Sesión 1: ¿Qué es la estadística y por qué simular?

Escuela de Verano – CIMAT

Marco Antonio Aquino López [1]

[1]CIMAT
Probabilidad y Estadística.

7 July 2025

Objetivos de la sesión

- Comprender la estadística como herramienta para modelar la incertidumbre.
- Introducir el concepto de variable aleatoria y su rol en la modelación del azar.
- Explorar la simulación como estrategia para estudiar fenómenos aleatorios.
- Estimar propiedades como media, varianza y distribución empírica.
- Usar Python para generar datos aleatorios y visualizarlos.

¿Por qué necesitamos la estadística?

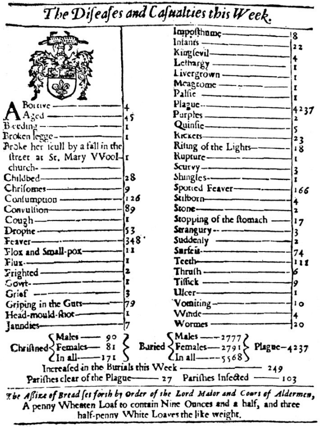
- El mundo real está lleno de incertidumbre: clima, mercados, biología, decisiones humanas.
- La estadística nos ayuda a razonar en contextos donde el azar y la variabilidad están presentes.
- No basta con observar: debemos inferir, comparar, predecir, y validar.

Idea central: La estadística es nuestro lenguaje para entender lo incierto.

¿De dónde viene la estadística?

- La palabra "estadística" proviene del latín **status**, originalmente referida a la descripción del Estado.
- Siglos XVII–XVIII: recopilación de datos sobre población, nacimientos y recursos fiscales.

Bills of Mortality (1662)



The Diſeaſes and Caſualties this Week.

Abortive	4	Impoſthume	8
Aged	45	Infants	22
Bleeding	1	Kingſevil	4
Broken legge	1	Lethargy	1
Broke her ſkull by a fall in the ſtreet at St. Mary VVool-church	1	Livergrown	1
Childbed	28	Meagrome	1
Chriſomes	9	Palſie	1
Conſumption	126	Plague	4237
Convulſion	89	Purples	2
Cough	1	Quinſie	5
Dropſie	53	Rickets	23
Feaver	348	Riſing of the Lights	18
Flox and Small-pox	11	Rupture	1
Flux	1	Scurvy	3
Frighted	2	Shingles	1
Gowt	1	Spotted Feaver	166
Grief	3	Stilborn	4
Griping in the Guts	79	Stone	2
Head-mould-ſhot	1	Stopping of the ſtomach	17
Jaundies	7	Strangury	3
		Suddenly	2
		Surfeit	74
		Teeth	111
		Thruſh	6
		Tiſſick	9
		Ulcer	1
		Vomiting	10
		Winde	4
		Wormes	20

Chriſtned: Males — 90, Females — 81, In all — 171
Buried: Males — 2777, Females — 2791, In all — 5568; Plague — 4237

Increaſed in the Burials this Week — 249

Pariſhes clear of the Plague — 27 Pariſhes Infected — 103

The Aſſize of Bread ſet forth by Order of the Lord Maior and Court of Aldermen,
A penny Wheaten Loaf to contain Nine Ounces and a half, and three half-penny White Loaves the like weight.

"By examining the weekly mortality data, I seek patterns that help us understand the city's health."

— John Graunt, 1662

Nace la teoría de probabilidades

- Siglo XVIII: se formaliza la probabilidad como rama matemática.
- **Pierre-Simon Laplace** (1749–1827): introduce el *Teorema de Bayes* en forma general.
- **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855): propone el método de mínimos cuadrados y la distribución normal.

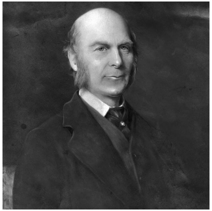
Francis Galton

Karl Pearson

(Laplace y Gauss: pilares de la estadística matemática)

Del conteo a la inferencia moderna

- Siglo XIX: surge el concepto de *regresión hacia la media* (**Francis Galton**) y la **correlación** (**Karl Pearson**).
- La estadística comienza a abordar preguntas causales, no solo descriptivas.



Francis Galton

Karl Pearson

(Galton y Pearson: de la biología a la estadística)

Revolución del siglo XX

- **Ronald A. Fisher** establece los fundamentos del diseño experimental y la inferencia estadística.
- Se desarrollan dos paradigmas:
  - **Frecuentista**: Neyman, Pearson y Wald.
  - **Bayesiano**: Jeffreys, Savage y De Finetti.
- Hoy: la estadística es núcleo de disciplinas como epidemiología, inteligencia artificial y ciencias sociales.

"La estadística es la gramática de la ciencia." — Karl Pearson

¿Qué papel juegan los datos?

- No observamos fenómenos directamente: observamos **datos**.
- Los datos son muestras generadas por un **proceso aleatorio subyacente**.
- La estadística busca entender ese proceso.

¿Cómo lo hacemos? $\rightarrow$ Definiendo modelos con variables aleatorias.

¿Cómo modelamos el azar?

Para estudiar fenómenos aleatorios con rigor, usamos un modelo matemático basado en:

Espacio de probabilidad

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

- Ω: espacio muestral (todos los posibles resultados)
- $\mathcal{F}$: sigma-álgebra (eventos observables)
- $\mathbb{P}$: medida de probabilidad

Este modelo formaliza nuestra incertidumbre sobre el fenómeno que estamos estudiando.

¿Qué es una variable aleatoria?

Definición

Una variable aleatoria es una función:

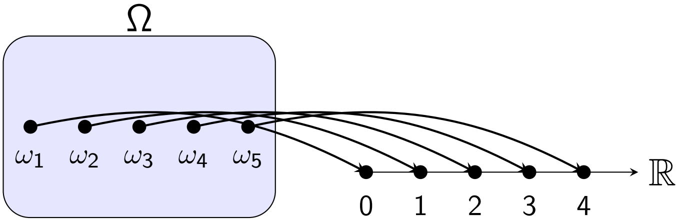
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

que asocia un número real a cada resultado posible del experimento aleatorio.

- Es medible: nos permite asignar probabilidades a eventos del tipo $X \in B$
- Transforma el espacio abstracto Ω en una variable cuantitativa con la que podemos trabajar.

Visualizando el modelo

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$



Ejemplo: lanzamiento de una moneda

Modelo simple:

- $\Omega = \{\text{Cara}, \text{Cruz}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(\text{Cara}) = \mathbb{P}(\text{Cruz}) = 0.5$

Definimos:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \text{Cara} \\ 0, & \omega = \text{Cruz} \end{cases}$$

Entonces X es una variable aleatoria de Bernoulli.

Función de distribución acumulada (FDA)

Definición

La **función de distribución acumulada** de una variable aleatoria X es:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Ejemplo: Moneda justa $X \sim \text{Bernoulli}(0.5)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.5 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Idea clave: La FDA acumula la probabilidad desde $-\infty$ hasta x.

Función de densidad de probabilidad (FDP)

Para variables aleatorias continuas

No se asigna probabilidad a valores puntuales, sino a intervalos:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Ejemplo: Variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

¿Por qué usar esta estructura formal?

- Permite modelar fenómenos aleatorios con precisión matemática.
- Da lugar a cálculos de probabilidades, medias, varianzas, distribuciones.
- Es la base para construir modelos más sofisticados (regresión, procesos estocásticos, etc.).

Dato clave: Lo que observamos en el mundo real son realizaciones de variables aleatorias.

Probabilidad y Estadística: dos perspectivas

Probabilidad

Parte de un modelo $(\Omega, \mathbb{P})$ y estudia sus propiedades.

Estadística

Parte de datos observados y busca inferir cómo es el modelo que los generó.

- Son dos caras de la misma moneda.
- Así como la física necesita matemáticas, la estadística necesita probabilidad.

¿Por qué simular?

Problema: A veces no podemos calcular exactamente la distribución, media o varianza de una variable aleatoria.

Solución: Usamos simulación computacional para generar datos artificiales que imitan el comportamiento de la variable.

- Se repite el experimento muchas veces.
- Se recolecta una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Se estima el comportamiento teórico de X.

¿Qué es una simulación?

Simular = Generar datos aleatorios controlados

- Podemos estudiar fenómenos complejos sin fórmulas explícitas.
- Es clave para:
  - Desarrollar intuición sobre probabilidades.
  - Visualizar fenómenos aleatorios.
  - Evaluar estimadores estadísticos.
- Forma la base de métodos como Monte Carlo, inferencia bayesiana, bootstrap y validación de modelos.

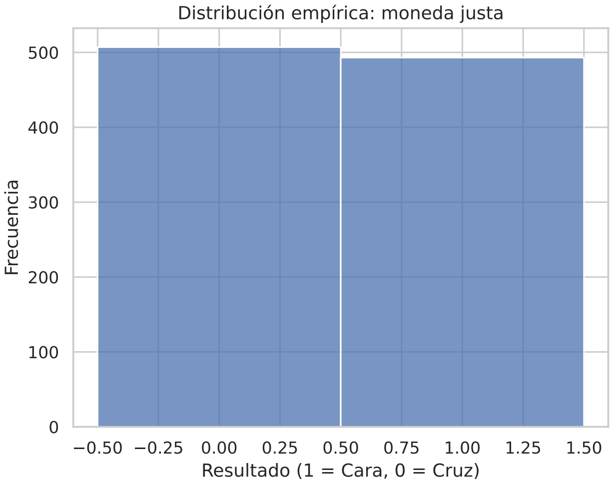
Ejemplo: simulando una moneda justa

Modelo: $X \sim \text{Bernoulli}(0.5)$

Podemos simular n lanzamientos de una moneda con Python: **Pregunta:** ¿Qué sucede si repetimos la simulación muchas veces?

Visualización: histograma de la moneda

Distribución empírica del experimento:



Ejemplo: simulando un dado justo

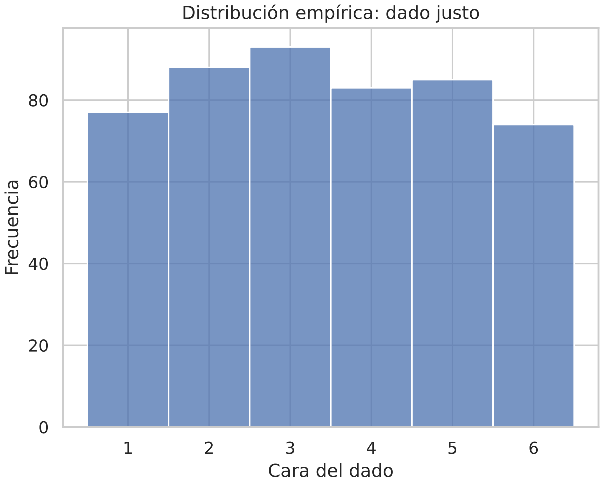
Modelo: $X \sim \text{Uniforme}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Podemos simular n lanzamientos de un dado justo con Python:

Pregunta: ¿La frecuencia de cada cara se estabiliza si repetimos muchas veces el experimento?

Visualización: histograma de la dado

Distribución empírica del experimento:



Ventajas de simular

- Nos permite experimentar sin peligro y costos minimos costo.
- Podemos validar métodos cuando no conocemos la verdad.
- Es flexible: podemos simular muchos modelos distintos fácilmente.

Ejemplos:

- Simulación de epidemias, procesos genéticos o redes sociales.
- Métodos de bootstrap para estimar errores estándar.
- MCMC para inferencia bayesiana en modelos complejos.

Preguntas para discutir en clase

- ¿Qué tan "buena" es una simulación para aproximar la verdad?
- ¿Cómo cambia la media muestral con el tamaño de muestra?
- ¿Qué tan estable es la distribución empírica?
- ¿Qué pasaría si la moneda estuviera cargada?

Media y varianza de una variable aleatoria

Definiciones

Sea X una variable aleatoria discreta:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

- Para una moneda justa: $\mathbb{E}[X] = 0.5$, $\mathrm{Var}(X) = 0.25$
- En la práctica, usamos la muestra para estimar estas cantidades.

Estimación desde simulación

Dada una muestra simulada $X_1, X_2, \ldots, X_n$, usamos:

- **Media muestral:**

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- **Varianza muestral:**

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Estas aproximan los valores esperados y dispersión de la variable aleatoria.

Código: estimar media y varianza

```python
# Simular 1000 lanzamientos de una moneda justa
import numpy as np

n = 100
moneda = np.random.choice([0, 1], size=n)

media = np.mean(moneda)
varianza = np.var(moneda, ddof=1)

print(f"Media: {media:.3f}")
print(f"Varianza: {varianza:.3f}")
```

Nota: Puedes comparar con los valores teóricos 0.5 y 0.25.

Distribución empírica

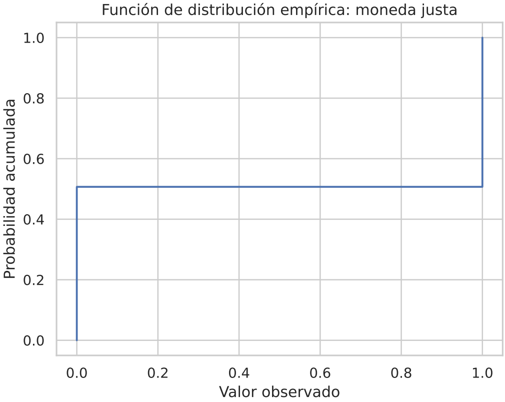
¿Qué es la distribución empírica?

Dada una muestra $X_1, \ldots, X_n$, la función de distribución empírica (FDE) es:

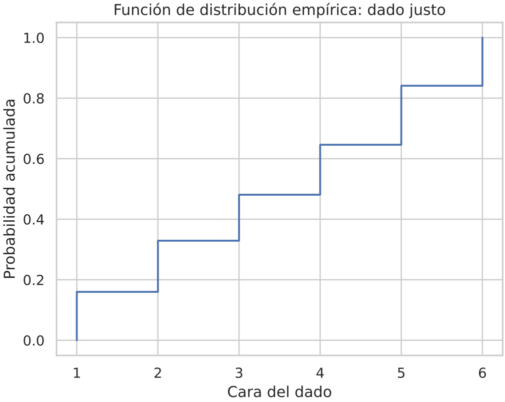
$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(X_i \leq x)$$

- Representa la proporción acumulada de observaciones $\leq x$
- Es una estimación no paramétrica de la distribución verdadera
- Tiene saltos en los puntos de la muestra

función de distribución empírica



función de distribución empírica



Histograma vs FDE

- **Histograma:** muestra la frecuencia con que ocurren los valores.
- **FDE:** muestra cómo se acumulan los valores hacia la derecha.

Ambas herramientas son complementarias y ayudan a explorar los datos simulados.

¿Quieres que te genere el gráfico del histograma o de la FDE?

Ejemplo: lanzamiento de un dado justo

Modelo:

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$$

Simulamos 500 lanzamientos y calculamos estadísticas:

```
n = 500 dado = np.random.randint(1, 7, size=n) media = np.mean(dado) varianza = np.var(dado, ddof=1)
print(f"Media:  media:.3f") print(f"Varianza:  varianza:.3f")
```

Histograma: dado justo

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

sns.histplot(dado, bins=np.arange(1,8)-0.5, discrete=True)
plt.title("Distribución empírica: dado justo")
plt.xlabel("Cara del dado")
plt.ylabel("Frecuencia")
plt.show()
```

Observación: Aunque el dado es justo, puede haber fluctuaciones por azar.

¿Y si el dado está cargado?

Supongamos que la cara 6 tiene el doble de probabilidad que las demás.

$$\mathbb{P}(X = 6) = 2p, \quad \mathbb{P}(X = k) = p, \text{ para } k = 1, \dots, 5$$

Como las probabilidades deben sumar 1:

$$5p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{7}$$

Usaremos simulación para estudiar cómo se ve este sesgo.

Simulación: dado cargado

```python
caras = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
pesos = [1, 1, 1, 1, 1, 2]
probabilidades = np.array(pesos) / sum(pesos)

dado_cargado = np.random.choice(caras, size=1000, p=probabilidades)
```

Pregunta: ¿Cómo cambia la distribución empírica comparada con el dado justo?

Histograma: dado cargado

```python
sns.histplot(dado_cargado, bins=np.arange(1,8)-0.5, discrete=True)
plt.title("Distribución empírica: dado cargado")
plt.xlabel("Cara del dado")
plt.ylabel("Frecuencia")
plt.show()
```

¿Notas un sesgo hacia el 6? ¿Qué pasa si repites el experimento?

Comparación: dado justo vs cargado

- La distribución empírica del dado justo debe ser aproximadamente uniforme.
- En el dado cargado, la cara 6 aparece con más frecuencia.

Reflexión: ¿Cuántos datos necesitas para detectar el sesgo con claridad?

¿Qué pasa con la media cuando repetimos muchas veces?

Idea experimental: Si repetimos un experimento aleatorio muchas veces y calculamos la media acumulada...

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Al principio, puede variar mucho.
- Pero conforme aumenta n, parece estabilizarse cerca de un valor.
- ¿Ese valor refleja algo profundo del experimento?

Ejemplo: Moneda justa $\rightarrow$ media observada tiende hacia 0.5 con más repeticiones.

Visualización: media acumulada

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Simular 10,000 lanzamientos
n = 10000
moneda = np.random.choice([0, 1], size=n)
medias = np.cumsum(moneda) / np.arange(1, n+1)

# Graficar
plt.plot(medias, label='Media acumulada')
plt.axhline(0.5, color='red', linestyle='--', label='Esperanza teórica')
plt.xlabel('Número de lanzamientos')
plt.ylabel('Media acumulada')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.title("Ley de los Grandes Números: moneda justa")
plt.show()
```

Interpretación de la gráfica

- Al inicio, la media muestral puede oscilar bastante.
- Conforme n crece, la media se estabiliza cerca de 0.5.
- Esta convergencia ilustra el comportamiento “promedio” de un fenómeno aleatorio.

¿Qué sucede si usamos una moneda cargada con $\mathbb{P}(X = 1) = 0.7$?

Reflexión final

¿Qué aprendimos hoy?

- Modelamos el azar con variables aleatorias sobre espacios de probabilidad.
- Usamos simulaciones para estudiar fenómenos que no podemos resolver analíticamente.
- Estimamos media, varianza y distribución empírica.
- Visualizamos el comportamiento estadístico con gráficos y experimentos computacionales.

¡Todo esto es la base para construir inferencia estadística más adelante!

Preguntas abiertas para discusión

- ¿Qué limita la utilidad de una simulación?
- ¿En qué casos preferirías un modelo teórico versus uno simulado?
- ¿Cómo afectan el sesgo y la varianza a nuestras estimaciones?
- ¿Cómo puede ayudarnos una simulación a pensar estadísticamente?

Ejercicios para reflexionar (Sesión 1)

1. Simula 10 000 lanzamientos de una moneda con $p = 0.7$ y grafica la media acumulada. ¿Qué observas?
2. Modifica el código para probar con $p = 0.5$ y $p = 0.9$. ¿Cambia la velocidad de convergencia?
3. Justifica por qué la varianza de $\bar{X}_n$ disminuye con n. ¿Qué papel juega esto en la estimación?

Sugerencia: Intenta modificar el código y discutir tus observaciones con tus compañeros.