

# Lense-Thirring-Effekt

Vortrag im Hauptseminar SoSe 2025

Marvin Henke - 12. Juni 2025

Betreuer: Dr. Nikodem Szpak

# Lense-Thirring-Effekt

# Lense-Thirring-Effekt

- Allgemeine Relativitätstheorie
  - Metrik und Geodäten
  - Einsteinsche Feldgleichungen
  - Gravitoelektromagnetismus

# Lense-Thirring-Effekt

- Allgemeine Relativitätstheorie
  - Metrik und Geodäten
  - Einsteinsche Feldgleichungen
  - Gravitoelektromagnetismus
- Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
  - Trajektorien
  - Präzession

# Lense-Thirring-Effekt

- Allgemeine Relativitätstheorie
  - Metrik und Geodäten
  - Einsteinsche Feldgleichungen
  - Gravitoelektromagnetismus
- Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
  - Trajektorien
  - Präzession
- Aktuelle Forschung
  - Gravity Probe B
  - Akkretionsscheibe eines supermassiven Schwarzen Lochs
  - Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

# Lense-Thirring-Effekt

- Allgemeine Relativitätstheorie
  - Metrik und Geodäten
  - Einsteinsche Feldgleichungen
  - Gravitoelektromagnetismus
- Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
  - Trajektorien
  - Präzession
- Aktuelle Forschung
  - Gravity Probe B
  - Akkretionsscheibe eines supermassiven Schwarzen Lochs
  - Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Lense-Thirring-Effekt

- Allgemeine Relativitätstheorie
  - Metrik und Geodäten
  - Einsteinsche Feldgleichungen
  - Gravitoelektromagnetismus
- Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
  - Trajektorien
  - Präzession
- Aktuelle Forschung
  - Gravity Probe B
  - Akkretionsscheibe eines supermassiven Schwarzen Lochs
  - Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

# Allgemeine Relativitätstheorie

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS
- beschreibt Gravitation nicht als Kraft  $F_G$  sondern als Effekt einer vierdimensionalen Raumzeit

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS
- beschreibt Gravitation nicht als Kraft  $F_G$  sondern als Effekt einer vierdimensionalen Raumzeit
- Raumzeit ist pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit mit Linienelement:

$c = G = 1$   
 $(+,-,-,-)$

# Allgemeine Relativitätstheorie

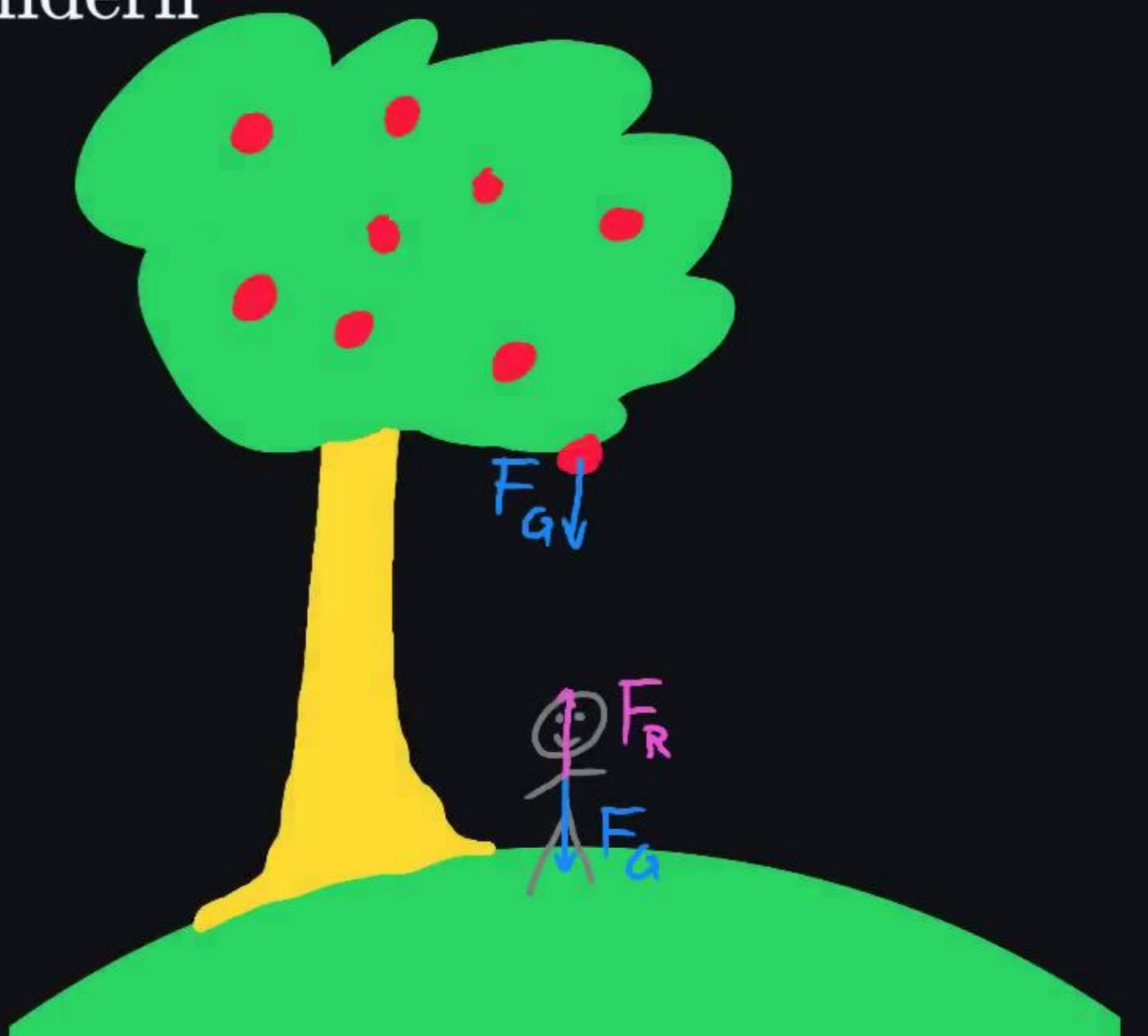
- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS
- beschreibt Gravitation nicht als Kraft  $F_G$  sondern als Effekt einer vierdimensionalen Raumzeit
- Raumzeit ist pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit mit Linienelement:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS
- beschreibt Gravitation nicht als Kraft  $F_G$  sondern als Effekt einer vierdimensionalen Raumzeit
- Raumzeit ist pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit mit Linienelement:

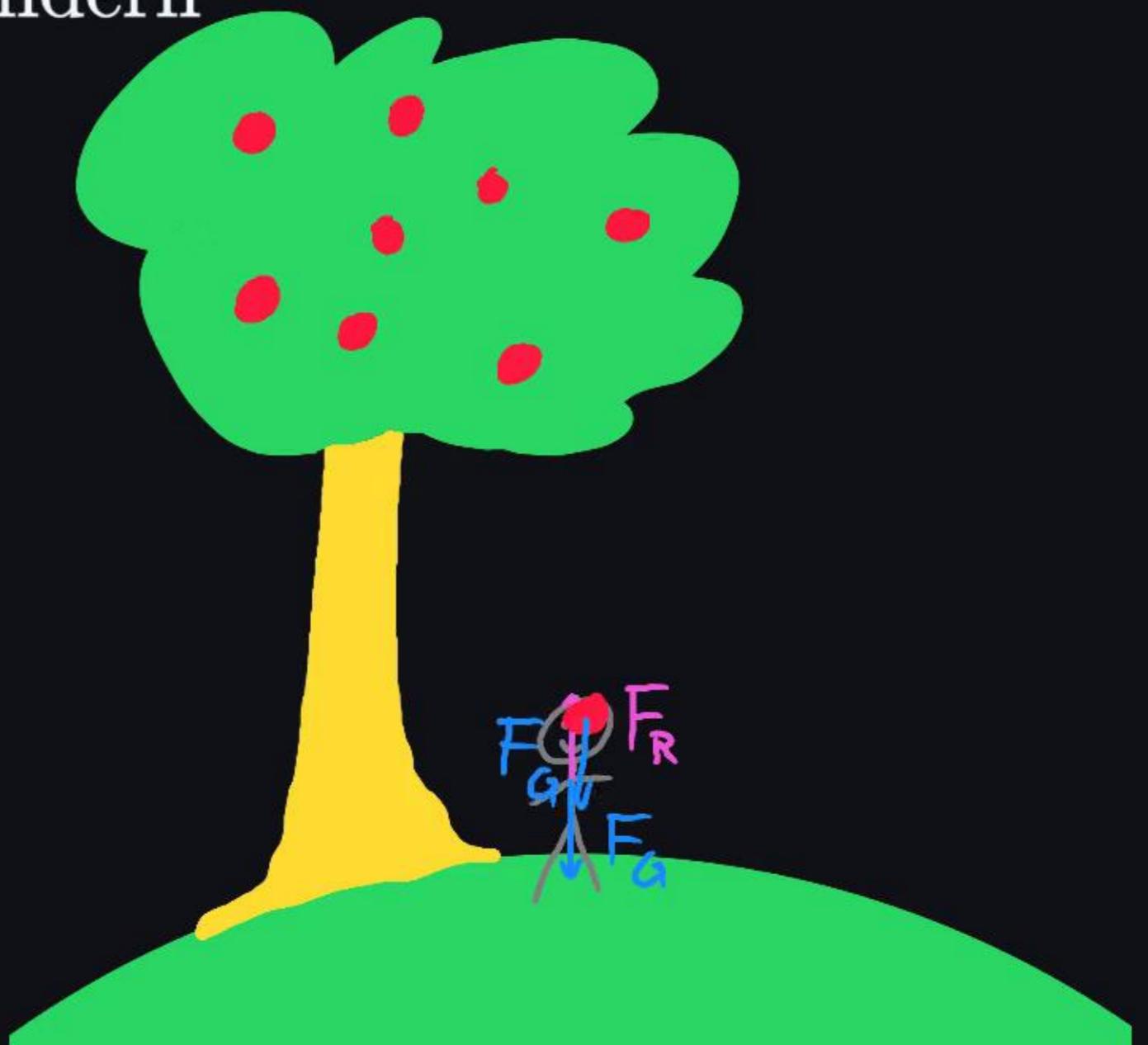
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$



# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS
- beschreibt Gravitation nicht als Kraft  $F_G$  sondern als Effekt einer vierdimensionalen Raumzeit
- Raumzeit ist pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit mit Linienelement:

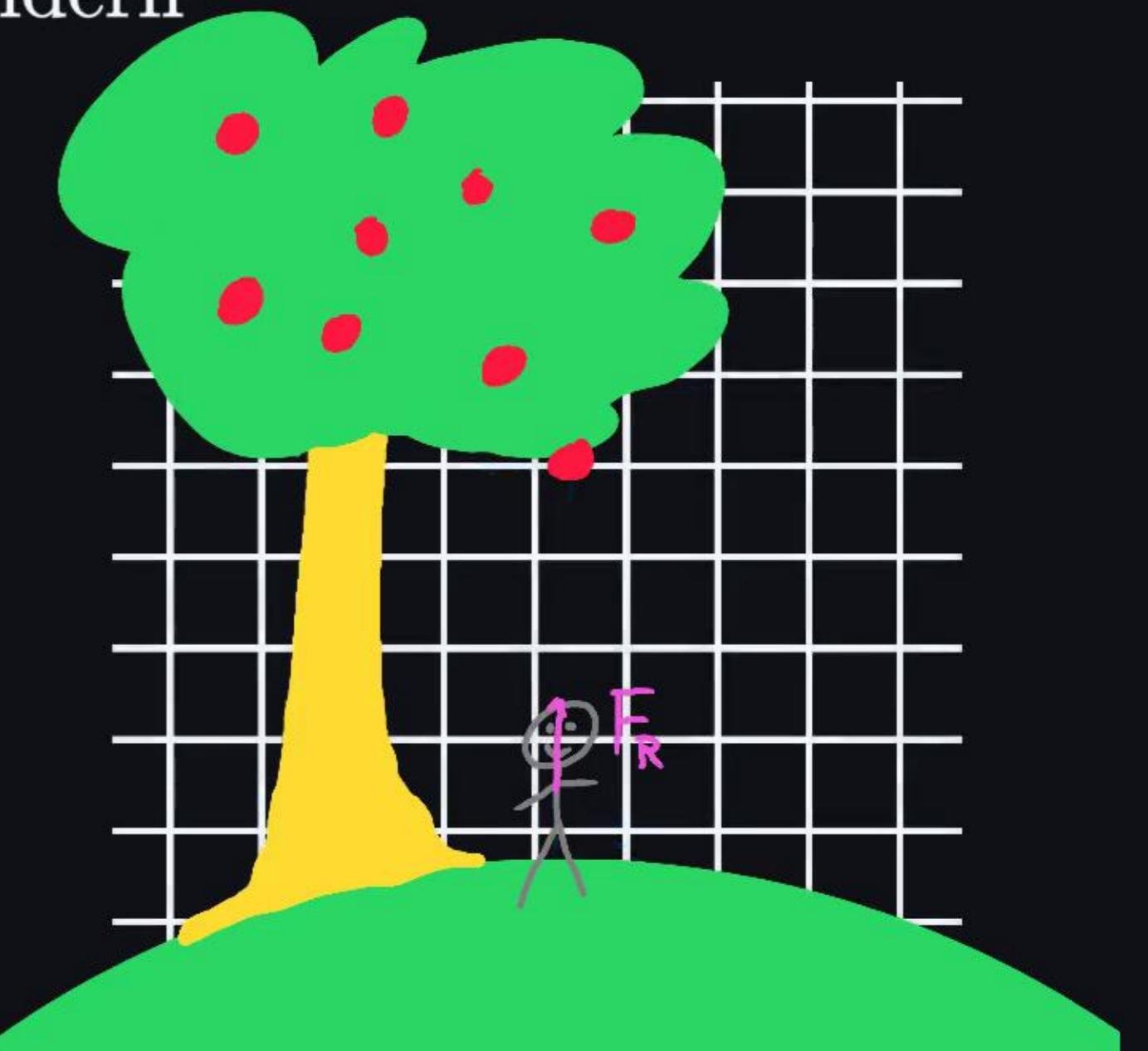
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$



# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS
- beschreibt Gravitation nicht als Kraft  $F_G$  sondern als Effekt einer vierdimensionalen Raumzeit
- Raumzeit ist pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit mit Linienelement:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

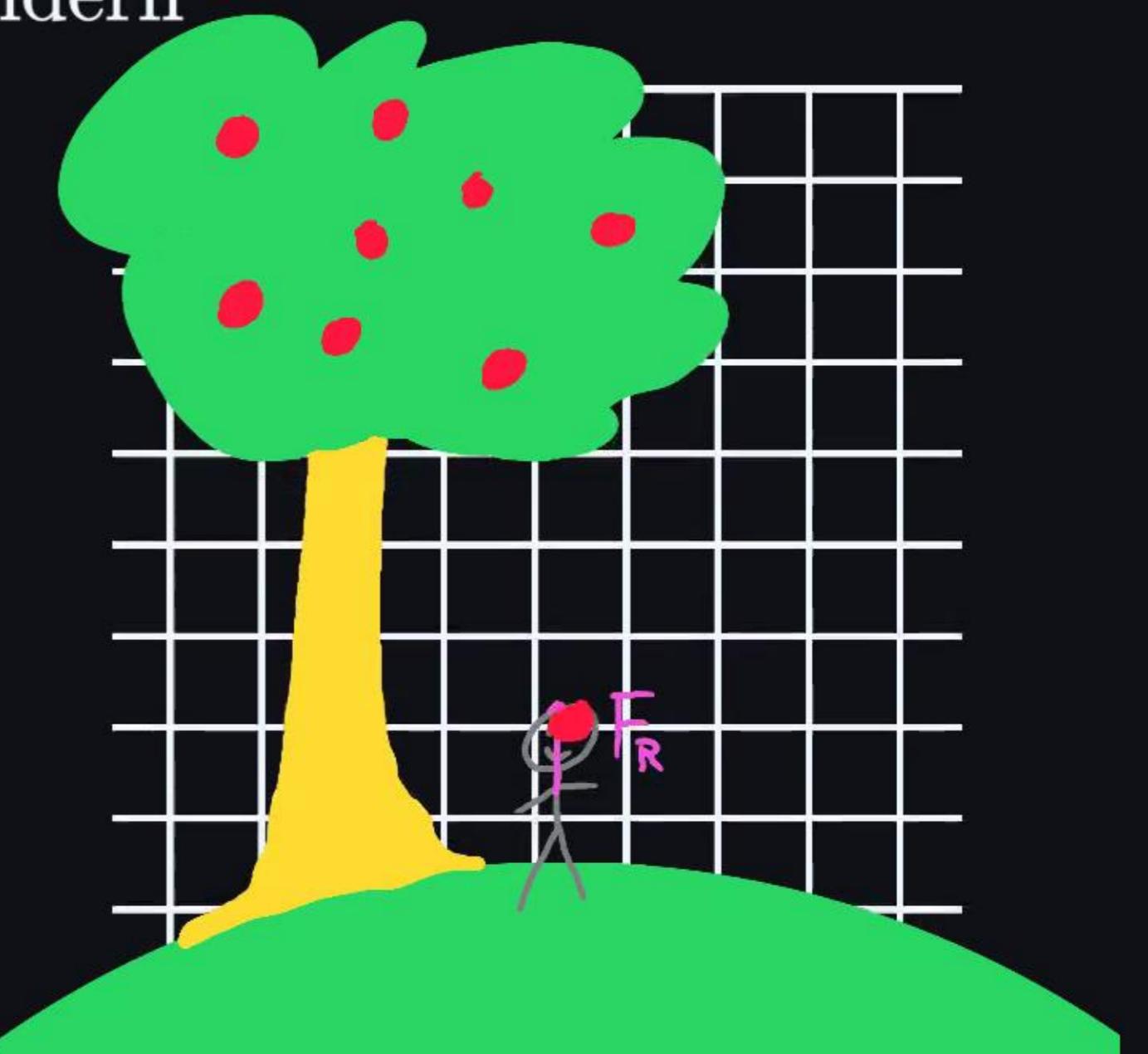


$$c = G = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Allgemeine Relativitätstheorie

- entwickelt von Albert Einstein
- beruht auf der Differentialgeometrie
- angewendet bei GPS
- beschreibt Gravitation nicht als Kraft  $F_G$  sondern als Effekt einer vierdimensionalen Raumzeit
- Raumzeit ist pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit mit Linienelement:

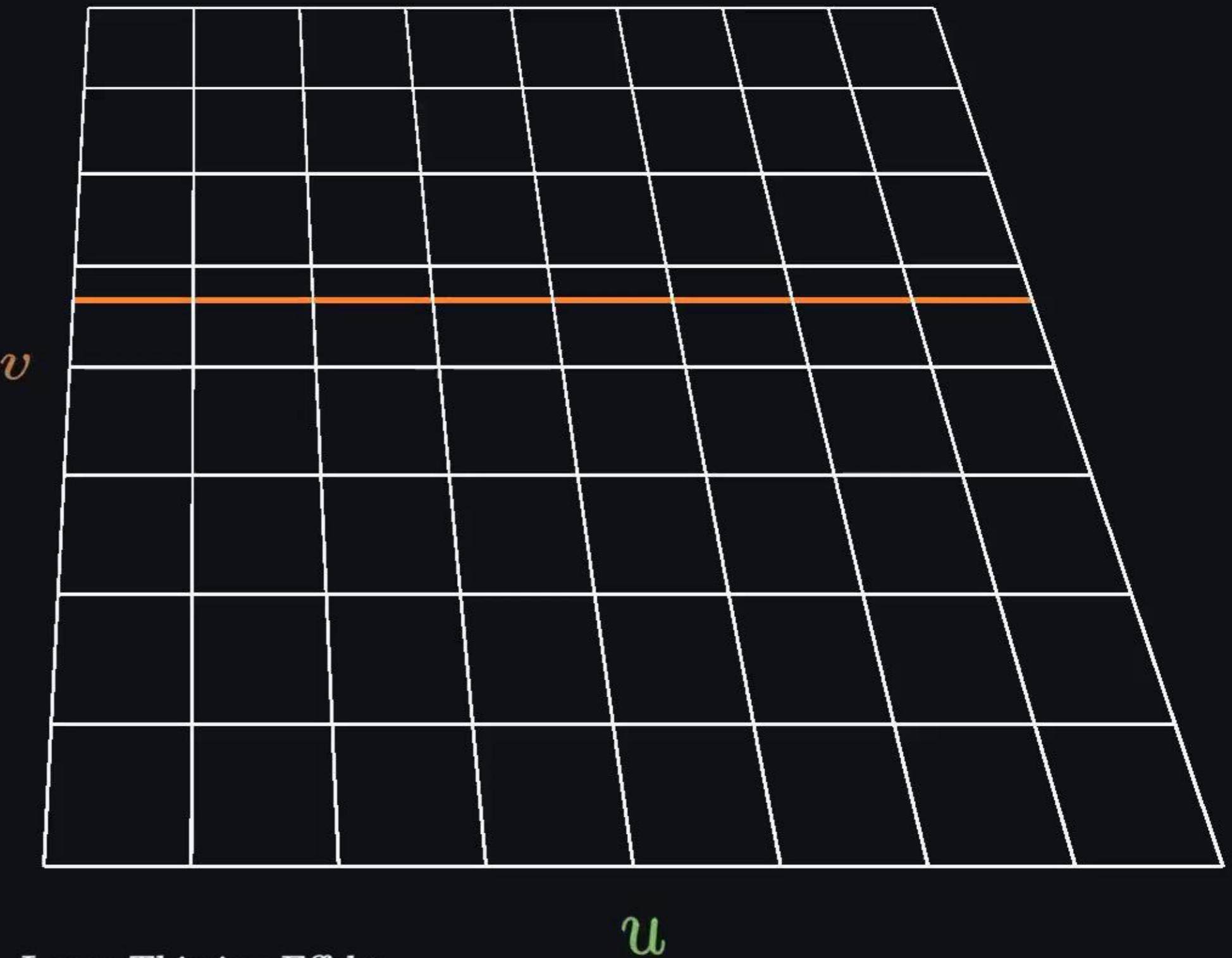
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$



# Metrik und Geodäten

# Metrik und Geodäten

$$c = G = 1$$

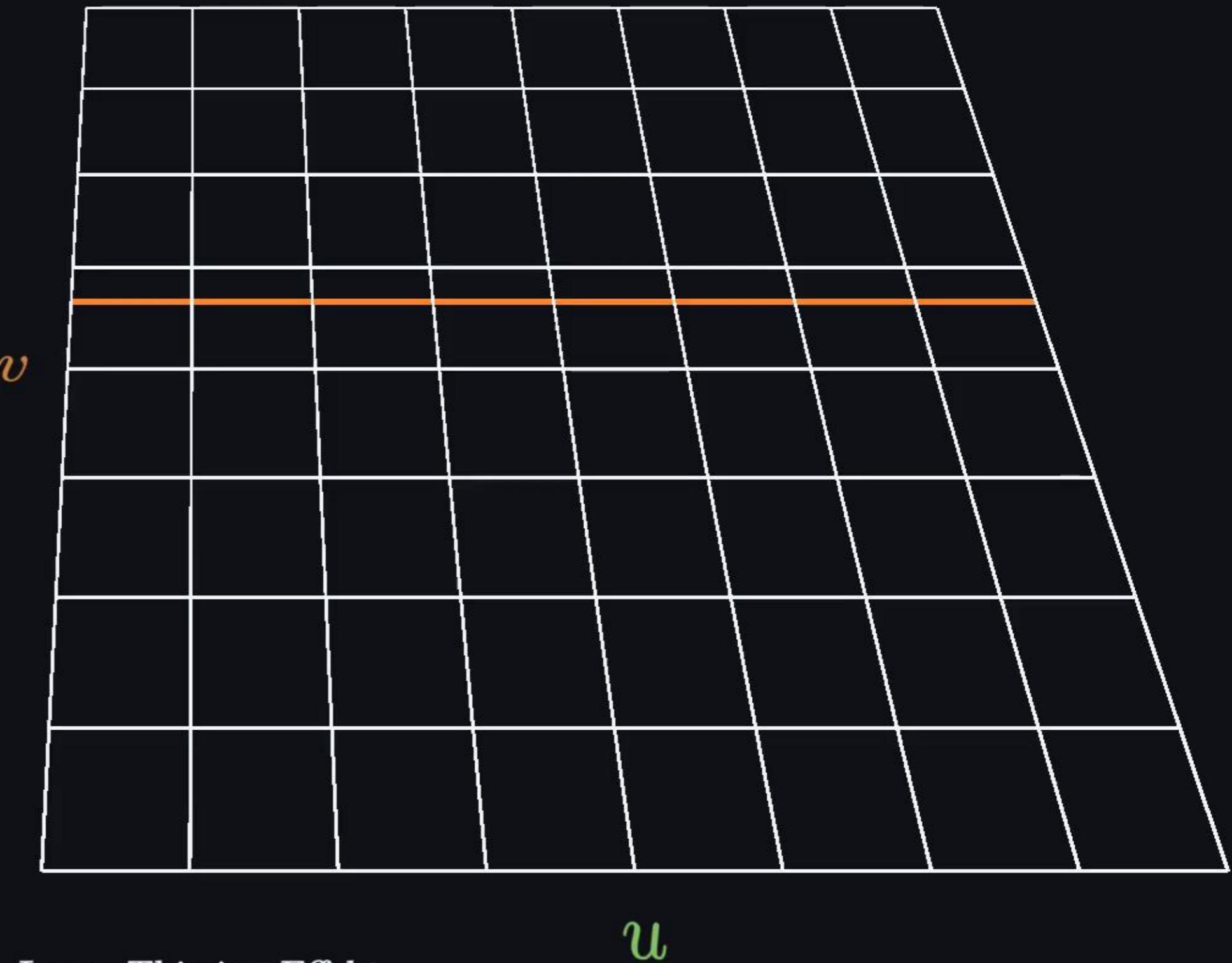


$$c = G = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Metrik und Geodäten

Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$



Lense-Thirring-Effekt

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Metrik und Geodäten

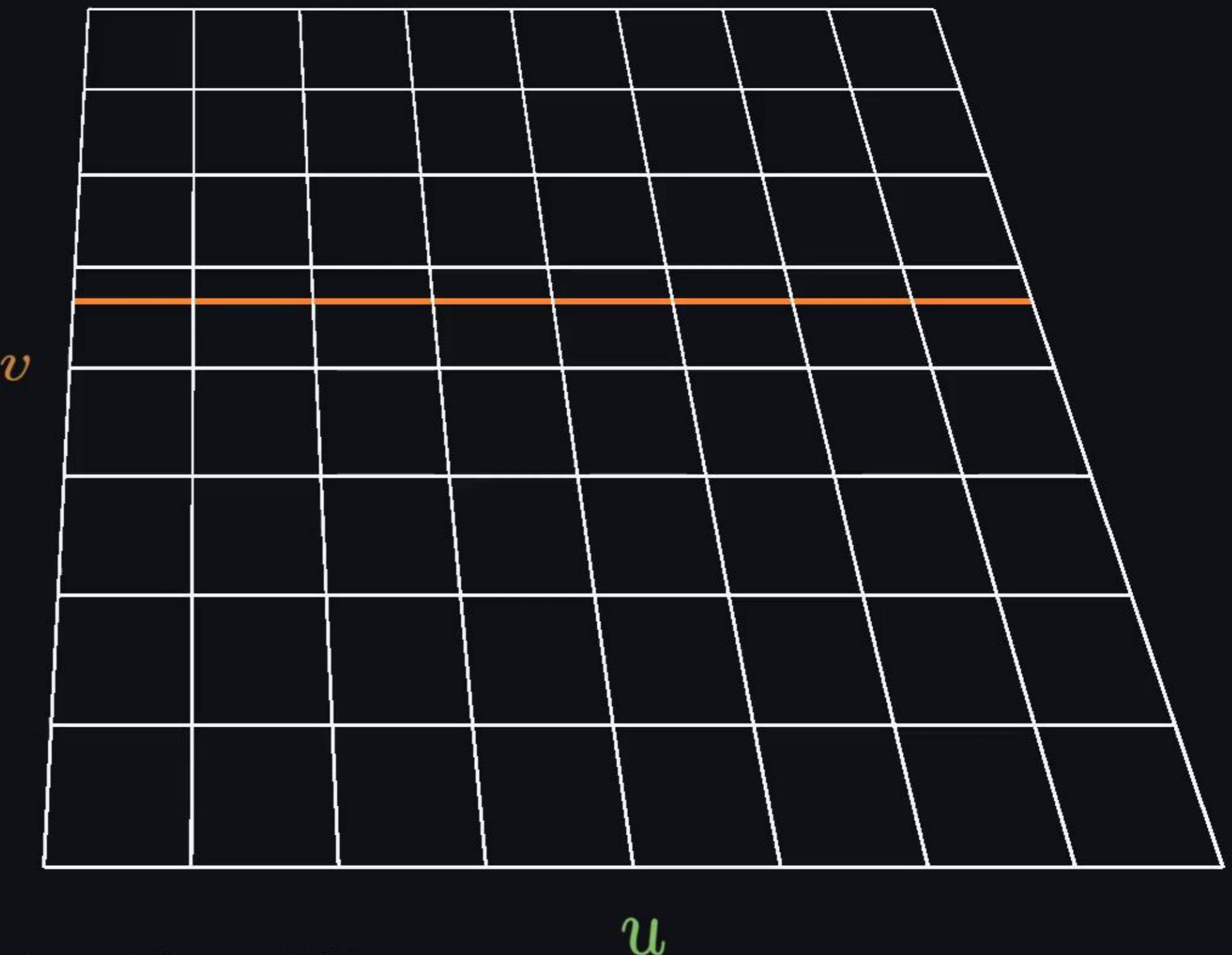
Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$

Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Lense-Thirring-Effekt

# Metrik und Geodäten

Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$

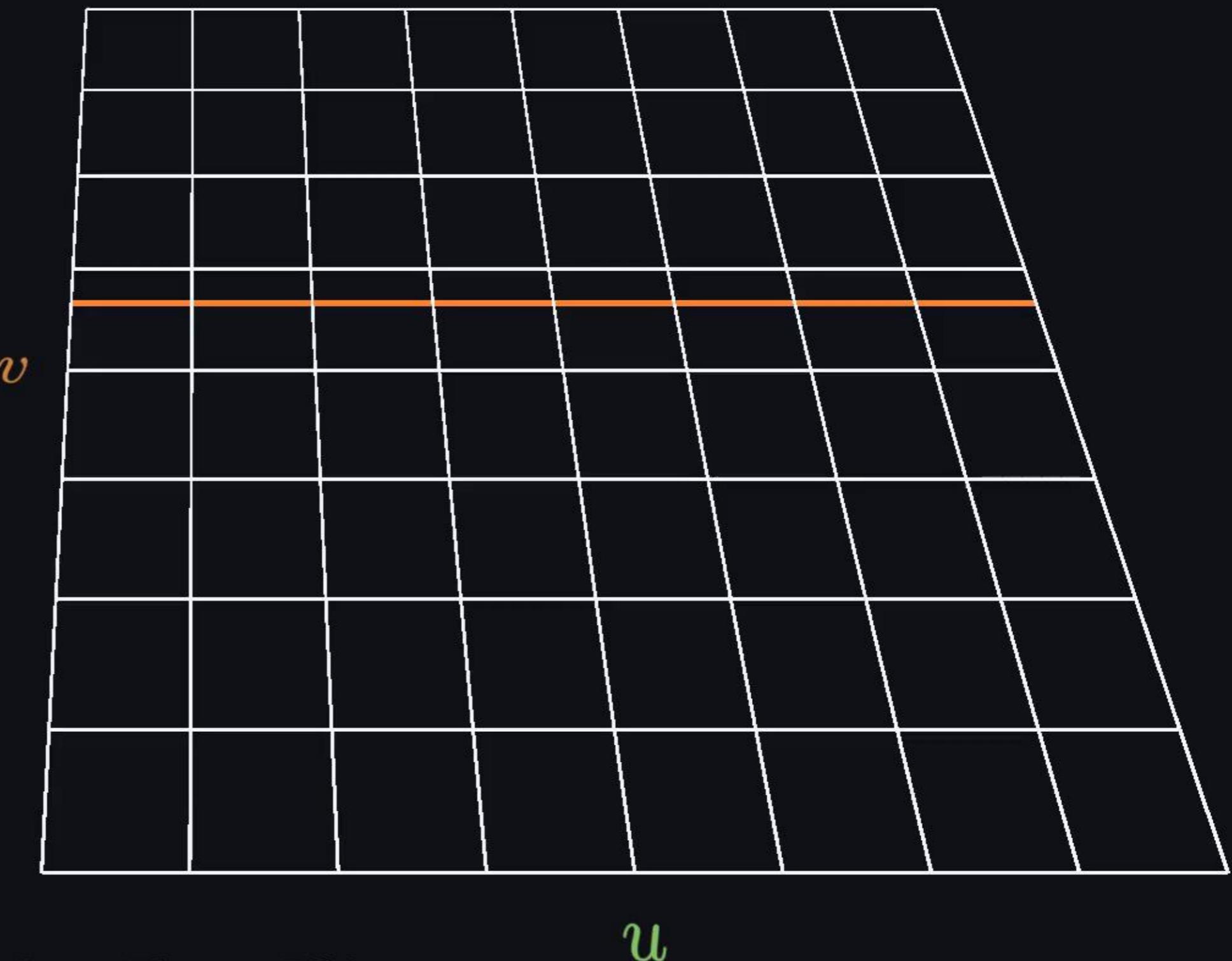
Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geodätengleichung

$$\frac{d^2 \vec{x}^\lambda}{d\tau^2} = 0$$



Lense-Thirring-Effekt

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Metrik und Geodäten

Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$

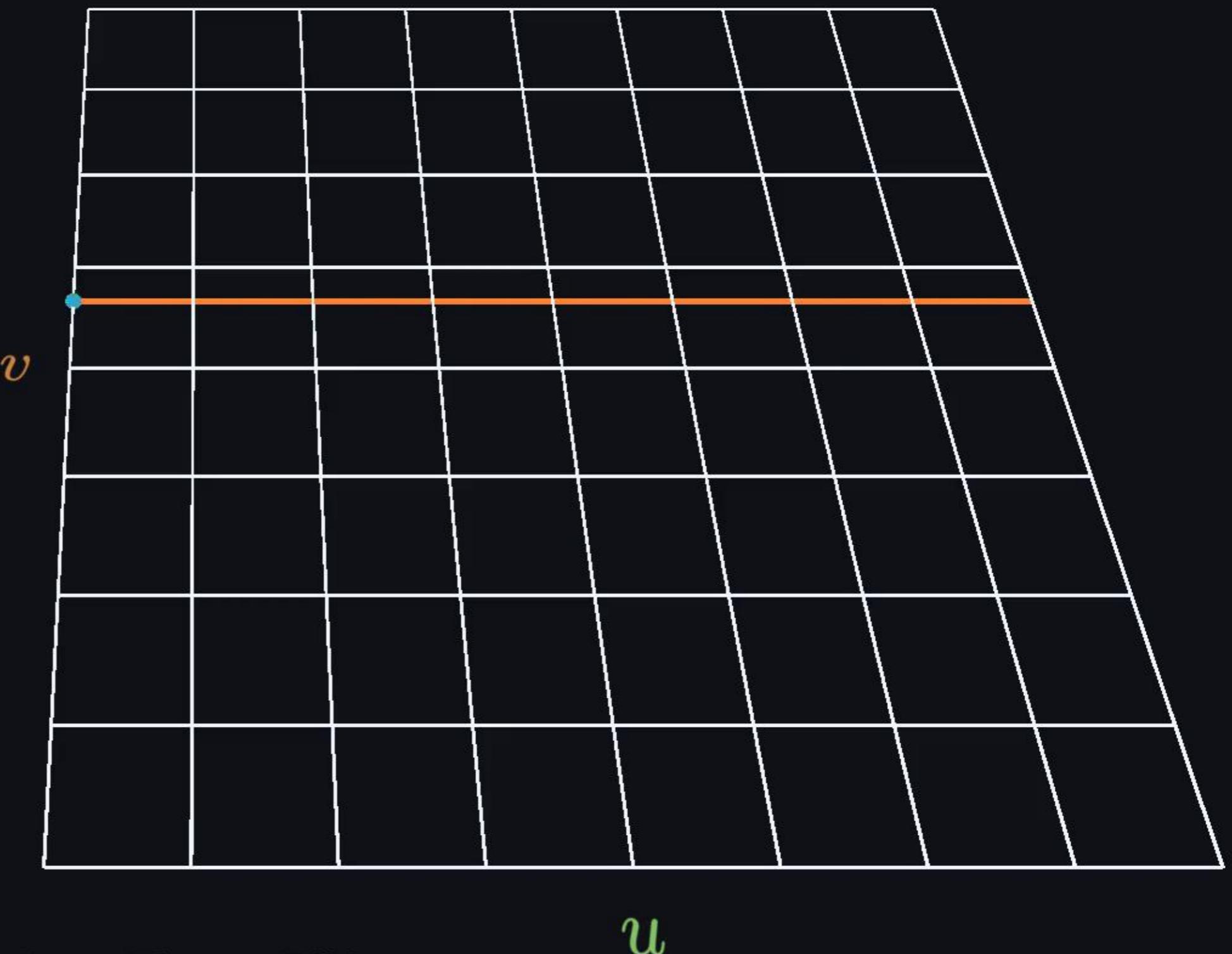
Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geodätengleichung

$$\frac{d^2 \vec{x}^\lambda}{d\tau^2} = 0$$



# Metrik und Geodäten

## Fläche

$$\vec{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

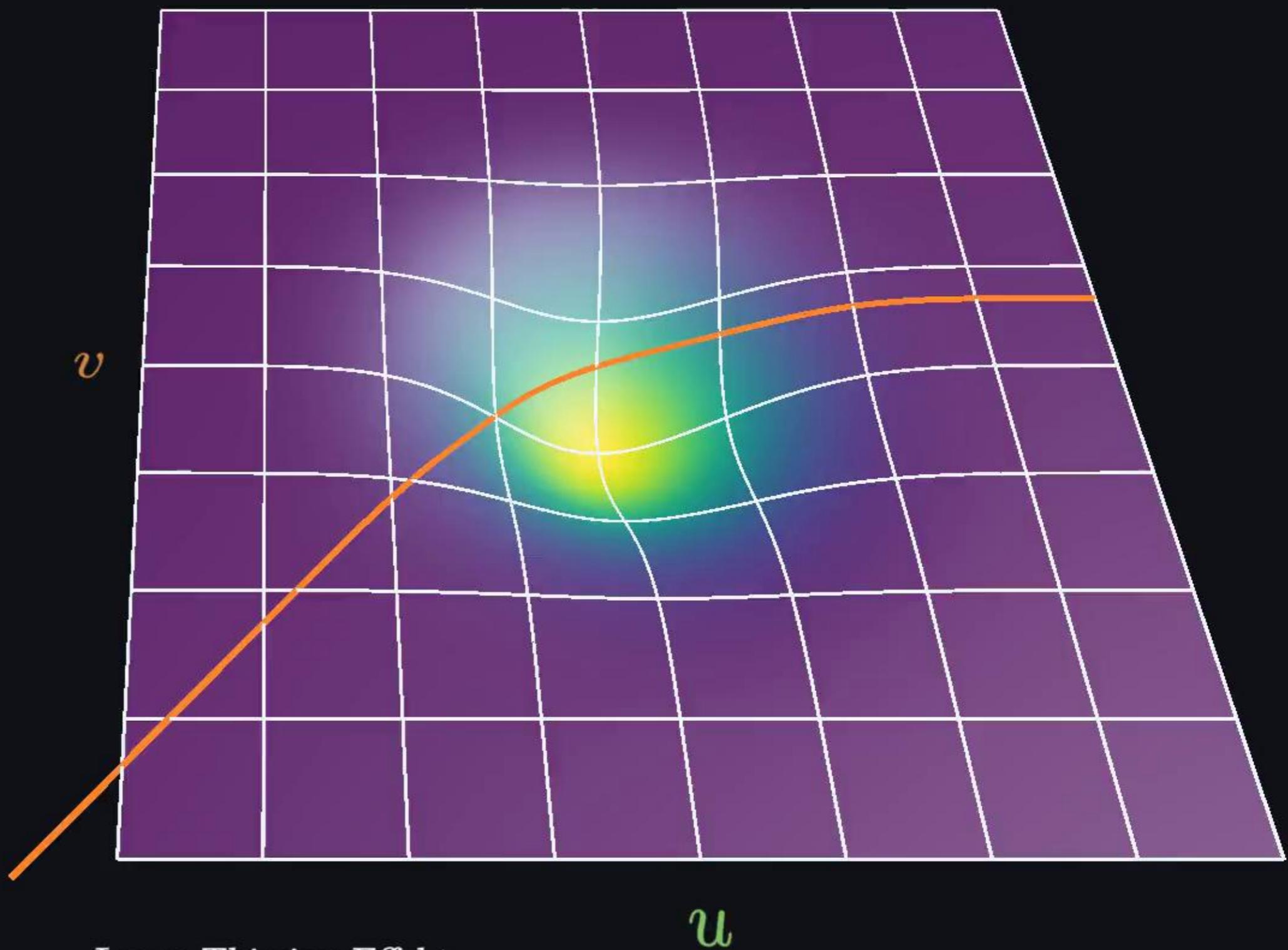
Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$g = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Geodätengleichung

$$\frac{d^2 \vec{x}^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda [g(\vec{x})] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$



# Metrik und Geodäten

## Fläche

$\vec{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

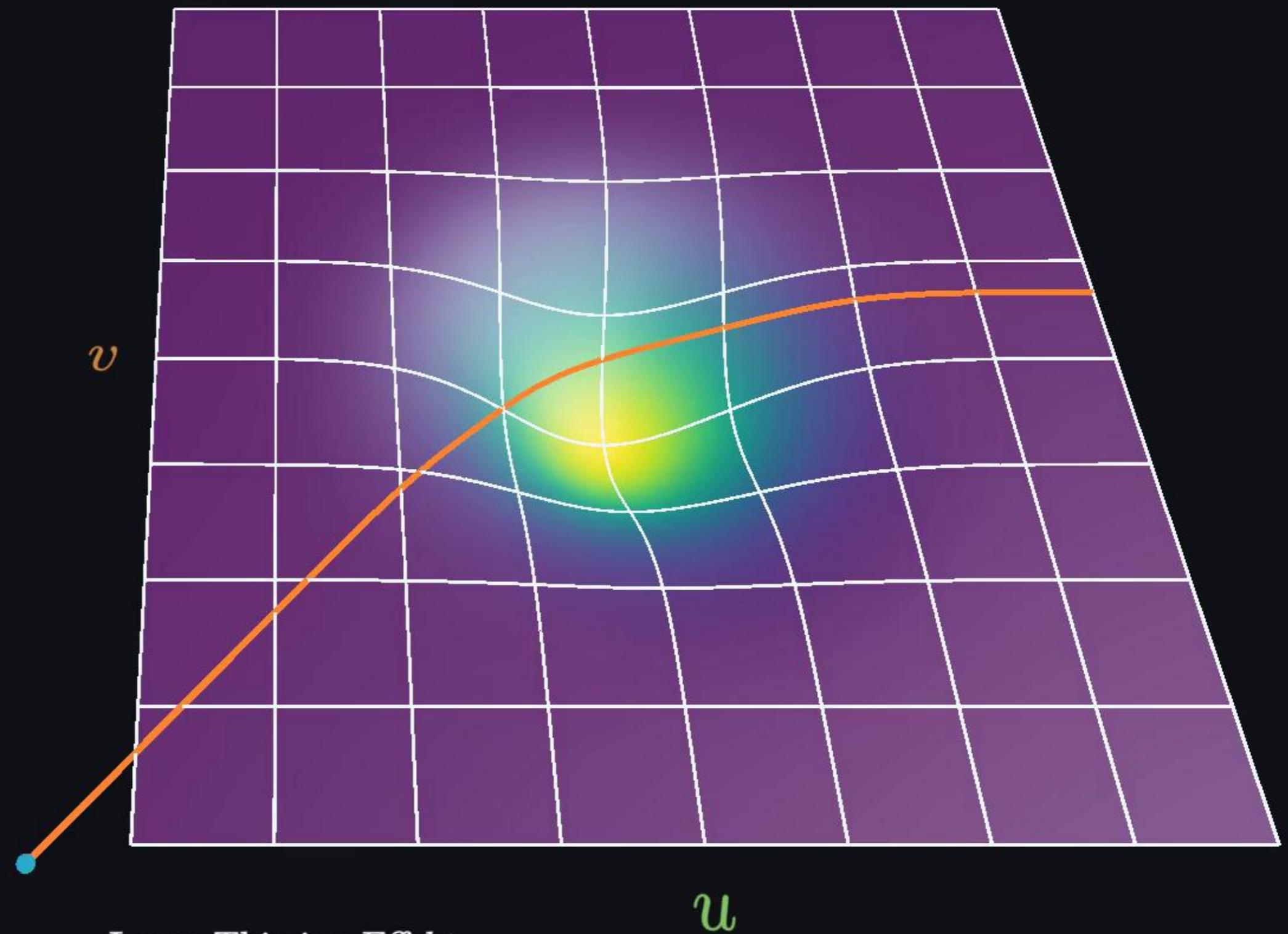
Metrik

$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$

$g = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$

Geodätengleichung

$\frac{d^2 \vec{x}^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda [g(\vec{x})] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$



# Einsteinsche Feldgleichungen

# Einsteinsche Feldgleichungen

2D Fläche  $\rightarrow$  4D Mannigfaltigkeit

# Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$   
 $(+, -, -, -)$

2D Fläche  $\rightarrow$  4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten  $(ct, x, y, z) \Rightarrow \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$c = G = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Einsteinsche Feldgleichungen

2D Fläche  $\rightarrow$  4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten  $(ct, x, y, z) \Rightarrow \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

# Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$   
 $(+, -, -, -)$

2D Fläche  $\rightarrow$  4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten  $(ct, x, y, z) \Rightarrow \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Ricci-Tensor:  $R_{\mu\nu} [\mathbf{g}]$

# Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$   
 $(+, -, -, -)$

2D Fläche  $\rightarrow$  4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten  $(ct, x, y, z) \Rightarrow \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Ricci-Tensor:  $R_{\mu\nu} [\mathbf{g}]$

Krümmungsskalar:  $R [\mathbf{g}]$

# Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$   
 $(+, -, -, -)$

2D Fläche  $\rightarrow$  4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten  $(ct, x, y, z) \Rightarrow \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Ricci-Tensor:  $R_{\mu\nu} [\mathbf{g}]$

Krümmungsskalar:  $R [\mathbf{g}]$

Energie-Impuls-Tensor:  $T_{\mu\nu}$

$c = G = 1$   
 $(+, -, -, -)$

# Linearisierung

$$c = G = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Linearisierung

Annahmen:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $h \ll \eta$ ,  $\tau \approx t$

# Linearisierung

Annahmen:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $h \ll \eta$ ,  $\tau \approx t$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 \textcolor{teal}{x}^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda [\mathbf{g}(\vec{x})] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

# Linearisierung

Annahmen:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $h \ll \eta$ ,  $\tau \approx t$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \quad -\Delta h_{0i} = 16\pi j_i$$

$$\frac{d^2 \textcolor{teal}{x}^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda [\mathbf{g}(\vec{x})] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

# Gravitoelektromagnetismus

(+, -, -, -)

Annahmen:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $\mathbf{h} \ll \boldsymbol{\eta}$ ,  $\tau \approx t$

Substitutionen:  $\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00}$ ,  $B_j = -\varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial \textcolor{teal}{x}^l}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi \textcolor{red}{T}_{\mu\nu}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \quad -\Delta h_{0i} = 16\pi j_i$$

$$\frac{d^2 \textcolor{teal}{x}^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda [\mathbf{g}(\vec{x})] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -16\pi \vec{j}$$

# Gravitoelektromagnetismus

(+, -, -, -)

Annahmen:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $\mathbf{h} \ll \boldsymbol{\eta}$ ,  $\tau \approx t$

Substitutionen:  $\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00}$ ,  $B_j = -\varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial \mathbf{x}^l}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \quad -\Delta h_{0i} = 16\pi j_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -16\pi \vec{j}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda [\mathbf{g}(\vec{\mathbf{x}})] \frac{d\mathbf{x}^\mu}{d\tau} \frac{d\mathbf{x}^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial \mathbf{x}^i} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial \mathbf{x}^l} \frac{d\mathbf{x}^k}{dt}$$

# Gravitoelektromagnetismus

(+, -, -, -)

Annahmen:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $\mathbf{h} \ll \boldsymbol{\eta}$ ,  $\tau \approx t$

Substitutionen:  $\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00}$ ,  $B_j = -\varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial \mathbf{x}^l}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \quad -\Delta h_{0i} = 16\pi j_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -16\pi \vec{j}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda [\mathbf{g}(\vec{\mathbf{x}})] \frac{d\mathbf{x}^\mu}{d\tau} \frac{d\mathbf{x}^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial \mathbf{x}^i} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial \mathbf{x}^l} \frac{d\mathbf{x}^k}{dt}$$

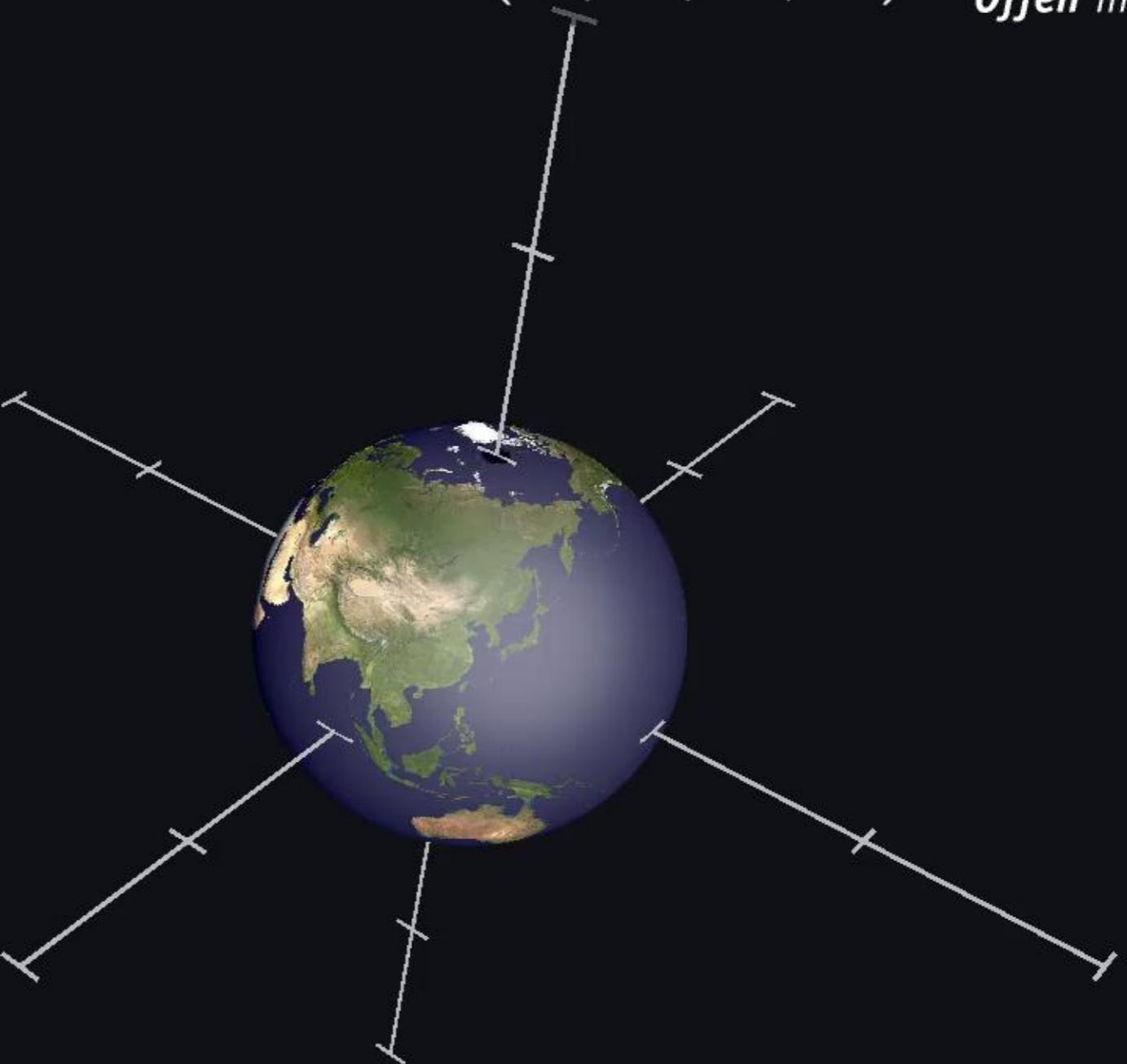
$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

# Rotierende Kugelmasse

$$c = G = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Rotierende Kugelmasse

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Rotierende Kugelmasse

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Rotierende Kugelmasse

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$



$$c = G = R = 1$$

$$(+, -, -, -)$$

# Rotierende Kugelmasse

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$



# Rotierende Kugelmasse

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

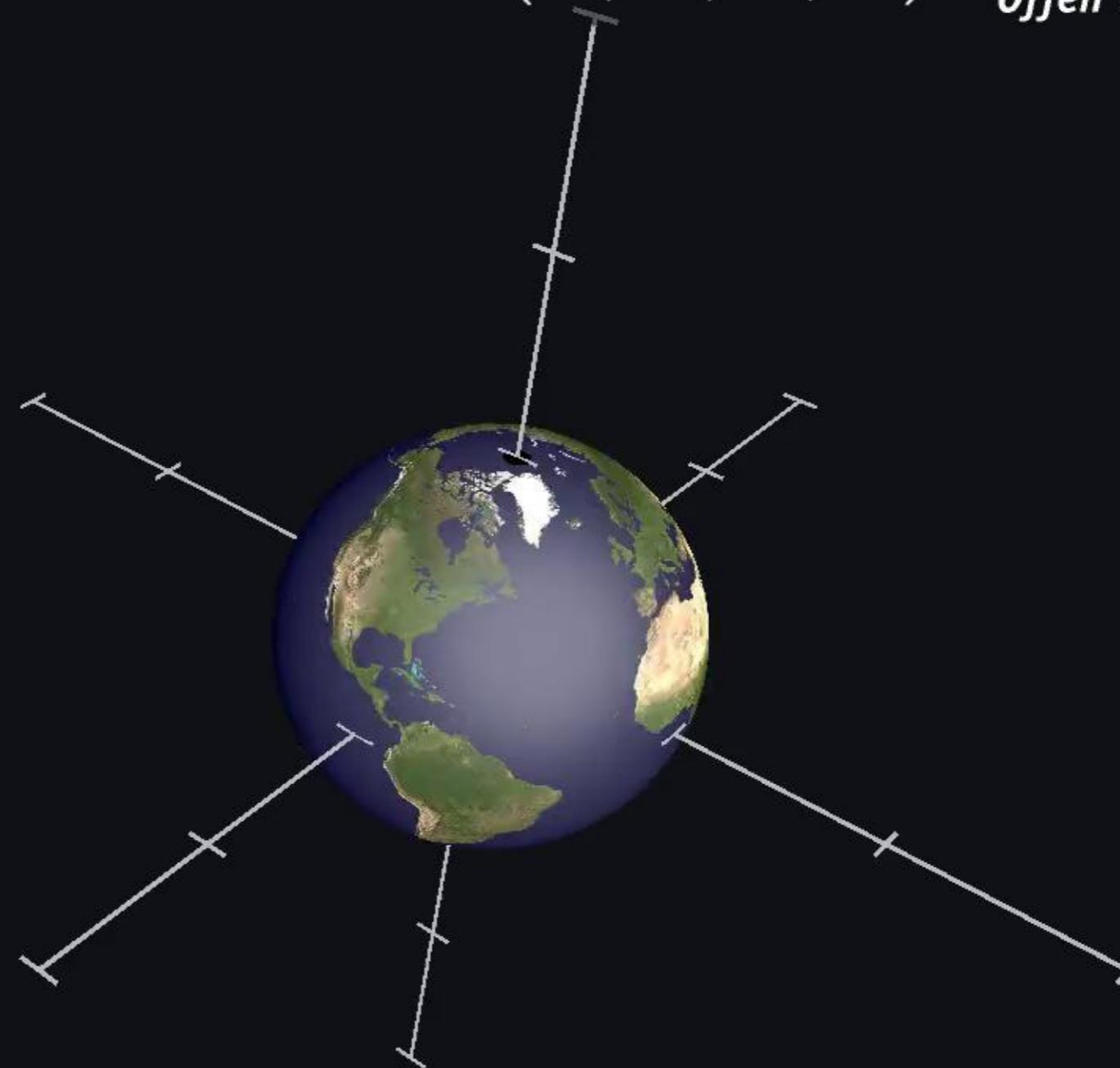
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{2}{|\vec{x}|^3} \left[ \vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$



# EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

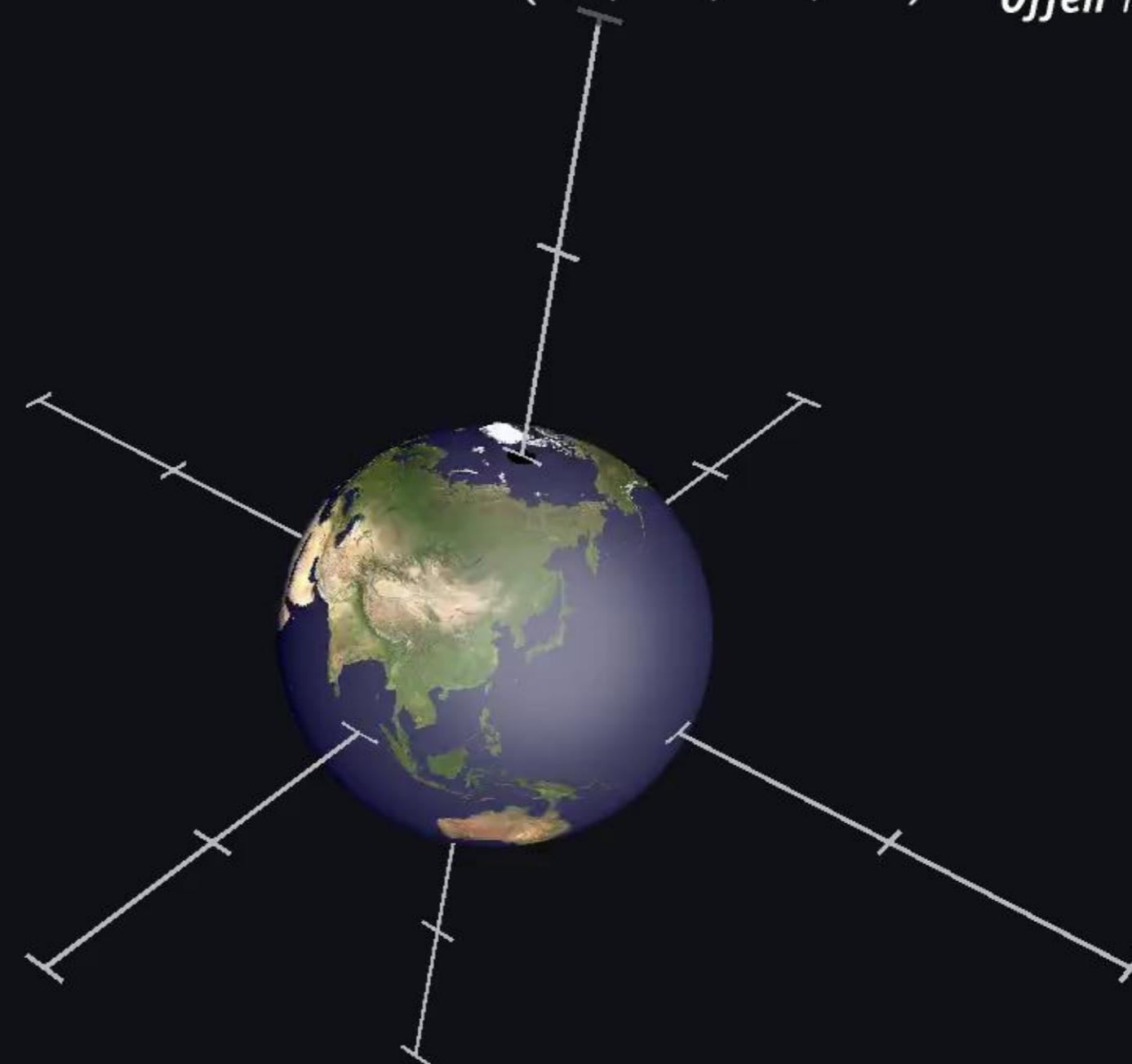
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{2}{|\vec{x}|^3} \left[ \vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

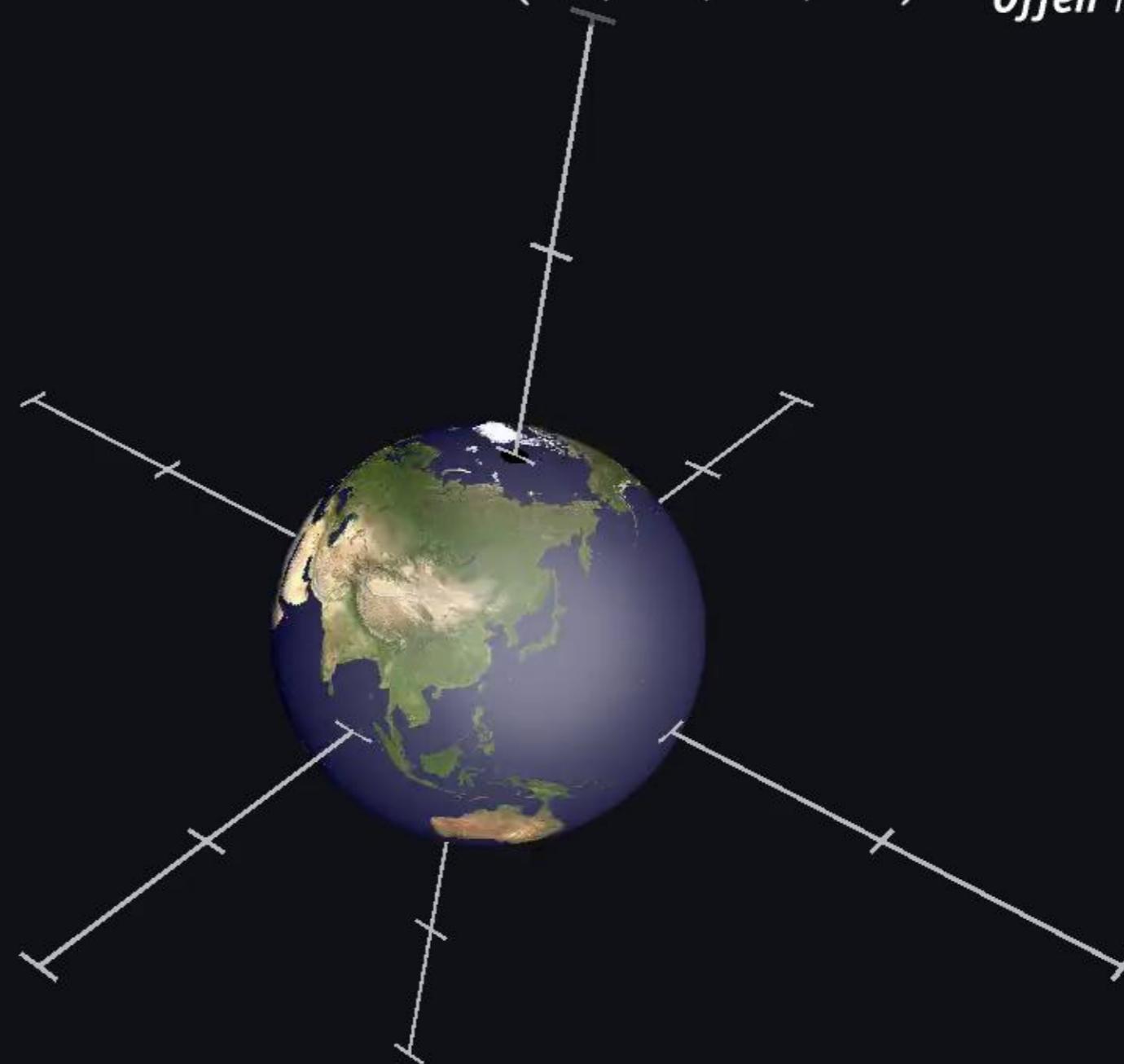
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{2}{|\vec{x}|^3} \left[ \vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$



$$c = G = R = 1$$

# EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

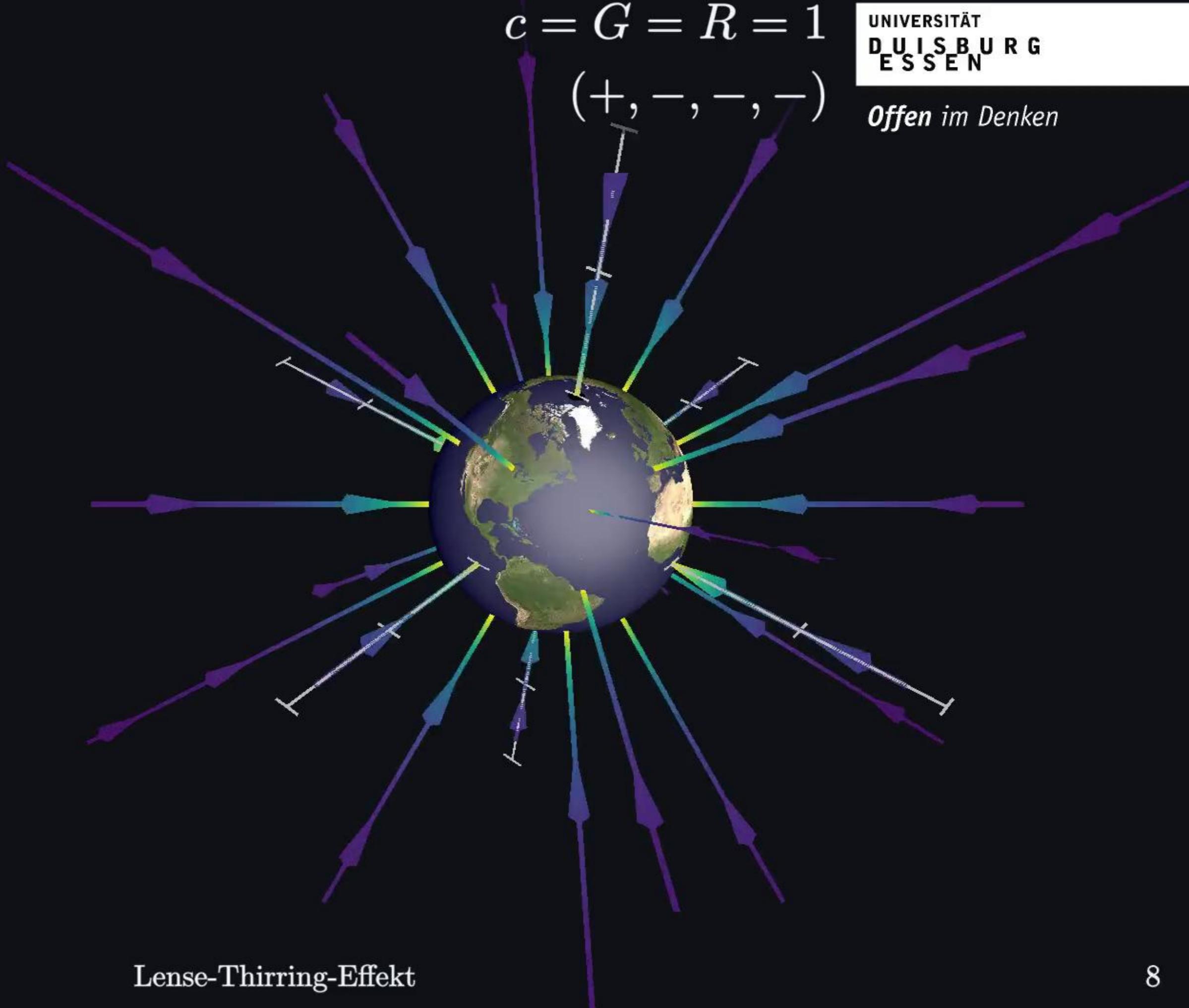
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

$$\vec{B} = \frac{2}{|\vec{x}|^3} \left[ \vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\vec{S} = I\vec{\omega}$$



# EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

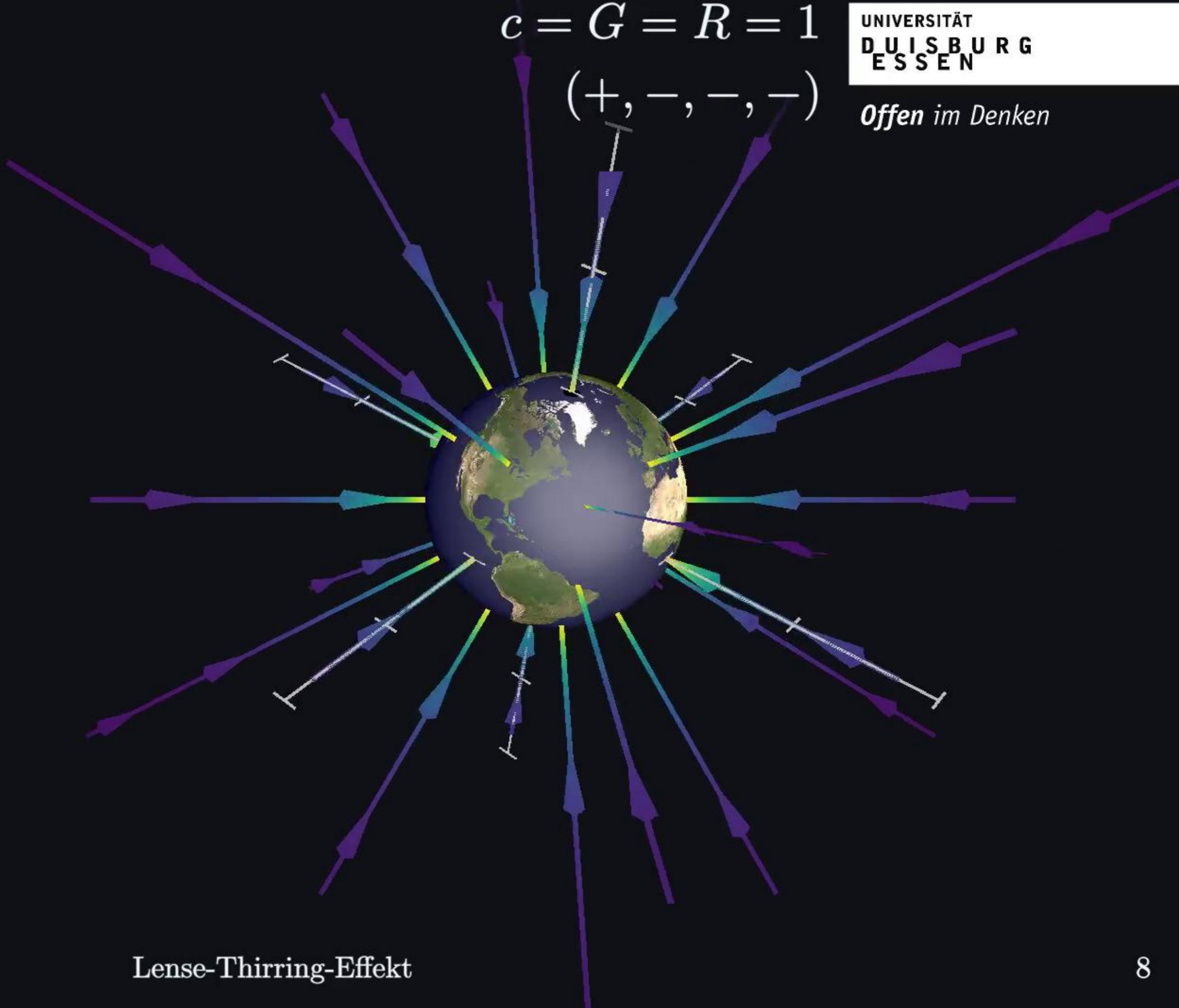
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

$$\vec{B} = \frac{2}{|\vec{x}|^3} \left[ \vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\vec{S} = I\vec{\omega}$$



# EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

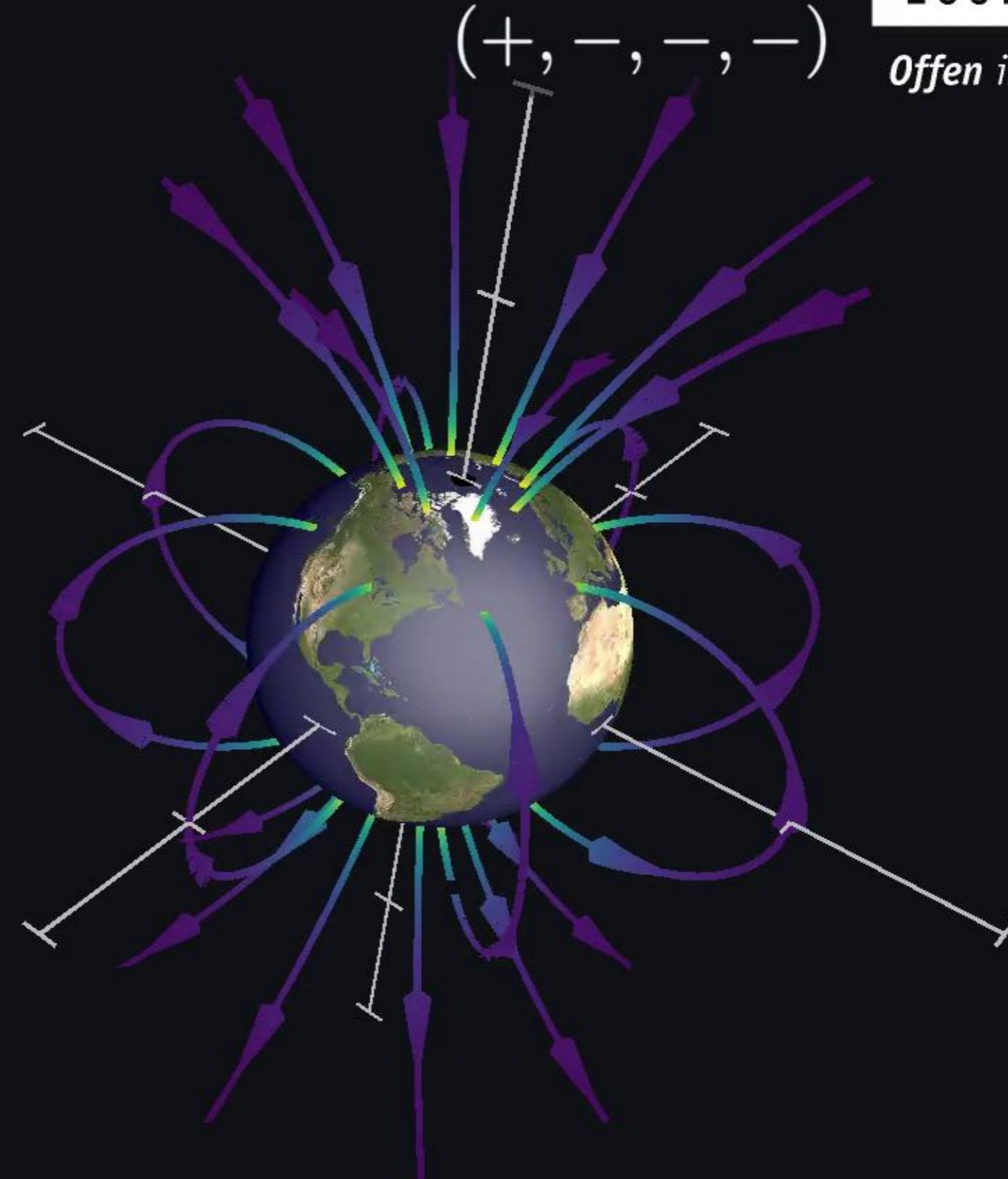
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2}{|\vec{x}|^3} \left[ \vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]}$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\vec{S} = I\vec{\omega}$$



# EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

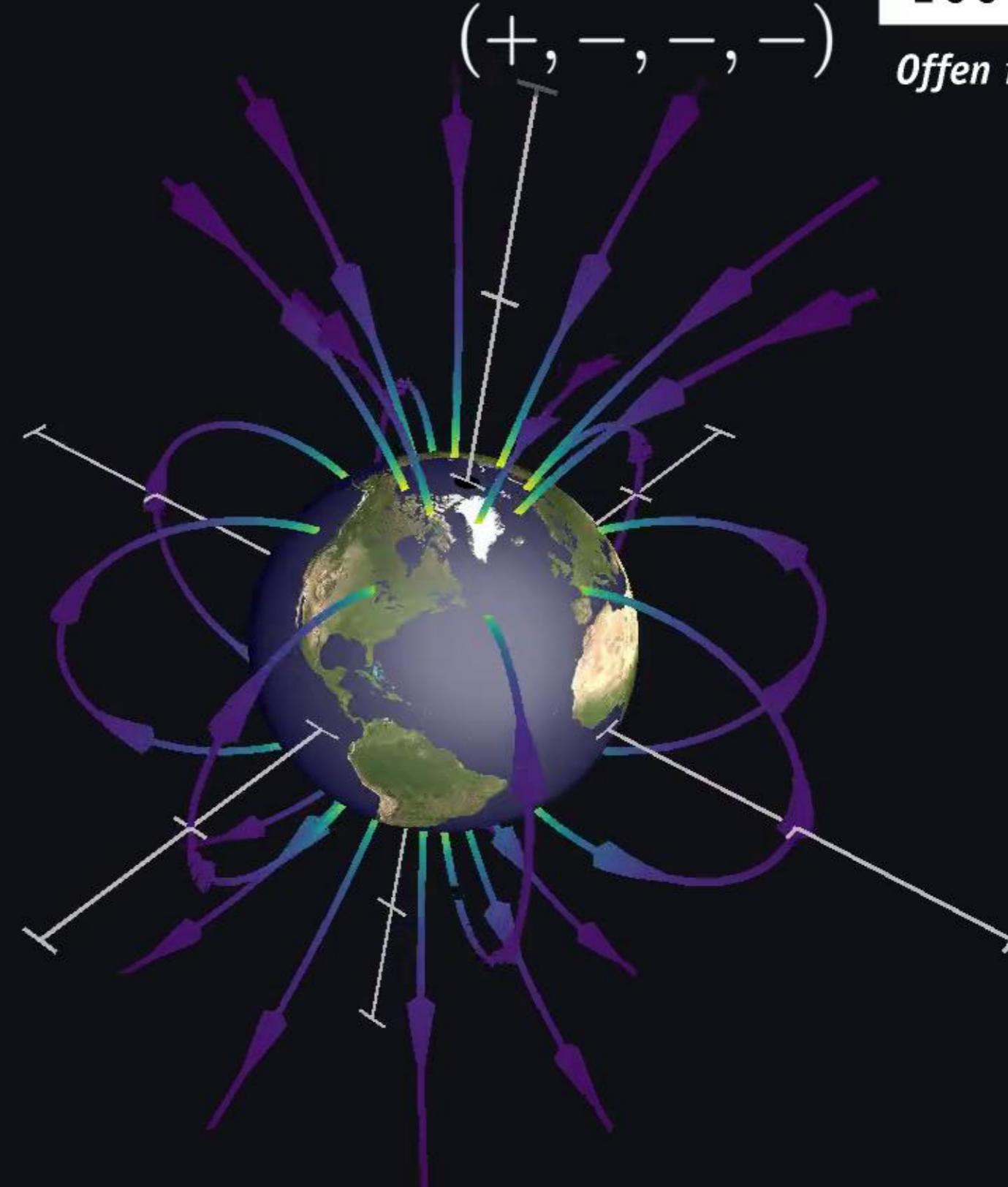
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2}{|\vec{x}|^3} \left[ \vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]}$$

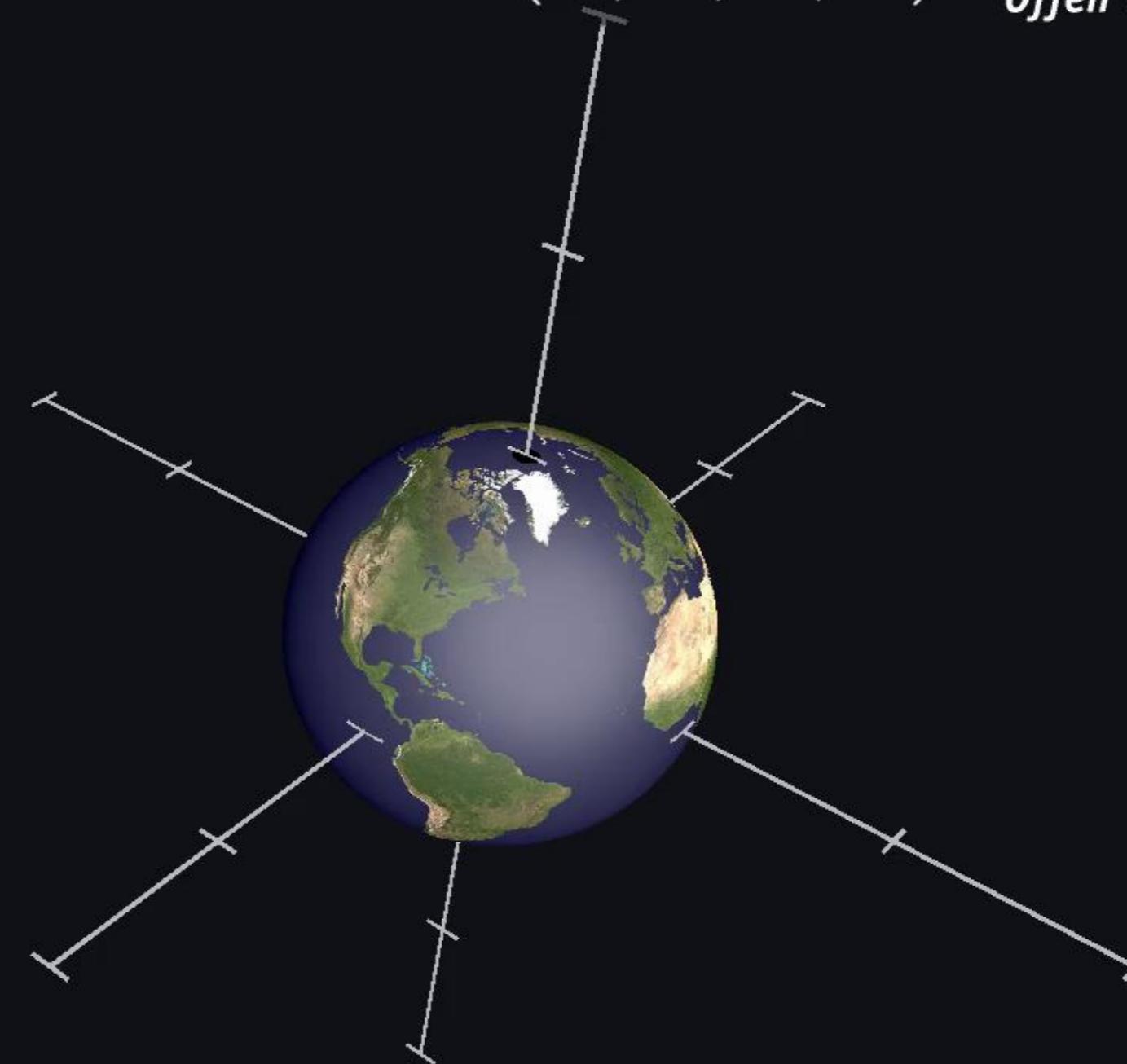
$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Trajektorien



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 0.00$$

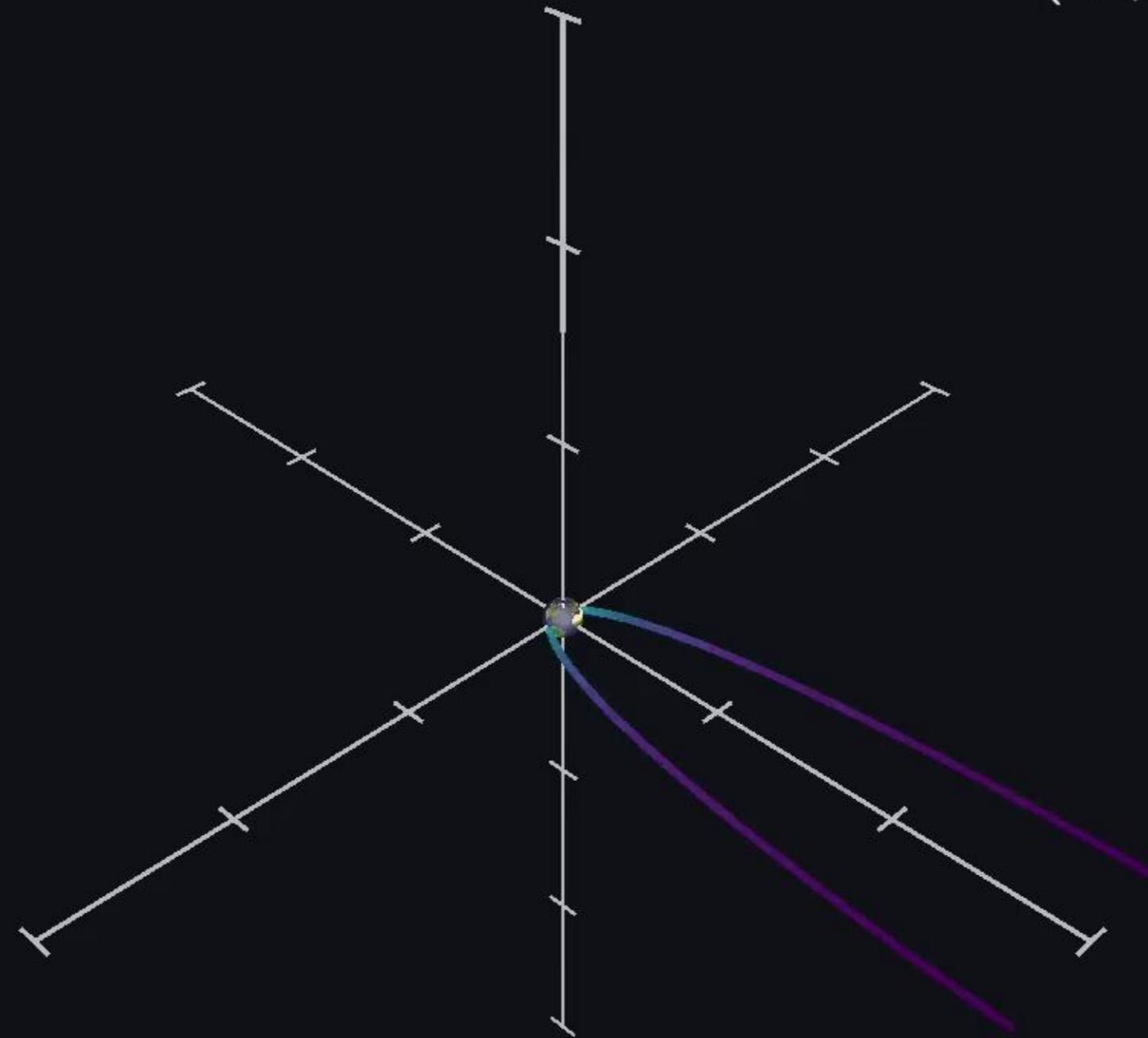


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 0.00$$

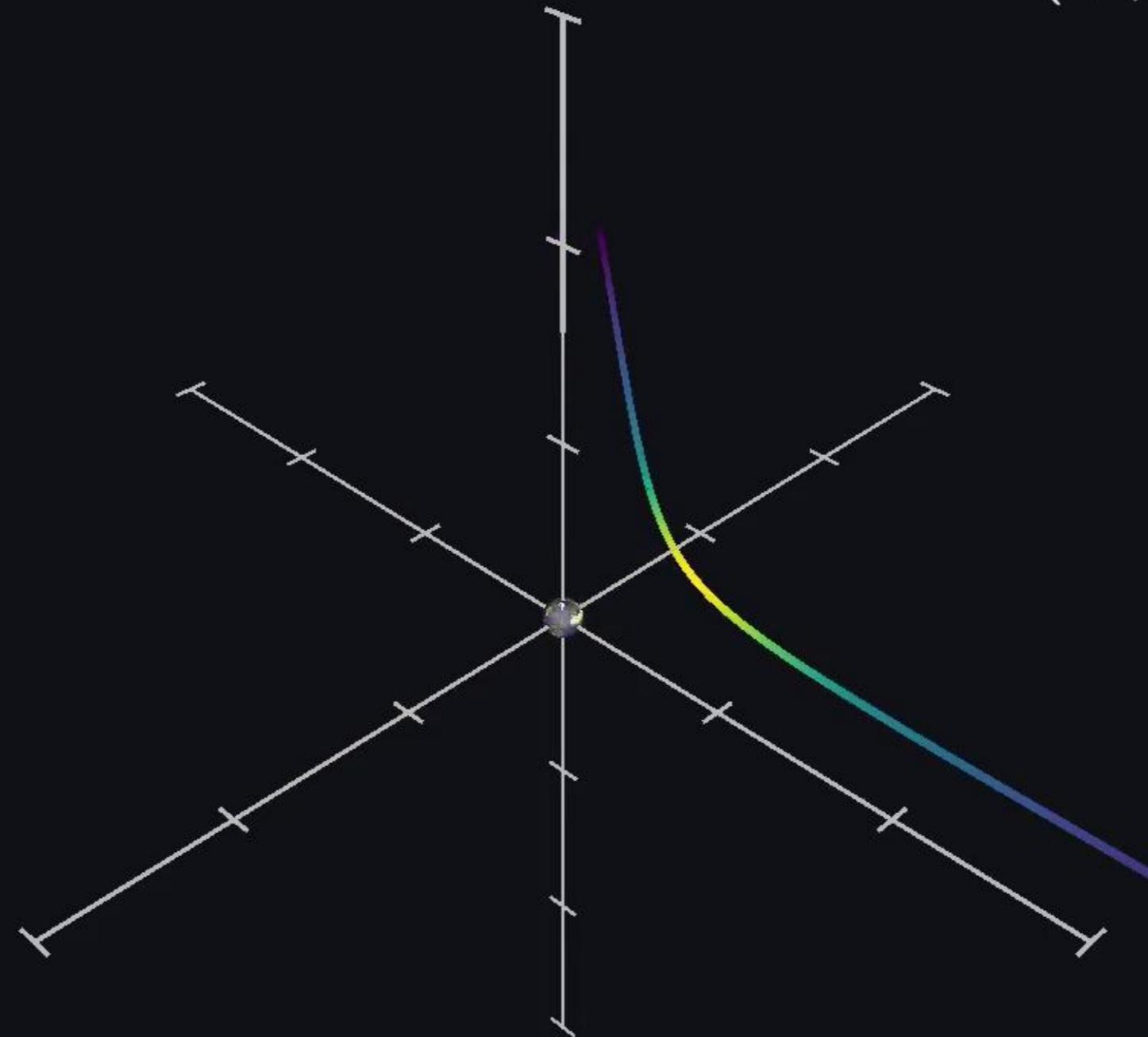


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 1.00$$

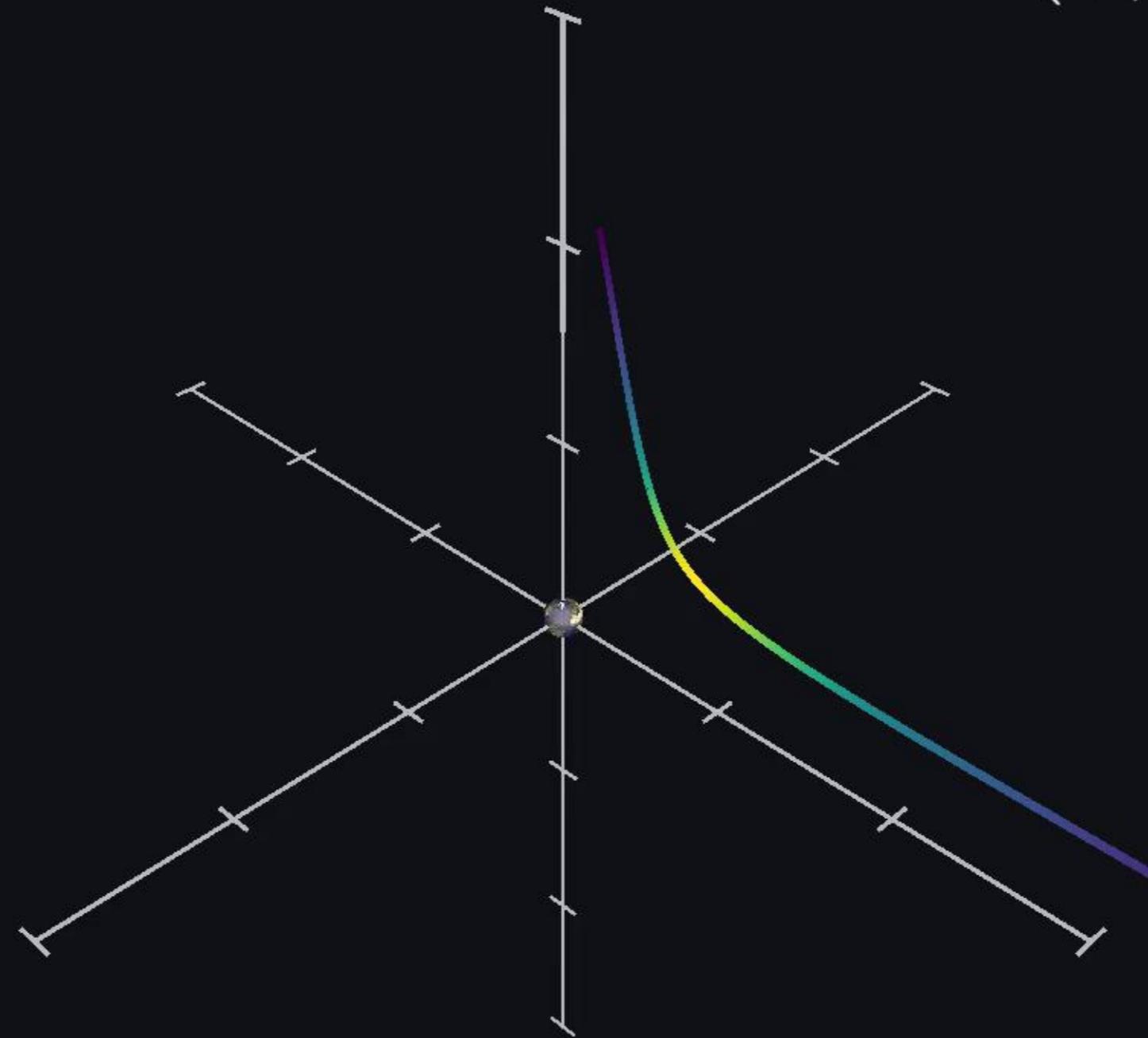


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 1.00$$

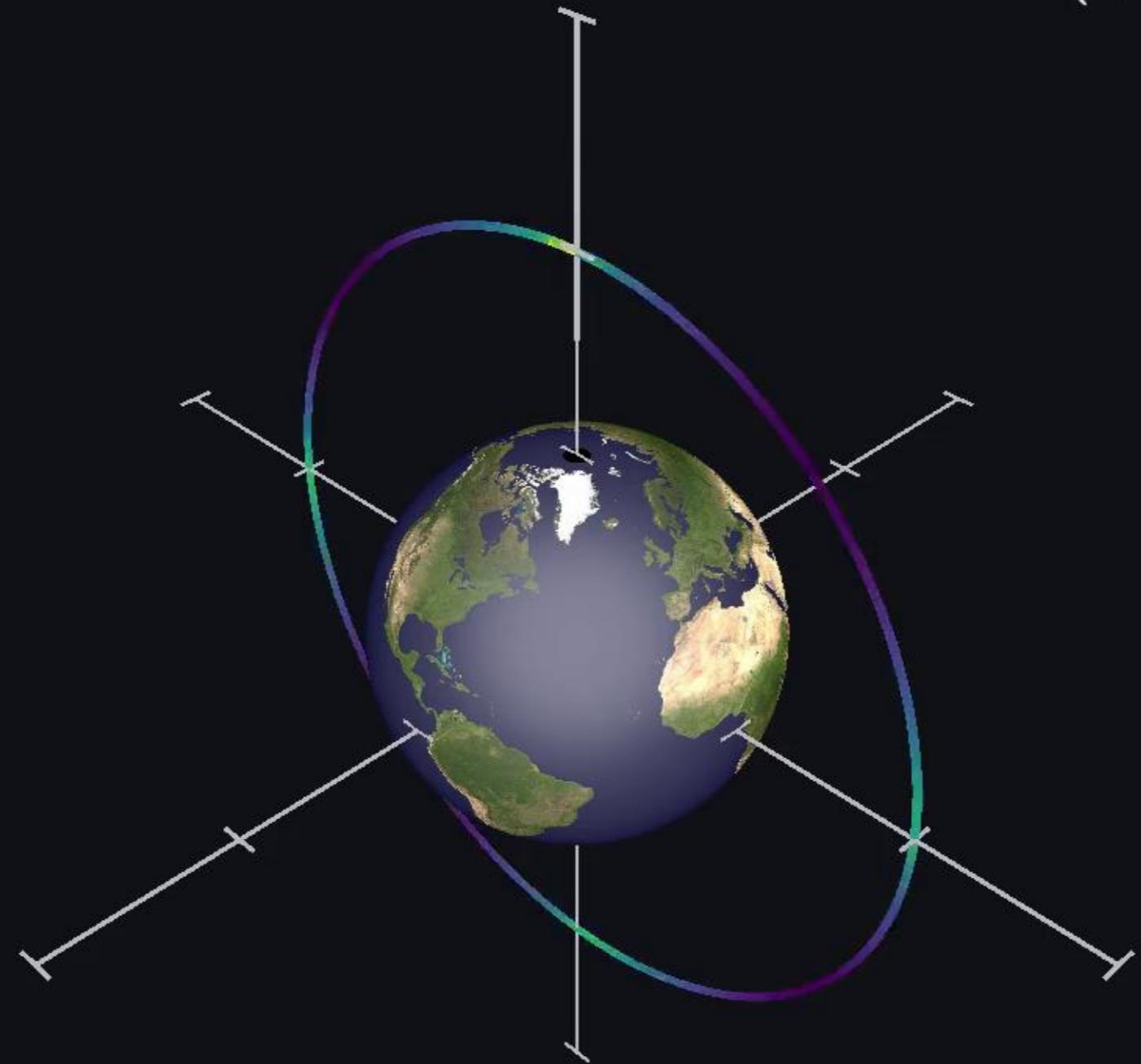


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 0.00$$

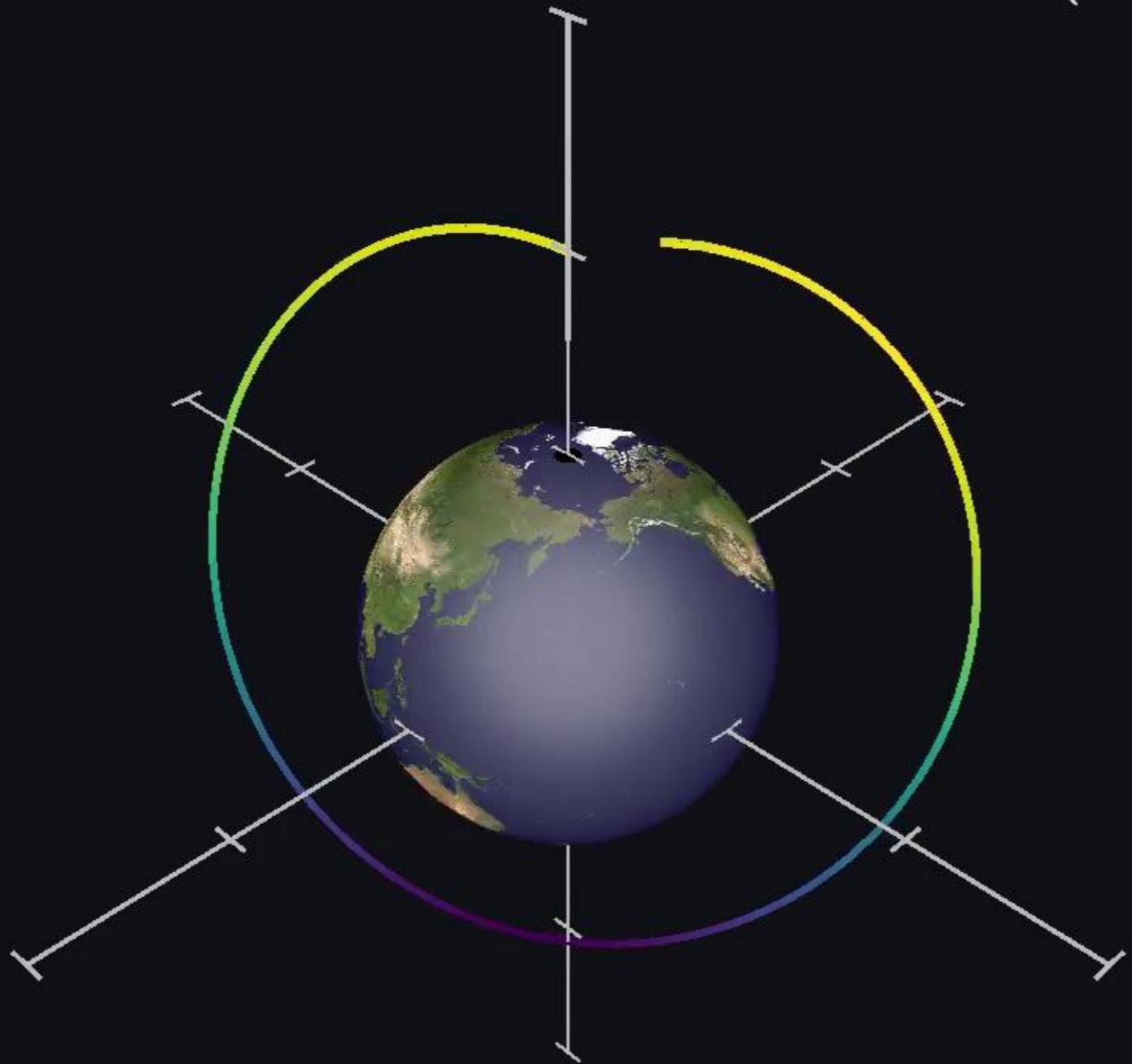


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 0.71$$

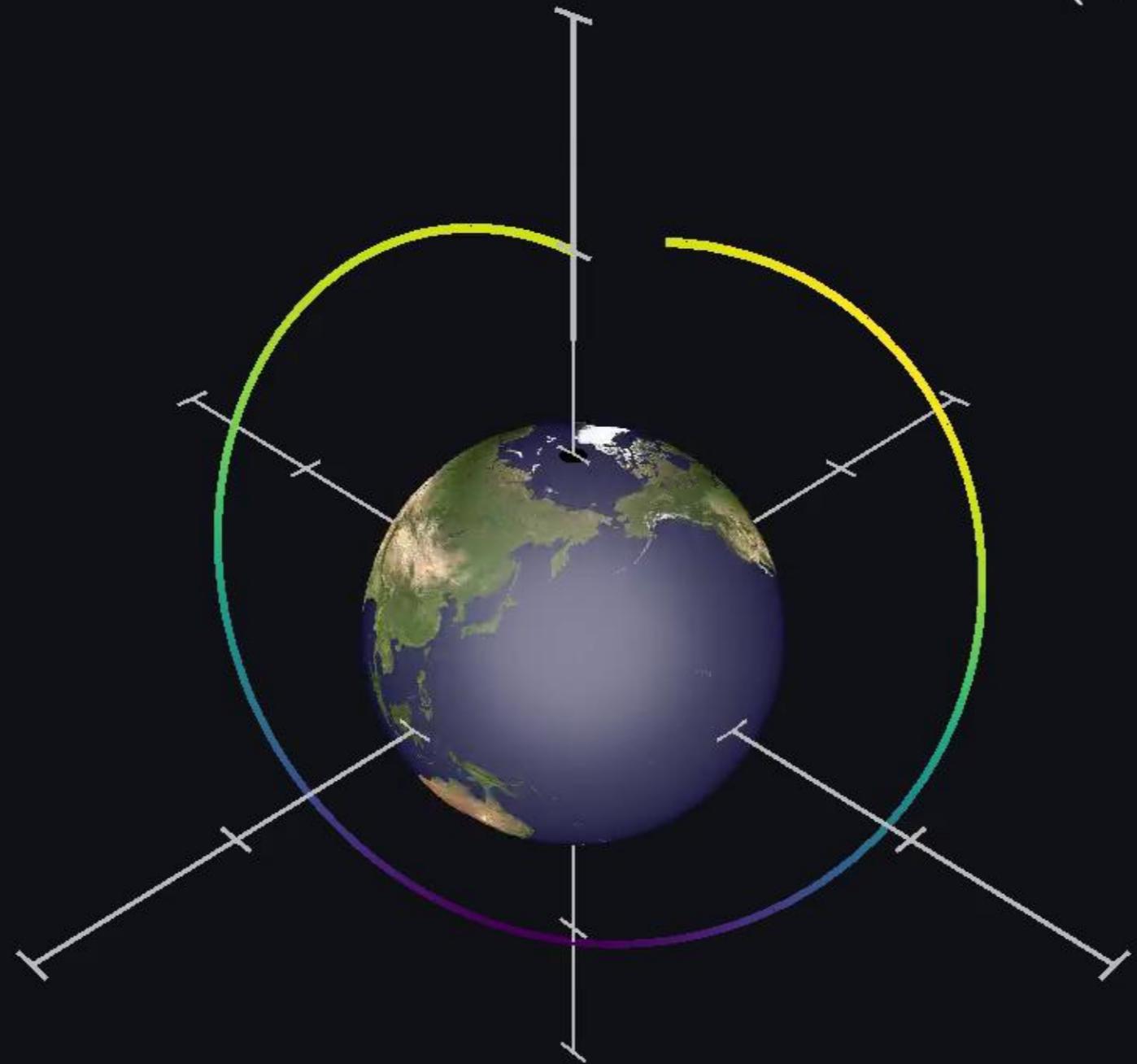


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 0.71$$

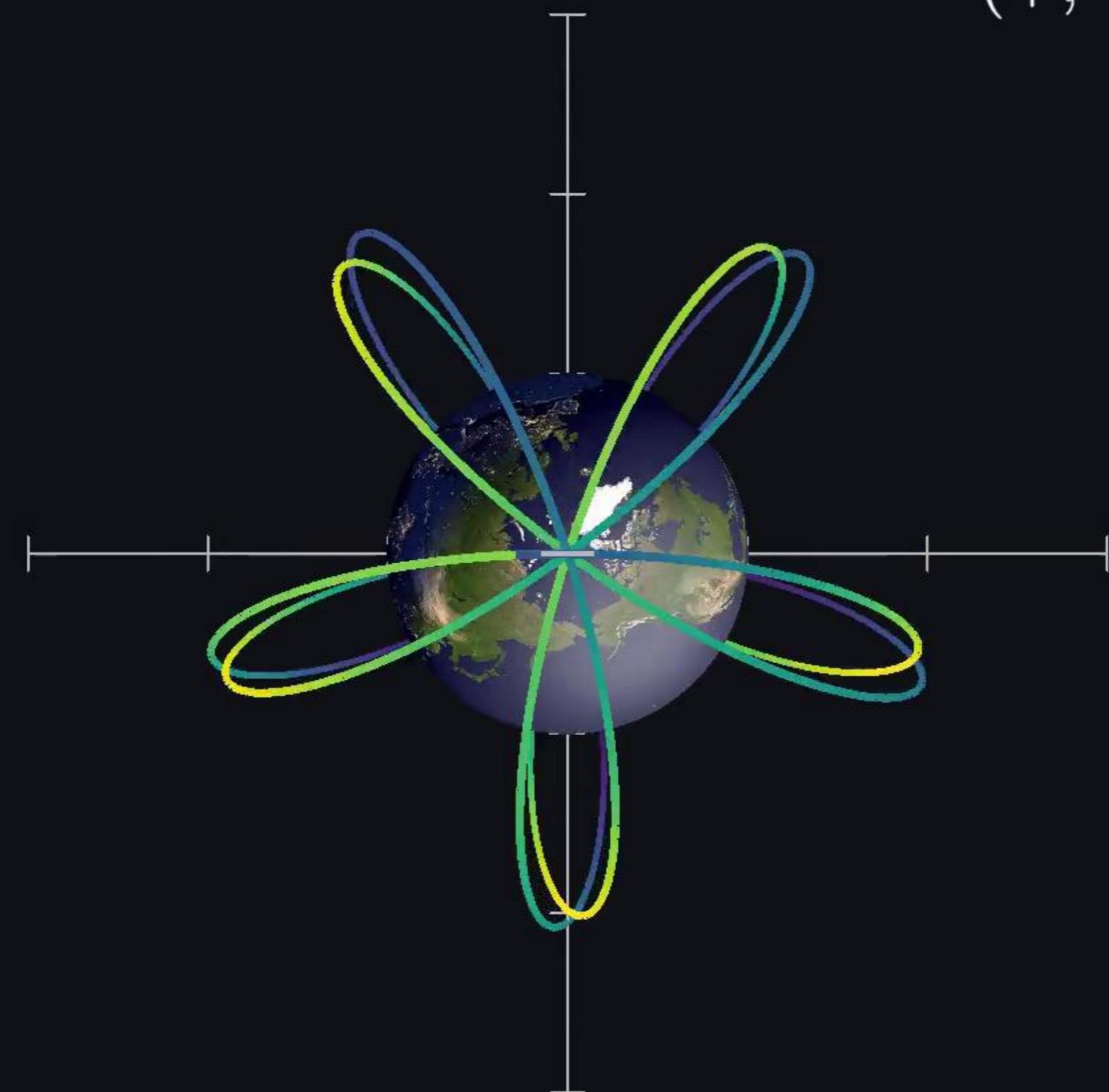


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 0.71$$

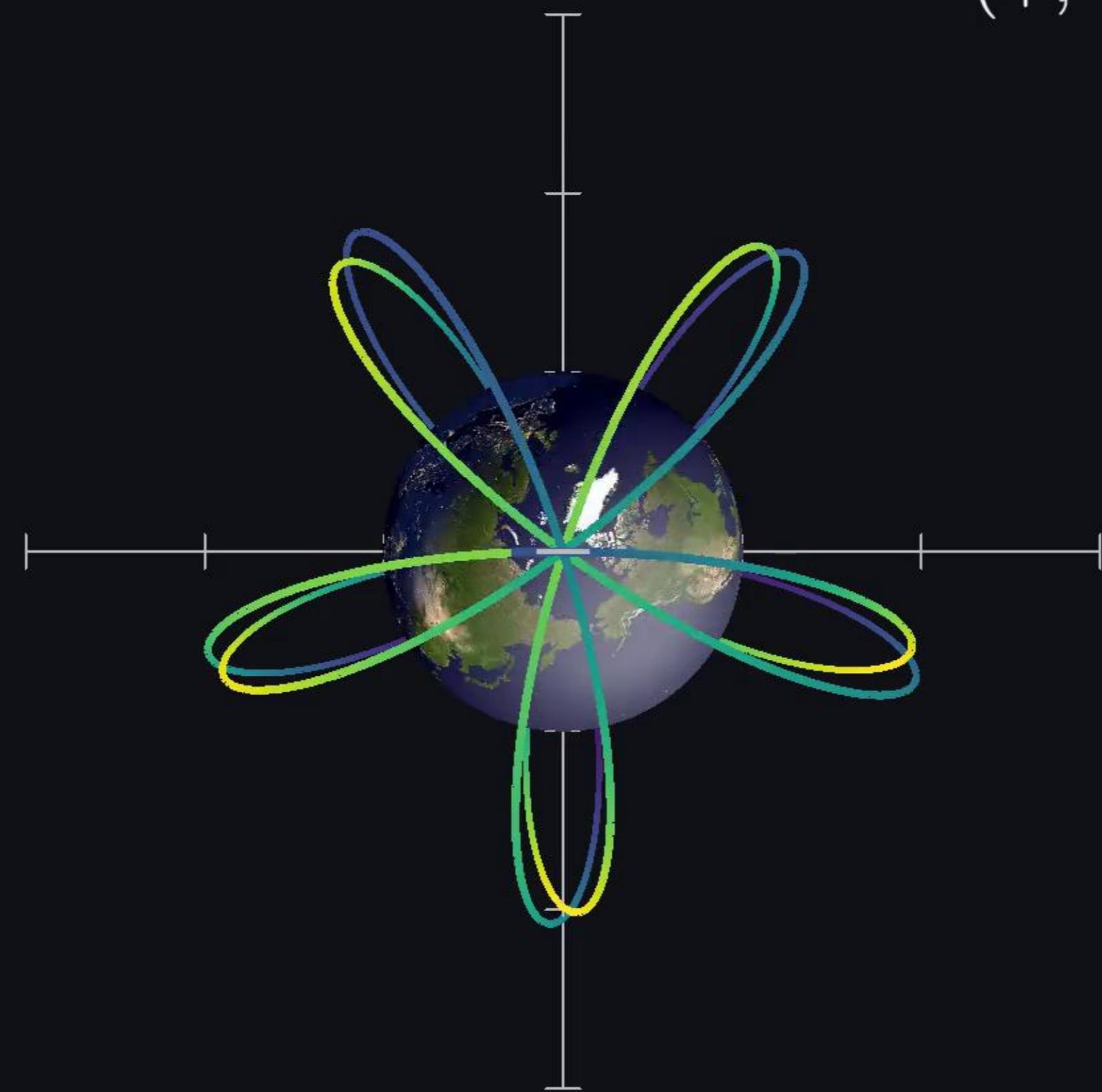


$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Trajektorien

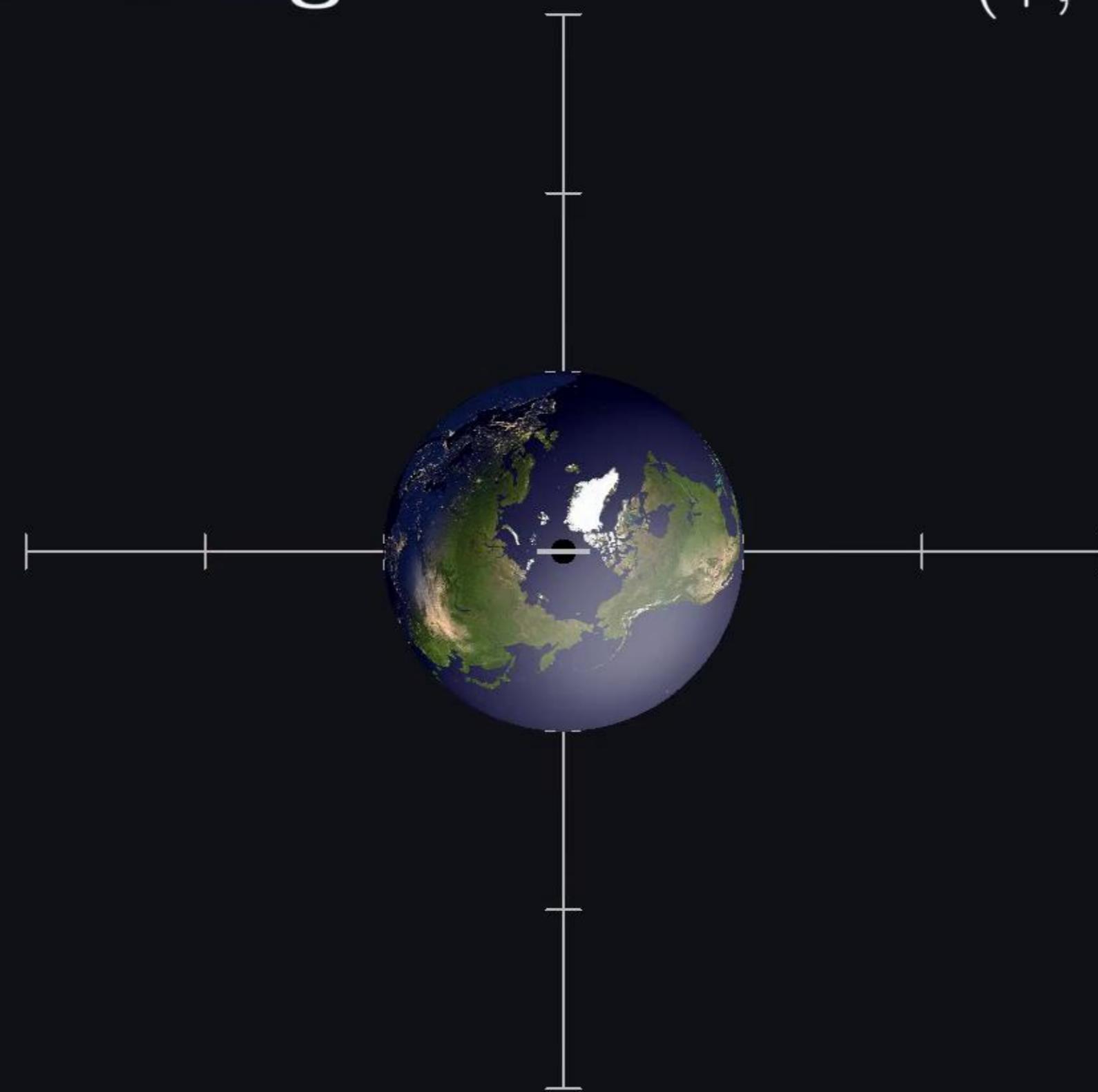
$$\vec{F} = m \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\omega = 0.71$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Raumzeitdarstellung

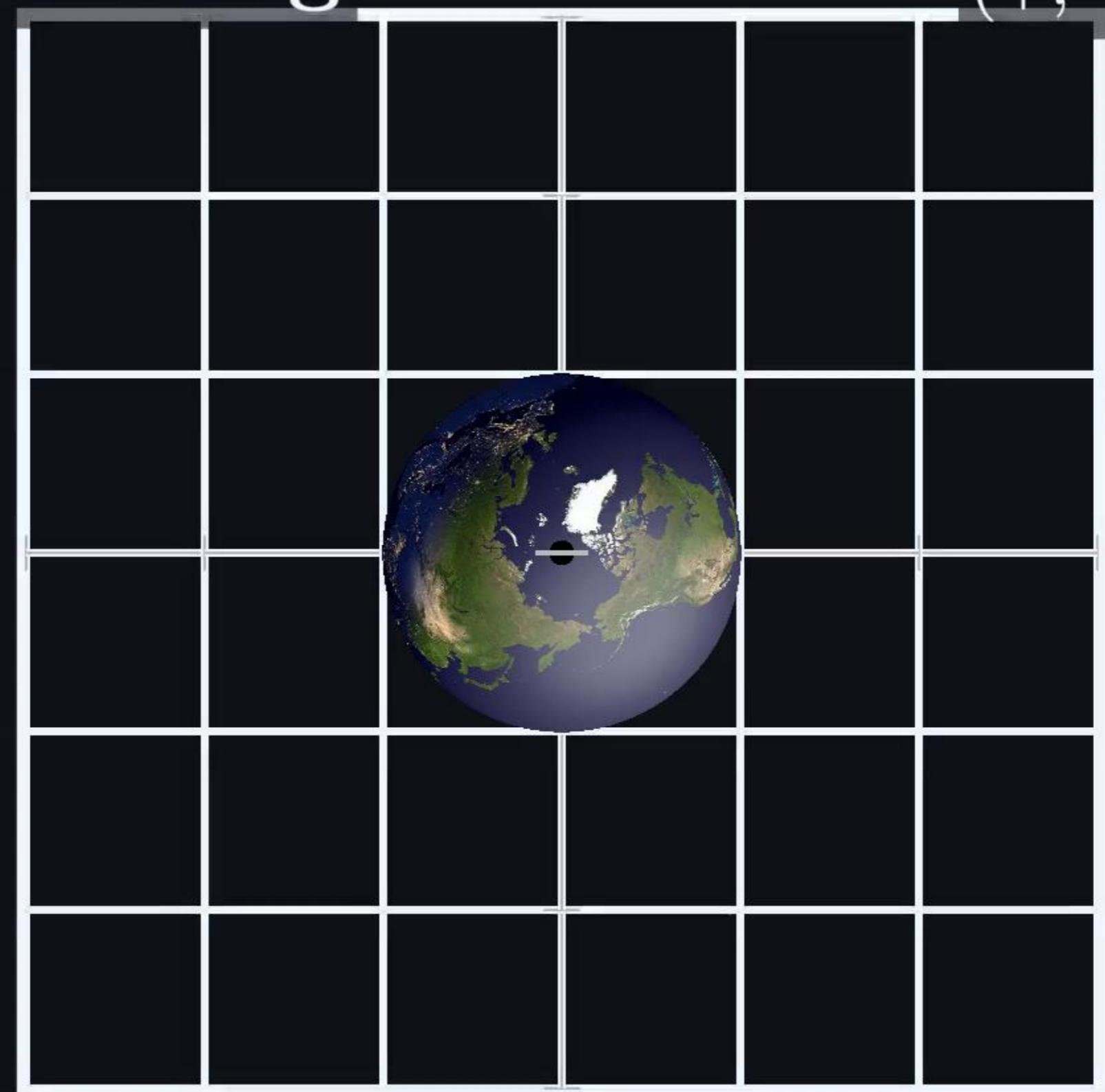


$$c = G = R = 1$$

(+, -, -, -)

# Raumzeitdarstellung

Zeitentwicklung  
für jeden  
Gitterpunkt  
bei  $\omega = 0$

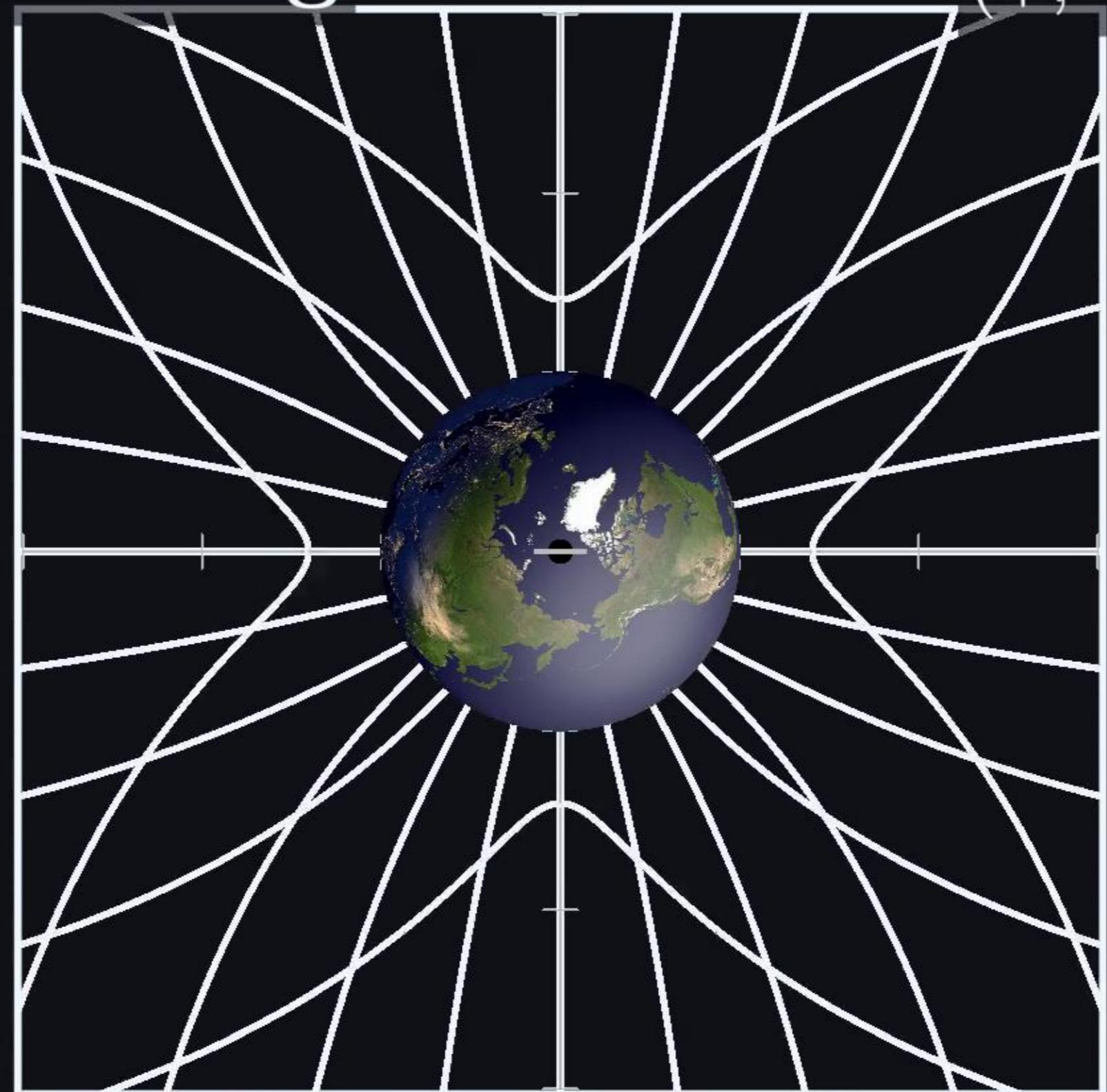


$$c = G = R = 1$$

# Raumzeitdarstellung

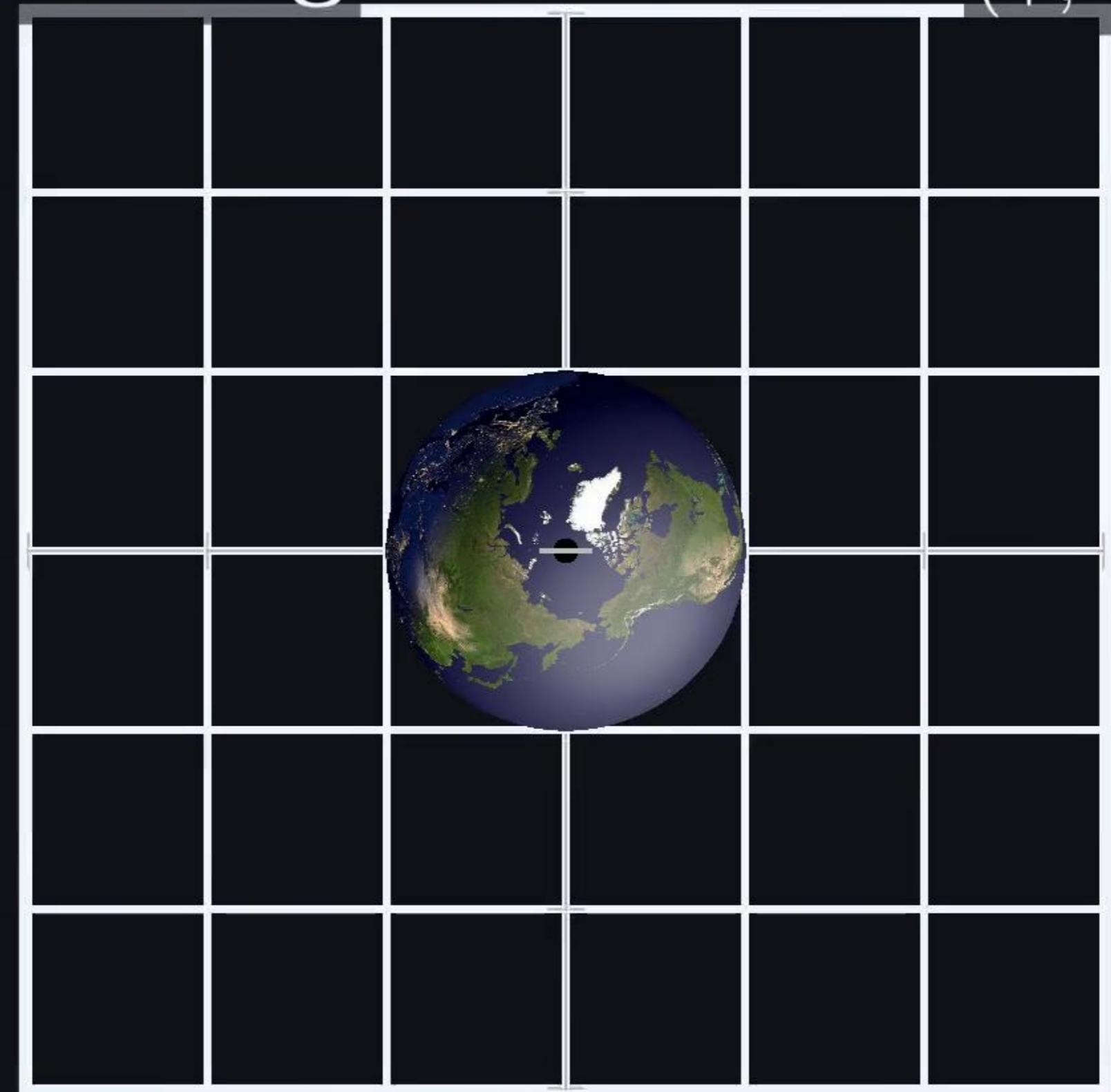
Zeitentwicklung  
für jeden  
Gitterpunkt  
bei  $\omega = 0$

(+,-,-,-)



# Raumzeitdarstellung

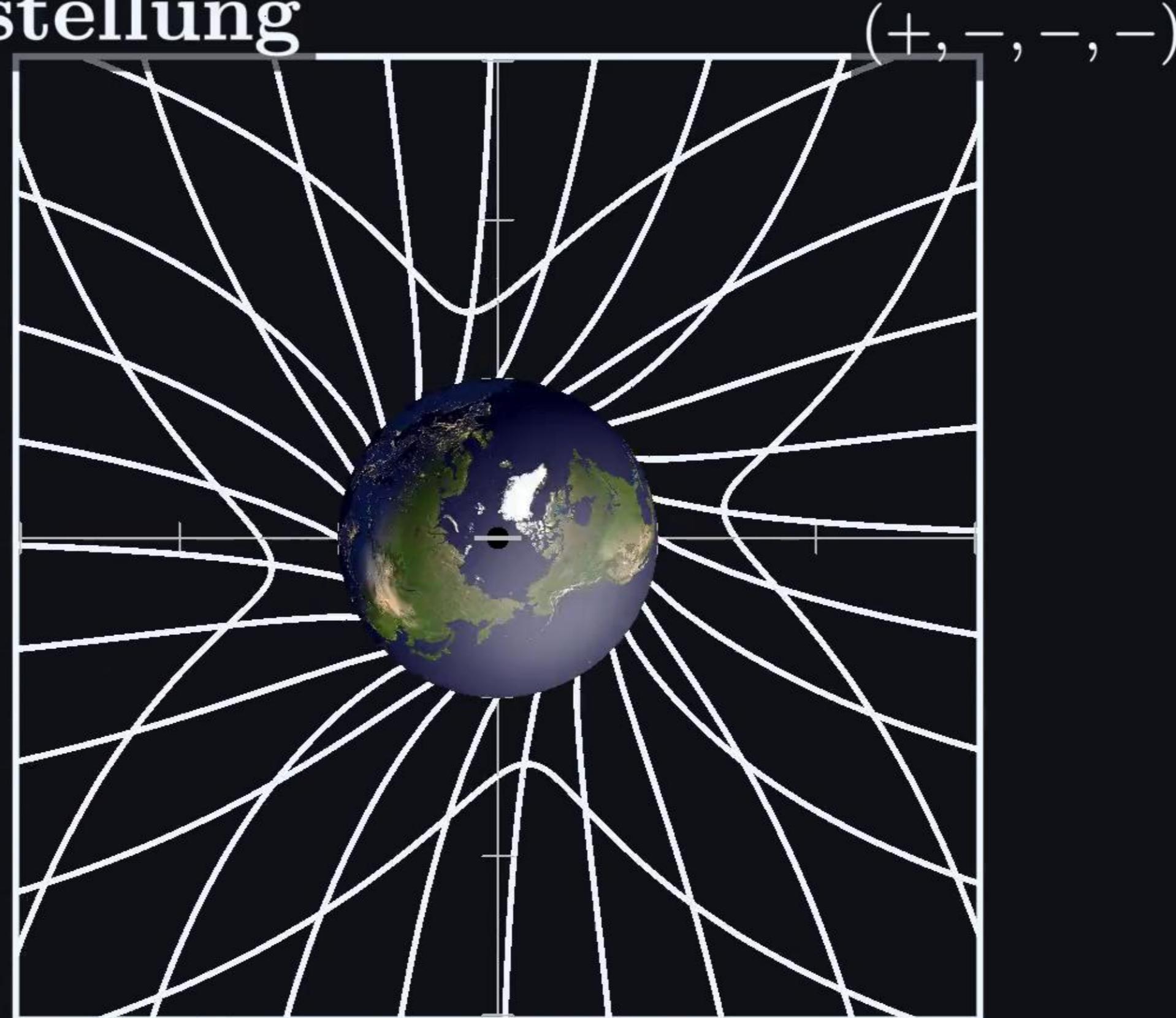
Zeitentwicklung  
für jeden  
Gitterpunkt  
bei  $\omega = 1$



$$c = G = R = 1$$

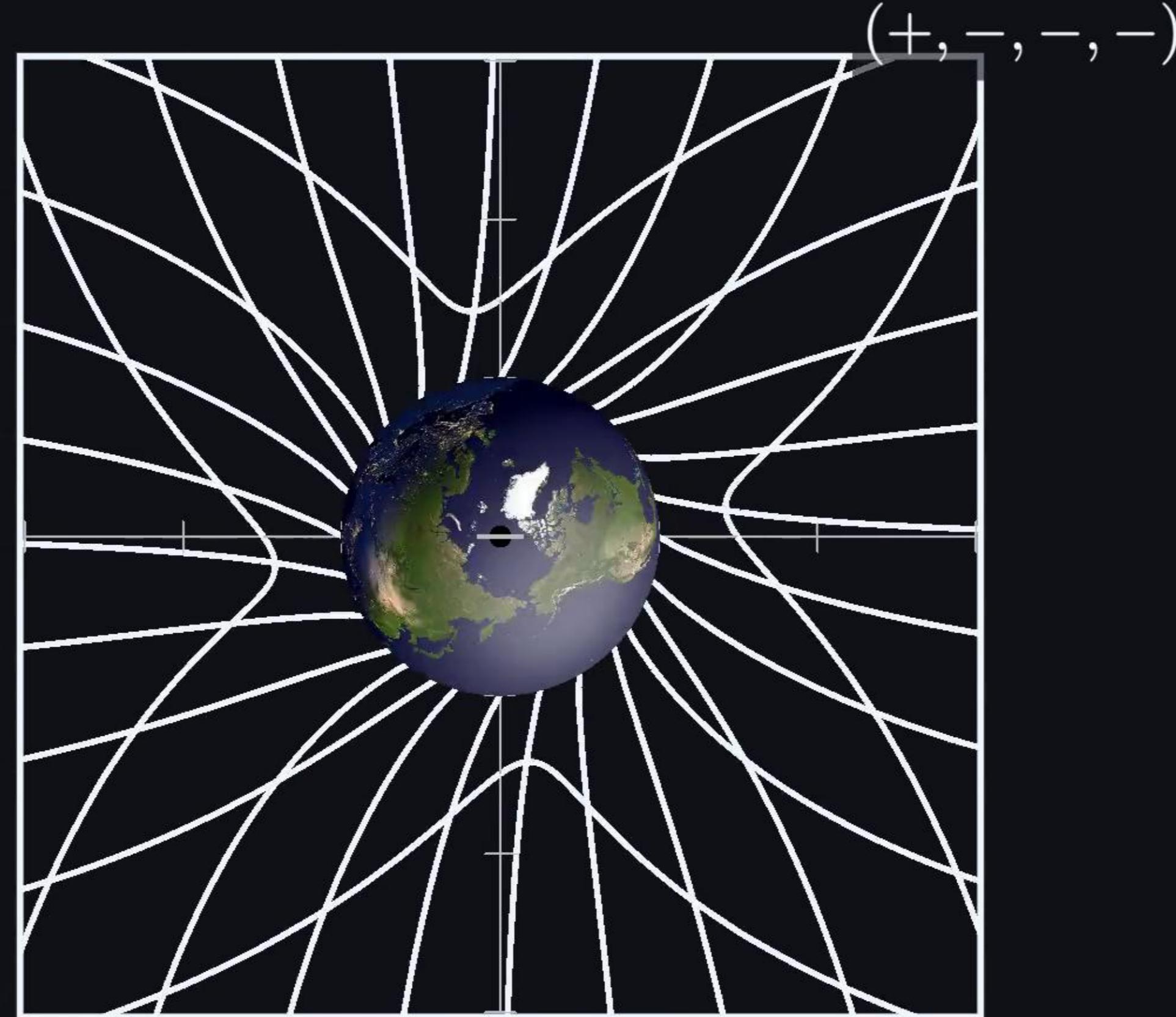
# Raumzeitdarstellung

Zeitentwicklung  
für jeden  
Gitterpunkt  
bei  $\omega = 1$



$$c = G = R = 1$$

# Präzession



# Präzession



$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Präzession

$$c = G = R = 1$$

(+, -, -, -)

# Präzession

$$c = G = R = 1$$

(+, -, -, -)



Lense-Thirring-Effekt

# Präzession

$$c = G = R = 1$$

(+, -, -, -)



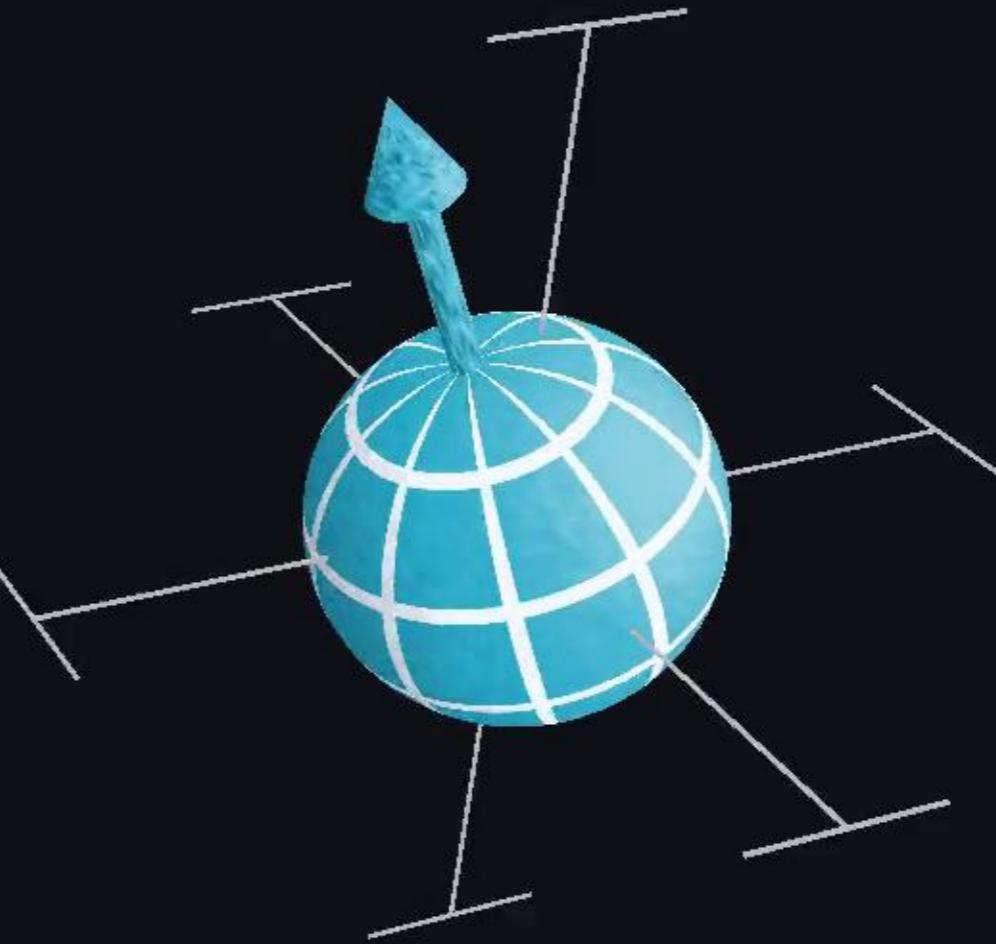
Lense-Thirring-Effekt

$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

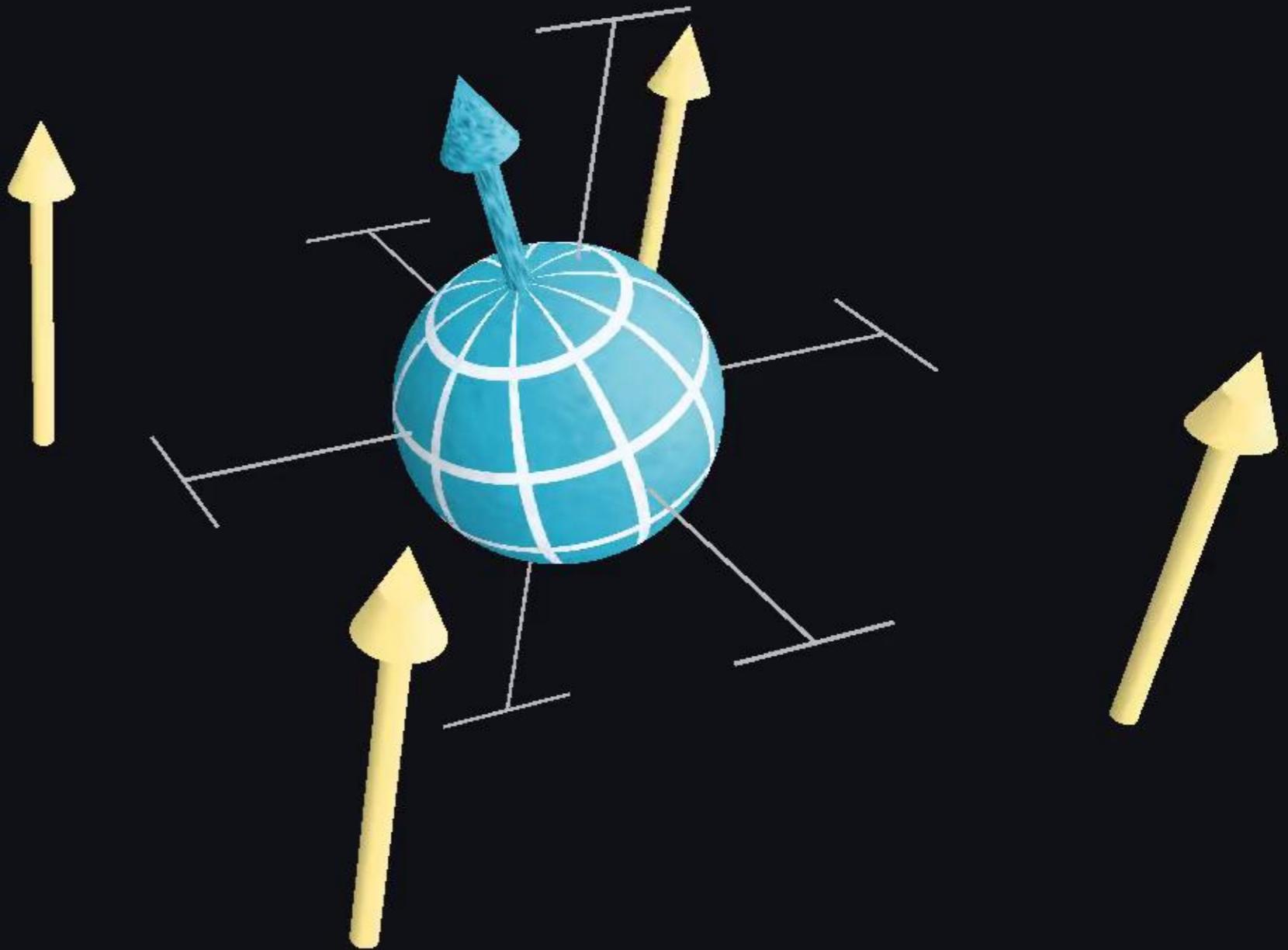
# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

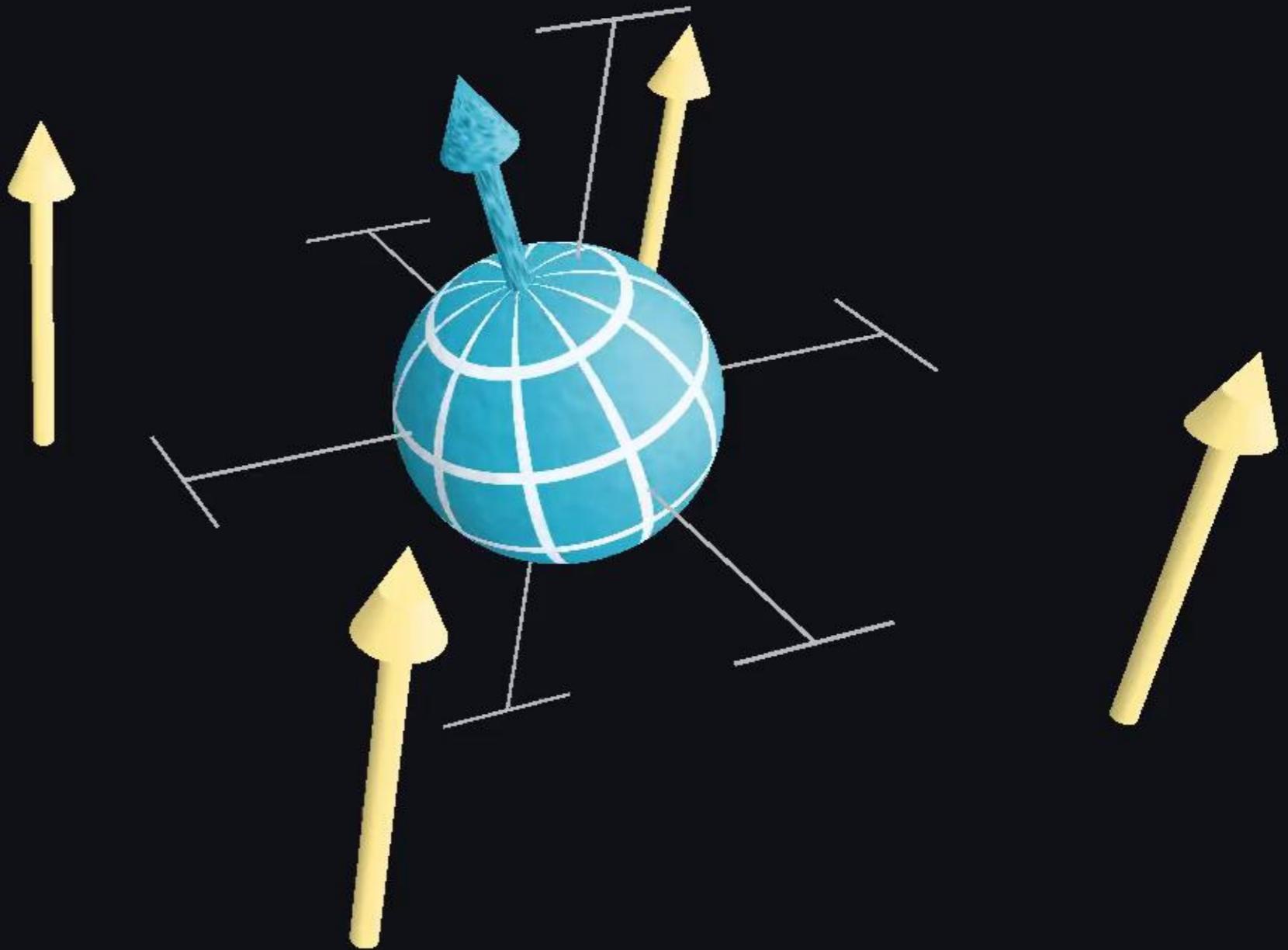
# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

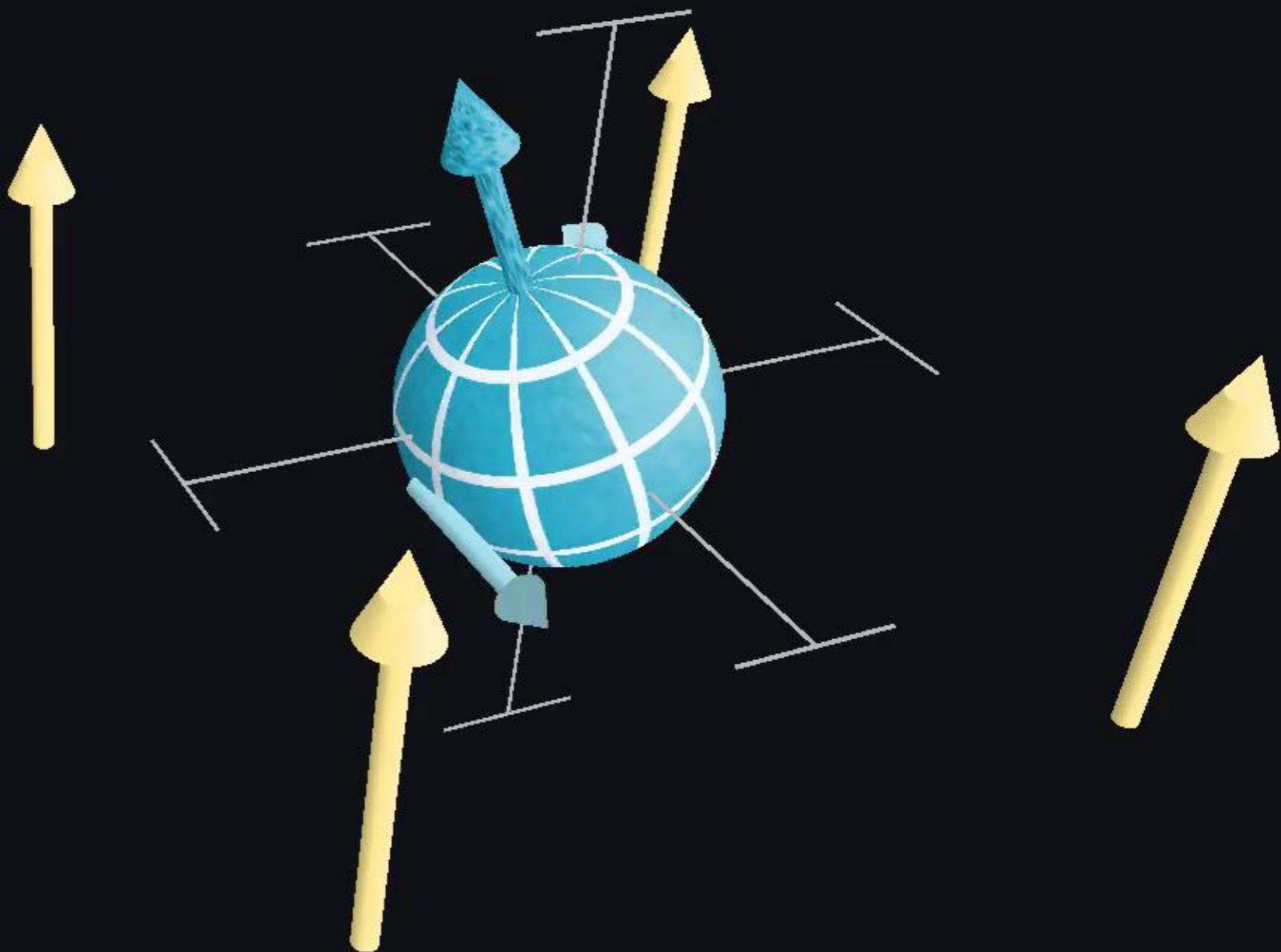
# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

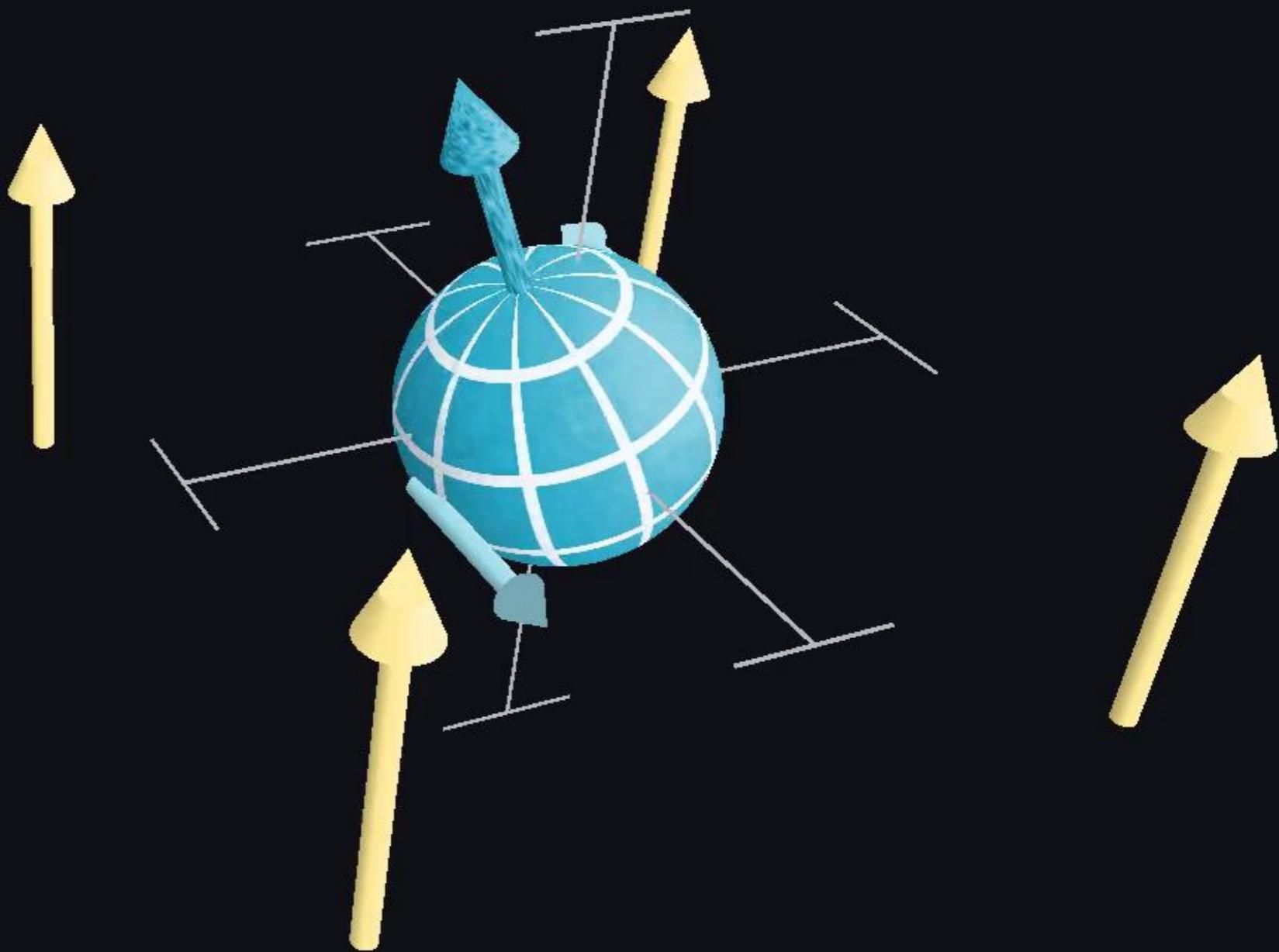
# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Präzession

Drehimpuls:

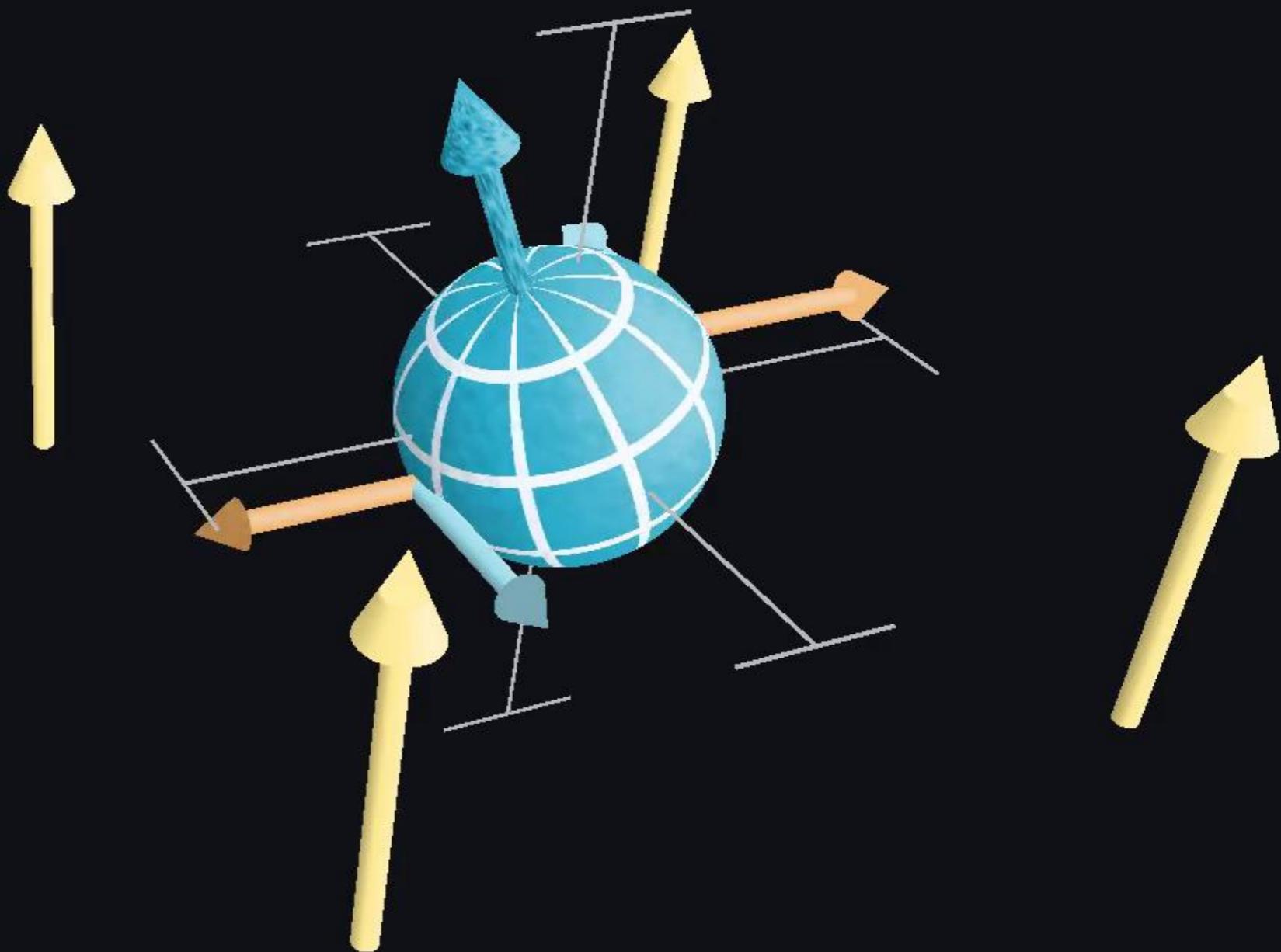
$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{B}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Präzession

Drehimpuls:

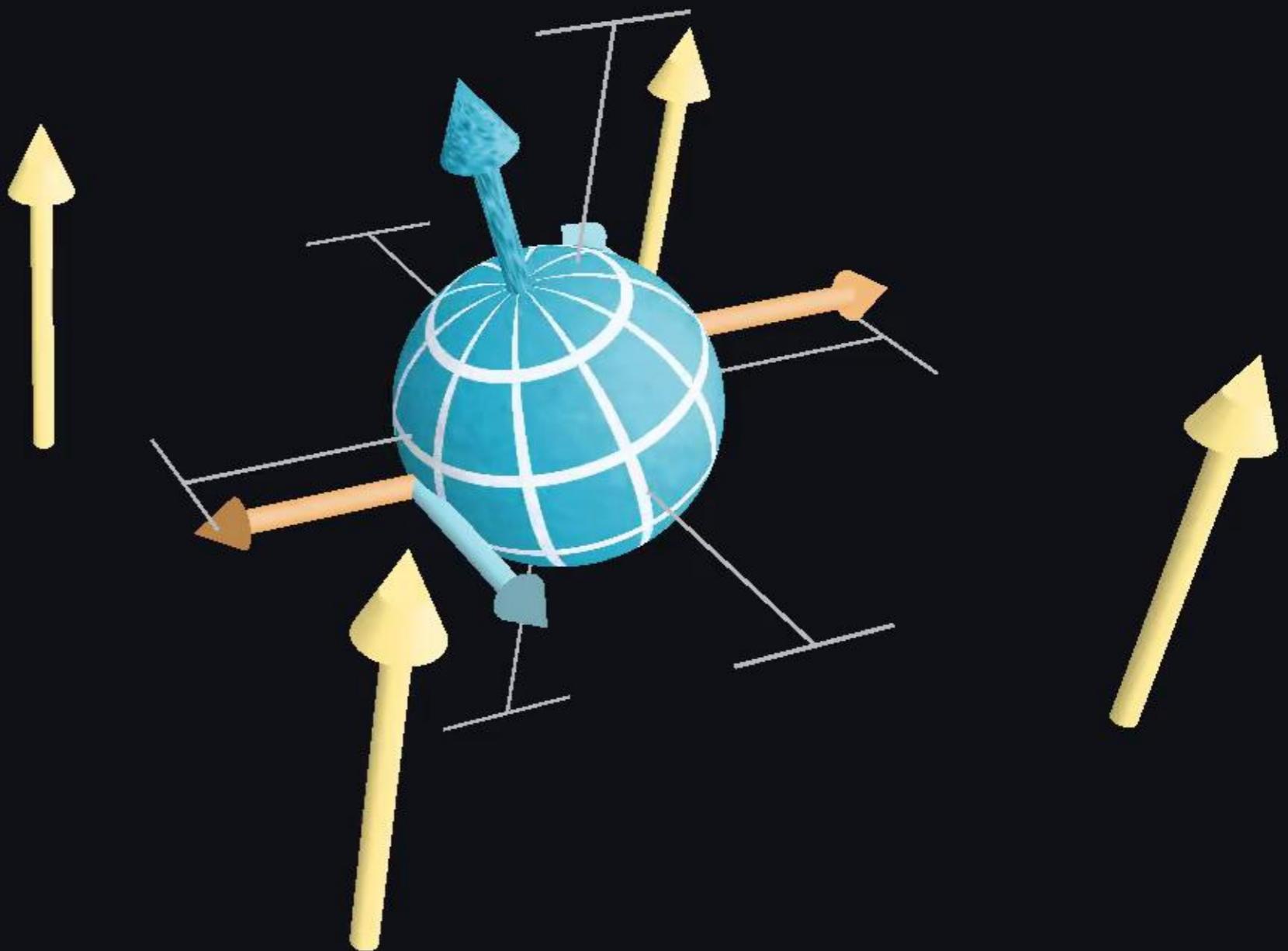
$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{B}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

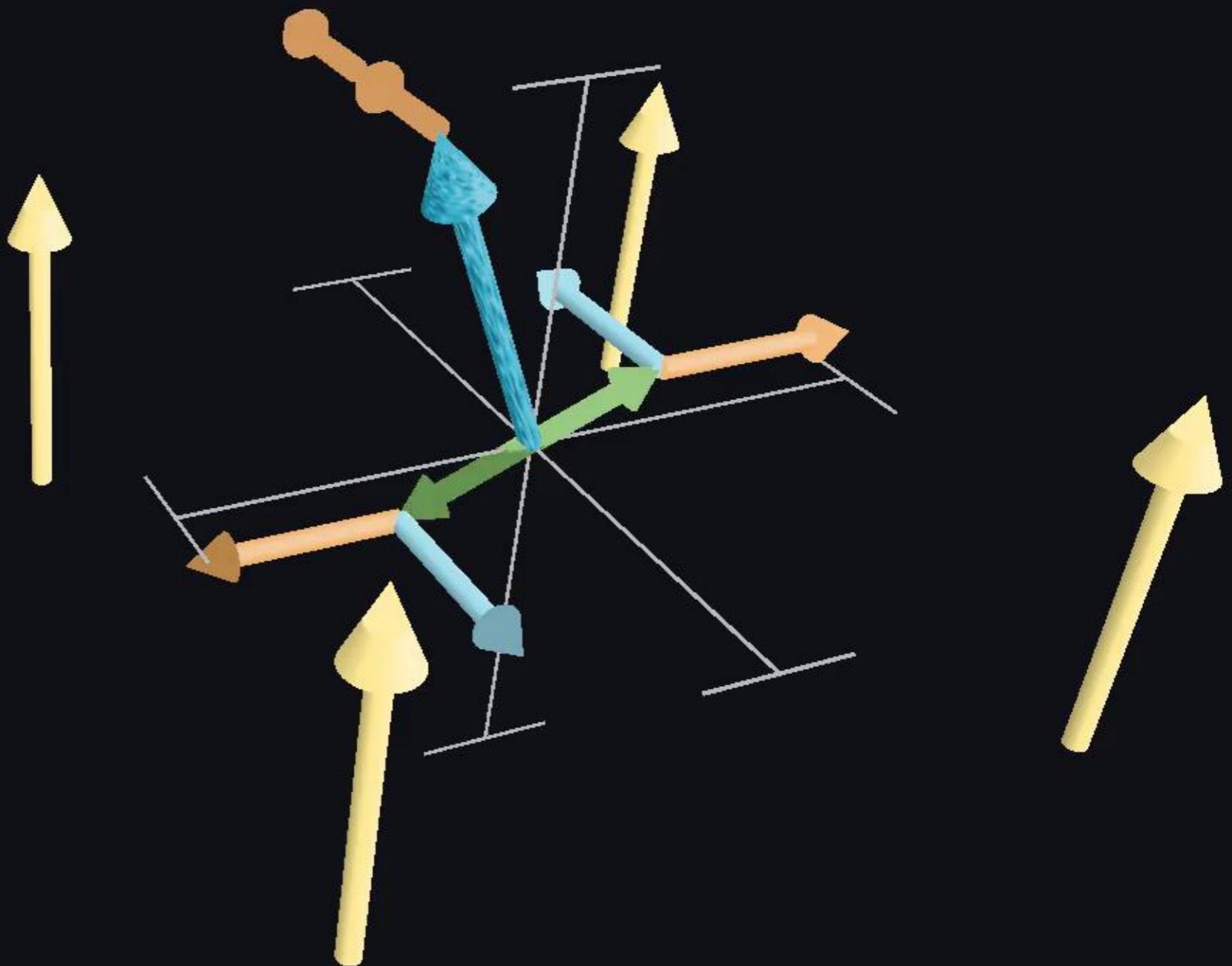
$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{B}$$

Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

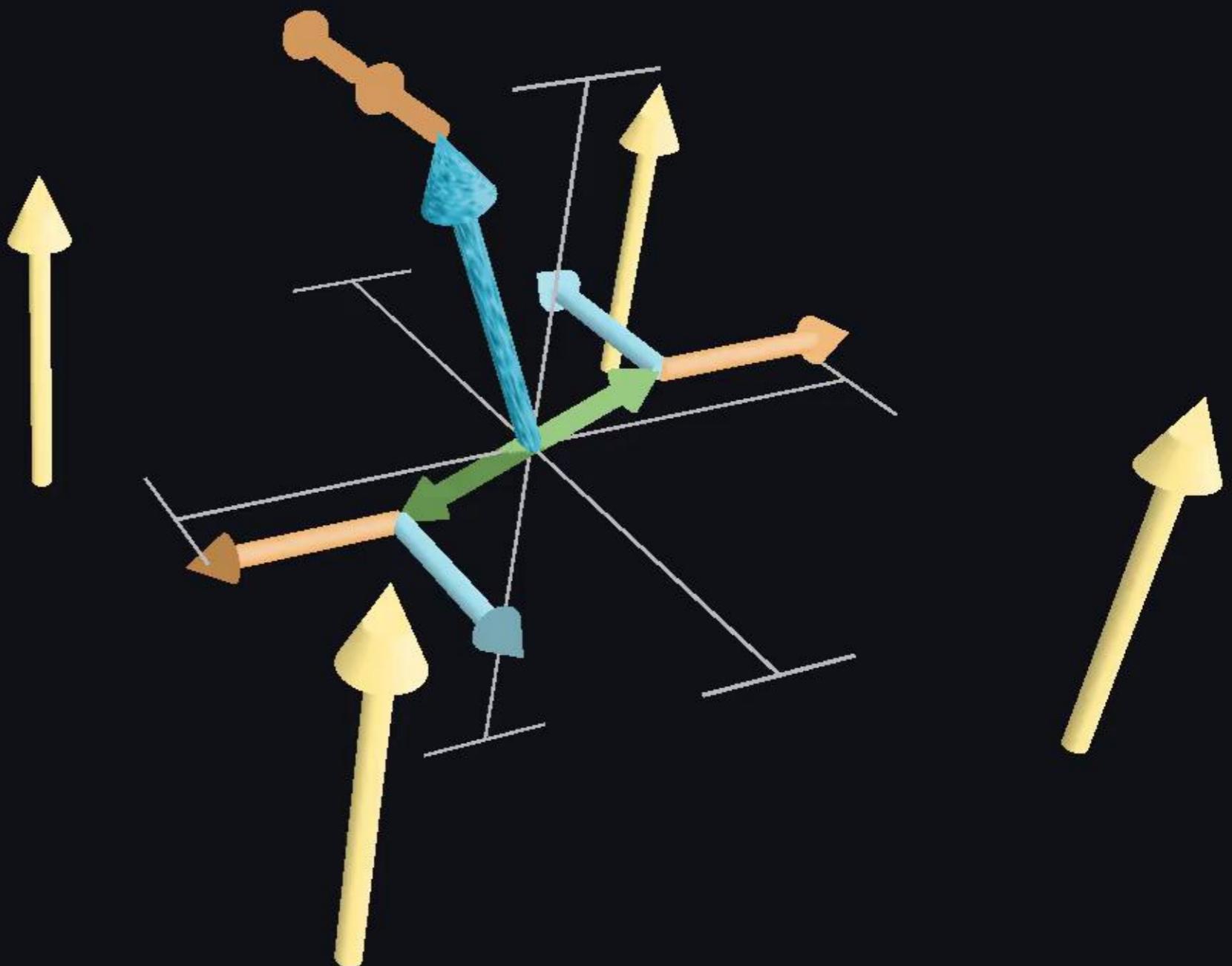
$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{B}$$

Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

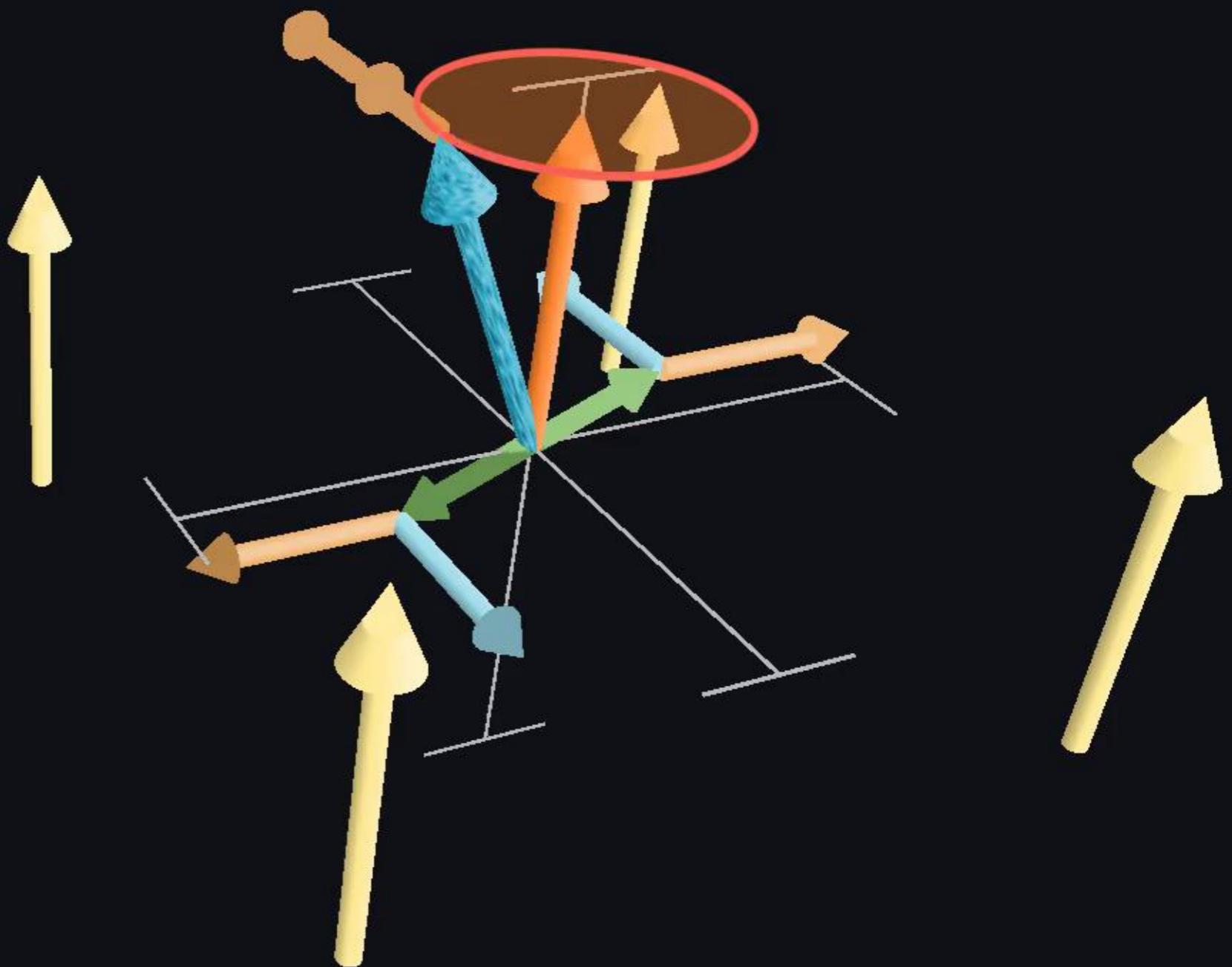
$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{B}$$

Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+,-,-,-)$$

# Präzession

Drehimpuls:

$$\vec{L}$$

Gravitomagnetisches Feld:

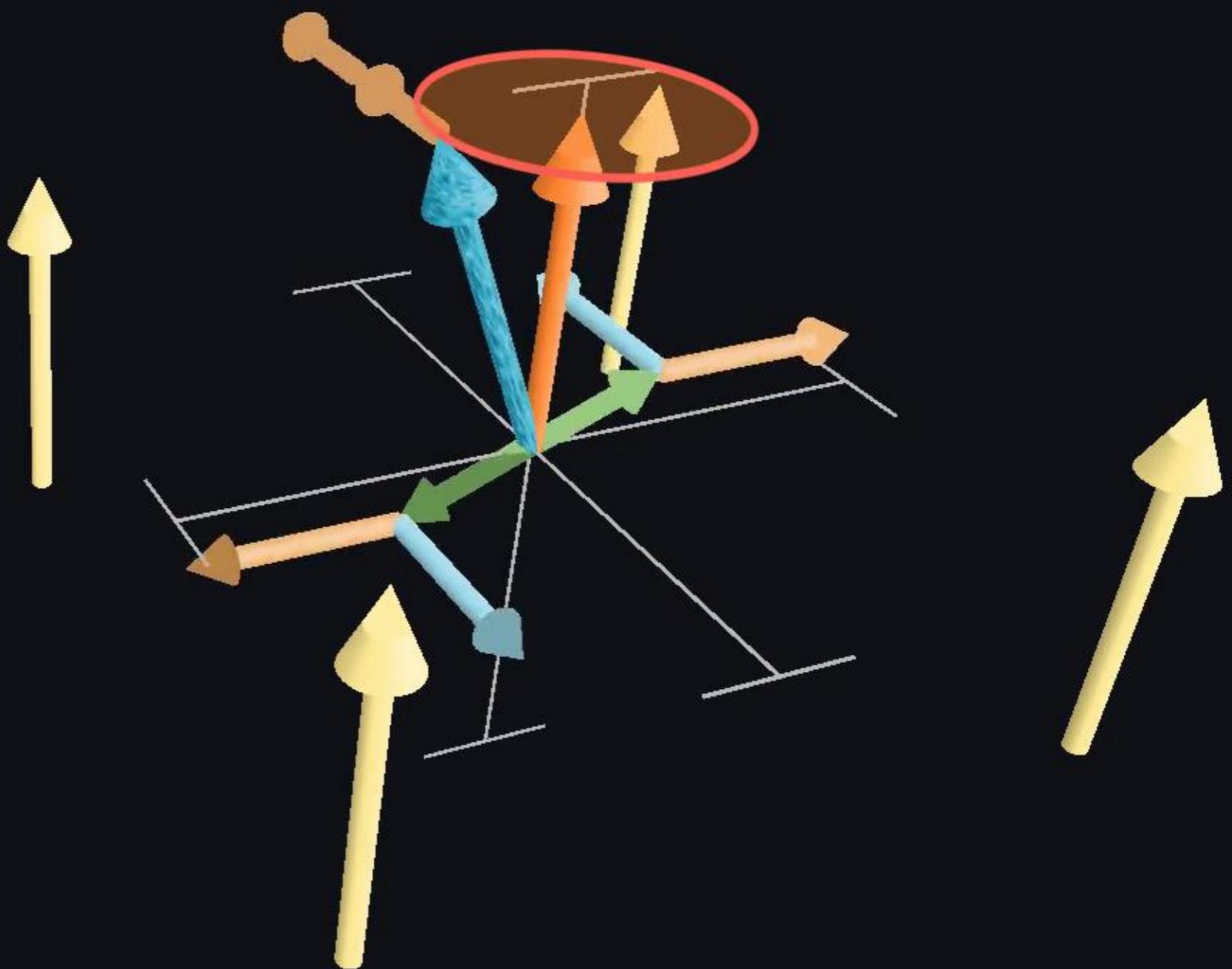
$$\vec{B} = \frac{2\vec{S}}{r^3}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{B}$$

Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Präzession

# Präzession

Allgemeiner für einen ausgedehnten Körper mit der Massendichte  $\rho$ :



# Präzession

Allgemeiner für einen ausgedehnten Körper mit der Massendichte  $\rho$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int d^3r \ \vec{r} \times \vec{f}_{LT}$$



# Präzession

Allgemeiner für einen ausgedehnten Körper mit der Massendichte  $\rho$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int d^3r \ \vec{r} \times \vec{f}_{LT}$$



Näherungen:  $r_G \approx r_S$  und  $\vec{S} \cdot \vec{r}_G \approx \vec{S} \cdot \vec{r}_S$



# Präzession

Allgemeiner für einen ausgedehnten Körper mit der Massendichte  $\rho$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int d^3r \ \vec{r} \times \vec{f}_{LT}$$

Näherungen:  $r_G \approx r_S$  und  $\vec{S} \cdot \vec{r}_G \approx \vec{S} \cdot \vec{r}_S$

$$\vec{f}_{LT} = \rho \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r} + \vec{r}_S)$$



# Präzession

Allgemeiner für einen ausgedehnten Körper mit der Massendichte  $\rho$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int d^3r \ \vec{r} \times \vec{f}_{LT}$$

Näherungen:  $r_G \approx r_S$  und  $\vec{S} \cdot \vec{r}_G \approx \vec{S} \cdot \vec{r}_S$

$$\vec{f}_{LT} = \rho \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r} + \vec{r}_S) = \frac{\rho}{r_S^3} \left[ 2\vec{v} \times \vec{S} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r}_S)}{r_S^2} \vec{v} \times (\vec{r} + \vec{r}_S) \right]$$



# Präzession

Allgemeiner für einen ausgedehnten Körper mit der Massendichte  $\rho$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int d^3r \ \vec{r} \times \vec{f}_{LT}$$

Näherungen:  $r_G \approx r_S$  und  $\vec{S} \cdot \vec{r}_G \approx \vec{S} \cdot \vec{r}_S$

$$\vec{f}_{LT} = \rho \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r} + \vec{r}_S) = \frac{\rho}{r_S^3} \left[ 2\vec{v} \times \vec{S} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r}_S)}{r_S^2} \vec{v} \times (\vec{r} + \vec{r}_S) \right]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L} \times \vec{\Omega}$$



# Präzession

Allgemeiner für einen ausgedehnten Körper mit der Massendichte  $\rho$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int d^3r \ \vec{r} \times \vec{f}_{LT}$$

Näherungen:  $r_G \approx r_S$  und  $\vec{S} \cdot \vec{r}_G \approx \vec{S} \cdot \vec{r}_S$

$$\vec{f}_{LT} = \rho \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r} + \vec{r}_S) = \frac{\rho}{r_S^3} \left[ 2\vec{v} \times \vec{S} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r}_S)}{r_S^2} \vec{v} \times (\vec{r} + \vec{r}_S) \right]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L} \times \vec{\Omega}$$

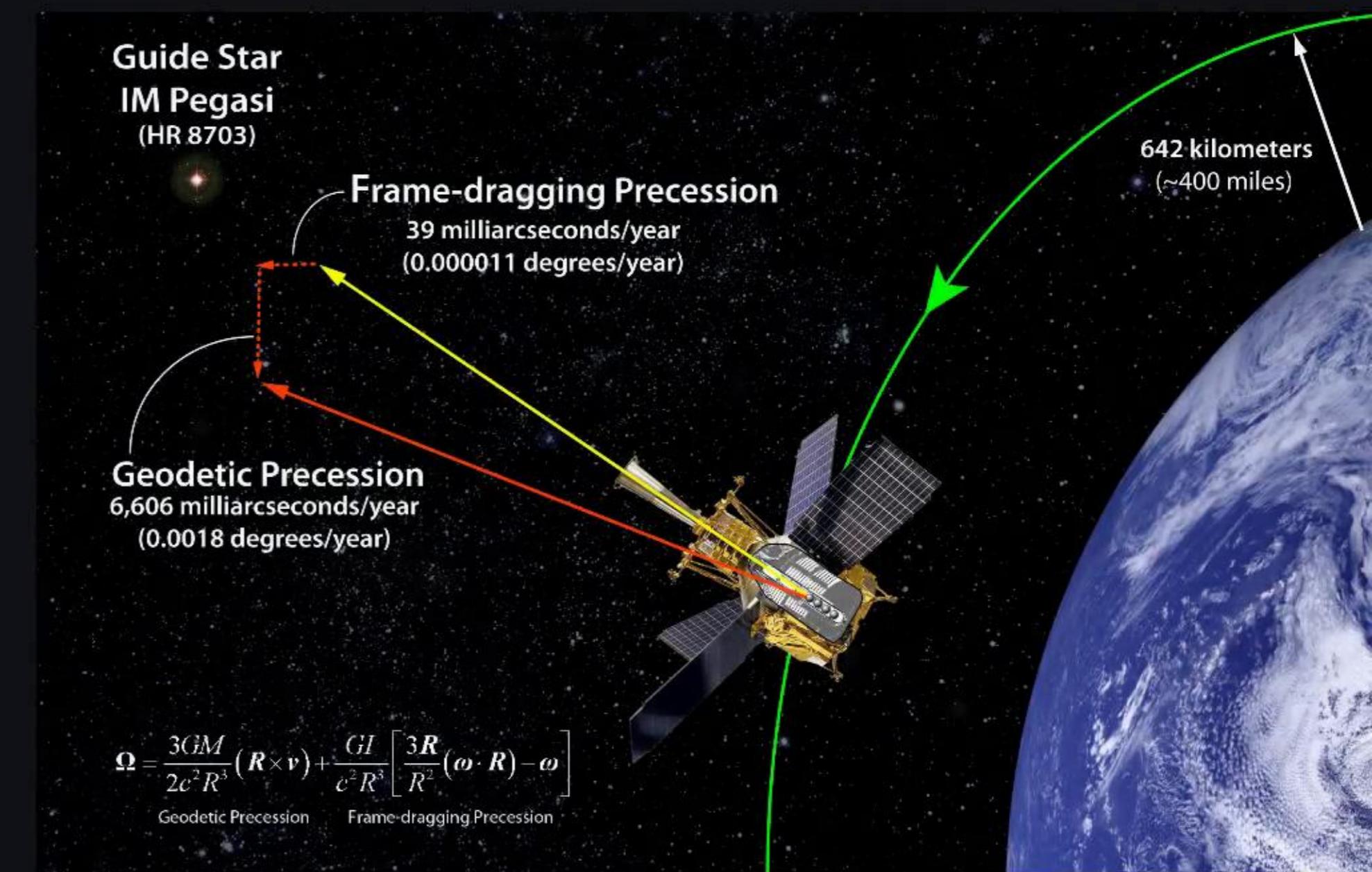
$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{B}(r_S)}{2}$$



$$c = G = R = 1$$

$$(+,-,-,-)$$

# Gravity Probe B



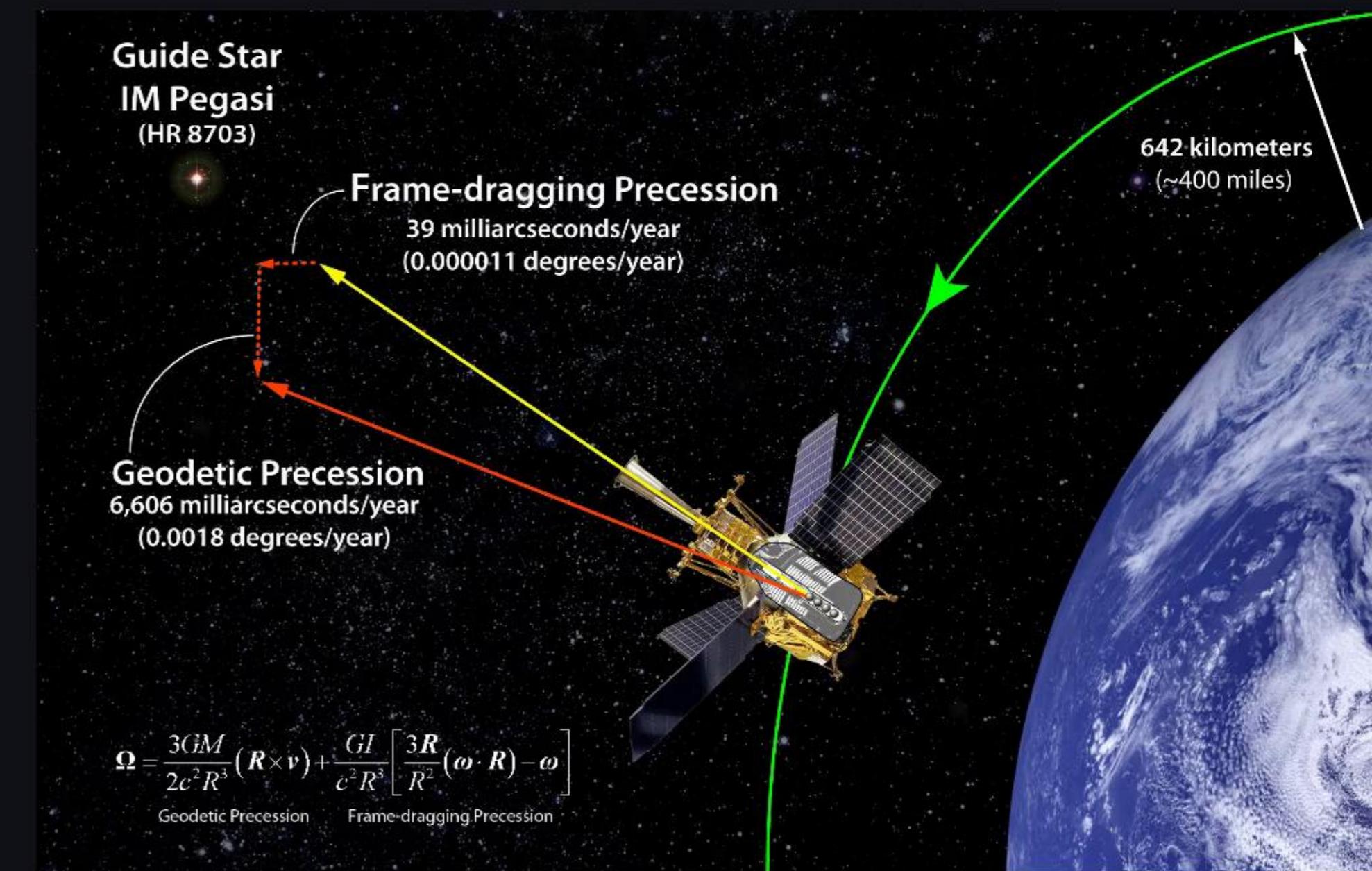
Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

$$c = G = R = 1$$

$$(+,-,-,-)$$

# Gravity Probe B

- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)



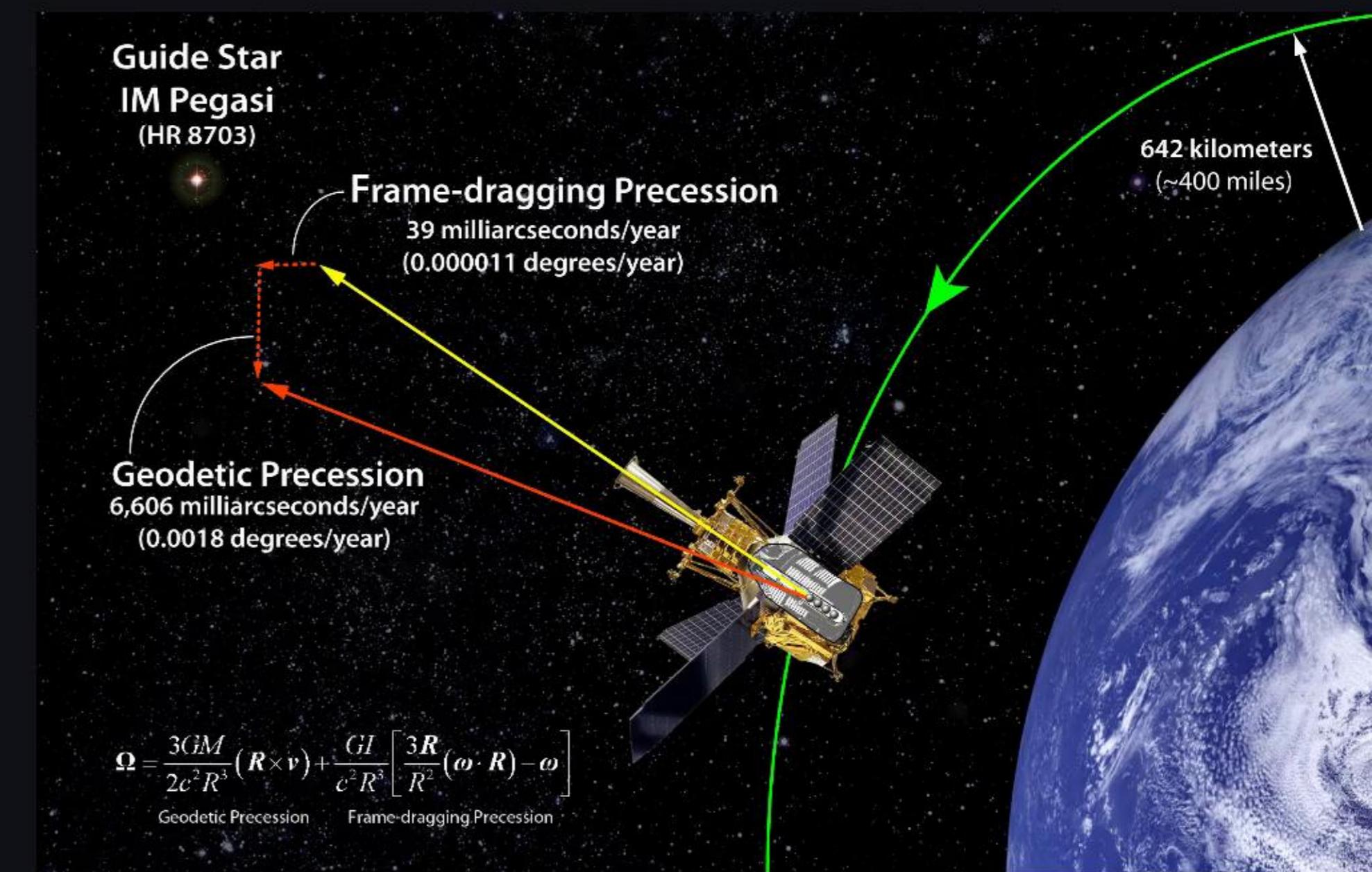
Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

$$c = G = R = 1$$

$$(+,-,-,-)$$

# Gravity Probe B

- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)
- 4 Gyroskope gerichtet auf IM Pegasi



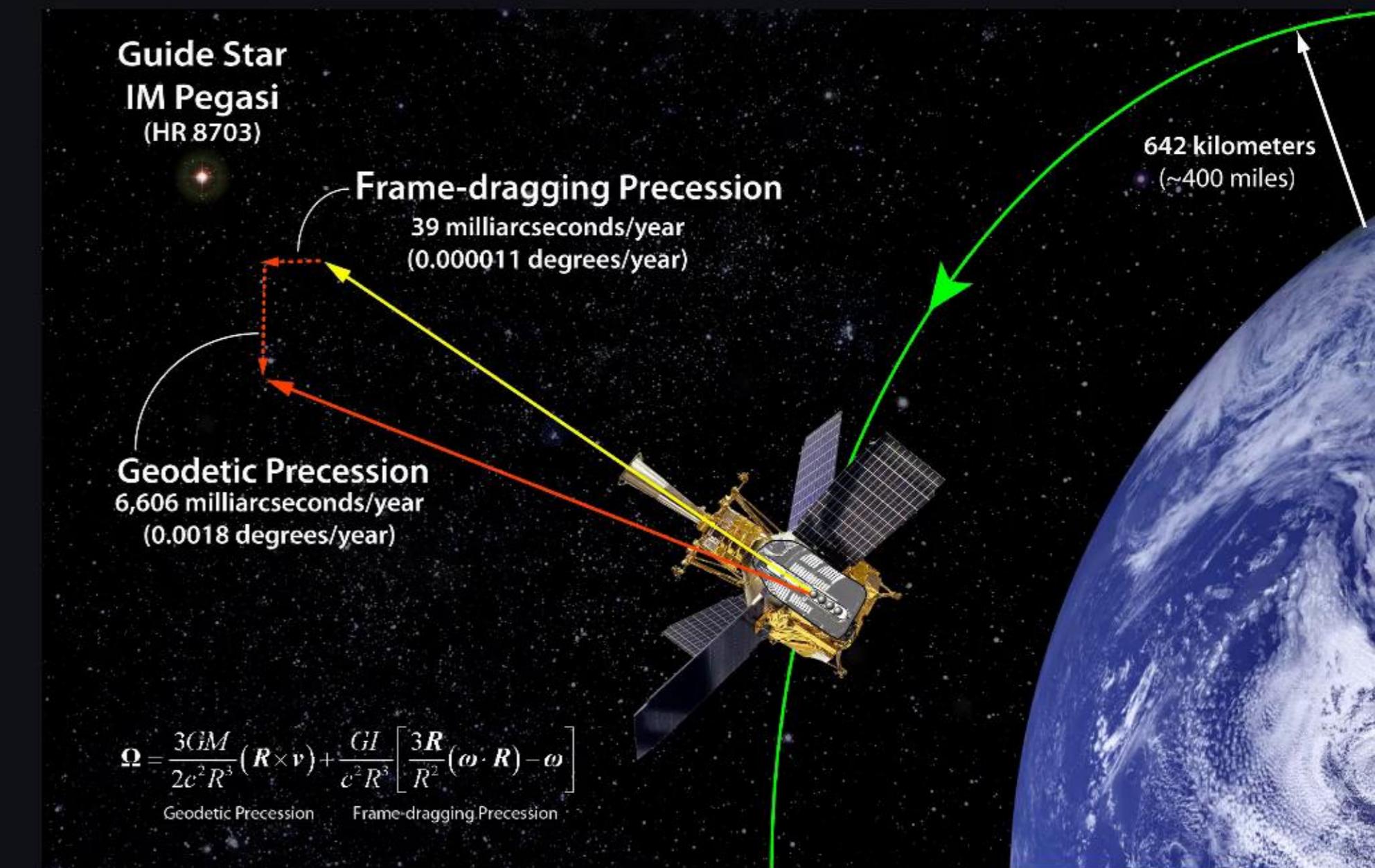
Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

$$c = G = R = 1$$

$$(+,-,-,-)$$

# Gravity Probe B

- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)
- 4 Gyroskope gerichtet auf IM Pegasi
- Zwei relativistische Effekte:



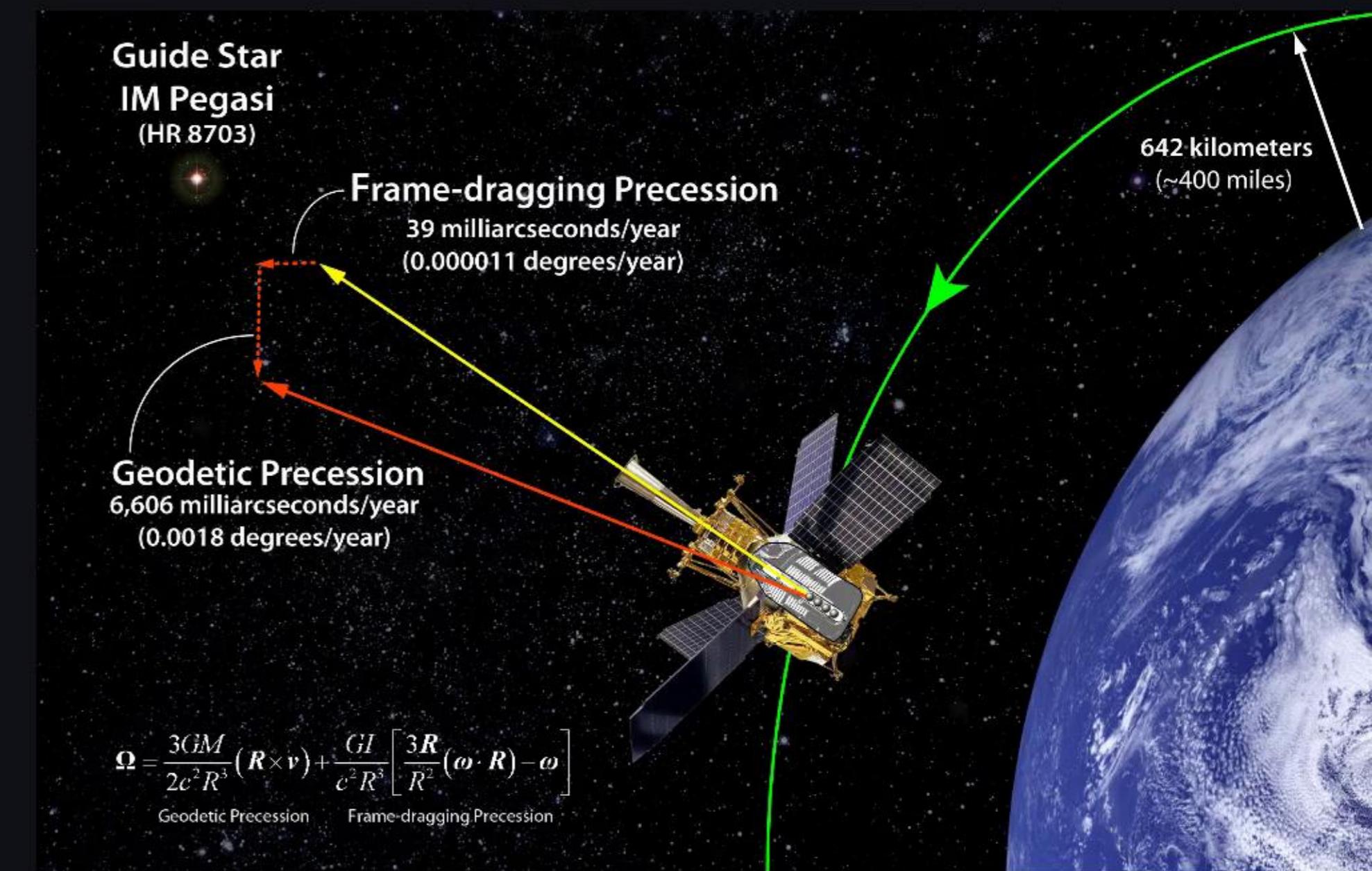
Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

$$c = G = R = 1$$

$$(+,-,-,-)$$

# Gravity Probe B

- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)
- 4 Gyroskope gerichtet auf IM Pegasi
- Zwei relativistische Effekte:
  - de-Sitter-Effekt



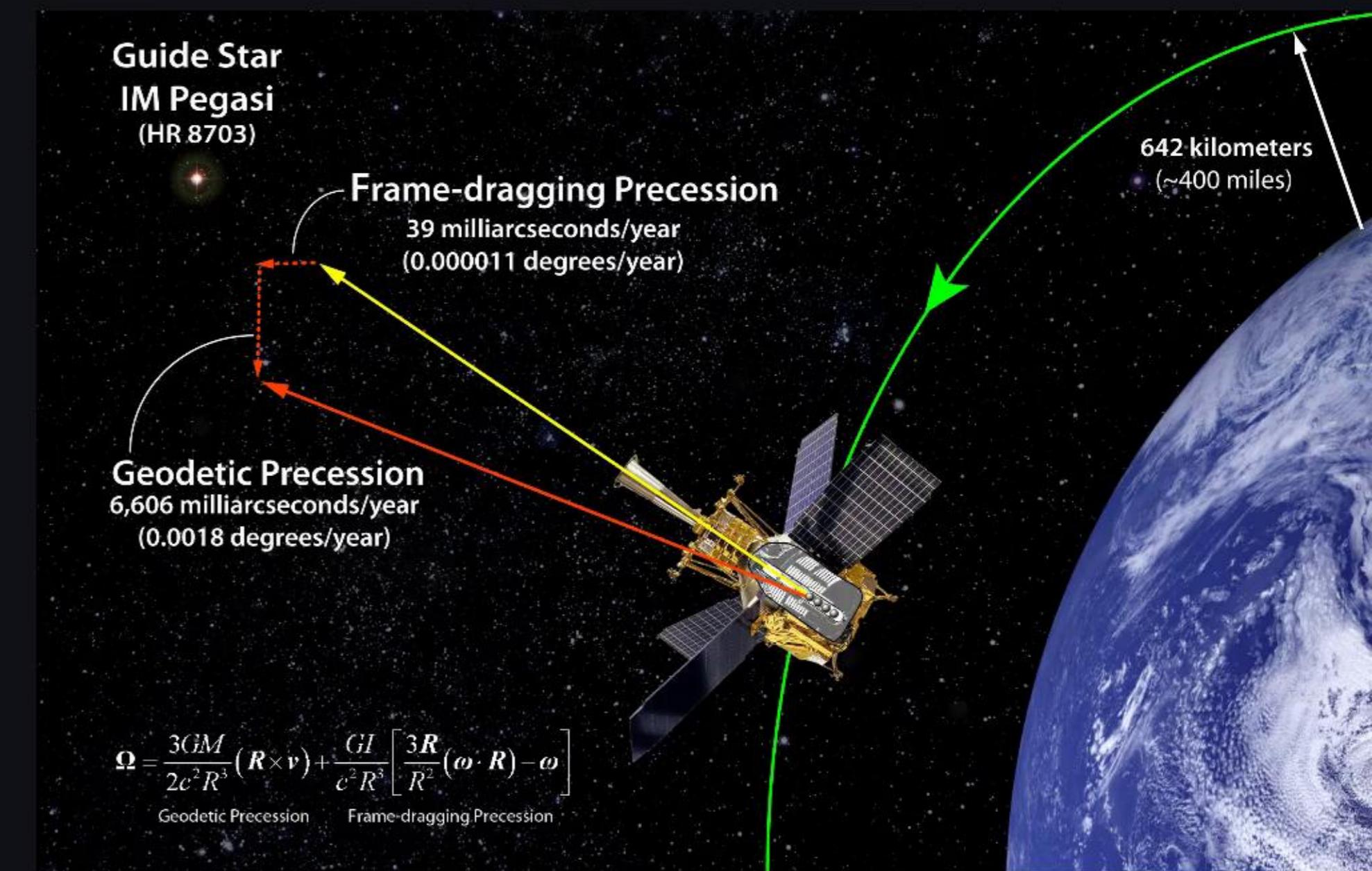
Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

$$c = G = R = 1$$

$$(+,-,-,-)$$

# Gravity Probe B

- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)
- 4 Gyroskope gerichtet auf IM Pegasi
- Zwei relativistische Effekte:
  - de-Sitter-Effekt
  - Lense-Thirring-Effekt



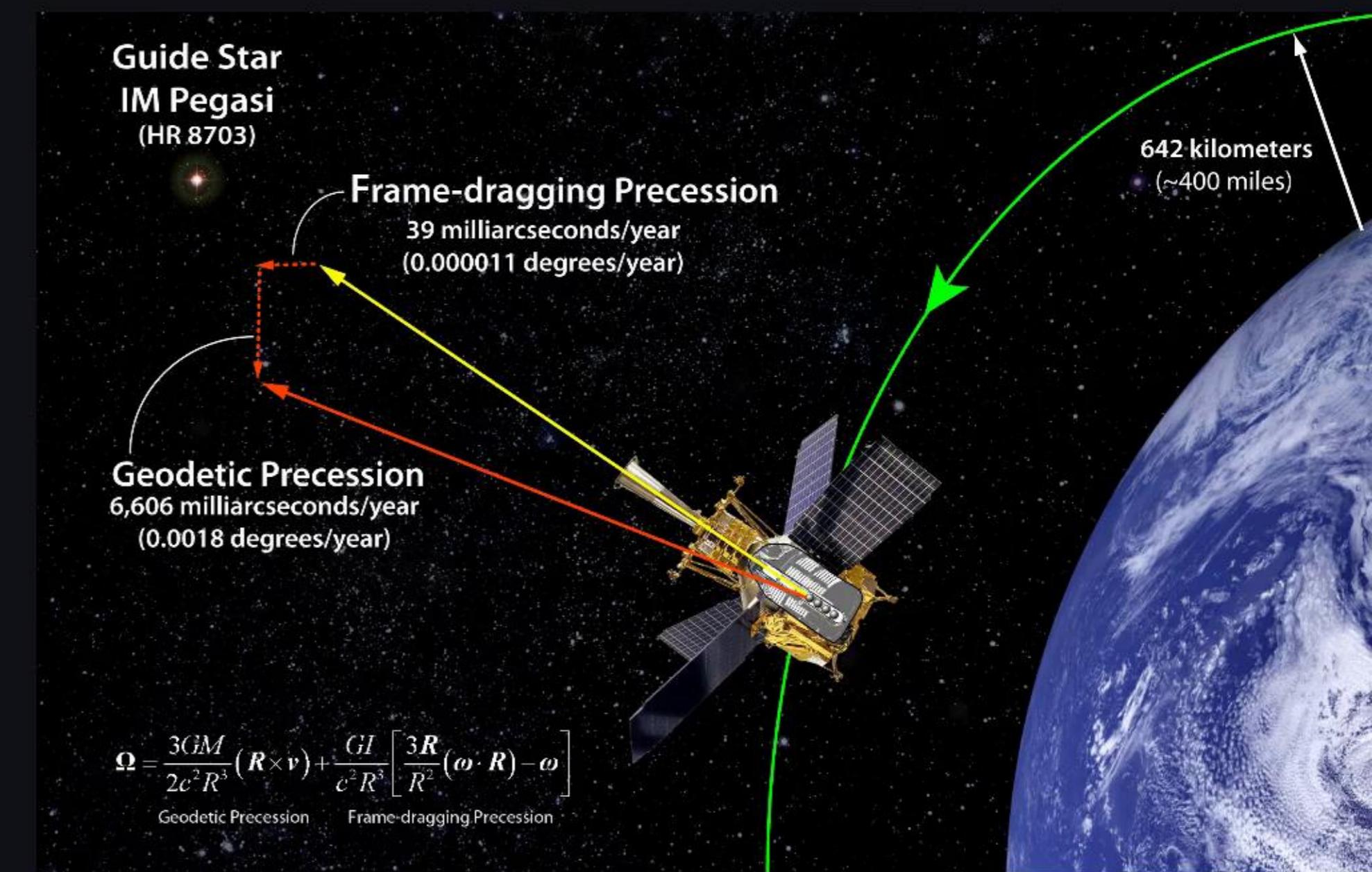
Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

$$c = G = R = 1$$

$$(+,-,-,-)$$

# Gravity Probe B

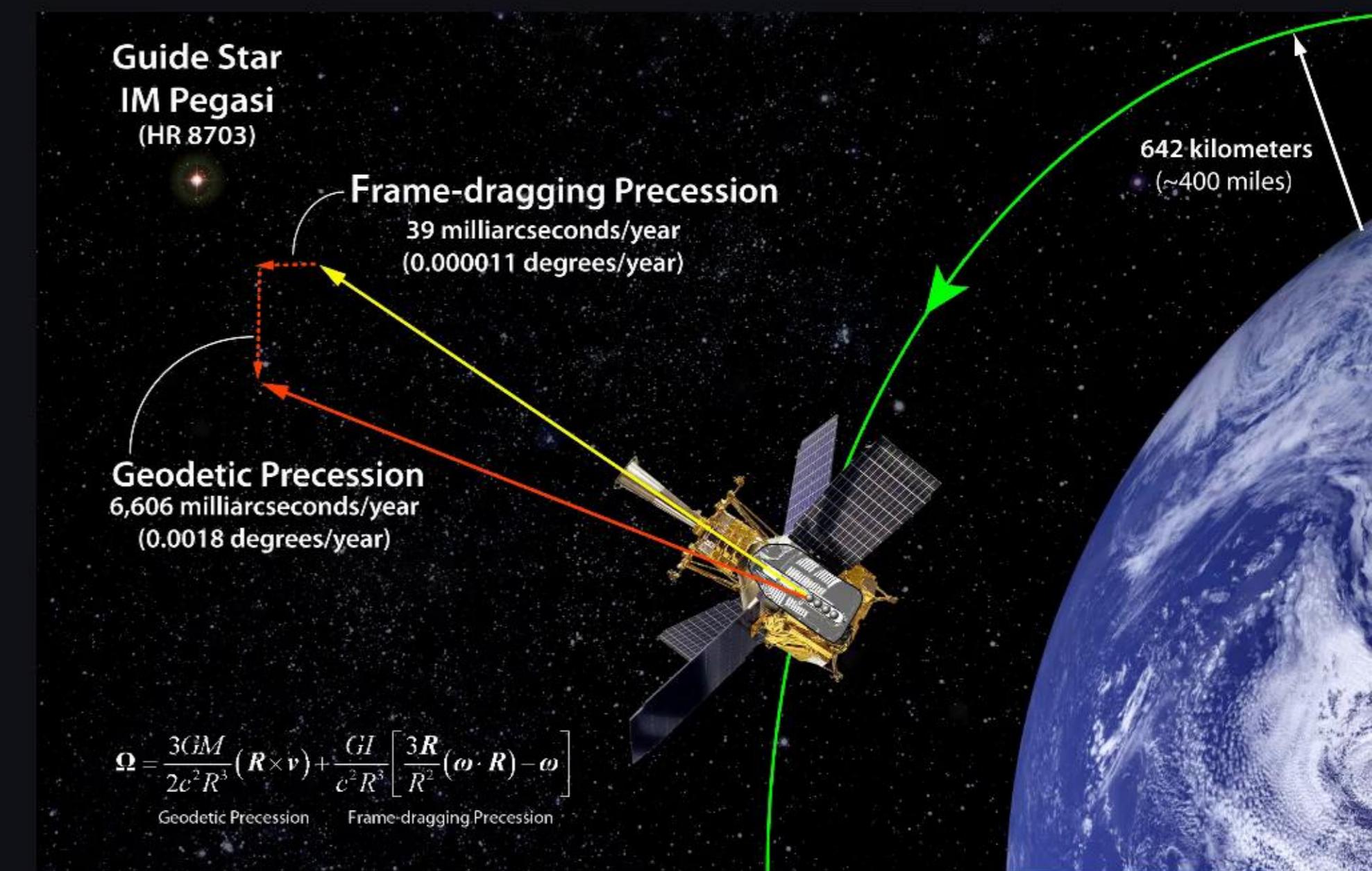
- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)
- 4 Gyroskope gerichtet auf IM Pegasi
- Zwei relativistische Effekte:
  - de-Sitter-Effekt
  - Lense-Thirring-Effekt
- Ergebnisse:



Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

# Gravity Probe B

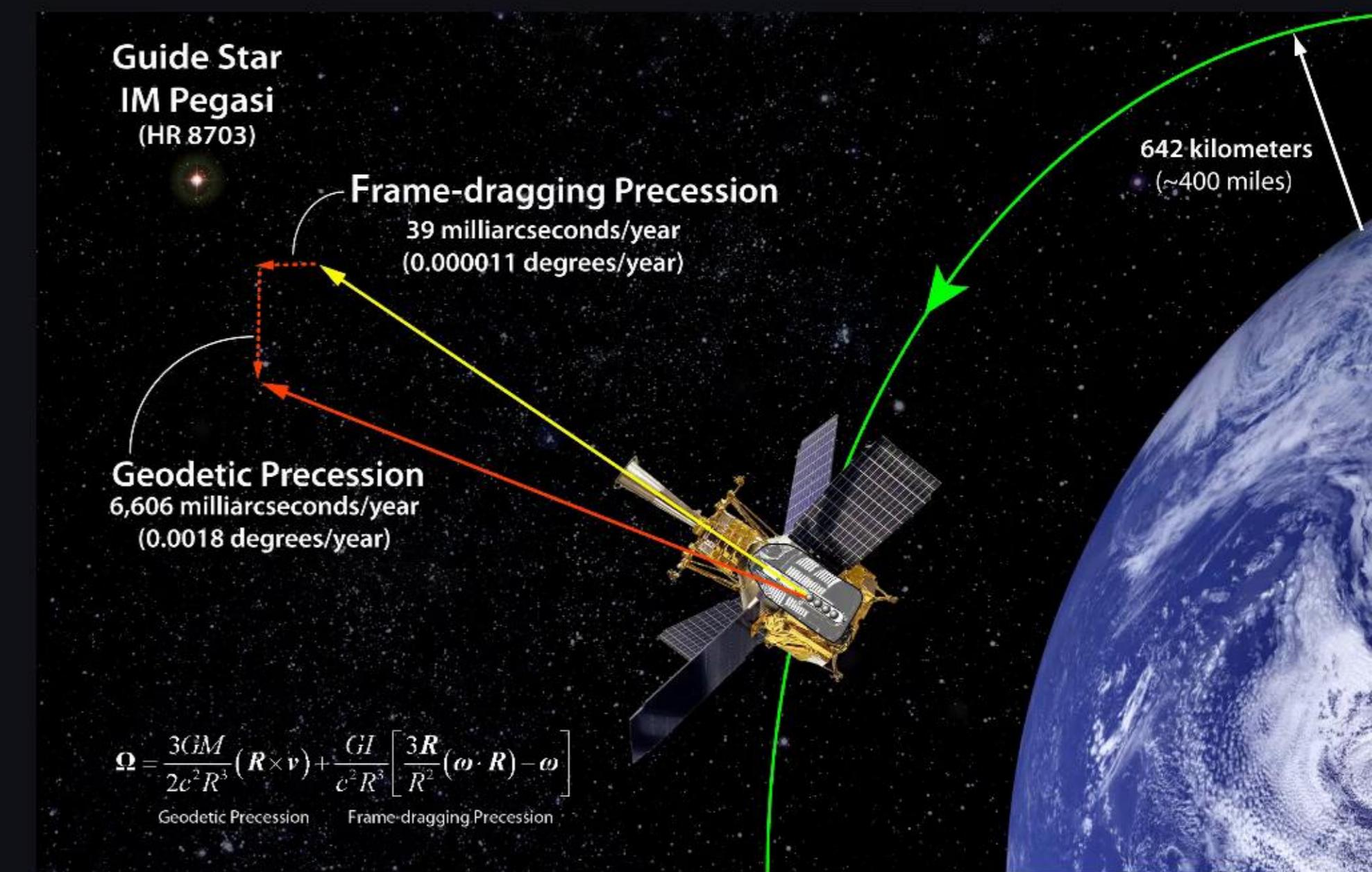
- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)
- 4 Gyroskope gerichtet auf IM Pegasi
- Zwei relativistische Effekte:
  - de-Sitter-Effekt
  - Lense-Thirring-Effekt
- Ergebnisse:
  - $(6601.8 \pm 18.3)$  macs/yr



Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

# Gravity Probe B

- Missionsdauer  $\sim 6$  Jahre (2004-2010)
- 4 Gyroskope gerichtet auf IM Pegasi
- Zwei relativistische Effekte:
  - de-Sitter-Effekt
  - Lense-Thirring-Effekt
- Ergebnisse:
  - $(6601.8 \pm 18.3)$  macs/yr
  - $(37.2 \pm 7.2)$  macs/yr



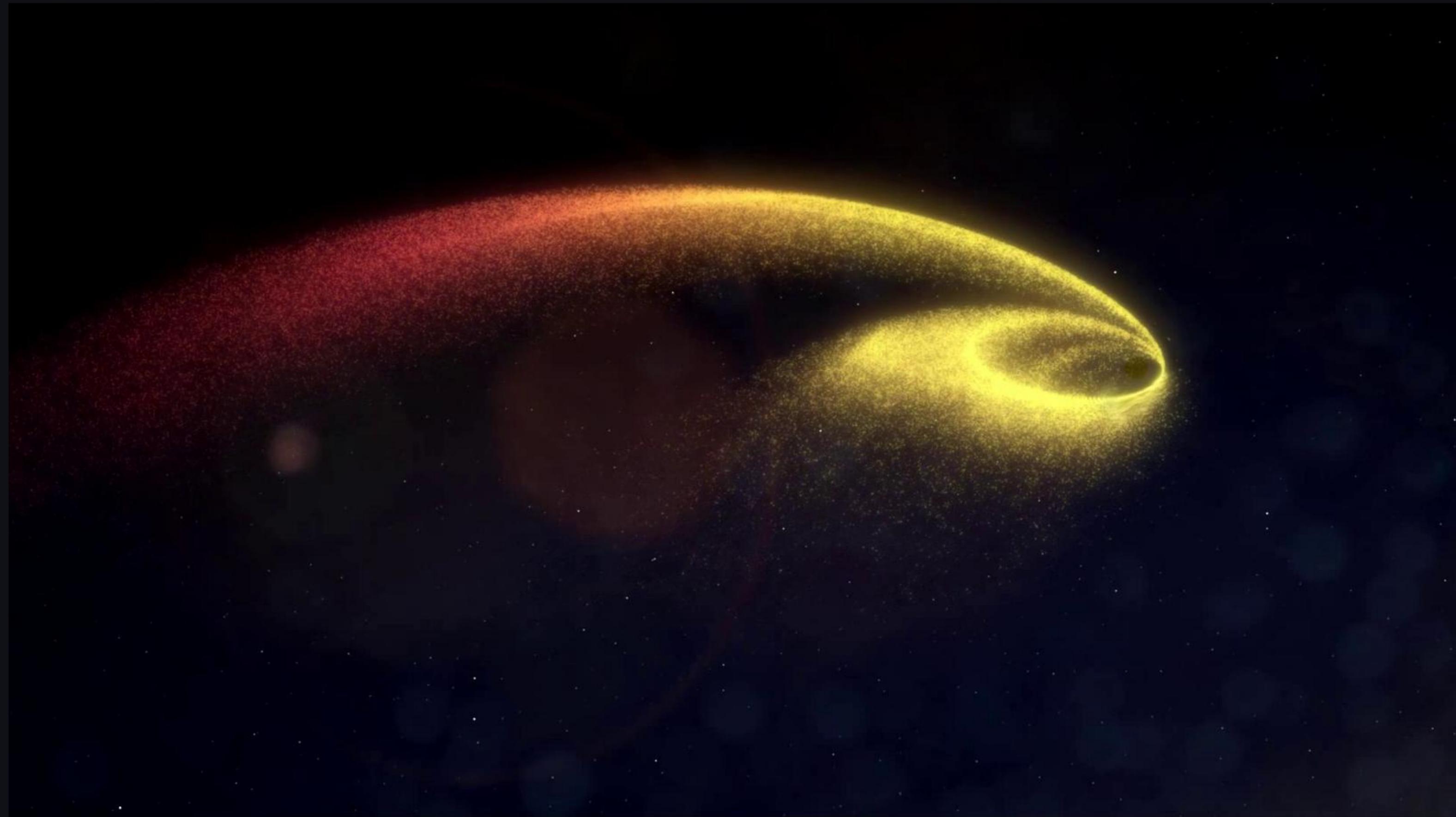
Gravity Probe B Team, Stanford, NASA

$c = G = R = 1$

(+, -, -, -)

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)





$c = G = R = 1$

(+, -, -, -)

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)

- Entsteht durch das Zerreißen eines Sterns durch das SL

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)

- Entsteht durch das Zerreißen eines Sterns durch das SL
- Rotationsachse der AK ist gekippt gegenüber der des SL

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)

- Entsteht durch das Zerreißen eines Sterns durch das SL
- Rotationsachse der AK ist gekippt gegenüber der des SL
- Hochfrequentes Röntgen-Monitoring liefert Zeitreihe

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)

- Entsteht durch das Zerreißen eines Sterns durch das SL
- Rotationsachse der AK ist gekippt gegenüber der des SL
- Hochfrequentes Röntgen-Monitoring liefert Zeitreihe  
 $\sim 15$  Tage Periodizität in den ersten  $\sim 130$  Tagen

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)

- Entsteht durch das Zerreißen eines Sterns durch das SL
- Rotationsachse der AK ist gekippt gegenüber der des SL
- Hochfrequentes Röntgen-Monitoring liefert Zeitreihe
  - ~ 15 Tage Periodizität in den ersten ~ 130 Tagen
- statistische Signifikanz über Monte-Carlo-Simulationen  $> 3.9\sigma$

# Akkretionsscheibe (AS) eines supermassiven Schwarzen Lochs (SL)

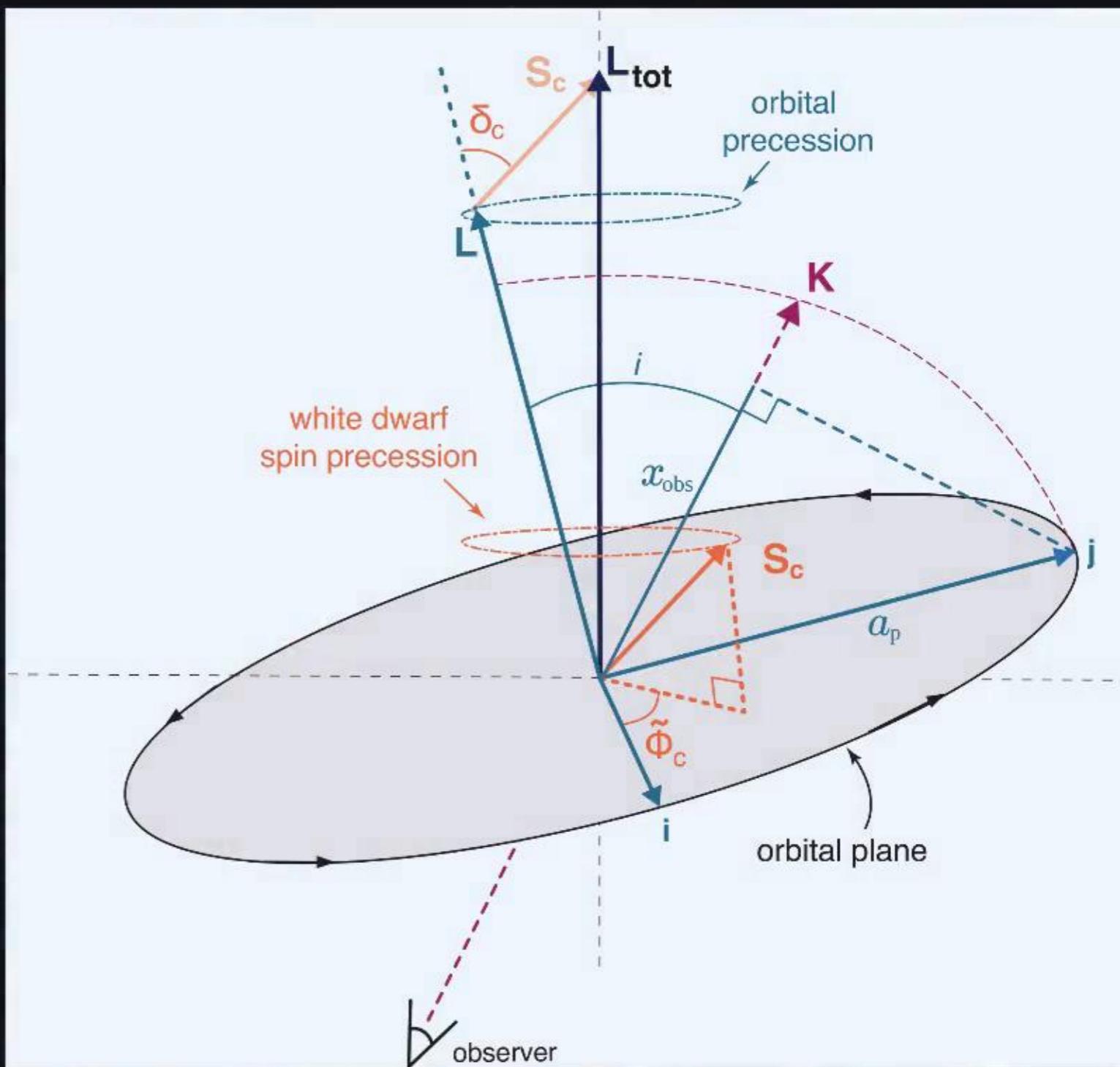
- Entsteht durch das Zerreißen eines Sterns durch das SL
- Rotationsachse der AK ist gekippt gegenüber der des SL
- Hochfrequentes Röntgen-Monitoring liefert Zeitreihe
  - ~ 15 Tage Periodizität in den ersten ~ 130 Tagen
- statistische Signifikanz über Monte-Carlo-Simulationen  $> 3.9\sigma$ 
  - ⇒ Lense-Thirring Präzession ist Ursache

$$c = G = R = 1$$

(+, -, -, -)

# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

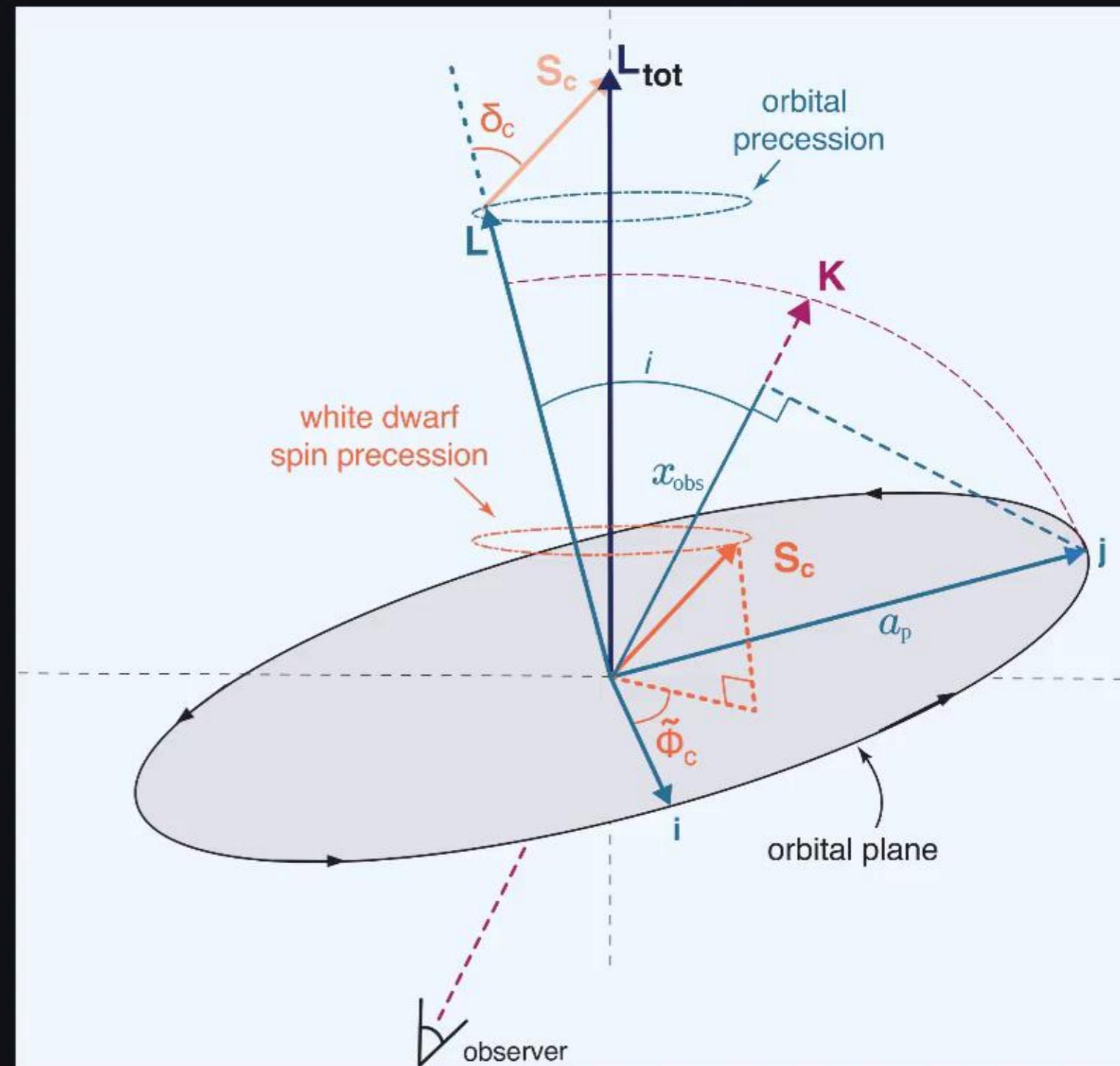
# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg



Abgeändert nach: Krishnan et al., Science 367, 577-580 (2020)

# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

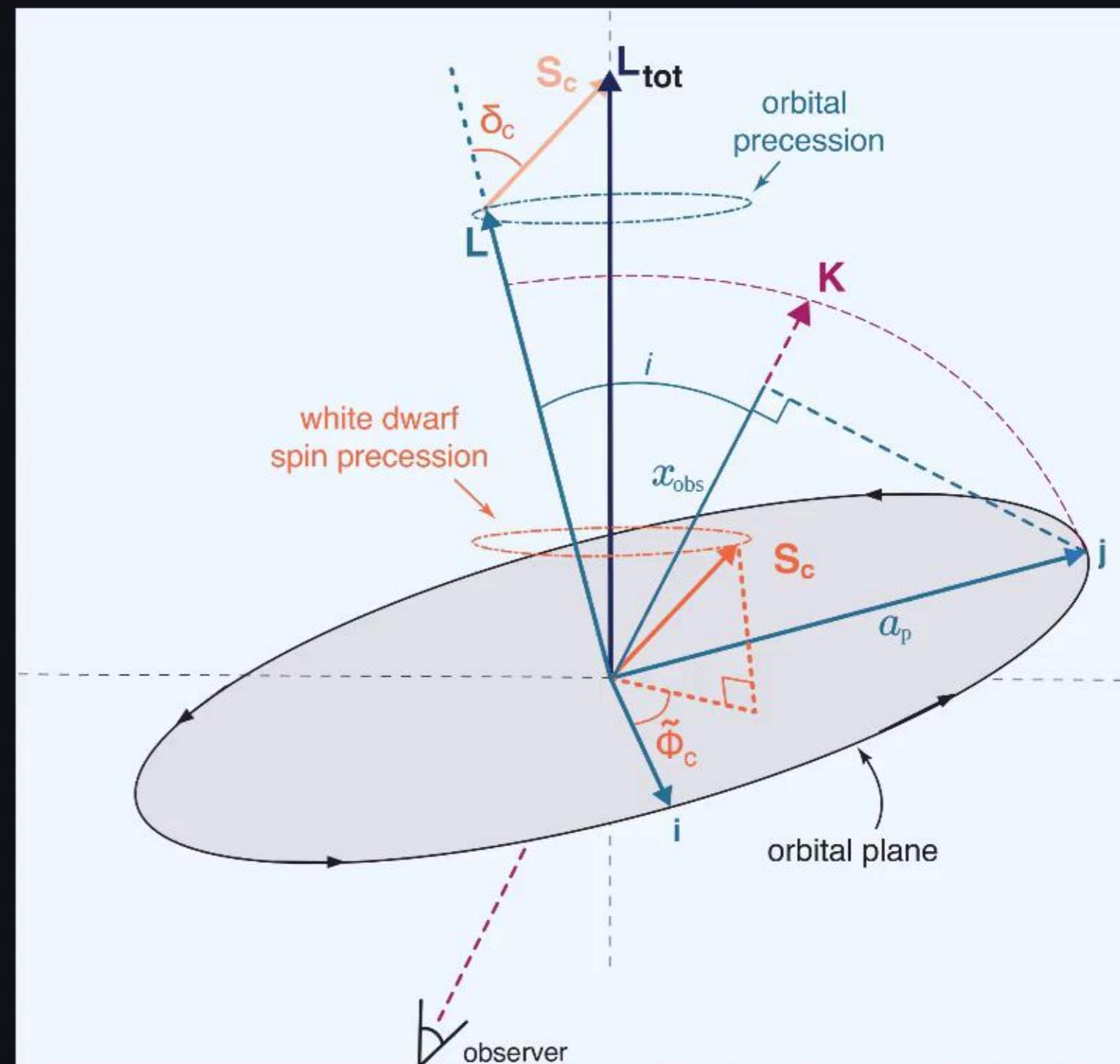
- Umlaufperiode: 4.74 h  
Exzentrizität: 0.17



Abgeändert nach: Krishnan et al., Science 367, 577-580 (2020)

# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

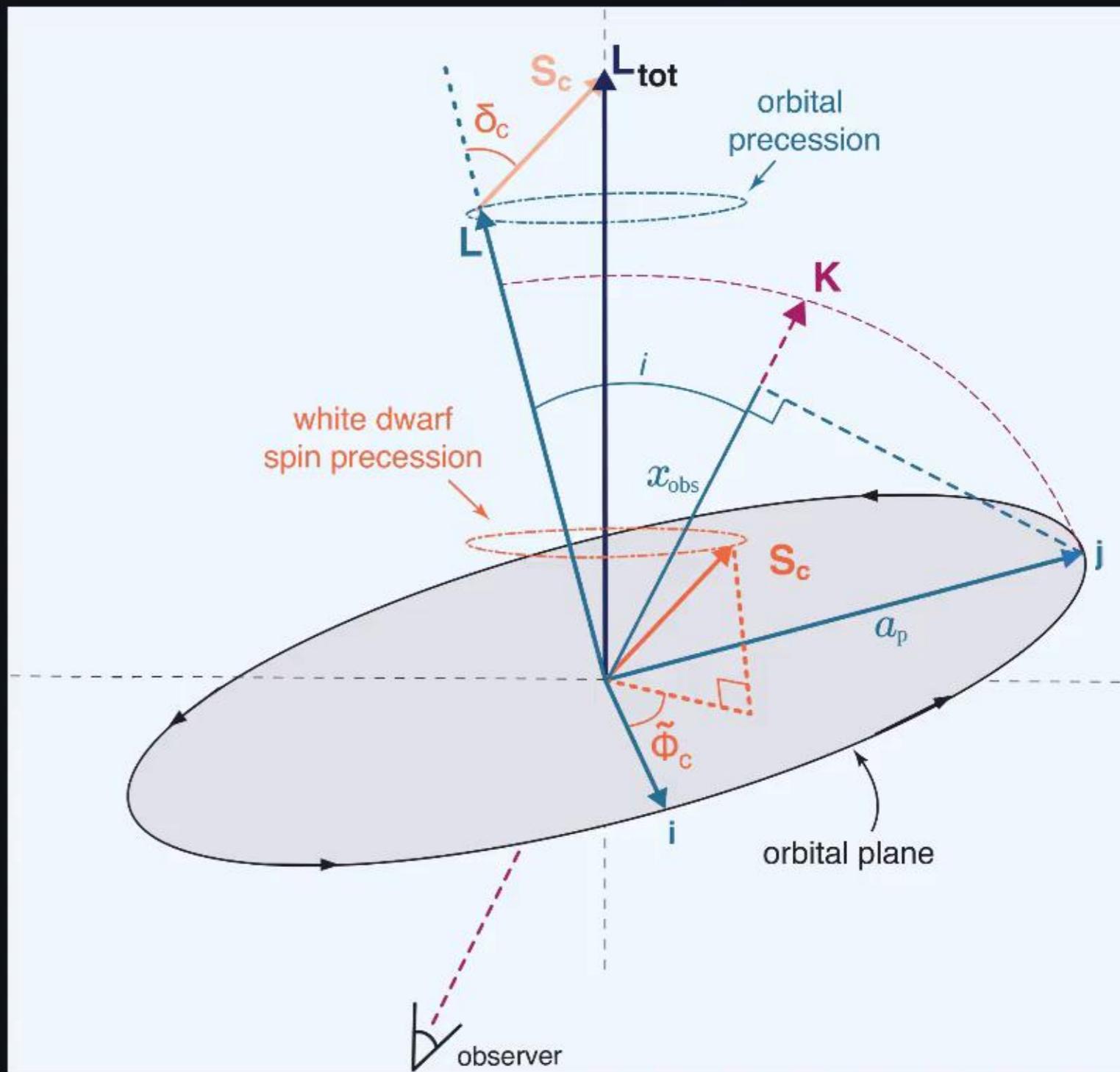
- Umlaufperiode: 4.74 h  
Exzentrizität: 0.17
- Pulsartiming über 18 Jahre



Abgeändert nach: Krishnan et al., Science 367, 577-580 (2020)

# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

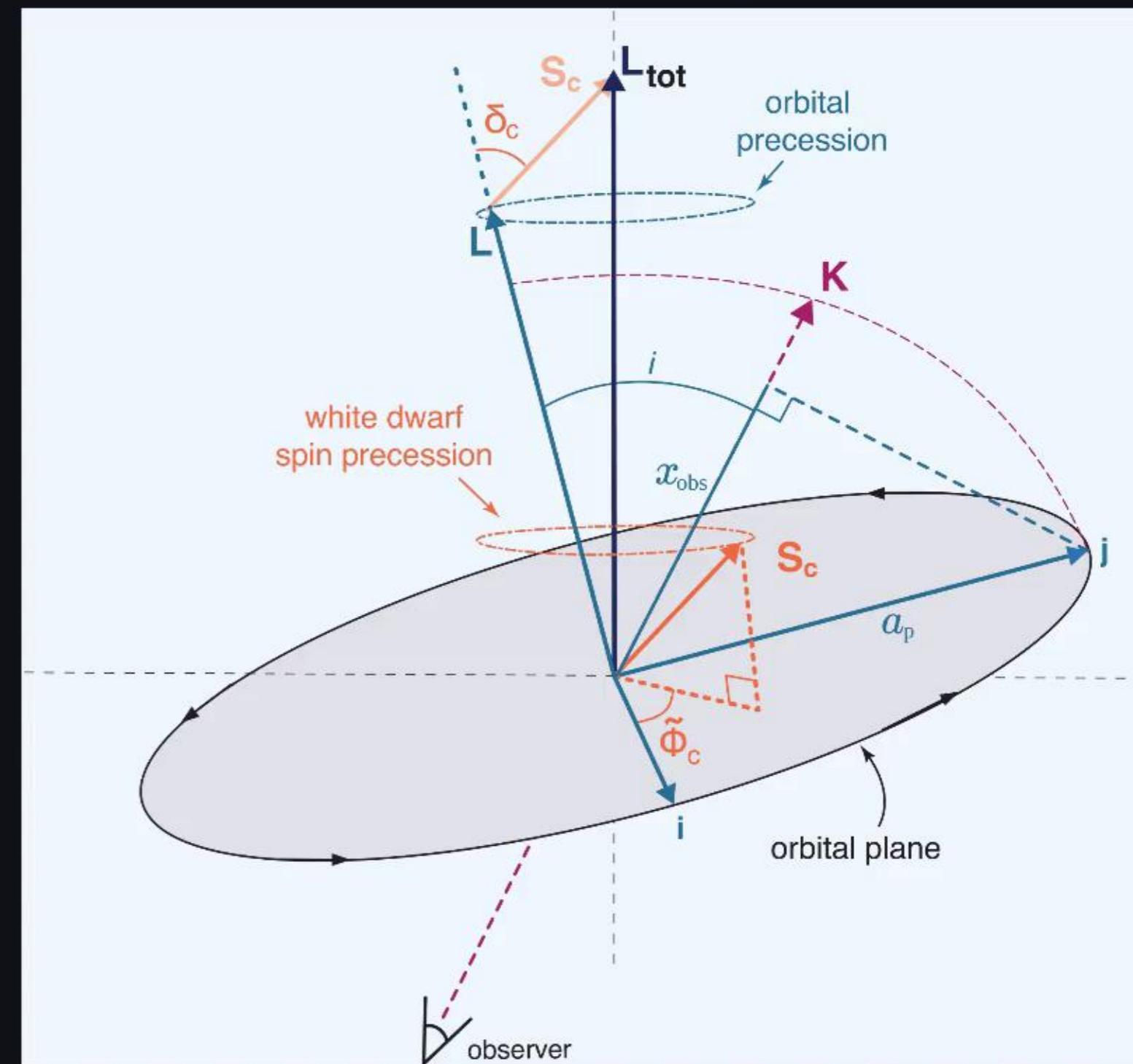
- Umlaufperiode: 4.74 h  
Exzentrizität: 0.17
- Pulsartiming über 18 Jahre
- Änderung der projizierten Halbachse  
 $\dot{x}_{\text{obs}} = (1.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-13} \text{ ss}^{-1}$



Abgeändert nach: Krishnan et al., Science 367, 577-580 (2020)

# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

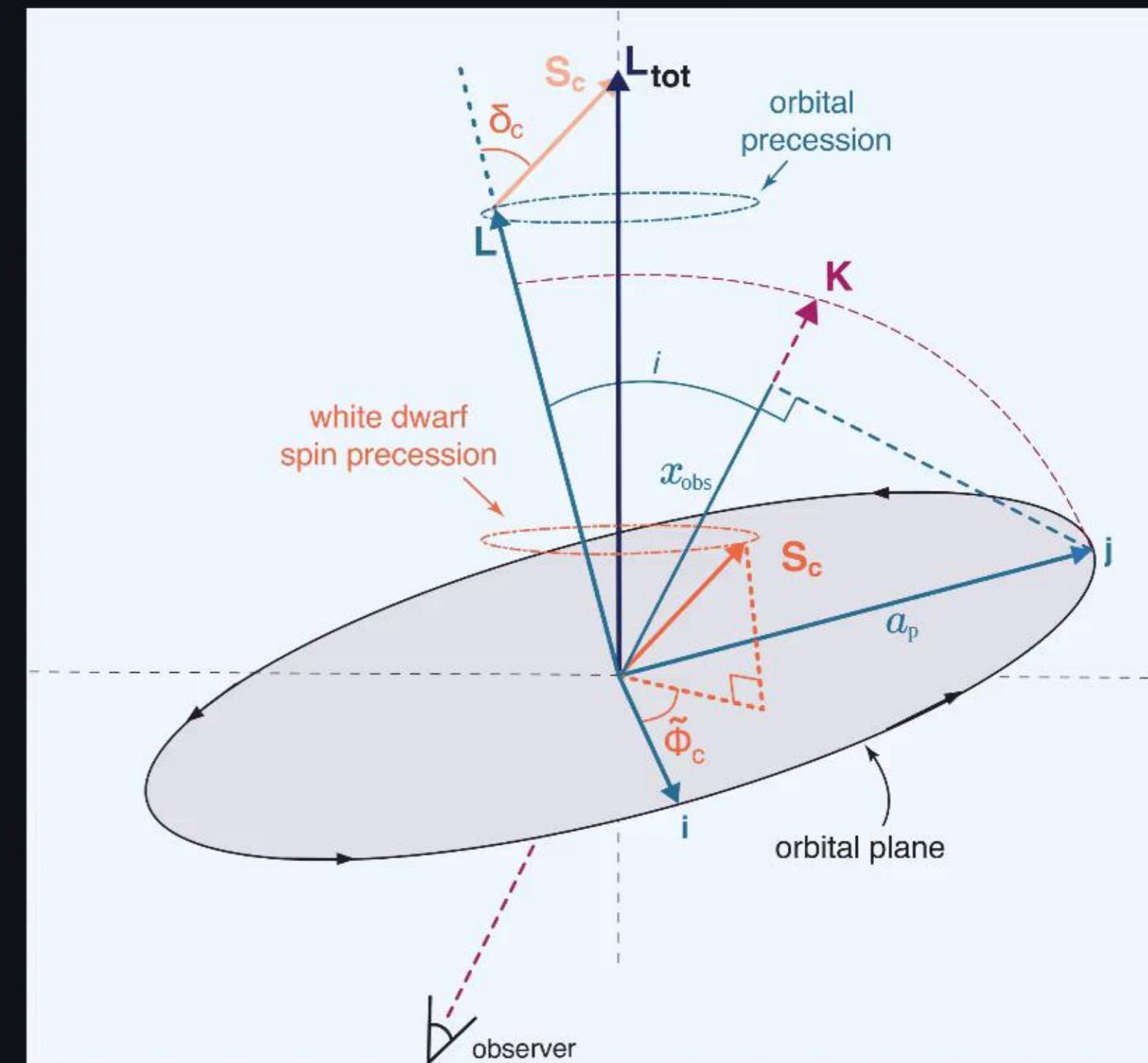
- Umlaufperiode: 4.74 h  
Exzentrizität: 0.17
- Pulsartiming über 18 Jahre
- Änderung der projizierten Halbachse  
 $\dot{x}_{\text{obs}} = (1.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-13} \text{ ss}^{-1}$
- zwei Hauptkomponenten  
 $\dot{x}_{\text{QPM}}$  ( $\sim 20\%$ ),  $\dot{x}_{\text{LT}}$  ( $\sim 60\%$ )



Abgeändert nach: Krishnan et al., Science 367, 577-580 (2020)

# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

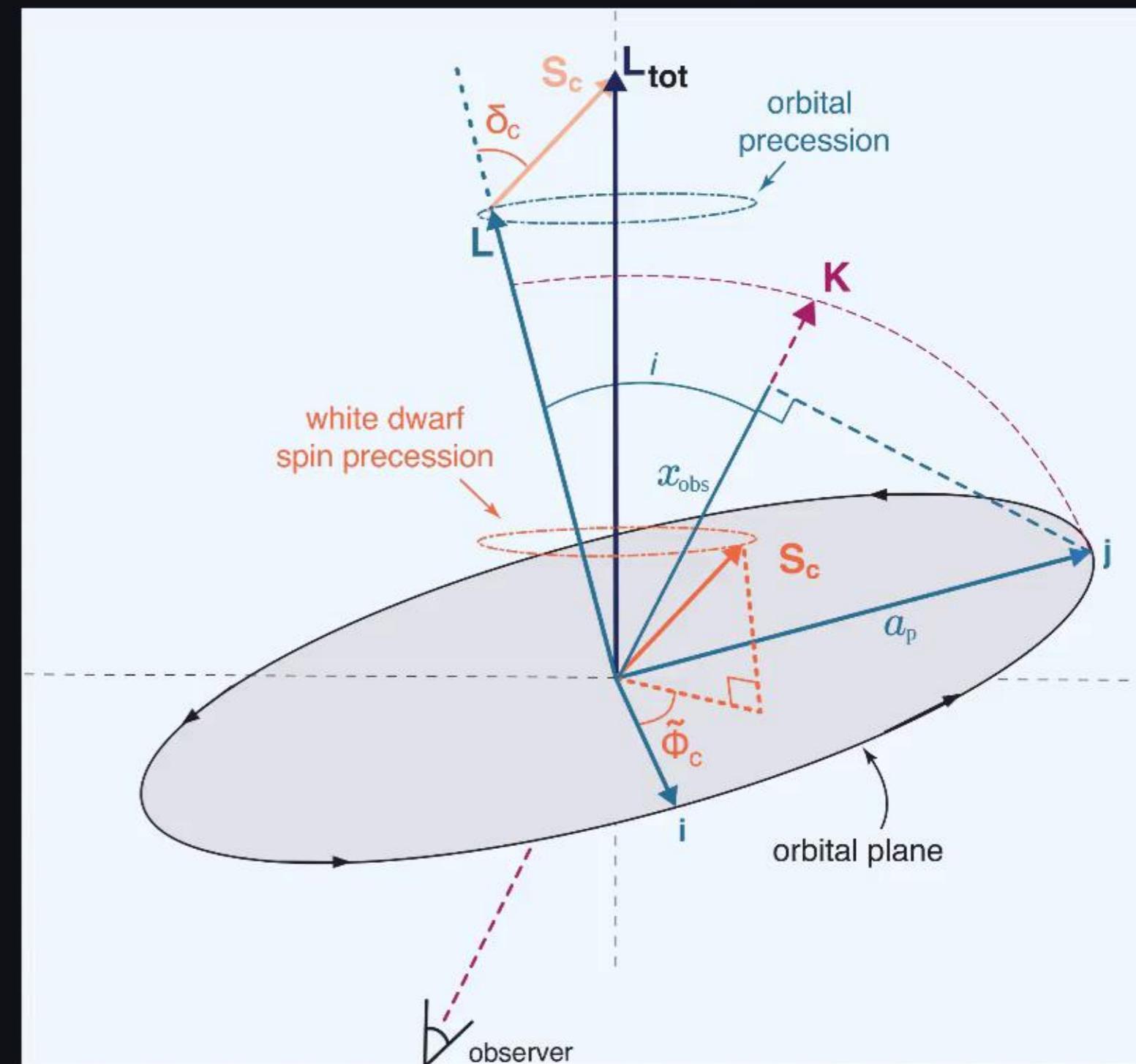
- Umlaufperiode: 4.74 h  
Exzentrizität: 0.17
- Pulsartiming über 18 Jahre
- Änderung der projizierten Halbachse  
 $\dot{x}_{\text{obs}} = (1.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-13} \text{ ss}^{-1}$
- zwei Hauptkomponenten  
 $\dot{x}_{\text{QPM}}$  ( $\sim 20\%$ ),  $\dot{x}_{\text{LT}}$  ( $\sim 60\%$ )
- LT-Präzession des Orbit  
mit  $\Omega_{\text{LT}} \sim \frac{S_{\text{WD}}}{a^3(1-e^2)^{3/2}}$



Abgeändert nach: Krishnan et al., Science 367, 577-580 (2020)

# Binärsystem aus Pulsar und weißem Zwerg

- Umlaufperiode: 4.74 h  
Exzentrizität: 0.17
- Pulsartiming über 18 Jahre
- Änderung der projizierten Halbachse  
 $\dot{x}_{\text{obs}} = (1.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-13} \text{ ss}^{-1}$
- zwei Hauptkomponenten  
 $\dot{x}_{\text{QPM}}$  ( $\sim 20\%$ ),  $\dot{x}_{\text{LT}}$  ( $\sim 60\%$ )
- LT-Präzession des Orbit  
mit  $\Omega_{\text{LT}} \sim \frac{S_{\text{WD}}}{a^3(1-e^2)^{3/2}}$   
 $\Rightarrow$  passt zu Messung



Abgeändert nach: Krishnan et al., Science 367, 577-580 (2020)

$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Zusammenfassung

- Test1

$$c = G = R = 1$$
$$(+, -, -, -)$$

# Zusammenfassung

- Test1
- Test2

# Quellen

- N. Szpak Übung & Skript zur Vorlesung zu Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie
- J. Lense, H. Thirring, *Phys. Z.* **19**, 156 (1918)
- C. Misner, K. Thorne, & J. Wheeler. - Gravitation (1973)
- C.W.F. Everitt, B.W. Parkinson Gravity Probe B Science Results—NASA Final Report. (2009)
- V. Venkatraman Krishnan *et al.* Lense-Thirring frame dragging induced by a fast-rotating white dwarf in a binary pulsar system. *Science* **367**, 577-580 (2020)
- D.R. Pasham, M. Zajaček, C.J. Nixon *et al.* Lense-Thirring precession after a supermassive black hole disrupts a star. *Nature* **630**, 325-328 (2024)