Lense-Thirring-Effekt Gravitoelectromagnetism

May 19, 2025

1 Aufgabe

1.0.1 Annahmen & Konventionen

Im Folgenden werden Natürliche Einheiten für die Zeit und Masse gewählt, sodass $c = 1$ und $G = 1$. Später wird zusätzlich die natürliche Einheit der Länge mit $R = 1$ verwendet.

Falls nicht anders spezifiziert, wird bei nicht vorgegebenen doppelten Indices die Einsteinsche Summenkonvention für $\{0, 1, 2, 3\}$ verwendet.

Es wird $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ als lineare Näherung der Metrik verwendet. Hierbei ist η_{ab} die Minkowski-Metrik:

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hierbei soll h_{ab} eine kleine Störung sein, sodass nur Terme erster Ordnung $\mathcal{O}(h_{ab})$ betrachtet werden.

Es wird im Folgenden angenommen, dass $h_{ab} = 0$ für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt.

Außerdem gilt aufgrund der Symmetrie der Metrik $h_{ab} = h_{ba}$.

Als letztes wird angenommen, dass die Störung nicht direkt Zeitabhängig ist, d.h. $\frac{\partial h_{ab}}{\partial t} = 0$.

1.1 Teil a)

Damit lassen sich die linearisierten Christoffel-Symbole wie folgt schreiben:

$$\Gamma^i{}_{kl} \approx \frac{1}{2}\eta^{ii}\left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

Wir nehmen nun an, dass die die Bewegung sehr viel langsamer als mit Lichtgeschwindigkeit stattfindet, d.h. die Eigenzeit entspricht in etwa der Koordinatenezeit t. Dafür kann die Geodätengleichung formuliert werden:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i{}_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}$$

Einsetzen liefert nun für $i \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= -\frac{1}{2}\eta_{ii}\left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} \\
&= +\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} \\
&= +\frac{\partial h_{i0}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial h_{i0}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l}\frac{dx^k}{dt} \\
&= -\left(\vec{\nabla}\Phi\right)_i - \left((\vec{\nabla}\times\vec{A})\times\vec{v}\right)_i \\
&= \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\Phi = -\frac{1}{2}h_{00}$ und $(\vec{A})_i = -h_{0i}$. Ersetzt man nun $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ und $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ und fordert $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung) erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{1}{2}\Delta h_{00} = -4\pi\rho \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= -\Delta\vec{A} = -16\pi\vec{j}
\end{aligned}$$

1.2 Teil b)

Nun wird eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierende homogene Kugel betrachtet:

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \rho_0\Theta(R-r) \\
\vec{j} &= \rho_0\vec{\omega}\times\vec{r}\Theta(R-r)
\end{aligned}$$

Für h_{00} gilt hier die folgende Poisson-Gleichung:

$$\Delta h_{00} = -8\pi\rho_0\Theta(R-r)$$

Es wird folgender Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned}
h_{00} &= \frac{K}{r} \\
\vec{\nabla}h_{00} &= -K\frac{\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

Wobei K eine noch zu bestimmende Konstante ist. Diese lässt sich über das Gaußsche Gesetz bestimmen:

$$\int_{S_R} -\vec{\nabla}\Phi\cdot d\vec{A} = \int_{B_R} -\Delta\Phi dV = 4\pi\int_{B_R}\rho_0 dV = 4\pi M$$

Hier ist M die Gesamtmasse der Kugel. Eine andere Möglichkeit ist es das Integral über die Kugeloberfläche zu berechnen:

$$\int_{S_R} -\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{A} = \frac{K}{2} \int_{S_R} \frac{1}{r^2} dA = 2\pi K$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke erhält man $K = 2M$ und somit:

$$h_{00} = \frac{2M}{r}$$

Für h_{0i} bzw. für $\vec{A}$ gilt:

$$\Delta h_{0i} = -16\pi j_i = -16\pi\rho_0 \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k \Theta(R - r)$$

Es wird der folgende Ansatz gemacht:

$$h_{0i} = -\varepsilon_{ijk}\omega_j \frac{\partial a}{\partial x_k}$$

Wendet man hierauf den Laplace Operator an, ergibt sich:

$$\Delta h_{0i} = -\varepsilon_{ijk}\omega_j \frac{\partial(\Delta a)}{\partial x_k}$$

Aus dem Vergleich mit der vorherigen Gleichung ergibt sich:

$$\vec{\nabla}(\Delta a) = 16\pi\rho_0 \vec{r}\Theta(R - r)$$

Diese Gleichung wird nun unter der Forderung $\Delta a = 0$ für $r \to \infty$ aufintegriert:

$$\int_\infty^r \vec{\nabla}(\Delta a) \cdot d\vec{r} = \Delta a = 16\pi\rho_0 \int_\infty^r r'\Theta(R - r')dr' = 8\pi\rho_0(r^2 - R^2)\Theta(R - r)$$

Es wird nun erneut der folgende Ansatz gewählt:

$$a = \frac{2I}{r}$$

$$\vec{\nabla} a = -2I \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Wobei I hier wieder über die Randbedingung zu bestimmen ist.

Hierzu wird erneut folgende Betrachtung angestellt:

$$\int_{S_R} \vec{\nabla} a \cdot d\vec{A} = \int_{B_R} \Delta a \, dV = 8\pi \int_{B_R} \rho_0(r^2 - R^2)dV$$

$$\int_{S_R} \vec{\nabla} a \cdot d\vec{A} = -2I \int_{S_R} \frac{1}{r^2} dA = -8\pi I$$

Woraus folgt, dass I das Trägheitsmoment der Kugel ist:

$$I = \int_{B_R} \rho_0 (R^2 - r^2) dV = \frac{2}{5} M R^2$$

Damit ergibt sich nun h_{0i} durch Einsetzen:

$$h_{0i} = 2I \frac{\varepsilon_{ijk}\omega_j x_k}{r^3} = 2\frac{I(\vec{\omega} \times \vec{r})_i}{r^3} = 2\frac{(\vec{S} \times \vec{r})_i}{r^3}$$

Wobei hier $\vec{S} = I\vec{\omega}$ der Drehimpuls von der Kugel ist.

1.3 Teil c)

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \frac{1}{2}\vec{\nabla} h_{00} = -\frac{M\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -2\vec{\nabla} \times \frac{\vec{S} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{2}{r^3}\left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2}\right]$$

Hiermit lässt sich nun die Kraft auf ein Testteilchen der Masse m schreiben als:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{E} + m\vec{v} \times \vec{B} = \frac{m}{r^3}\left[-M\vec{r} + 2\vec{v} \times \vec{S} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r})}{r^2}\vec{v} \times \vec{r}\right]$$

1.3.1 Kraft auf radial senkrecht zu $\vec{S}$ einfallendes Teilchen

Befindet sich ein Teilchen in der Ebene senkrecht zu $\vec{S}$ und bewegt sich in radiale Richtung mit Geschwindigkeit v, wirkt folgende Kraft:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{r^3}\left[-Mr\hat{r} + \frac{4}{5}Mv\omega\hat{\varphi}\right]$$

Daher erfährt das Teilchen zusätzlich zur newtonschen Gravitationskraft eine ein senkrecht wirkende Kraft. Das Verhältnis der Kraftbeträge ist:

$$\frac{\frac{2}{5}Mv\omega}{Mr} = \frac{4}{5}\frac{v\omega}{r}$$

Diese Kraft kann als frame-dragging verstanden werden und wirkt in Drehrichtung.

1.3.2 Kraft auf ein senkrecht über den Pol fliegendes Teilchen

Angenommen ein Teilchen befindet sich auf der z-Achse und hat eine Geschwindigkeit v in positive x-Richtung, dann wirkt folgende Kraft:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{r^3}\left[-Mr\hat{z} + \frac{8}{5}M\omega v\hat{y}\right]$$

Daher erfährt das Teilchen zusätzlich zur newtonschen Gravitationskraft eine ein senkrecht wirkende Kraft. Das Verhältnis der Kraftbeträge ist:

$$\frac{\frac{4}{5}Mv\omega}{Mr} = \frac{8}{5}\frac{v\omega}{r}$$

2 Präzession

Angenommen ein rotierendes Objekt befindet sich in festem Abstand $\vec{r}_S$ zu dem gravitativen Körper.

Das Objekt rotiere oBdA um die z-Achse, d.h. $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.

Das Objekt hat eine Massendichte von $\mathrm{P}(\rho, z)$, die Dichte sei also konstant im Winkel φ.

Dann ist das Drehmoment gegeben durch $\frac{d\vec{L}}{dt} = \int\int\int d^3r\ \vec{r} \times \vec{f_{LT}}$.

Hierbei ist $\vec{f_{LT}}$ die folgende Kraftdichte:

$$\vec{f_{LT}} = \mathrm{P}(\rho, z)\left[2\vec{v} \times \vec{\Omega} - \frac{6(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)}{r_S^5}\vec{v} \times \vec{r}\right]$$

Dies ergibt sich durch Einsetzen von $\vec{r}_G = \vec{r}_S + \vec{r}$ in die oben hergeleitete Kraft des Lense-Thirring-Effekts. Hierbei werden die Annahmen $r \approx r_S$ und $\vec{S}\cdot\vec{r} \approx \vec{S}\cdot\vec{r}_S$ gemacht. Der newtonsche Anteil wirkt nur auf den Schwerpunkt und geht deswegen nicht mit ein.

Die Größe $\vec{\Omega}$ dient der Übersichtlichkeit. Sie hängt nur von $\vec{S}$ und $\vec{r}_S$ ab und ist gegeben durch:

$$\vec{\Omega} = \frac{B(\vec{r}_S)}{2} = \frac{1}{r_S^3}\left(\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)}{r_S^2}\vec{r}_S\right)$$

Einsetzen in die Gleichung für das Drehmoment führt zu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int\int\int d^3r\ 2\mathrm{P}(\rho, z)\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) - \frac{6(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)}{r_S^5}\int\int\int d^3r\ \mathrm{P}(\rho, z)\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r})$$

Mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = a^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$ und $\vec{v} = \omega\rho\hat{\varphi}$ folgt dann:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \omega\int\int\int d^3r\ 2\mathrm{P}(\rho, z)\rho(\vec{r}\cdot\vec{\Omega})\hat{\varphi} - \frac{6(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)\omega}{r_S^5}\int\int\int d^3r\ \mathrm{P}(\rho, z)\rho r^2\hat{\varphi}$$

Der zweite Term verschwindet bei der Integration über φ. Damit ergibt sich:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 2\pi\omega\left(\hat{z} \times \vec{\Omega}\right)\int\int \rho^3\mathrm{P}(\rho, z)dzdr$$

Man erkennt hier das Trägheitsmoment $I = 2\pi\int\int \rho^3\mathrm{P}(\rho, z)dzdr$ wieder. Es folgt final:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L} \times \vec{\Omega}$$

Wobei hier $\vec{L} = I\vec{\omega}$ verwendet wurde.

Dies stimmt mit dem Ergebnis aus Gravitation von Misner & Thorne überein.

3 Umrechnung in SI-Einheiten

Aufgrund der natürlichen Einheiten ($c = 1$, $G = 1$, $R = 1$) gelten folgende Umrechnungsregeln für die drei Basiseinheiten Zeit T, Länge L und Masse M (wobei die gestrichenen Größen sowie c und G SI-Einheiten verwenden):

$$r = r'R^{-1}$$

$$\Rightarrow L = L'R^{-1}$$

$$v = v'c^{-1} = LT^{-1} = L'T'^{-1}c^{-1}$$

$$\Rightarrow T = T'cR^{-1}$$

$$L^3M^{-1}T^{-2} = L'^3M'^{-1}T'^{-2}G^{-1}$$

$$\Rightarrow M = M'Gc^{-2}R^{-1}$$

Daher gilt für den Drehimpuls:

$$S = ML^2T^{-1} = M'L'^2T'^{-1}Gc^{-3}R^{-2} = S'Gc^{-3}R^{-2}$$

4 Freie Parameter und Beispiele zur Einschätzung der Größenordnungen

Die freien Parameter sind M, ω.

4.0.1 Beispiel Erde

Die Erde hat eine Masse von $M' = 5.9722 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega' = \frac{2\pi}{24\,\mathrm{h}} = \frac{2\pi}{86400}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Der Erdradius beträgt etwa $6.371 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

Damit ergibt sich in natürlichen Einheiten:

$$M = M'Gc^{-2}R^{-1} = 6.96 \cdot 10^{-10}$$

$$\omega = \omega'c^{-1}R = 1.55 \cdot 10^{-6}$$

Mit $m\omega^2R = \frac{GMm}{R^2}$ ergibt sich eine Abschätzung für die größtmögliche theoretische Winkelgeschwindigkeit in natürlichen Einheiten:

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{M}$$

Was in natürlichen Einheiten etwa $\omega_{\text{max}} = 2.64 \cdot 10^{-5}$ entspricht.

Da die Kräfte des Lense-Thirring-Effekts aber $\propto \frac{v\omega}{r}$ sind, lässt sich der Einfluss nur für sehr kleine Radien r bemerken. Allerdings gilt die Formel für die Kraft nur außerhalb der Kugel für $r > 1$. Für die Parameter der Erde, kann man also nur einen sehr kleinen Effekt beobachten.

4.0.2 Beispiel Neutronenstern

Ein Neutronenstern hat typischerweise eine Masse von etwa $M' = 1.5M_0 = 3 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Der am schnellsten rotierende bekannte Neutronenstern hat eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega' = 2\pi \cdot 716\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Der Radius beträgt etwa $10^4\,\mathrm{m}$.

Damit ergibt sich in natürlichen Einheiten:

$$M = M'Gc^{-2}R^{-1} = 0.22$$

$$\omega = \omega' c^{-1} R = 0.15$$

Auch hier ist der zusätzliche Kraftterm maximal 15 % der Newtonschen Gravitationskraft und hat geringe Auswirkungen.

4.0.3 Extremfall

Die theoretisch höchste mögliche Winkelgeschwindigkeit wird für eine am Außenrand mit Lichtgeschwindigkeit rotierende Kugel erreicht, d.h. $\omega_{\mathrm{max}} = \frac{c}{R}$. In den gewählten natürlichen Einheiten gilt also $\omega_{\mathrm{max}} = 1$. Selbst in diesem Fall ist der zusätzliche Kraftterm noch kleiner als der klassische. Der Lense-Thirring-Effekt lässt sich also nicht besonders gut anhand von Trajektorien beobachten, da hier der Einfluss zu gering ist. Die durch den Lense-Thirring-Effekt verursachte Präzession lässt sich hingegen beobachten (vgl. Gravity Probe B).