Lense-Thirring-Effekt Gravitoelectromagnetism

April 10, 2025

1 Aufgabe

1.0.1 Annahmen & Konventionen

Im Folgenden werden Natürliche Einheiten für die Zeit und Masse gewählt, sodass $c = 1$ und $G = 1$. Später wird zusätzlich die natürliche Einheit der Länge mit $R = 1$ verwendet.

Falls nicht anders spezifiziert, wird bei nicht vorgegebenen doppelten Indices die Einsteinsche Summenkonvention für $\{0, 1, 2, 3\}$ verwendet.

Es wird $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ als lineare Näherung der Metrik verwendet. Hierbei ist η_{ab} die Minkowski-Metrik:

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hierbei soll h_{ab} eine kleine Störung sein, sodass nur Terme erster Ordnung $\mathcal{O}(h_{ab})$ betrachtet werden.

Es wird im Folgenden angenommen, dass $h_{ab} = 0$ für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt.

Außerdem gilt aufgrund der Symmetrie der Metrik $h_{ab} = h_{ba}$.

Als letztes wird angenommen, dass die Störung nicht direkt Zeitabhängig ist, d.h. $\frac{\partial h_{ab}}{\partial t} = 0$.

1.1 Teil a)

Damit lassen sich die linearisierten Christoffel-Symbole wie folgt schreiben:

$$\Gamma^i{}_{kl} \approx \frac{1}{2}\eta^{ii}\left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

Wir nehmen nun an, dass die die Bewegung sehr viel langsamer als mit Lichtgeschwindigkeit stattfindet, d.h. die Eigenzeit entspricht in etwa der Koordinatenezeit t. Dafür kann die Geodätengleichung formuliert werden:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i{}_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}$$

Einsetzen liefert nun für $i \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= -\frac{1}{2}\eta_{ii}\left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} \\
&= +\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} \\
&= +\frac{\partial h_{i0}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial h_{i0}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{dt}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l}\frac{dx^k}{dt} \\
&= -\left(\vec{\nabla}\Phi\right)_i - \left((\vec{\nabla}\times\vec{A})\times\vec{v}\right)_i \\
&= \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\Phi = \frac{1}{2}h_{00}$ und $(\vec{A})_i = -h_{0i}$. Ersetzt man nun $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ und $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ und fordert $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung) erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= -\frac{1}{2}\Delta h_{00} = 4\pi\rho \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= -\Delta\vec{A} = -8\pi\vec{j}
\end{aligned}$$

1.2 Teil b)

Nun wird eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierende homogene Kugel betrachtet:

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \rho_0\Theta(R-r) \\
\vec{j} &= \rho_0\vec{\omega}\times\vec{r}\Theta(R-r)
\end{aligned}$$

Für h_{00} gilt hier die folgende Poisson-Gleichung:

$$\Delta h_{00} = -8\pi\rho_0\Theta(R-r)$$

Es wird folgender Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned}
h_{00} &= \frac{K}{r} \\
\vec{\nabla}h_{00} &= -K\frac{\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

Wobei K eine noch zu bestimmende Konstante ist. Diese lässt sich über das Gaußsche Gesetz bestimmen:

$$\int_{S_R} -\vec{\nabla}\Phi\cdot d\vec{A} = \int_{B_R} -\Delta\Phi dV = 4\pi\int_{B_R}\rho_0 dV = 4\pi M$$

Hier ist M die Gesamtmasse der Kugel. Eine andere Möglichkeit ist es das Integral über die Kugeloberfläche zu berechnen:

$$\int_{S_R} -\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{dA} = \frac{K}{2} \int_{S_R} \frac{1}{r^2} dA = 2\pi K$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke erhält man $K = 2M$ und somit:

$$h_{00} = \frac{2M}{r}$$

Für h_{0i} bzw. für $\vec{A}$ gilt:

$$\Delta h_{0i} = -8\pi j_i = -8\pi\rho_0 \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k \Theta(R-r)$$

Es wird der folgende Ansatz gemacht:

$$h_{0i} = -\varepsilon_{ijk}\omega_j \frac{\partial a}{\partial x_k}$$

Wendet man hierauf den Laplace Operator an, ergibt sich:

$$\Delta h_{0i} = -\varepsilon_{ijk}\omega_j \frac{\partial(\Delta a)}{\partial x_k}$$

Aus dem Vergleich mit der vorherigen Gleichung ergibt sich:

$$\vec{\nabla}(\Delta a) = 8\pi\rho_0 \vec{r}\Theta(R-r)$$

Diese Gleichung wird nun unter der Forderung $\Delta a = 0$ für $r \to \infty$ aufintegriert:

$$\int_\infty^r \vec{\nabla}(\Delta a) \cdot \vec{dr} = \Delta a = 8\pi\rho_0 \int_\infty^r r'\Theta(R-r')dr' = 4\pi\rho_0(r^2 - R^2)\Theta(R-r)$$

Es wird nun erneut der folgende Ansatz gewählt:

$$a = \frac{I}{r}$$

$$\vec{\nabla} a = -I\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Wobei I hier wieder über die Randbedingung zu bestimmen ist.

Hierzu wird erneut folgende Betrachtung angestellt:

$$\int_{S_R} \vec{\nabla} a \cdot \vec{dA} = \int_{B_R} \Delta a \, dV = 4\pi \int_{B_R} \rho_0(r^2 - R^2) dV$$

$$\int_{S_R} \vec{\nabla} a \cdot \vec{dA} = -I \int_{S_R} \frac{1}{r^2} dA = -4\pi I$$

Woraus folgt, dass I das Trägheitsmoment der Kugel ist:

$$I = \int_{B_R} \rho_0(R^2 - r^2) dV = \frac{2}{5} M R^2$$

Damit ergibt sich nun h_{0i} durch Einsetzen:

$$h_{0i} = I\frac{\varepsilon_{ijk}\omega_j x_k}{r^3} = \frac{I(\vec{\omega}\times\vec{r})_i}{r^3} = \frac{(\vec{S}\times\vec{r})_i}{r^3}$$

Wobei hier $\vec{S} = I\vec{\omega}$ der Drehimpuls von der Kugel ist.

1.3 Teil c)

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00} = \frac{M\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\vec{\nabla}\times\frac{\vec{S}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2}\right]$$

Hiermit lässt sich nun die Kraft auf ein Testteilchen der Masse m schreiben als:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{E} + m\vec{v}\times\vec{B} = \frac{m}{r^3}\left[M\vec{r} + \vec{v}\times\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{r})}{r^2}\vec{v}\times\vec{r}\right]$$

1.3.1 Kraft auf radial senkrecht zu $\vec{S}$ einfallendes Teilchen

Befindet sich ein Teilchen in der Ebene senkrecht zu $\vec{S}$ und bewegt sich in radiale Richtung mit Geschwindigkeit v, wirkt folgende Kraft:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{r^3}\left[-Mr\hat{r} + \frac{2}{5}Mv\omega\hat{\varphi}\right]$$

Daher erfährt das Teilchen zusätzlich zur newtonschen Gravitationskraft eine ein senkrecht wirkende Kraft. Das Verhältnis der Kraftbeträge ist:

$$\frac{\frac{2}{5}Mv\omega}{Mr} = \frac{2}{5}\frac{v\omega}{r}$$

Diese Kraft kann als frame-dragging verstanden werden und wirkt in Drehrichtung.

1.3.2 Kraft auf ein senkrecht über den Pol fliegendes Teilchen

Angenommen ein Teilchen befindet sich auf der z-Achse und hat eine Geschwindigkeit v in positive x-Richtung, dann wirkt folgende Kraft:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{r^3}\left[-Mr\hat{z} + \frac{4}{5}M\omega v\hat{y}\right]$$

Daher erfährt das Teilchen zusätzlich zur newtonschen Gravitationskraft eine ein senkrecht wirkende Kraft. Das Verhältnis der Kraftbeträge ist:

$$\frac{\frac{4}{5}Mv\omega}{Mr} = \frac{4}{5}\frac{v\omega}{r}$$

1.4 Vorzeichenfehler

Der erste Term ist im klassischen Grenzfall deutlich größer als die beiden anderen Terme und stellt das Newtonsche Gravitationsgesetz dar, allerdings ist wohl irgendwo ein Vorzeichen abhanden gekommen... (und eigentlich sollte das Voreichen nicht von der Definition von $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ abhängen, da die Kraft unabhängig von dieser Definition die gleiche sein muss, daher vermute ich, dass irgendwo beim einsetzen der Christoffel-Symbole etwas schiefgelaufen ist) Vermutung: Der Fehler liegt bei $-\Delta h_{00} = 8\pi\rho$. Hier sollte das Vorzeichen anders sein?! (würde in einer sinnvollen Kraft resultieren)

2 Präzession

Angenommen ein rotierendes Objekt befindet sich in festem Abstand $\vec{r}_S$ zu dem gravitativen Körper.

Das Objekt rotiere oBdA um die z-Achse, d.h. $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.

Das Objekt hat eine Massendichte von $\mathrm{P}(\rho, z)$, die Dichte sei also konstant im Winkel φ.

Dann ist das Drehmoment gegeben durch $\frac{d\vec{L}}{dt} = \int\int\int d^3r\ \vec{r} \times \vec{f_{LT}}$.

Hierbei ist $\vec{f_{LT}}$ die folgende Kraftdichte:

$$\vec{f_{LT}} = \mathrm{P}(\rho, z)\left[\vec{v} \times \vec{\Omega} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)}{r_S^5}\vec{v} \times \vec{r}\right]$$

Dies ergibt sich durch Einsetzen von $\vec{r}_G = \vec{r}_S + \vec{r}$ in die oben hergeleitete Kraft des Lense-Thirring-Effekts. Hierbei werden die Annahmen $r \approx r_S$ und $\vec{S}\cdot\vec{r} \approx \vec{S}\cdot\vec{r}_S$ gemacht. Der newtonsche Anteil wirkt nur auf den Schwerpunkt und geht deswegen nicht mit ein.

Die Größe $\vec{\Omega}$ dient der Übersichtlichkeit. Sie hängt nur von $\vec{S}$ und $\vec{r}_S$ ab und ist gegeben durch:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r_S^3}\left(\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)}{r_S^2}\vec{r}_S\right)$$

Einsetzen in die Gleichung für das Drehmoment führt zu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int\int\int d^3r\ \mathrm{P}(\rho, z)\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)}{r_S^5}\int\int\int d^3r\ \mathrm{P}(\rho, z)\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r})$$

Mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = a^2\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$ und $\vec{v} = \omega\rho\hat{\varphi}$ folgt dann:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \omega\int\int\int d^3r\ \mathrm{P}(\rho, z)\rho(\vec{r}\cdot\vec{\Omega})\hat{\varphi} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{r}_S)\omega}{r_S^5}\int\int\int d^3r\ \mathrm{P}(\rho, z)\rho r^2\hat{\varphi}$$

Der zweite Term verschwindet bei der Integration über φ. Damit ergibt sich:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \pi\omega\left(\hat{z} \times \vec{\Omega}\right)\int\int \rho^3\mathrm{P}(\rho, z)dzdr$$

Man erkennt hier das Trägheitsmoment $I = 2\pi\int\int \rho^3\mathrm{P}(\rho, z)dzdr$ wieder. Es folgt final:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{L} \times \vec{\Omega}$$

Wobei hier $\vec{L} = I\vec{\omega}$ verwendet wurde.

3 Umrechnung in SI-Einheiten

Aufgrund der natürlichen Einheiten ($c = 1$, $G = 1$, $R = 1$) gelten folgende Umrechnungsregeln für die drei Basiseinheiten Zeit T, Länge L und Masse M (wobei die gestrichenen Größen sowie c und G SI-Einheiten verwenden):

$$r = r'R^{-1}$$
$$\Rightarrow L = L'R^{-1}$$
$$v = v'c^{-1} = LT^{-1} = L'T'^{-1}c^{-1}$$
$$\Rightarrow T = T'cR^{-1}$$
$$L^3M^{-1}T^{-2} = L'^3M'^{-1}T'^{-2}G^{-1}$$
$$\Rightarrow M = M'Gc^{-2}R^{-1}$$

Daher gilt für den Drehimpuls:

$$S = ML^2T^{-1} = M'L'^2T'^{-1}Gc^{-3}R^{-2} = S'Gc^{-3}R^{-2}$$

4 Freie Parameter und Beispiele zur Einschätzung der Größenordnungen

Die freien Parameter sind M, ω.

4.0.1 Beispiel Erde

Die Erde hat eine Masse von $M' = 5.9722 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega' = \frac{2\pi}{24\,\mathrm{h}} = \frac{2\pi}{86400}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Der Erdradius beträgt etwa $6.371 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

Damit ergibt sich in natürlichen Einheiten:

$$M = M'Gc^{-2}R^{-1} = 6.96 \cdot 10^{-10}$$
$$\omega = \omega'c^{-1}R = 1.55 \cdot 10^{-6}$$

Mit $m\omega^2R = \frac{GMm}{R^2}$ ergibt sich eine Abschätzung für die größtmögliche theoretische Winkelgeschwindigkeit in natürlichen Einheiten:

$$\omega_{\mathrm{max}} = \sqrt{M}$$

Was in natürlichen Einheiten etwa $\omega_{\mathrm{max}} = 2.64 \cdot 10^{-5}$ entspricht.

Da die Kräfte des Lense-Thirring-Effekts aber $\propto \frac{v\omega}{r}$ sind, lässt sich der Einfluss nur für sehr kleine Radien r bemerken. Allerdings gilt die Formel für die Kraft nur außerhalb der Kugel für $r > 1$. Für die Parameter der Erde, kann man also nur einen sehr kleinen Effekt beobachten.

4.0.2 Beispiel Neutronenstern

Ein Neutronenstern hat typischerweise eine Masse von etwa $M' = 1.5M_0 = 3 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Der am schnellsten rotierende bekannte Neutronenstern hat eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega' = 2\pi \cdot 716\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Der Radius beträgt etwa $10^4\,\mathrm{m}$.

Damit ergibt sich in natürlichen Einheiten:

$$M = M'Gc^{-2}R^{-1} = 0.22$$

$$\omega = \omega' c^{-1} R = 0.15$$

Auch hier ist der zusätzliche Kraftterm maximal 15 % der Newtonschen Gravitationskraft und hat geringe Auswirkungen.

4.0.3 Extremfall

Die theoretisch höchste mögliche Winkelgeschwindigkeit wird für eine am Außenrand mit Lichtgeschwindigkeit rotierende Kugel erreicht, d.h. $\omega_{\mathrm{max}} = \frac{c}{R}$. In den gewählten natürlichen Einheiten gilt also $\omega_{\mathrm{max}} = 1$. Selbst in diesem Fall ist der zusätzliche Kraftterm noch kleiner als der klassische. Der Lense-Thirring-Effekt lässt sich also nicht besonders gut anhand von Trajektorien beobachten, da hier der Einfluss zu gering ist. Die durch den Lense-Thirring-Effekt verursachte Präzession lässt sich hingegen beobachten (vgl. Gravity Probe B).