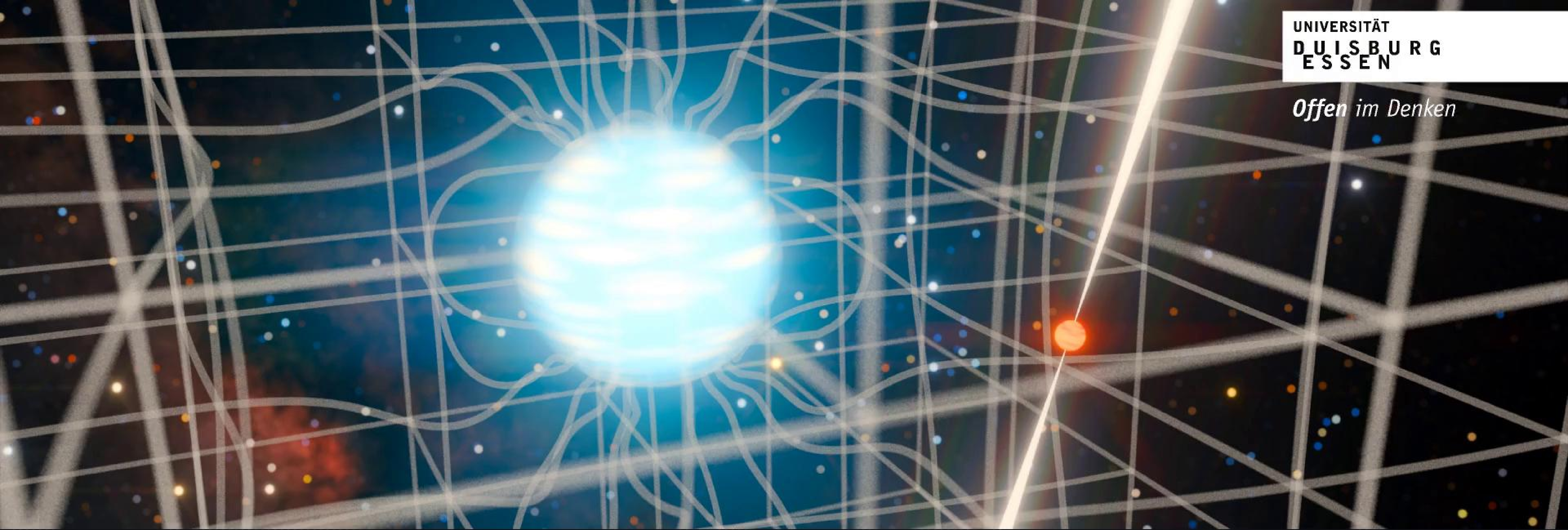


Lense-Thirring-Effekt

Vortrag im Hauptseminar SoSe 2025

Marvin Henke - 10. Mai 2025
Betreuer: Dr. Nikodem Szpak

Lense-Thirring-Effekt

Lense-Thirring-Effekt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Metrik und Geodäten

Lense-Thirring-Effekt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen

Lense-Thirring-Effekt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Offen im Denken

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen
- Gravitoelektromagnetismus

Lense-Thirring-Effekt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen
- Gravitoelektromagnetismus
  - Rotierende Kugelmasse

Lense-Thirring-Effekt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen
- Gravitoelektromagnetismus
  - Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder

Lense-Thirring-Effekt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen
- Gravitoelektromagnetismus
  - Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
- Trajektorien

Lense-Thirring-Effekt

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen
- Gravitoelektromagnetismus
  - Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
- Trajektorien
- Raumzeitdarstellung

Lense-Thirring-Effekt

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen
- Gravitoelektromagnetismus
  - Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
- Trajektorien
- Raumzeitdarstellung

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lense-Thirring-Effekt

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

- Metrik und Geodäten
- Einsteinsche Feldgleichungen
- Gravitoelektromagnetismus
  - Rotierende Kugelmasse
  - EM-Felder
- Trajektorien
- Raumzeitdarstellung

Metrik und Geodäten

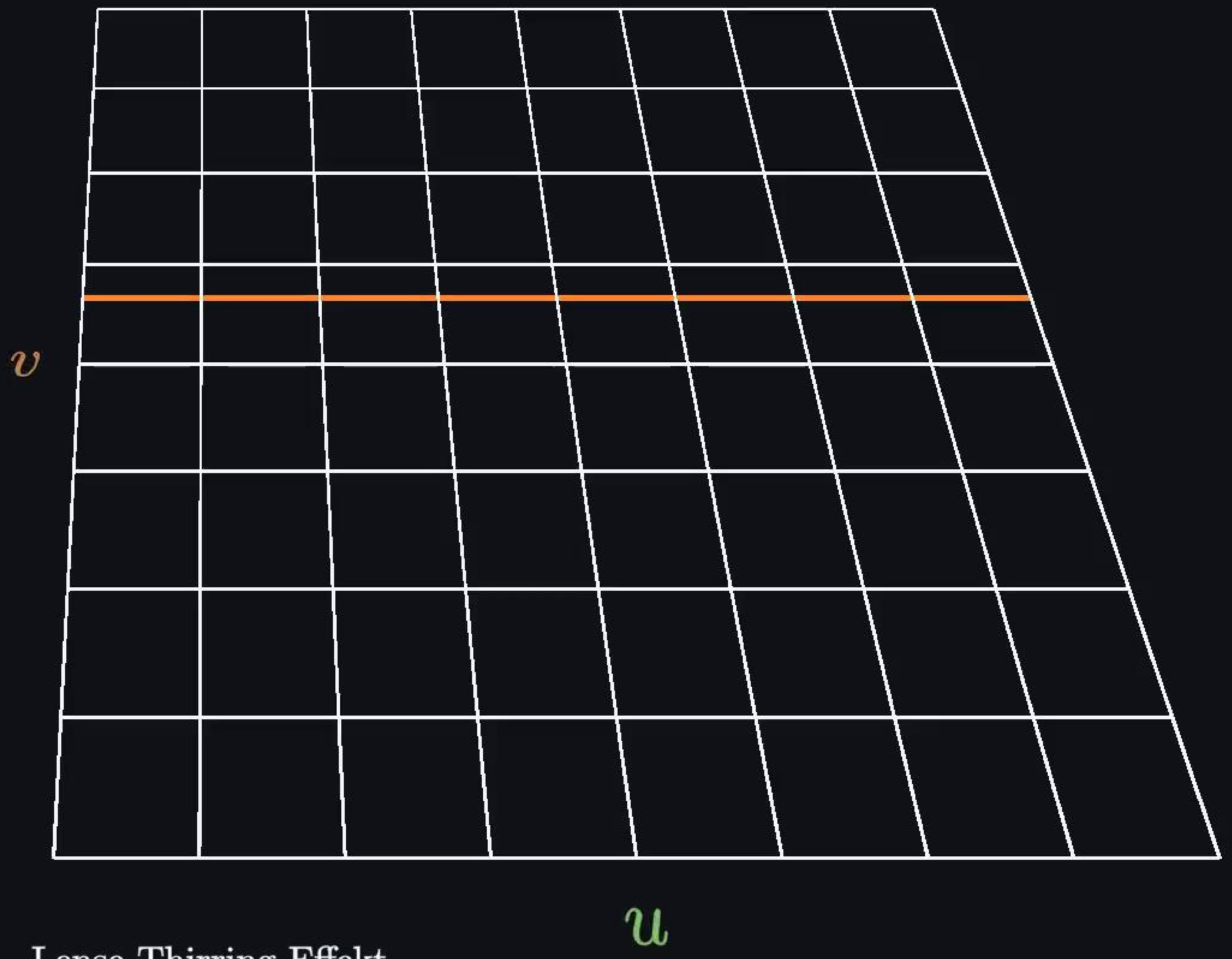
$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

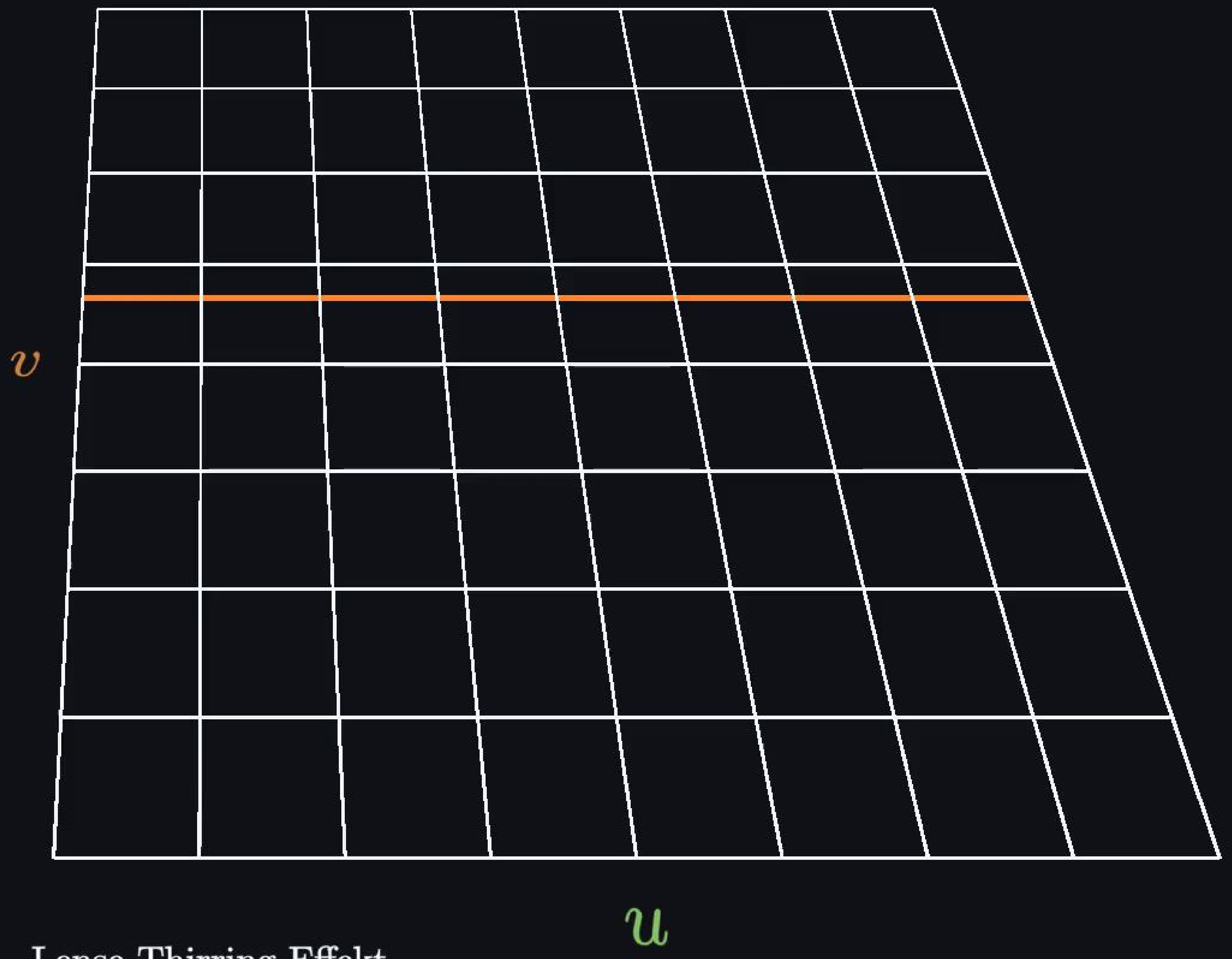
Metrik und Geodäten



Metrik und Geodäten

Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$



UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Offen im Denken

Metrik und Geodäten

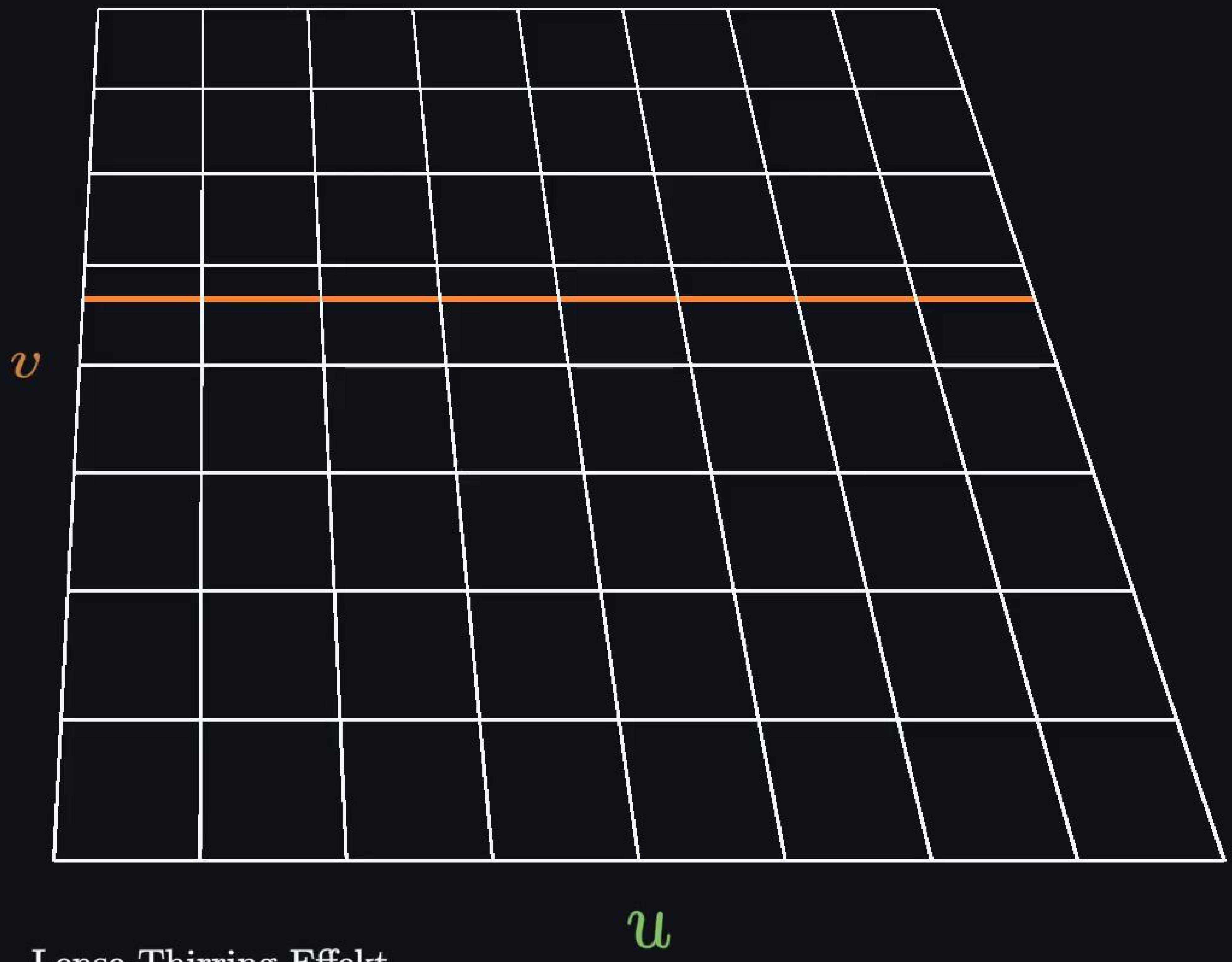
Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$

Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Metrik und Geodäten

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$

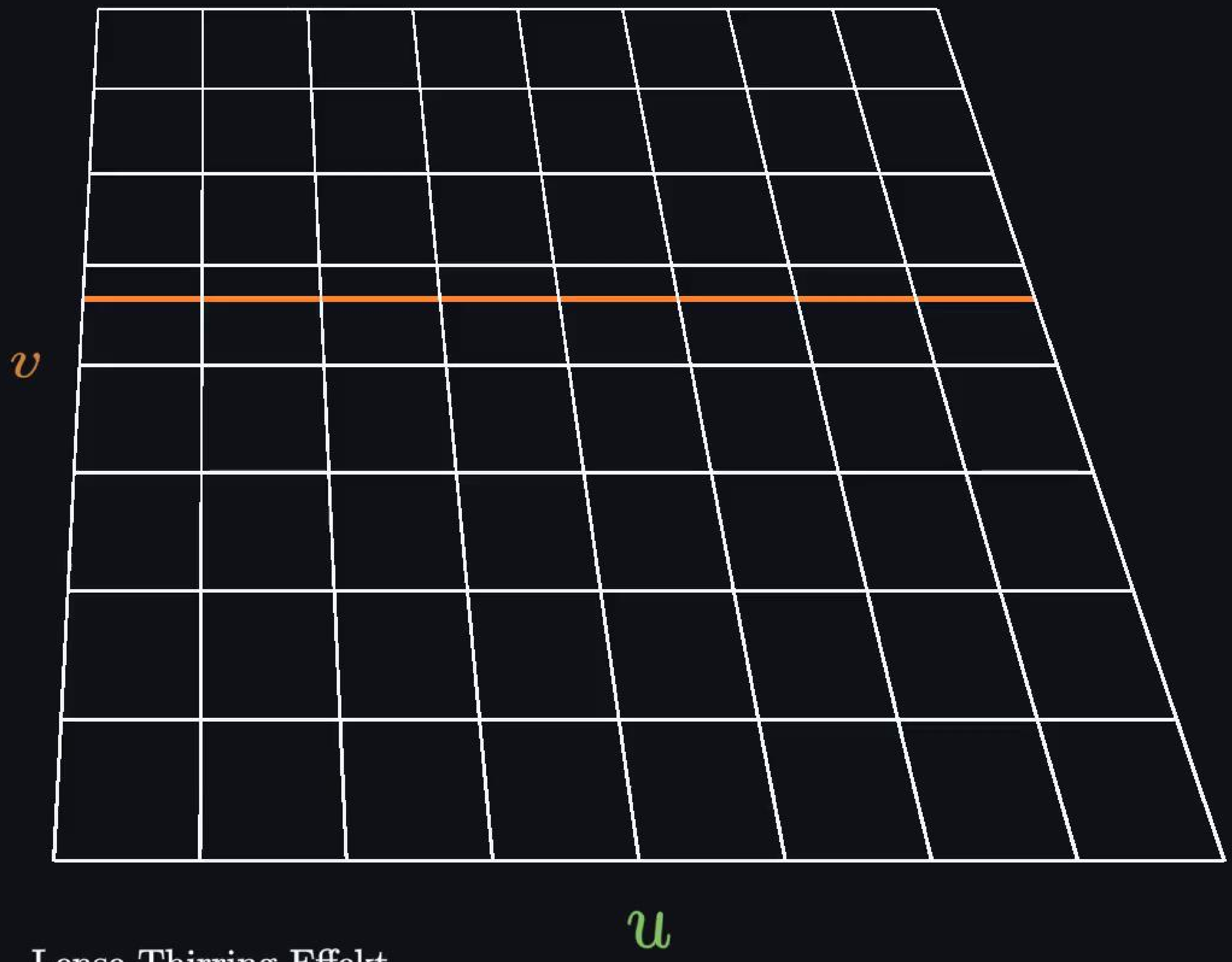
Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$



Metrik und Geodäten

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Fläche

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$$

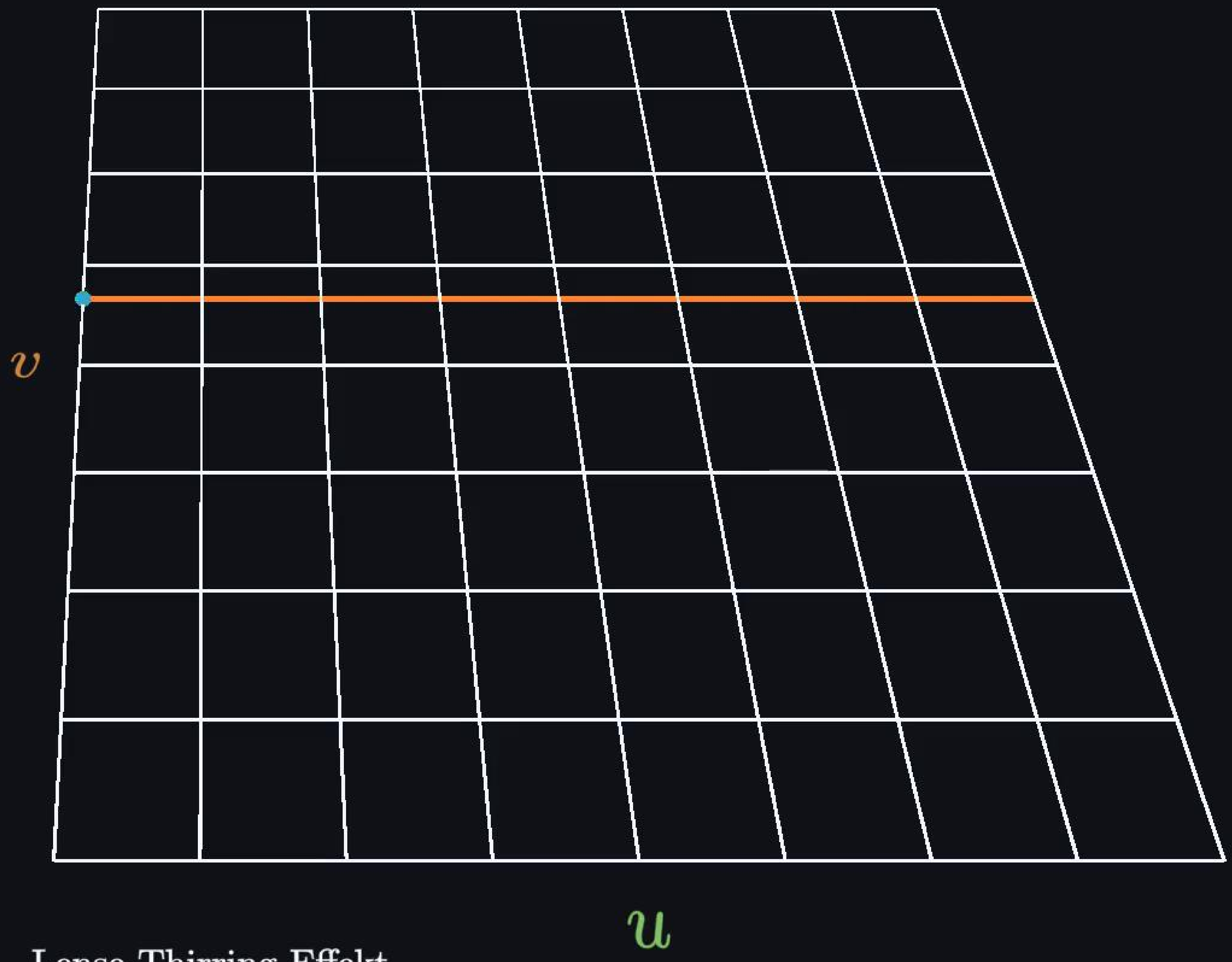
Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$



Metrik und Geodäten

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Fläche

$\vec{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

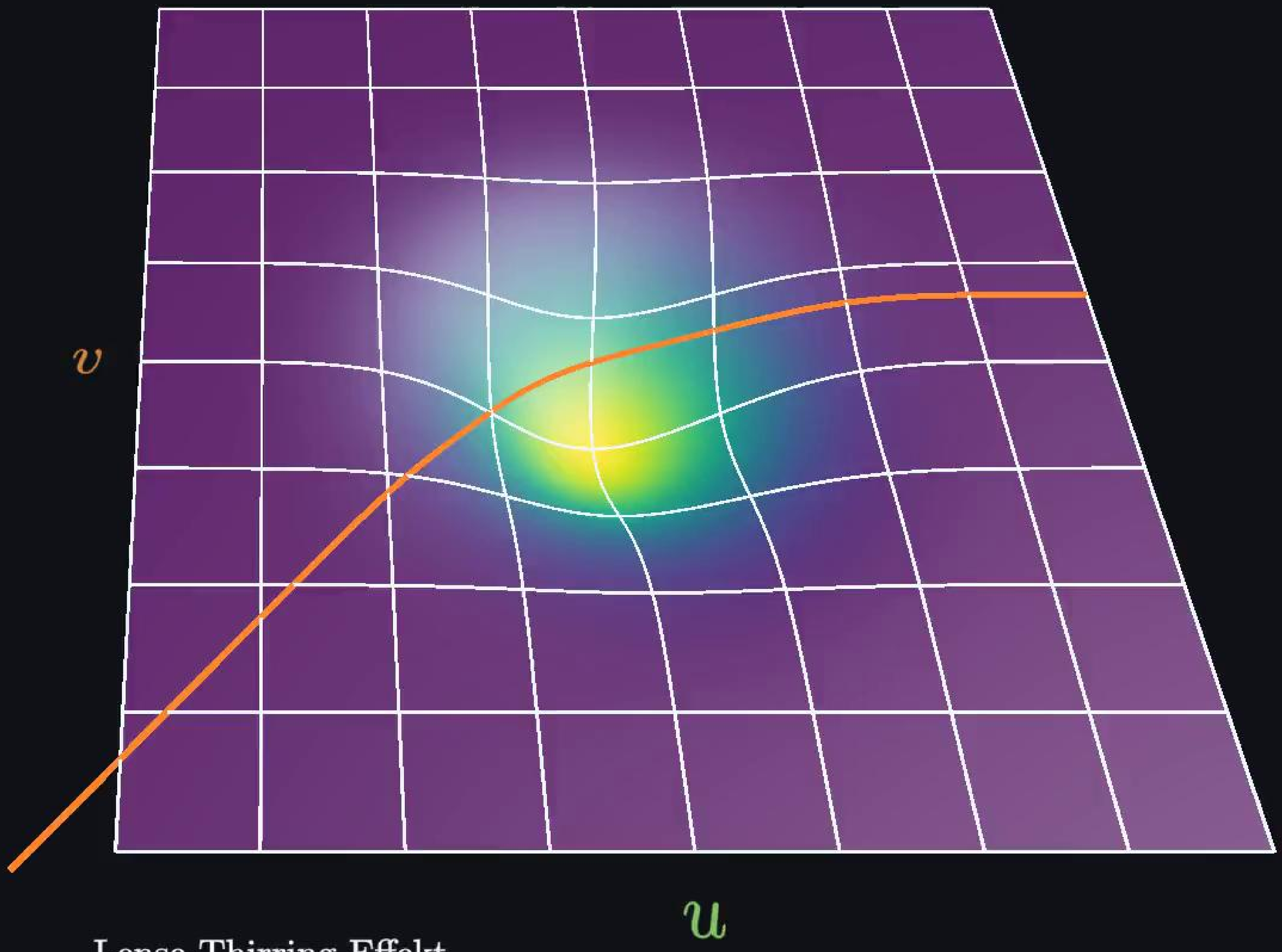
Metrik

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\boldsymbol{g}(\vec{x})] \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$$



Metrik und Geodäten

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

Fläche

$\vec{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

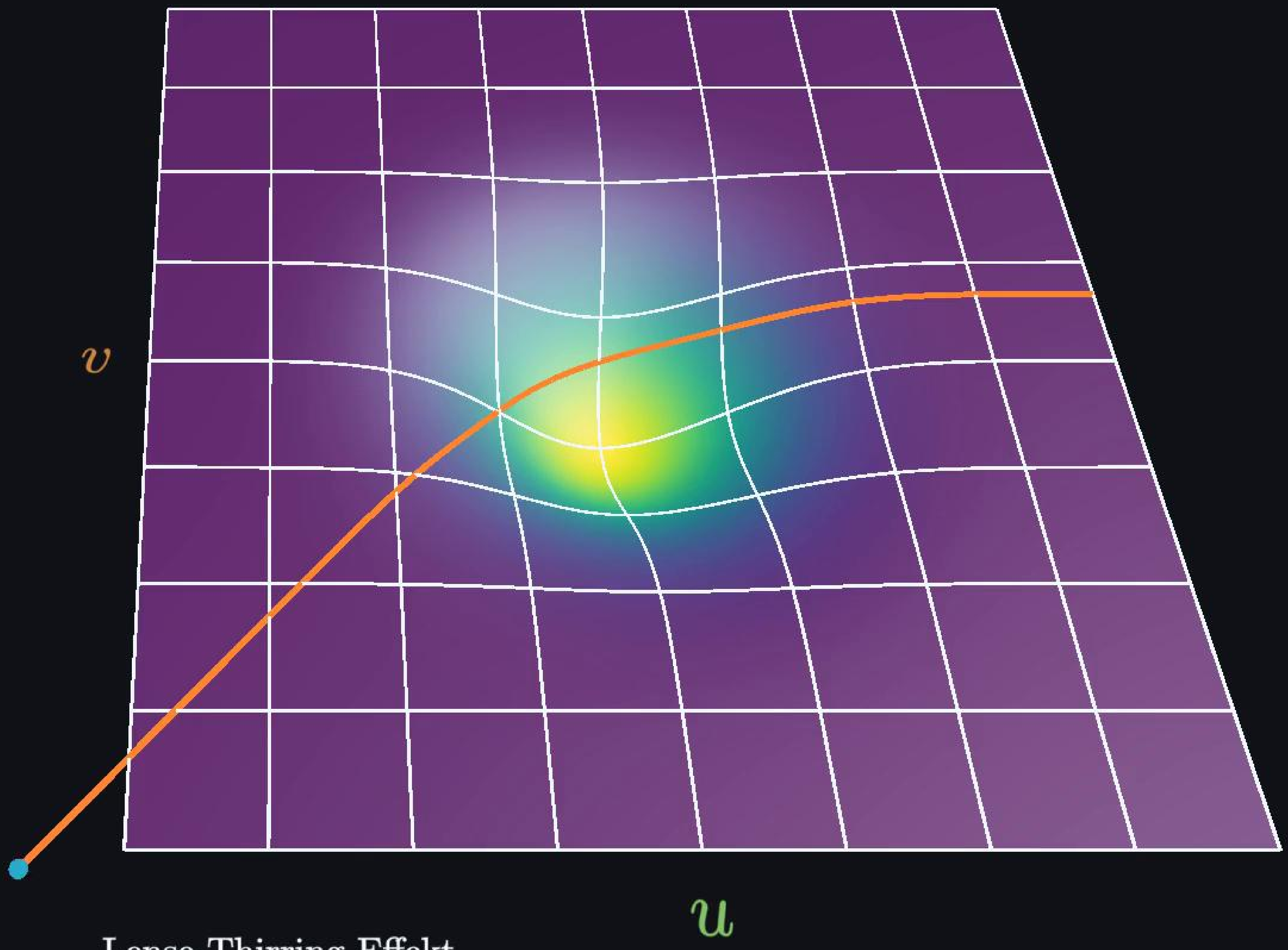
Metrik

$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{x} \cdot \partial_\nu \vec{x}$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\boldsymbol{g}(\vec{x})] \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$$



Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

2D Fläche $\rightarrow$ 4D Mannigfaltigkeit

Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

2D Fläche $\rightarrow$ 4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten $(ct, x, y, z) \Rightarrow \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

2D Fläche $\rightarrow$ 4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten $(ct, x, y, z) \Rightarrow \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Einsteinsche Feldgleichungen

2D Fläche $\rightarrow$ 4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten $(ct, x, y, z) \Rightarrow \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Ricci-Tensor: $R_{\mu\nu}\left[\boldsymbol{g}\right]$

Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

2D Fläche $\rightarrow$ 4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten $(ct, x, y, z) \Rightarrow \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Ricci-Tensor: $R_{\mu\nu}\left[\boldsymbol{g}\right]$

Krümmungsskalar: $R\left[\boldsymbol{g}\right]$

Einsteinsche Feldgleichungen

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

2D Fläche $\rightarrow$ 4D Mannigfaltigkeit

Koordinaten $(ct, x, y, z) \Rightarrow \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Ricci-Tensor: $R_{\mu\nu}\,[\boldsymbol{g}]$

Krümmungsskalar: $R\,[\boldsymbol{g}]$

Energie-Impuls-Tensor: $T_{\mu\nu}$

Linearisierung

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

Linearisierung

Annahmen: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{h} \ll \boldsymbol{\eta}$, $\tau \approx t$

Linearisierung

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Annahmen: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{h} \ll \boldsymbol{\eta}$, $\tau \approx t$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\boldsymbol{g}(\vec{x})] \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$$

Linearisierung

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Annahmen: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{h} \ll \boldsymbol{\eta}$, $\tau \approx t$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \; -\Delta h_{0i} = 8\pi j_i$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\boldsymbol{g}(\vec{x})] \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$$

Gravitoelektromagnetismus

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Annahmen: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{h} \ll \boldsymbol{\eta}$, $\tau \approx t$

Substitutionen: $\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} h_{00}$, $B_j = -\varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\boldsymbol{g}(\vec{x})] \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \; -\Delta h_{0i} = 8\pi j_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -8\pi\vec{j}$$

Gravitoelektromagnetismus

$c = G = 1$

$(+---)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Annahmen: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{h} \ll \boldsymbol{\eta}$, $\tau \approx t$

Substitutionen: $\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} h_{00}$, $B_j = -\varepsilon_{jlm}\frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \; -\Delta h_{0i} = 8\pi j_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -8\pi\vec{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\boldsymbol{g}(\vec{x})]\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l}\frac{dx^k}{dt}$$

Gravitoelektromagnetismus

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

Annahmen: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{h} \ll \boldsymbol{\eta}$, $\tau \approx t$

Substitutionen: $\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} h_{00}$, $B_j = -\varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\rho, \; -\Delta h_{0i} = 8\pi j_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -8\pi\vec{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\boldsymbol{g}(\vec{x})] \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l} \frac{dx^k}{dt}$$

$$\vec{F} = m\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Rotierende Kugelmasse

$c = G = 1$

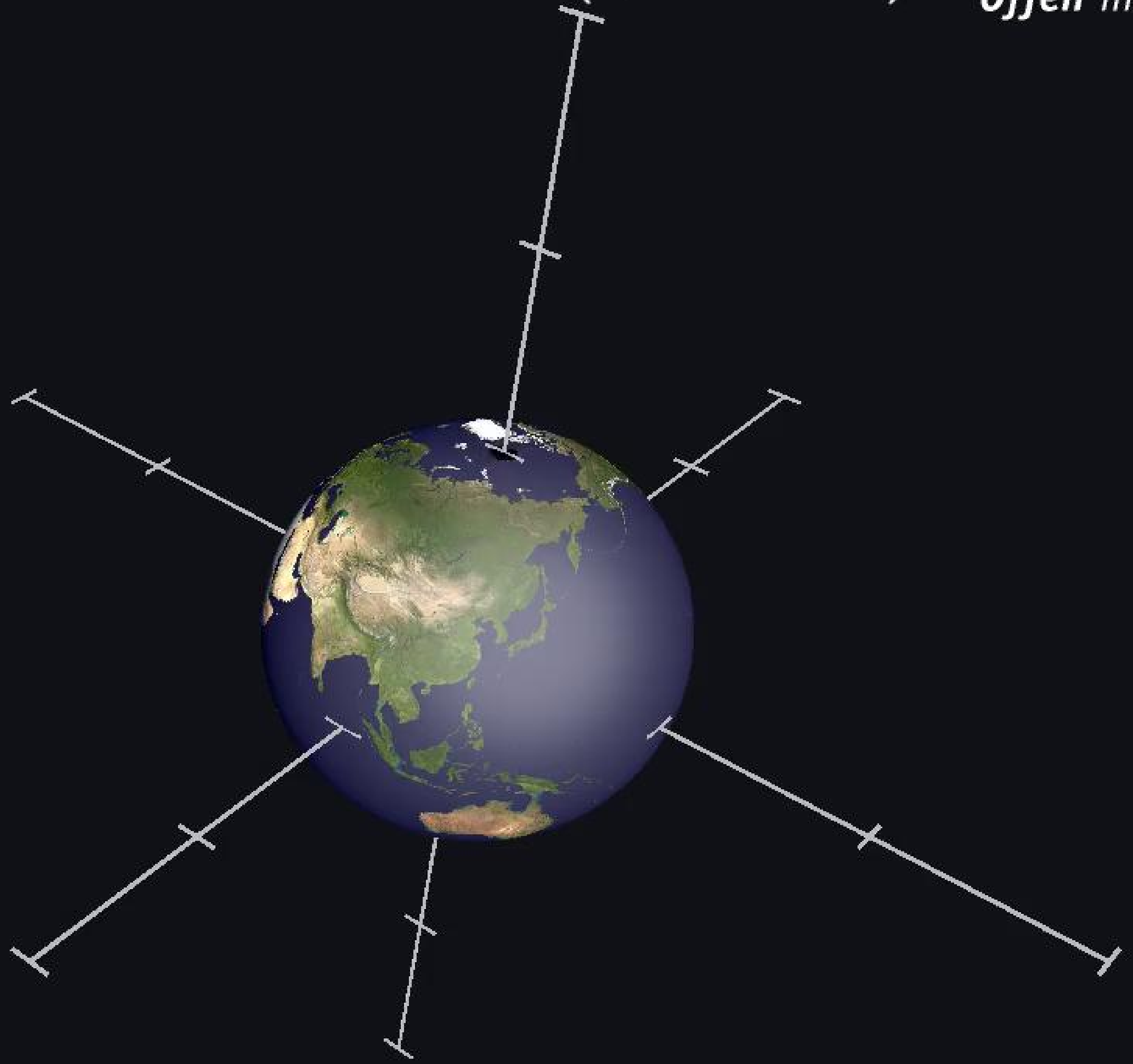
$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Rotierende Kugelmasse

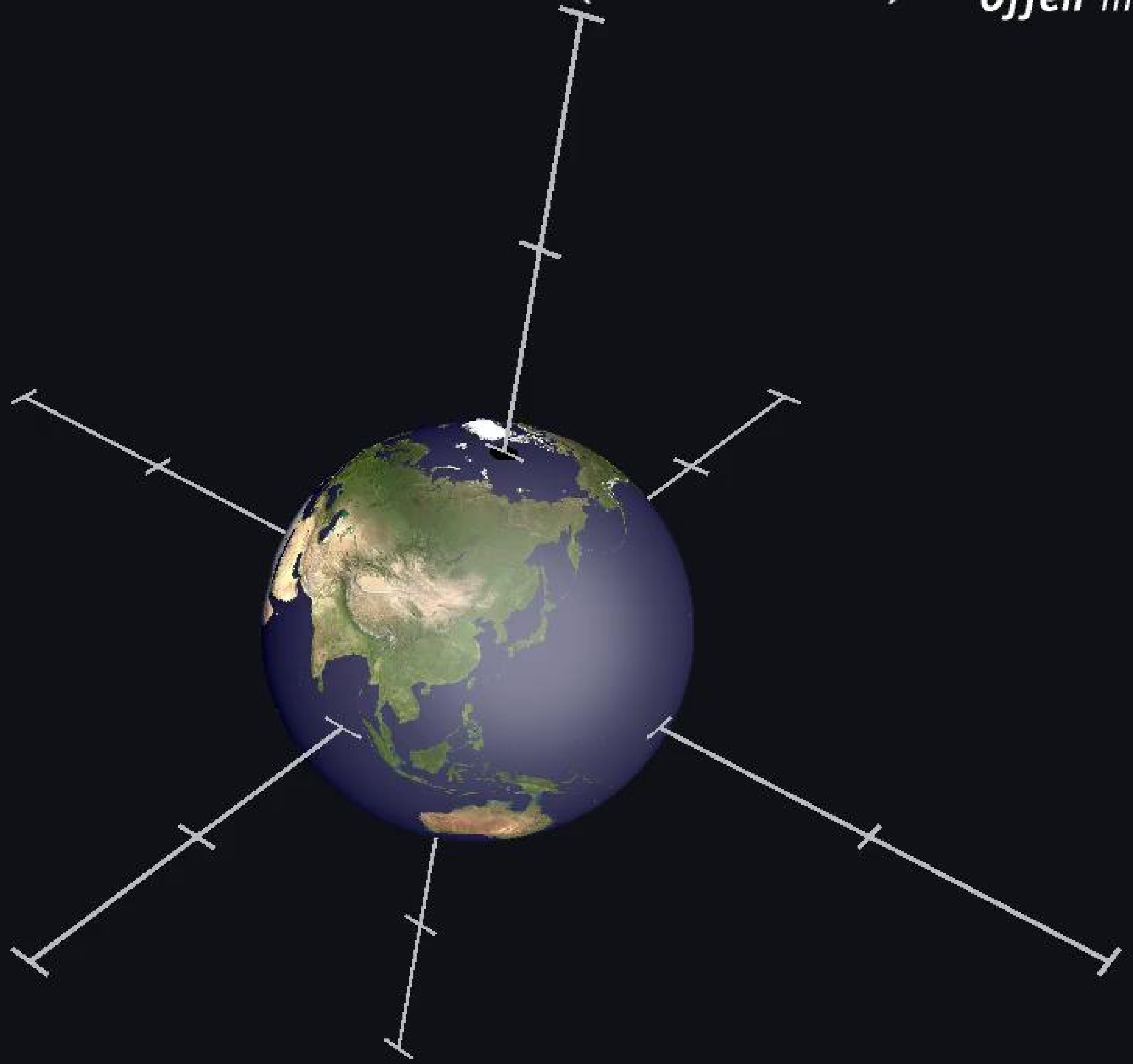
$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$



Rotierende Kugelmasse

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$



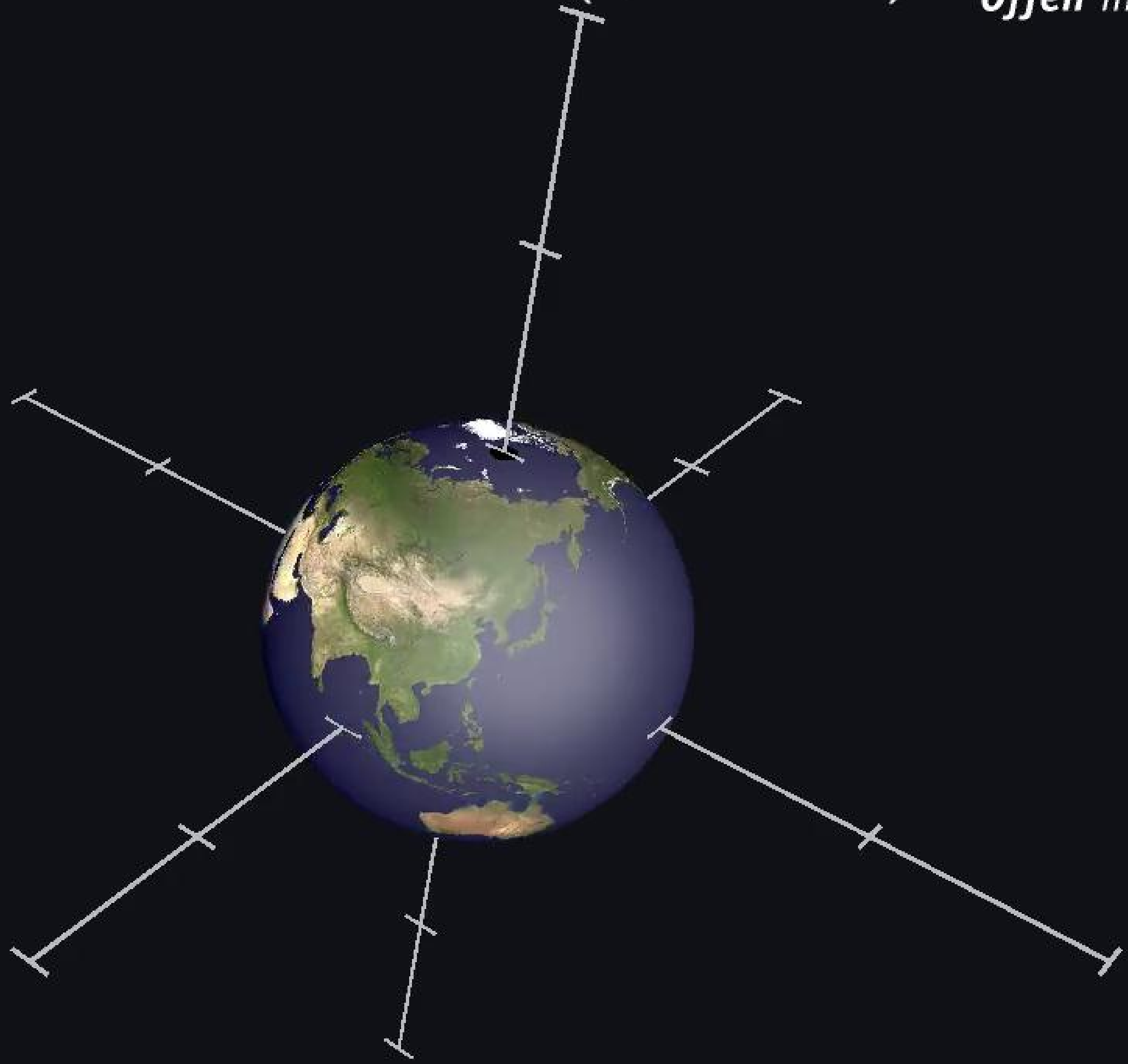
Rotierende Kugelmasse

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$



Rotierende Kugelmasse

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$

EM-Felder

$$c = G = 1$$
$$(+ - - -)$$

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

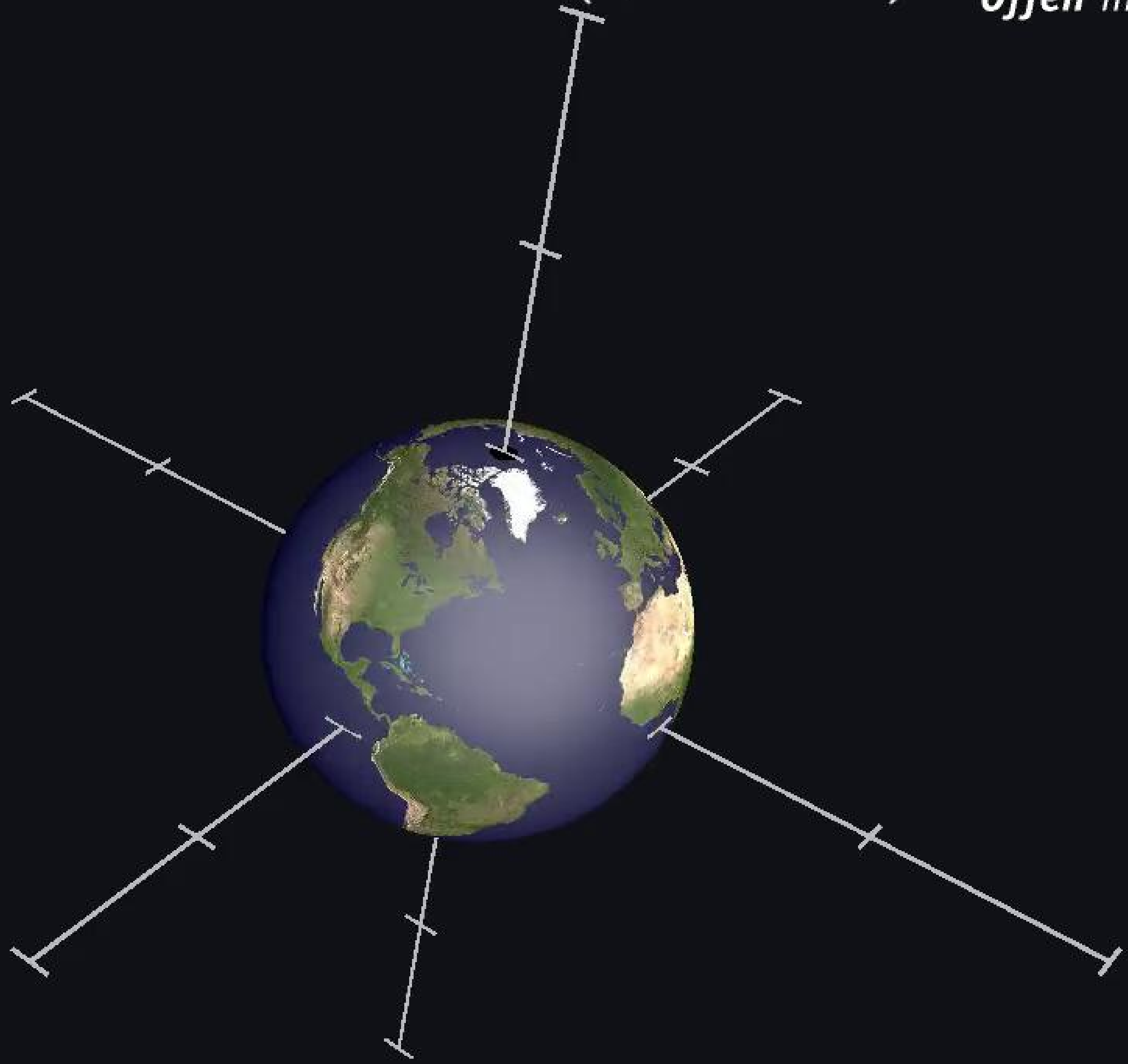
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{|\vec{x}|^3}\left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right]$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I\vec{\omega}$$



EM-Felder

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

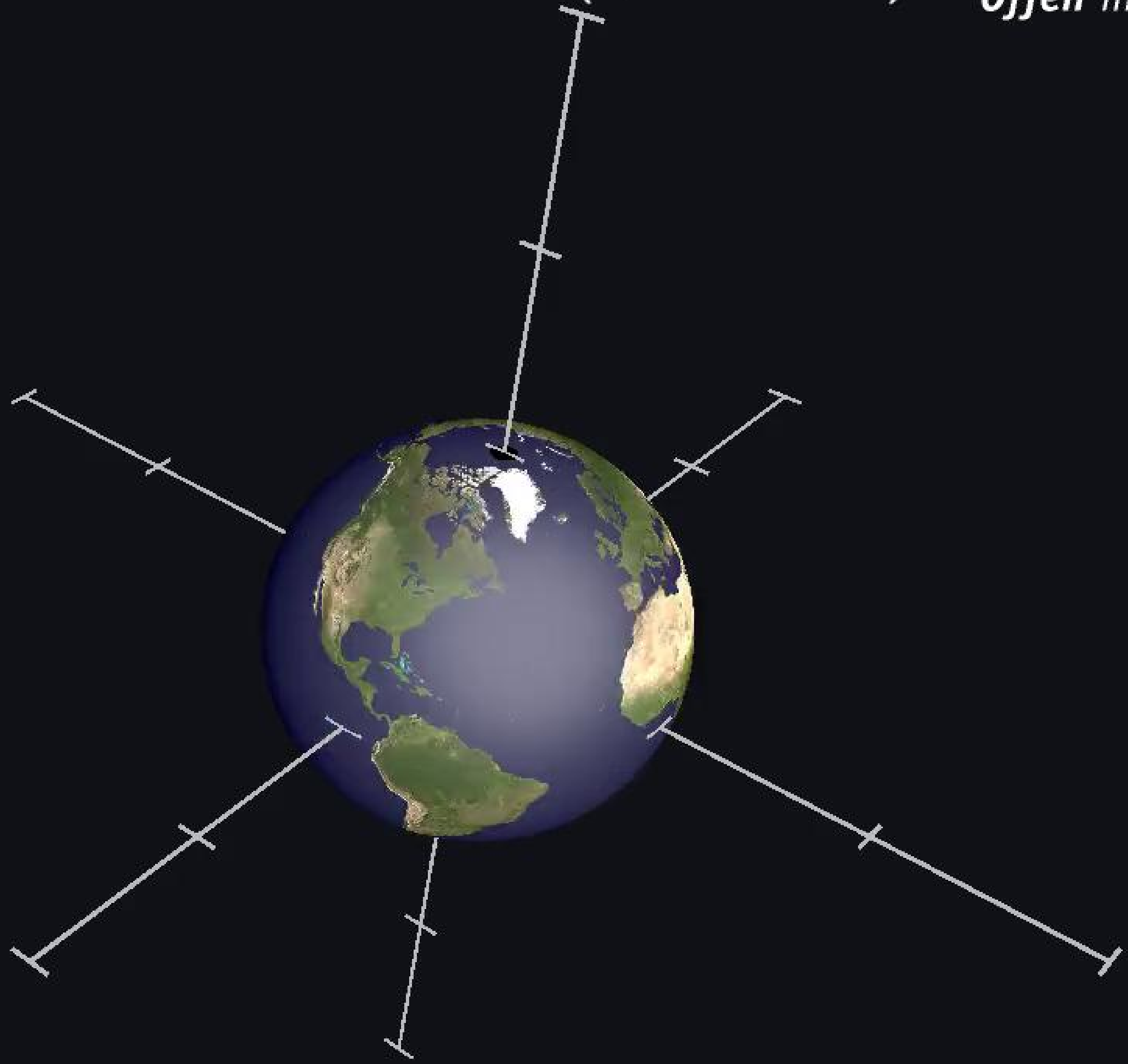
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$



EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

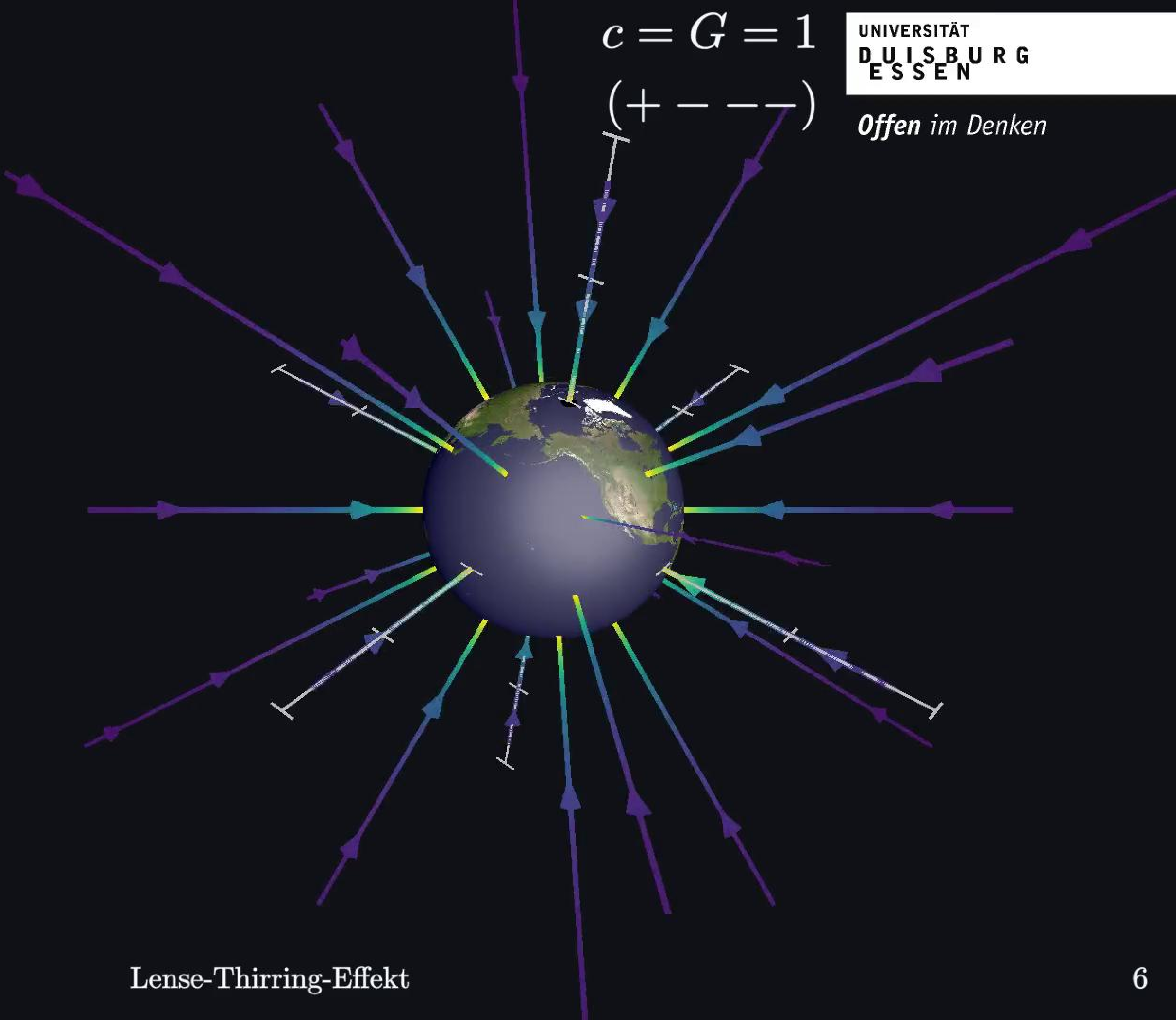
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{|\vec{x}|^3}\left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right]$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I\vec{\omega}$$



$$c = G = 1$$

$$(+ - - -)$$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x}\Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

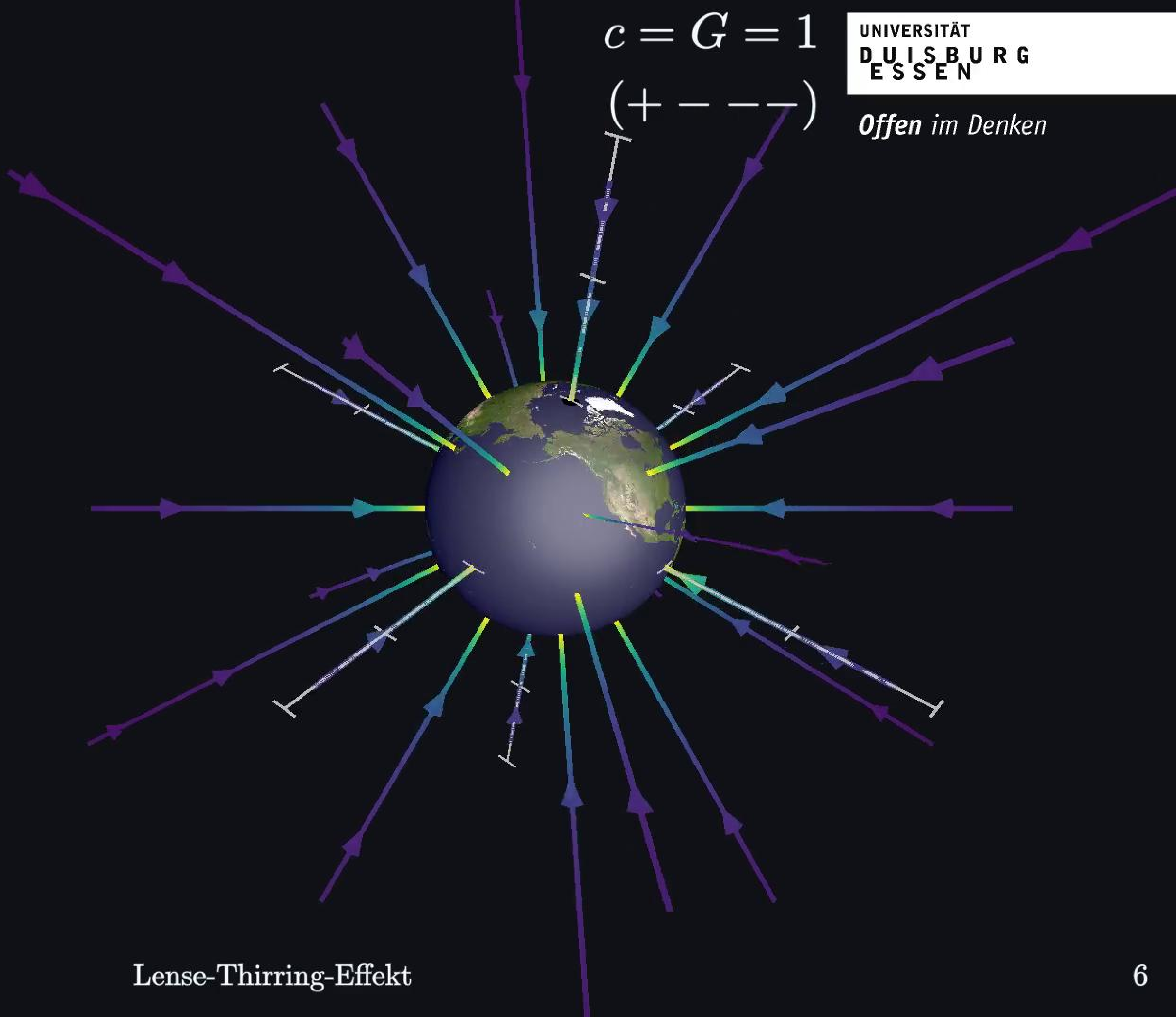
$$\vec{B} = \frac{1}{|\vec{x}|^3}\left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right]$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\vec{S} = I\vec{\omega}$$

$c = G = 1$

$(+ - - -)$



EM-Felder

$c = G = 1$

$(+ - - -)$

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

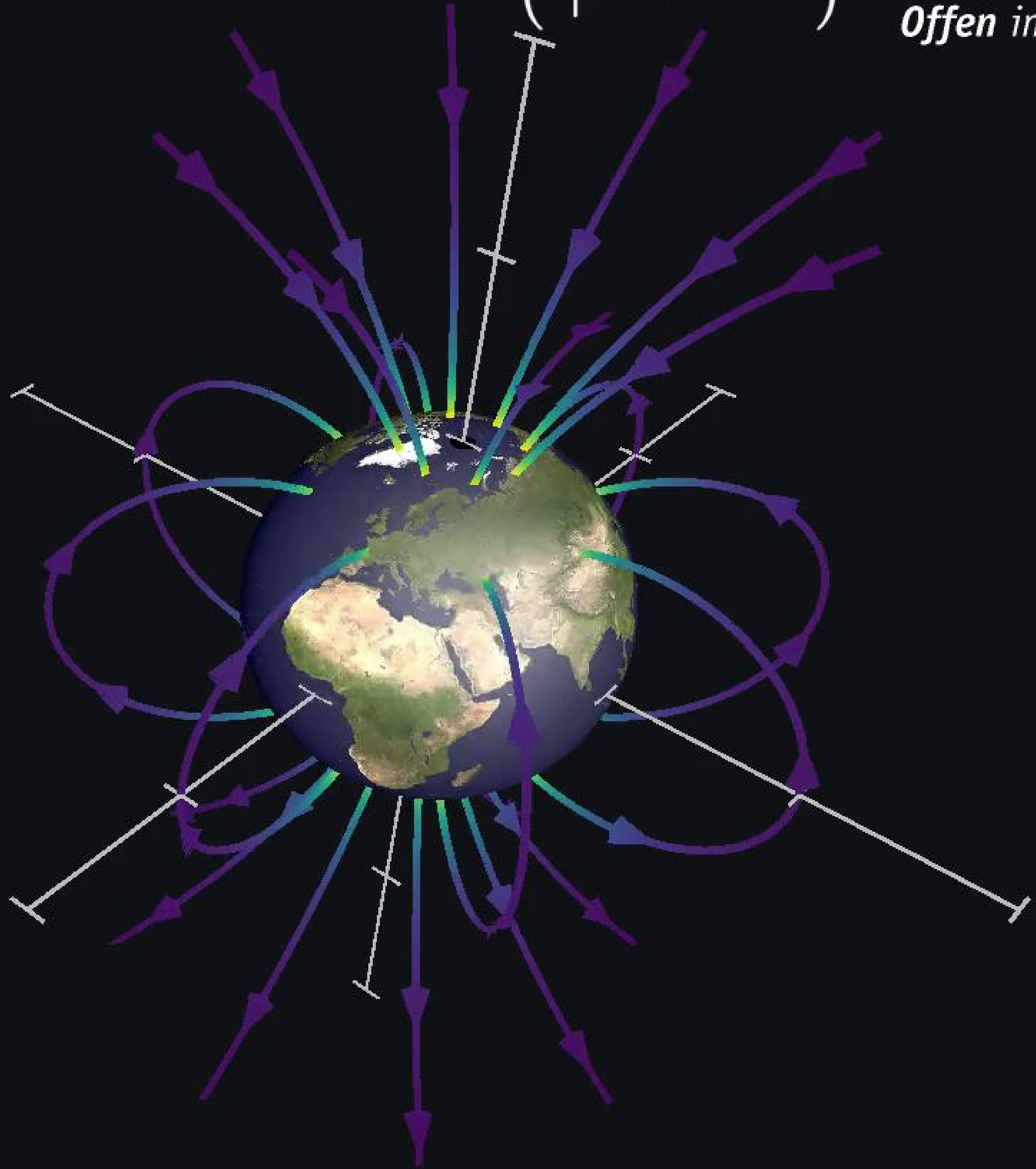
$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{|\vec{x}|^3} \left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right]}$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$



$c = G = 1$

$(+ - - -)$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

EM-Felder

$$\rho(|\vec{x}|) = \rho_0 \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{x} \Theta(R - |\vec{x}|)$$

$$\vec{E} = -\frac{M\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{|\vec{x}|^3}\left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S}\cdot\vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^2}\right]}$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\vec{S} = I\vec{\omega}$$