UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Jan Verlage
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 05.12.2023

Blatt 8

Übung 1 (Linearisierter Lens-Thirring-Effekt)

Betrachten Sie Materie mit dem Energie-Impuls-Tensor (ideale Flüssigkeit ohne Druck)

$$T_{ab} = \rho\, u_a u_b.$$

In der nicht-relativistischen Näherung ($|\vec{v}| \ll c := 1$) kann die Materie über

$$u^a = (1, \vec{v}), \qquad \vec{j} = \rho\,\vec{v}$$

beschrieben werden. Die linearisierten Einstein-Gleichungen für $h_{ab} = g_{ab} - \eta_{ab}$ reduzieren sich zu

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\,\rho, \qquad -\Delta h_{0i} = 8\pi\, j_i,$$

wobei wir $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ im nicht-relativistischen Limes mit $-\Delta$ ersetzt haben.

(a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für ein Testteilchen (Geodätengleichung mit linearisierten Christoffel-Symbolen) und zeigen Sie, dass diese in folgende Form gebracht werden kann

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\Phi - (\mathrm{rot}\vec{A}) \times \vec{v}$$

mit $\Phi := \frac{1}{2}h_{00}$ und $A_i := h_{0i}$. Mit $\vec{E} := \nabla\Phi$ und $\vec{B} := \mathrm{rot}\vec{A}$ bekommt man die aus der Elektrodynamik bekannte Lorentzkraft

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{E} - \vec{B} \times \vec{v}$$

mit dem Unterschied, dass die Kraft alleine von dem Gravitationsfeld (oft als *gravitomagnetisches* Feld bezeichnet) erzeugt wird. Bemerken Sie, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auch entsprechende Maxwell-Gleichungen (in Coulomb-Eichung) erfüllen.

(b) Rotierende schwere Körper erzeugen gravitomagnetische Kräfte, die Testteilchen in die Richtung der Rotation beschleunigen (bekannt als *frame-dragging-effect* oder Lens-Thirring-Effekt).

Betrachten Sie eine homogene Kugel mit Radius R und Dichte $\rho(r) = \rho_0 \cdot \Theta(R - r)$, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert, d.h. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Lösen Sie die obigen linearisierten Einstein-Gleichungen für h_{00} und h_{0i}.

(c) Finden Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und berechnen Sie die Kraft, die auf ein Testteilchen wirkt. In welche Richtung wird das Teilchen auf dem "Äquator" beschleunigt, wenn es radial auf das Zentrum fällt? Und in welche Richtung wird es abgelenkt, wenn es über die "Pole" fliegt?

Hinweis: Um die Gleichung

$$-\Delta\vec{A} = 8\pi\rho_0\,\omega \times \vec{r}\,\Theta(R - r)$$

zu lösen, benutzen Sie den Ansatz $\vec{A} = \vec{\omega} \times \vec{\nabla}\phi$ und reduzieren Sie die Gleichung zu einer Poisson-Gleichung für ϕ (d.h. $-\Delta\phi = \ldots$), welche in sphärischen Koordinaten gelöst werden kann. Die Gleichung für Φ ist schon eine Poisson-Gleichung.

Bitte wenden! ↘

Übung 2 (Gravitationswellen – TT-Eichung)

Wir möchten die Eindeutigkeit der TT-Eichung überprüfen. Die Komponenten der Gravitiationswelle können als

$$\bar{h}_{ab} = A_{ab} e^{ik_c x^c}$$

geschrieben werden. Dabei hat A_{ab} zehn unabhängige Komponenten, da es symmetrisch ist.

a) Zeigen Sie, dass aus der Wellengleichung $\Box \bar{h}_{ab} = 0$ folgt, dass sich Gravitationswellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. (Welcher Bedingung für k_c entspricht das?)

b) Zeigen Sie, dass aus der Lorentz-Eichung $\partial^a \bar{h}_{ab} = 0$ folgt, dass der Wellenvektor $k_c \perp A_{ab}$. Wie viele unabhängigen Komponenten hat dann A_{ab}?

Nach der Lorentz-Eichung bleibt noch die Freiheit einer Koordinatentransformation

$$x'^a = x^a + \xi^a \qquad \text{mit} \quad \xi^a = C^a e^{ik_b x^b}.$$

Die Metrik transformiert sich dann nach

$$\bar{h}_{a'b'} = \bar{h}_{ab} - \partial_a \xi_b - \partial_b \xi_a + \eta_{ab} \partial_c \xi^c.$$

Entsprechend ändern sich die alten A_{ab} zu neuen $A_{a'b'}$. Zeigen Sie, dass für geeignete Wahl von C^a alle TT-Eichbedingungen erfüllt werden können

$$\eta^{a'b'} A_{a'b'} = 0, \qquad k^{a'} A_{a'b'} = 0, \qquad u^{a'} A_{a'b'} = 0 \qquad \text{mit} \quad u^{a'} = (1,0,0,0).$$

c) Zeigen Sie, dass $A_{a'b'} = A_{ab} - ik_a C_b - ik_b C_a + i\eta_{ab} k^c C_c$.

d) Drücken Sie die C_a durch A_{ab} aus. Betrachten Sie die Komponenten $b = 0$ und $b = i = \{1,2,3\}$ dazu separat.

e) Wie viele Freiheitsgrade von $A_{a'b'}$ bleiben übrig?

f) Wie sieht $A_{a'b'}$ aus wenn $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ gewählt wird? (Wellenpropagation in die z-Richtung.)

Übung 3 (Ideale Flüssigkeit)

Der Energie-Impuls Tensor für eine ideale Flüssigkeit mit Vierer–Geschwindigkeitsdichte u^α sowie skalare Massendichte ρ und Druck p hat die Form

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho)\, u_\alpha u_\beta - p\, g_{\alpha\beta},$$

wobei $u^\alpha u_\alpha = 1$. Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ die Bewegungsgleichungen für die Felder ρ und u^α her, d.h. die kovariante Kontinuitäts– $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = ...$ und die relativistische Euler–Gleichung $(p+\rho) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = ...$