

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Marysia Nazarczuk

Nr albumu: 417755

BADANIE DRGAŃ STRUNY

Streszczenie

Celem doświadczenia było zbadanie prawdziwości modelu, który łączy zależność częstości rezonansowej od numeru modu własnego struny, jej długości oraz siły z jaką jest napięta $f = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$. Uzyskane wyniki nie dały powodu do odrzucania tej tezy. Wyznaczono również gęstość struny $\rho = (7832 \pm 83) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ oraz prędkość propagacji fali $v = (320.16 \pm 2.70) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Praca została przygotowana zgodnie z instrukcją [1].

Warszawa, Czerwiec 2024

Spis treści

1. Wstęp teoretyczny	5
2. Doświadczenie	7
2.1 Układ doświadczalny	7
2.2 Przeprowadzenie doświadczenia	7
2.3 Analiza pomiarów	8
2.3.1 Analiza pomiarów z tabeli 2.1	8
2.3.2 Analiza pomiarów z tabeli 2.2	9
2.3.3 Analiza pomiarów z tabeli 2.3	10
2.4 Wyniki, niepewności i wnioski	10
2.4.1 Wyniki	10
2.4.2 Niepewności	10
2.4.3 Wnioski	11
3. Podsumowanie	13
Bibliografia	15

1. Wstęp teoretyczny

Struna naciągnięta wzdłuż osi x wykonuje po wzbudzeniu drgania w kierunku y opisywane klasycznym równaniem falowym

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

gdzie v określa prędkość fali zależną od gęstości ρ i pola przekroju S struny oraz siły F , z jaką jest ona naciągana

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad (1.2)$$

Klasyczne równanie falowe spełniane jest przez funkcję postaci

$$y(x, t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))(C \cos(kx) + D \sin(kx)), \quad (1.3)$$

gdzie ω to częstotliwość drgań, a k to liczba falowa. Warunkami brzegowymi są $x = 0$ i $x = L$. Wówczas można wyliczyć długość fali

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \quad (1.4)$$

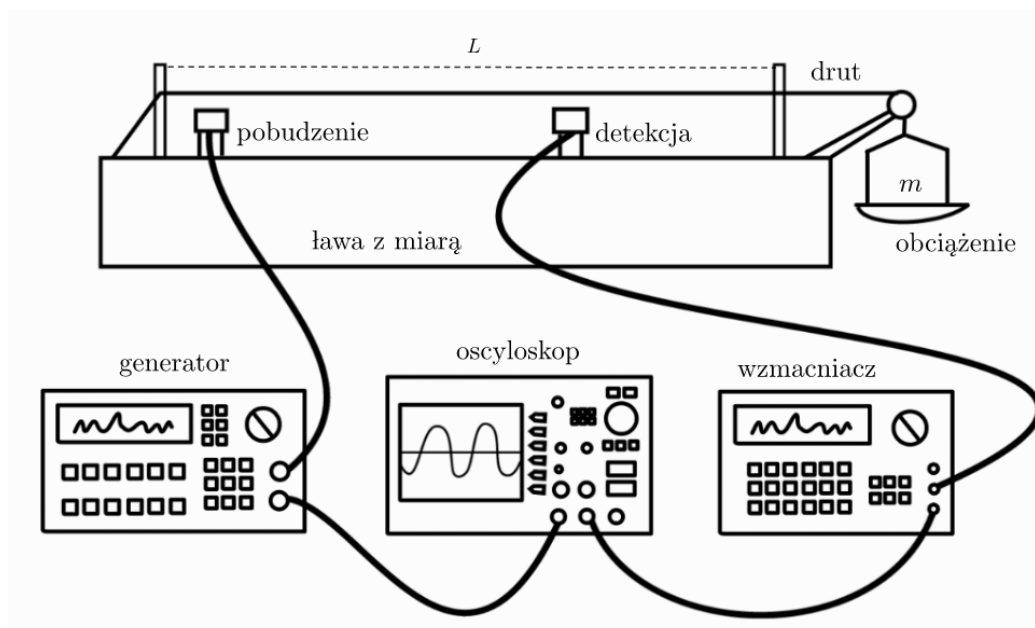
gdzie n to liczby całkowite określające kolejne mody własne fali. Korzystając ze wzoru 1.2 można wyznaczyć częstotliwość rezonansową fali

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad (1.5)$$

2. Doświadczenie

2.1. Układ doświadczalny

Poniżej znajduje się układ doświadczalny dla danego doświadczenia. Na ławie z miarą znajdowała się struna przyczepiona do dwóch słupków oddalonych od siebie o L . Na końcu struny znajdowało się obciążenie o masie $m + m_0$, gdzie m to masa obciążników a m_0 to masa pustej szalki. Na ławie z miarą znajdował się układ pobudzający drut do drgań, podłączony do generatora oraz układ rejestrujący drgania drutu, podłączony do wzmacniacza. Generator oraz wzmacniacz dodatkowo podłączone były do oscyloskopu.



Rysunek 2.1: Układ pomiarowy do pomiaru napięcia na próbce oraz natężenia w dwóch obwodach.

Struna w postaci stalowego drutu była pobudzana do drgań za pomocą elektromagnesu. Elektromagnes zaś został połączony z generatorem RC, który dostarczał sygnał pobudzający. Drgania struny były rejestrowane przez drugi elektromagnes, którego sygnał następnie przesyłano do wzmacniacza. Wzmacniacz był połączony z oscyloskopem działającym w trybie XY.

2.2. Przeprowadzenie doświadczenia

Za pomocą mikrometru zmierzono średnicę drutu $d = (0.300 \pm 0.006)$ [mm]. Masa pustej szalki wynosiła $m_0 = 753.25$ g.

Pierwsza część eksperymentu polegała na badaniu zależności częstotliwości rezonansowej od numeru własnego modu struny. Odległość między słupkami wynosiła $L = 70$ cm, zaś masa odważników znajdujących się na szalce to $m = 5$ kg.

W drugiej części eksperymentu mierzono częstotliwości drgań podstawowych dla różnych długości dla pierwszego modu własnego ($n = 1$). Masa odważników znajdujących się na szalce to $m = 5$ kg.

W trzeciej serii badano częstotliwości drgań podstawowych przy długości drutu $L = 70$ cm i $n = 1$, dla różnych obciążeń, których masa zmieniana była przy użyciu odważników.

Zebrane dane znajdują się w poniższych tabelach.

Tabela 2.1

n	f [Hz]
1	207.2 ± 0.2
2	458.3 ± 0.3
3	684.3 ± 0.3
4	914.1 ± 0.3
5	1142.6 ± 0.4
6	1370.7 ± 0.4
7	1600.3 ± 0.4
8	1829.1 ± 0.5
9	2057.3 ± 0.5
10	2302.2 ± 0.6

Tabela 2.2

L [cm]	f [Hz]
20	803.1 ± 0.1
25	645.2 ± 0.1
30	535.2 ± 0.2
35	457.7 ± 0.1
40	401.3 ± 0.1
45	357.4 ± 0.1
50	321.4 ± 0.1
55	291.0 ± 0.2
60	267.3 ± 0.1
65	246.0 ± 0.2
70	229.1 ± 0.2

Tabela 2.3

m [kg]	f [Hz]
0	80.7 ± 0.2
0.5	104.8 ± 0.2
1	124.3 ± 0.1
1.5	141.2 ± 0.1
2	156.2 ± 0.2
2.5	169.9 ± 0.2
3	182.6 ± 0.2
3.5	194.5 ± 0.2
4	205.7 ± 0.2
4.5	216.3 ± 0.2
5	226.4 ± 0.2

Niepewność pomiaru długości wynosi $u(L) = 0.1$ cm, zaś niepewność pomiaru masy wynosi $u(m) = 0.01$ kg.

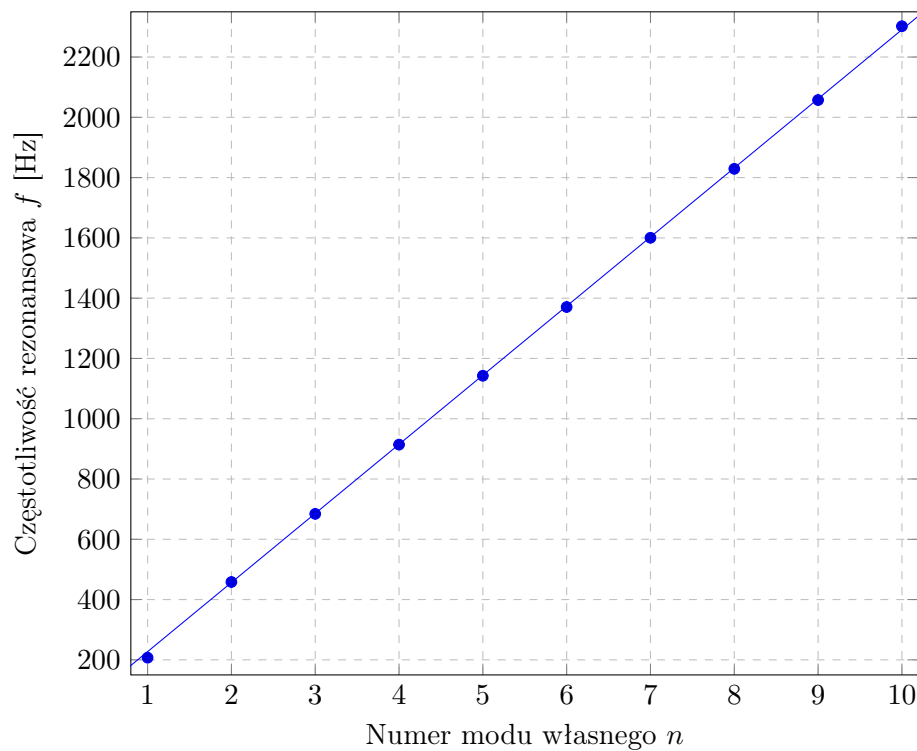
2.3. Analiza pomiarów

Na podstawie wzoru 1.5 chcemy dla danych z tabeli 2.1 dopasować zależność liniową, dla danych z tabeli 2.2 chcemy dopasować zależność hiperboliczną typu $\frac{1}{x}$, zaś dla danych z tabeli 2.3 chcemy dopasować zależność pierwiastka kwadratowego.

2.3.1. Analiza pomiarów z tabeli 2.1

Na podstawie danych z tabeli tworzymy zależność liniową

$$f = a \cdot n + b \quad (2.1)$$



Rysunek 2.2: Wykres zależności częstotliwości rezonansowej od numeru modu własnego

Wartość współczynnika b jest prawie zerowa i stanowi stałą fenomenologiczną, której nie będziemy brali pod uwagę podczas analizy.

Korzystając ze wzoru $\rho = \frac{F}{4 \cdot S \cdot a^2 \cdot L^2}$, otrzymujemy

$$\rho_1 = (7749 \pm 253) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.2)$$

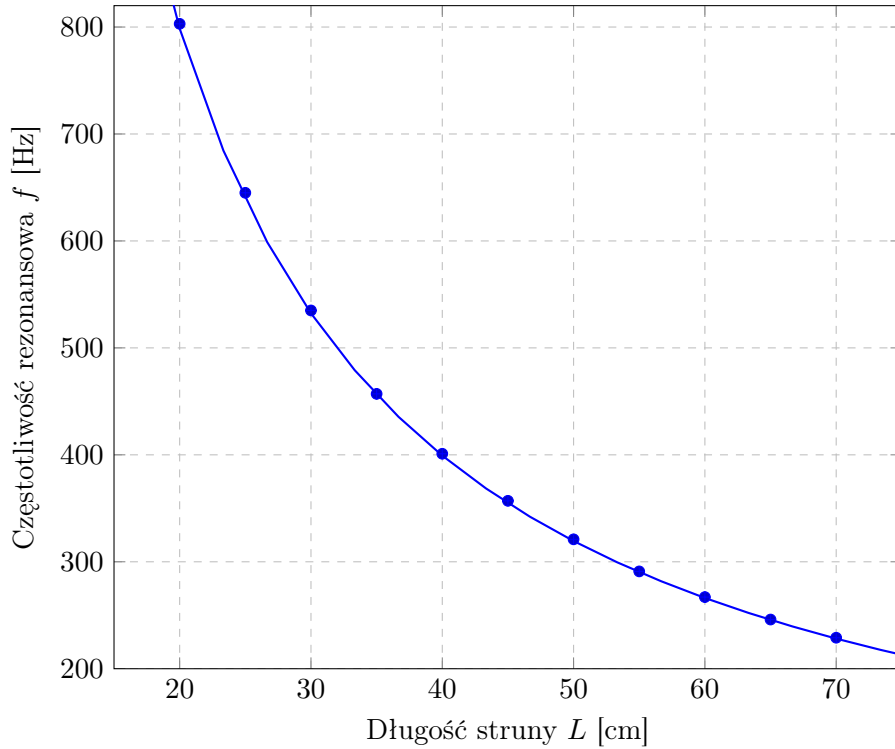
Prędkość propagacji fali wyliczymy ze wzoru $v = 2L \cdot a$ i wynosi ona

$$v_1 = (320.75 \pm 2.11) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (2.3)$$

2.3.2. Analiza pomiarów z tabeli 2.2

Na podstawie danych z tabeli tworzymy zależność

$$f = \frac{a}{L + b} \quad (2.4)$$



Rysunek 2.3: Wykres zależności częstotliwości rezonansowej od długości struny

Wartość współczynnika b jest zerowa, co świadczy o bardzo dokładnym dopasowaniu.

Korzystając ze wzoru $\rho = \frac{F \cdot n}{4 \cdot S \cdot a^2}$, otrzymujemy

$$\rho_2 = (7826 \pm 151) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.5)$$

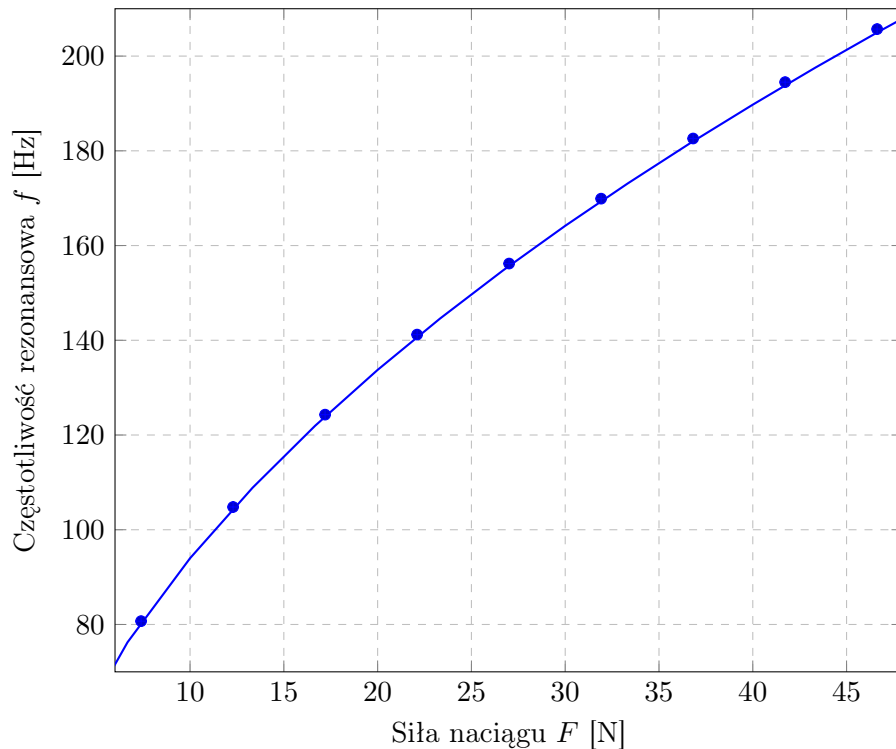
Prędkość propagacji fali wyliczymy ze wzoru $v = \frac{2a}{n}$ i wynosi ona

$$v_2 = (319.40 \pm 5.48) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (2.6)$$

2.3.3. Analiza pomiarów z tabeli 2.3

Na podstawie danych z tabeli tworzymy zależność

$$f = a \cdot \sqrt{F + b} \quad (2.7)$$



Rysunek 2.4: Wykres zależności częstotliwości rezonansowej od siły naciągu

Wartość współczynnika b jest prawie zerowa i stanowi stałą fenomenologiczną, której nie będziemy brali pod uwagę podczas analizy.

Korzystając ze wzoru $\rho = \frac{n^2}{4 \cdot S \cdot a^2 \cdot L^2}$, otrzymujemy

$$\rho_3 = (7914 \pm 314) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.8)$$

2.4. Wyniki, niepewności i wnioski

2.4.1. Wyniki

W celu ustalenia gęstości druta bierzemy wartość oczekiwaną uzyskanych wyników 2.2, 2.5 oraz 2.8:

$$\rho = (7832 \pm 83) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.9)$$

Liczymy również wartość oczekiwaną dla prędkości propagacji fali, na podstawie wyników 2.3 i 2.6

$$v = (320.16 \pm 2.70) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (2.10)$$

2.4.2. Niepewności

Głównym źródłem niepewności w tym doświadczeniu jest niedokładność zmierzenia częstotliwości generatora przy której obserwowano rezonans. Przy pomiarze częstotliwości w zależności od liczby modów własnych, im wyższa wartość n , tym gorsza była widoczność wyników na oscyloskopie, co przekładało się na większą niedokładność pomiaru.

2.4.3. Wnioski

Przeprowadzono test χ^2 w celu sprawdzenia poprawności dopasowanych funkcji do danych pomiarowych. Uzyskane wyniki nie dawały powodu by odrzucić postawione hipotezy. Dla zależności liniowej wyznaczono współczynnik determinacji $R^2 = 0.99$, co oznacza że dopasowanie jest bardzo dokładne. Na podstawie wyznaczonej gęstości drutu $\rho = (7832 \pm 83) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ możemy wywnioskować, że struna została wykonana ze stali, gdyż mieści się w odpowiednich zakresach [2].

3. Podsumowanie

W doświadczeniu wyznaczono gęstość struny oraz prędkość propagacji fali. Uzyskano wyniki

$$\rho = (7832 \pm 83) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (3.1)$$

oraz

$$v = (320.16 \pm 2.70) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (3.2)$$

Zbadano też, jak wartość częstości rezonansowej zależy od numeru modu własnego struny, jej długości oraz siły z jaką jest napięta. Uzyskane wyniki nie dają powodów do odrzucenia słuszności wzoru 1.5.

Wszelkie rachunki przeprowadziłam ręcznie, posługując się jedynie kalkulatorem prostym oraz arkuszem kalkulacyjnym Google. Na każdym etapie obliczeń zaokrąślałam wynik do dwóch miejsc znaczących. Ostateczne wyniki sprawdziłam przy użyciu programów napisanych w Pythonie i na podstawie tych wyników dopasowałam krzywą do danych na wykresach. Wszystkie dopasowania przeprowadziłam z użyciem metody najmniejszych kwadratów, zatem do policzenia niepewności dopasowanych parametrów użyłam metody obliczania niepewności pomiarowej za pomocą pierwiastków elementów na diagonalu macierzy kowariancji. Niepewność wyznaczenia pola przekroju drutu, prędkości oraz gęstości struny zostały wyznaczone ze wzorów na propagację małych błędów.

Bibliografia

- [1] Roman J. Nowak. Instrukcja do zadania 20 - badanie drgań struny, 18.11.2014.
- [2] Tabela gęstości stali konstrukcyjnej. <https://auremo.pl>.