una para la variable X y otra para la variable Y. ubicamos la variable X en la parte superior y debajo de ella sus valores posibles. En la parte lateral izquierda ubicamos la otra variable (Y) y en la columna siguiente sus valores.

		X			
		0	1	2	3
Y	0				
	1				
	2				
	3				

Tabla 2.1.2 Formato de tabla de conjunta

Ahora vamos a llenar la tabla, y en las casillas colocaremos la probabilidad del caso correspondiente a que la variable X tome el valor indicado en el encabezado de la columna y que simultáneamente la variable Y tome el valor del encabezado de fila que corresponde. Por ejemplo, en la casilla de la intersección X=0 y Y=0, ubicaremos la probabilidad de que tanto X valga cero como Y valga cero. Al revisar los casos en la tabla 2.1.1, vemos que solo hay un caso donde X=0 y Y=0, por tanto, la probabilidad a ubicar en dicha casilla es 1/8. Así:

		X			
		0	1	2	3
Y	0	1/8			
	1				

Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.

Así, se construye la tabla conjunta de probabilidades de X y Y, la cual se muestra a continuación:

		X			
		0	1	2	3
Y	0	1/8	0	0	0
	1	0	1/8	2/8	1/8
	2	0	1/8	1/8	0
	3	0	1/8	0	0

Tabla 2.1.3 Tabla de la distribución de probabilidades conjunta de X y Y.

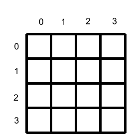
Ahora con esta tabla se puede proceder a responder a casos de probabilidades en las que se relacionen X y Y, de la siguiente forma: P(X = x y Y = y).

Ejemplos: Encuentre las siguientes probabilidades

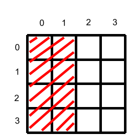
a) P(X=1 y Y=2)
b) P(X≤1 y Y=2)
c) P(X≤1 y Y≤2)
d) P(X≤1 ó Y≤2)

Para resolver estos casos, solo debemos recorrer la tabla 2.1.3 y sumar los cuadros de las probabilidades que cumplen el requerimiento.

a) P(X =1 y Y = 2), solo hay un cuadro que suple dicho requerimiento, or lo tanto, la respuesta es 1/8.
b) P(X≤1 y Y=2), se recomienda como una especie de técnica metodológica para resolver este tipo de caso crear una silueta de la tabla anterior y sombrear de una forma los cuadros que cumplen el requerimiento en la variable X y de otra forma los cuadros que satisfacen el requerimiento en la variable Y, luego se analiza los que cumplen ambos casos.

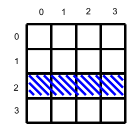


Así, el requerimiento en X es:

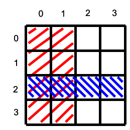


El requerimiento en Y es:

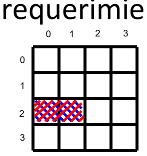
Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.



Por lo tanto, al analizar la conjunción, se tiene que de



Los únicos que satisfacen el requerimiento son:



Esto es debido a que son los únicos cuadros que cumplen ambos requerimientos simultáneamente.

Por tanto, la probabilidad es: 0 + 1/8 = 1/8.

Verifique Ud. Las siguientes respuestas, usando el criterio anterior:

c) $P(X \leq 1 \text{ y } Y \leq 2) = 3/8$.

d) $P(X \leq 1 \text{ ó } Y \leq 2) = 1$.

Procedemos ahora a establecer la definición de la distribución de probabilidades conjunta de dos variables aleatorias discretas X y Y.

Definición: Sean X y Y, dos variables aleatorias discretas, se define la conjunta de ambas como aquella que satisface que $P(X=x \text{ y } Y=y)$.

Asociada, con la definición de distribución conjunta de probabilidades aparece la definición de probabilidades marginales de X y de Y.

Las marginales de X y Y, se obtiene sumando todos los valores de las probabilidades tanto en fila (para la marginal de Y) como en columna (para la marginal de X), y anotando dicho resultado al margen de la tabla de probabilidades conjunta (de allí su nombre de probabilidades marginales).

A continuación, se muestra la tabla de distribuciones conjunta de X y Y del caso anterior junto con las distribuciones marginales de X y de Y. Note que la suma de todas las marginales siempre debe sumar 1, tanto en filas como en columnas, ya que en ellas se acumulan todas las probabilidades (la suma de probabilidades total siempre suma 1).

Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.

		X				Marginal de Y
		0	1	2	3	
Y	0	1/8	0	0	0	1/8
	1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
	2	0	1/8	1/8	0	2/8
	3	0	1/8	0	0	1/8
Marginal de X		1/8	3/8	3/8	1/8	1

Tabla 2.1.4 Tabla de distribuciones de probabilidades conjunta de X y Y, junto con las distribuciones de probabilidades marginales de X y de Y, del caso del lanzamiento de una moneda 3 veces.

La definición de probabilidades marginales es como sigue:

Definición: Sean X y Y, dos variables aleatorias discretas, cuya distribución de probabilidades conjunta viene dada por P(X=x y Y=y), entonces las distribuciones marginales para X y para Y se obtienen por medio de:

$$P(X = x) = \sum_{\forall y} P(X = x \ \wedge \ Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{\forall x} P(X = x \ \wedge \ Y = y)$$

2.2. INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

La independencia de dos variables aleatorias discretas se verifica muy fácilmente de la tabla de distribución de probabilidades conjunta de las variables X y Y.

Para que dos variables aleatorias discretas sean independientes debe cumplirse que el producto de las dos marginales sea igual al valor de la respectiva conjunta en cada elemento de la tabla de la conjunta.

Para ver esto de forma gráfica, se ha producido la siguiente ilustración, en la que los cuadros rojo y azul indican las respectivas probabilidades marginales de X y Y, en cambio el cuadro verde contiene el valor de la probabilidad conjunta de X y Y. Entonces la independencia se logra si el producto de las marginales es igual al valor de la conjunta para cada cuadro de la conjunta. Si uno falla a esta regla, entonces no son independientes.

Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.

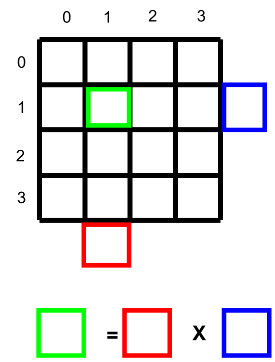


Figura 2.2.1 Ilustración de la relación que debe existir entre las marginales y la conjunta para mostrar independencia.

A continuación, se establece la definición de independencia de variables aleatorias discretas.

Definición: Dos variables aleatorias discretas X y Y, son independientes, si y solamente si, $P(X = x \;\; \wedge \;\; Y = y) = P(X = x) * P(Y = y)$ para todos los valores de x en el rango de X y todos los valores de y en el rango de Y.

Como un ejemplo, verificaremos si las variables aleatorias definidas en el numeral 1.1 son o no independientes.

Bastará con probar que en un caso no se cumple, para decir que no son independientes. Para ello, analizamos el caso de la conjunta P(X=0 Y=0) =1/8. Dado que la marginal de X es P(X=0) = 1/8 y la marginal de Y es P(Y=0) = 1/8. Se verifica que el producto de las marginales es P(X = 0) * P(Y = 0) = 1/64 y que no es igual a 1/8 que es el valor de la conjunta, por lo tanto, las variables X y Y no son independientes.

2.3. SECCIÓN DE EJERCICIOS.

1. Suponga que se lanza una moneda tres veces, construya la distribución de probabilidades conjunta del caso en el que se define sobre el espacio muestral asociado a dicho experimento como sigue: Sea X = número de sellos obtenidos en los tres lanzamientos y sea Y = la longitud corrida de sellos en cada resultado posible. Además, calcule las siguientes probabilidades:
   a. P(X=2 y Y=3).
   b. P(X≤2 y Y≤1).
   c. P(X≤2 y Y=3).
   d. P(X≤1 o Y≥2).

Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.

2. Determine si las variables del ejercicio 1 son o no independiente.
3. Basado en la condición de independencia de las variables X y Y, complete el siguiente cuadro de distribución de probabilidades conjunta de X y Y.

X

		4	**5**	**6**	
	0	0.2			0.6
Y	**1**		0.1		
	2				
			0.4		

2.4. BIBLIOGRAFÍA

1. Solomon. F. (1987) Probability and Stochastic Processes. New Jersey, USA. Prentice Hall Inc.
2. Bhat, U.N. & Miller, G. K. (2002) *Elements of applied Stochastic Processes*. New York, USA. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc.
3. Bailey, N. T. J. (1964) *The Elements of Stochastic Processes, with applications to the natural sciences*. New York, USA. John Wiley & Sons, Inc.
4. Baudin, M., (2010) *Introduction to Scilab*, France, The Scilab Consortium – Digiteo.
5. Canavos, G., (1998), *Probabilidad y estadística: Aplicaciones y métodos,* Mexico, D.F., McGraw-Hill/Interamericana de Mexico S.A. de C.V.
6. Devore, J., (2008). *Probabilidad y estadística: Para ingeniería y ciencias* (7ª. ed.) Mexico, D.F., Cengage Learning Editores S.A de C.V.
7. *Diccionario Merrian-Webster* Retomado de: http://www.merriam-webster.com (2017).
8. Dodge, Y. (2006) *Diccionario Oxford de términos estadísticos.*
9. Everitt, B., Skrondal, A., (2010) *The Cambridge dictionary of statistics* (4ª. ed.) New York, U.S.A. Cambridge University Press.
10. Hines, W., Montgomery, D. (1993). *Probabilidad y estadística: Para ingeniería y administración* (3er ed.) Mexico, D.F., CECSA.
11. Johnson, R., (1998) *Probabilidad y estadística: Para ingenieros de Miller y Freund* (5ª ed.) Mexico, D.F., Prentice-Hall Hispanoamericana.

Este material ha sido proporcionado al estudiante en el marco de su formación a través de una carrera en línea en la Universidad de El Salvador. Se han respetado los derechos de autor para su elaboración. El debido uso del mismo es responsabilidad del estudiante.

12. Mendenhall, W., Beaver, R., Beaver, B., (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística* (13ª ed.) Mexico, D.F., Cengage Learning Editores S.A de C.V.
13. Žitkcović, G. (2010) *Introduction to Stochastic Processes – Lecture Notes.* Austin, Texas, USA. Department of Mathematics. The University of Texas.
14. Taylor, H.M. & Karlin, S. (1998) An Introduction to Stochastic Modeling. New York, USA. Academic Press.
15. Knill, O. (2009) *Probability and Stochastic Processes with Applications*. New Delhi, India. Overseas Press India Private Limited.
16. Ross S. M. (1996) *Stochastic Processes*. New York, USA, John Wiley and Sons, Inc.
17. Feller, W. (1968) An introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 1. New York, USA, John Wiley and Sons, Inc.
18. Wolf, R. W. (1989) Stochastic Modeling and the Theory of Queues. New Jersey, USA. Prentice Hall Inc.
19. Yates, R. D. & Goodman, D. J. (1983) Probability and Stochastics Processes. New York, USA. John Wiley and Sons, Inc.

GLOSARIO

Definición de Distribución de probabilidades conjunta caso discreto: Sean X y Y, dos variables aleatorias discretas, se define la conjunta de ambas como aquella que satisface que P(X=x y Y=y).

Definición de probabilidades marginales de X y Y caso discreto: Sean X y Y, dos variables aleatorias discretas, cuya distribución de probabilidades conjunta viene dada por P(X=x y Y=y), entonces las distribuciones marginales para X y para Y se obtienen por medio de:

$$P(X = x) = \sum_{\forall y} P(X = x \ \wedge \ Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{\forall x} P(X = x \ \wedge \ Y = y)$$

Definición de independencia de variables aleatorias discretas: Dos variables aleatorias discretas X y Y, son independientes, si y solamente si, $P(X = x \ \wedge \ Y = y) = P(X = x) * P(Y = y)$ para todos los valores de x en el rango de X y todos los valores de y en el rango de Y.