



UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Offen im Denken

Auflösungseffekte in Modellen verschiedener Reynolds-Regime für Unterschallströmungen um ein Hindernis

Vortrag im Bachelorseminar SoSe 24

Betreuer: Prof. Dr. Rolf Kuiper, Dr. Lothar Brendel

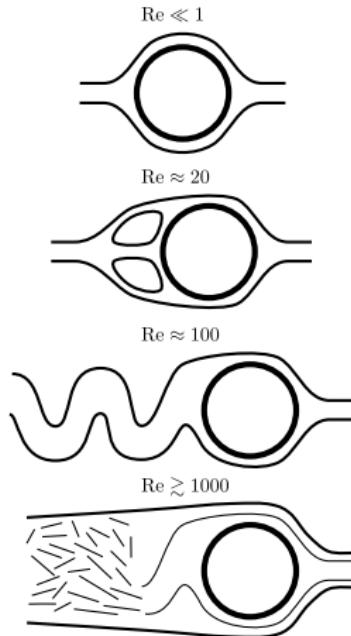
Marvin Henke ■ 12. Juni 2024

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation & Zielsetzung
2. Theorie
 - 2.1 Kontinuitätsgleichung & Navier-Stokes-Gleichung
 - 2.2 Reynoldszahl & Machzahl
 - 2.3 Potentialströmung
3. Strömungsregime
4. Numerik
 - 4.1 Simulationsparameter und Randbedingungen
5. Auswertung und Ergebnisse
 - 5.1 Kriechregime → Vortexregime
 - 5.2 Vortexregime → periodisch laminar
6. Projektplanung
7. Ausblick

Motivation & Zielsetzung

Motivation & Zielsetzung



- genaue Bestimmung der Regimeübergänge
- Untersuchung von Auflösungs- & Randeffekten
- Tauglichkeit des Simulationsprogramms *Pluto*
für $Ma \ll 1$ überprüfen

Abbildung 1: Regime

Theorie

Kontinuitätsgleichung & Navier-Stokes-Gleichung

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

Kontinuitätsgleichung & Navier-Stokes-Gleichung

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

Kontinuitätsgleichung & Navier-Stokes-Gleichung

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

$$\Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3\text{Re}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \quad (2)$$

(vgl. Landau und Lifshitz, 1987)

Reynoldszahl & Machzahl

$$\text{Re} = \frac{vL\rho}{\mu}$$

- dimensionslos
- für *viskose* Fluide
- hier: $v = v(r \rightarrow \infty)$, $\rho = \rho(r \rightarrow \infty)$
- $L = 2 \cdot R$, mit dem *Zylindrerradius* R
- gibt die *dynamische Viskosität* μ vor

$$\text{Ma} = \frac{v}{c}$$

- dimensionslos
- für *kompressible* Fluide
- hier: $v = v(r \rightarrow \infty) \ll c$, d.h. kleine Machzahlen (subsonisch)
- gibt die Geschwindigkeit v_{ext} vor

Potentialströmung um einen Zylinder mit Radius R

Annahmen

inkompressibel ($\frac{d\rho}{dt} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), inviskos ($\nu = 0$), wirbelfrei ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), stationär

Potentialströmung um einen Zylinder mit Radius R

Annahmen

inkompressibel ($\frac{d\rho}{dt} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), inviskos ($\nu = 0$), wirbelfrei ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), stationär

Randbedingungen

$\mathbf{v}(r \rightarrow \infty) = -v_0 \hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}(r = R) = 0$

Potentialströmung um einen Zylinder mit Radius R

Annahmen

inkompressibel ($\frac{d\rho}{dt} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), inviskos ($\nu = 0$), wirbelfrei ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), stationär

Randbedingungen

$$\mathbf{v}(r \rightarrow \infty) = -v_0 \hat{\mathbf{e}}_x \text{ und } \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}(r = R) = 0$$

Herleitung

- Es existiert ein Potential ϕ mit $-\nabla\phi = \mathbf{v}$
- Kontinuitätsgleichung (1) \Rightarrow Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$

Potentialströmung um einen Zylinder mit Radius R

Annahmen

inkompressibel ($\frac{d\rho}{dt} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), inviskos ($\nu = 0$), wirbelfrei ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), stationär

Randbedingungen

$$\mathbf{v}(r \rightarrow \infty) = -v_0 \hat{\mathbf{e}}_x \text{ und } \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}(r = R) = 0$$

Herleitung

- Es existiert ein Potential ϕ mit $-\nabla\phi = \mathbf{v}$
- Kontinuitätsgleichung (1) \Rightarrow Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$

Mit den Randbedingungen ergibt sich als Lösung

$$\mathbf{v}(r, \varphi) = v_0 \left[\hat{\mathbf{r}} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \cos \varphi + \hat{\varphi} \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) \sin \varphi \right]$$

(vgl. Landau und Lifshitz, 1987)

Potentialströmung um einen Zylinder mit Radius R

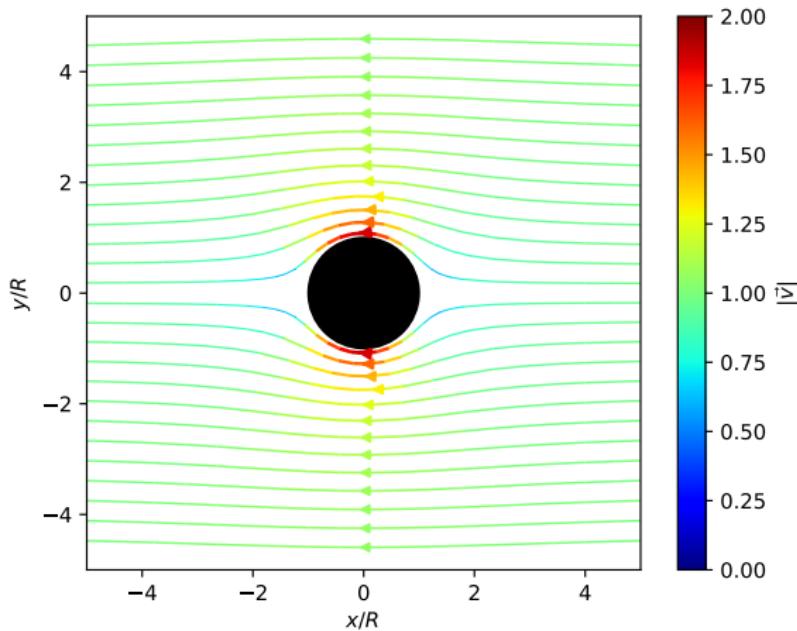
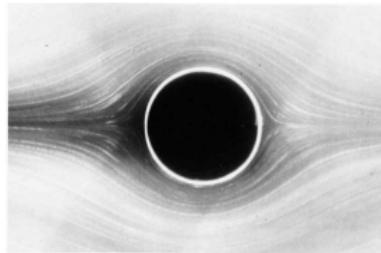


Abbildung 2: Potentialströmung von rechts um einen Zylinder mit Radius R

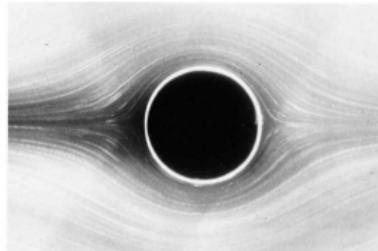
Strömungsregime

Überblick über die betrachteten Strömungsregime

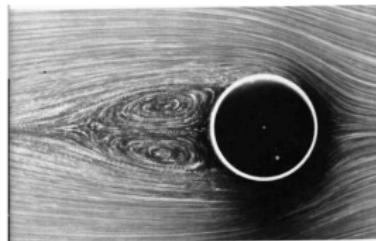


(a) $Re = 0.16$
Kriechregime

Überblick über die betrachteten Strömungsregime

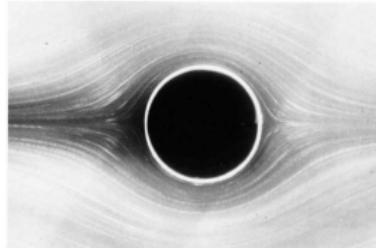


(a) $Re = 0.16$
Kriechregime

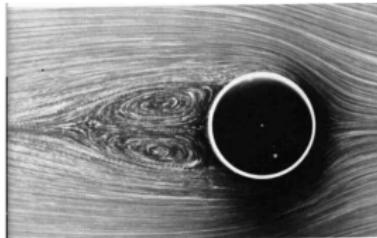


(b) $Re = 26$
stationäres Vortexregime

Überblick über die betrachteten Strömungsregime



(a) $Re = 0.16$
Kriechregime

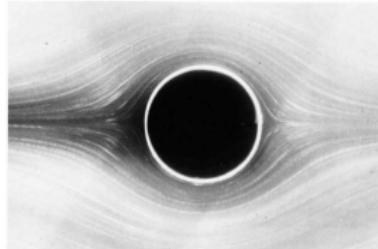


(b) $Re = 26$
stationäres Vortexregime

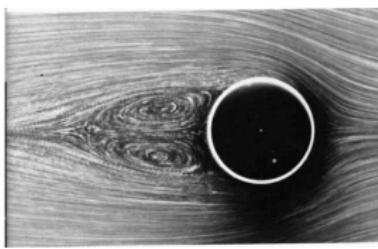


(c) $Re = 105$
periodisch laminares Regime

Überblick über die betrachteten Strömungsregime



(a) $Re = 0.16$
Kriechregime



(b) $Re = 26$
stationäres Vortexregime



(c) $Re = 105$
periodisch laminares Regime



(d) $Re = 190$
turbulente Wirbelstraße

Abbildung 3: (a-c) von Sadatoshi Taneda, entnommen aus Van Dyke, 1982
(d) aus Zdravkovich und Bearman, 1998

Numerik

Numerik - Überblick

- Fluidsimulation in Zylinderkoordinaten in
Pluto 4.4 (Mignone u. a., 2007)

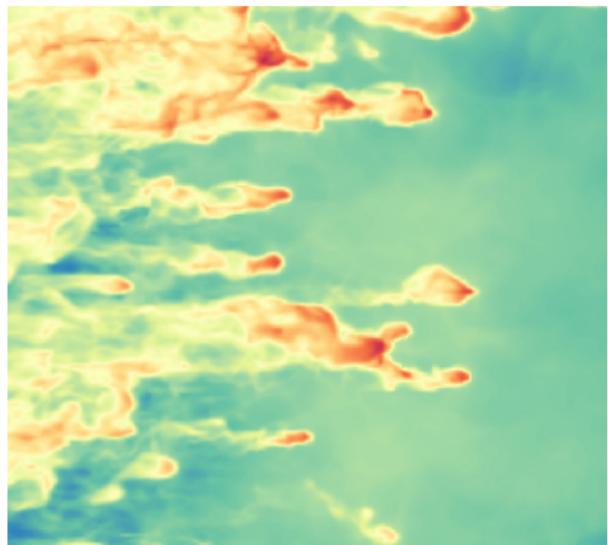


Abbildung 4: Menon u. a., 2020: Einfluss ionisierender Strahlung auf das interstellare Medium

Numerik - Überblick

- Fluidsimulation in Zylinderkoordinaten in *Pluto 4.4* (Mignone u. a., 2007)
- *Finite Volumen Methode* zum Lösen des Gleichungssystems aus:

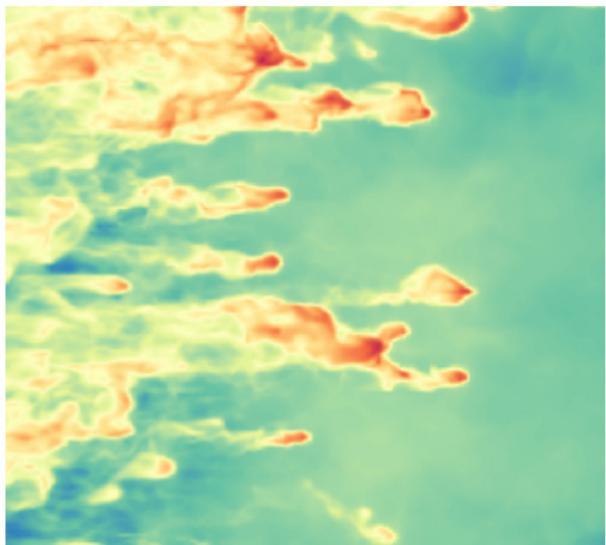


Abbildung 4: Menon u. a., 2020: Einfluss ionisierender Strahlung auf das interstellare Medium

Numerik - Überblick

- Fluidsimulation in Zylinderkoordinaten in *Pluto 4.4* (Mignone u. a., 2007)
- *Finite Volumen Methode* zum Lösen des Gleichungssystems aus:
 - Kontinuitätsgleichung (vgl. Gl. (1))

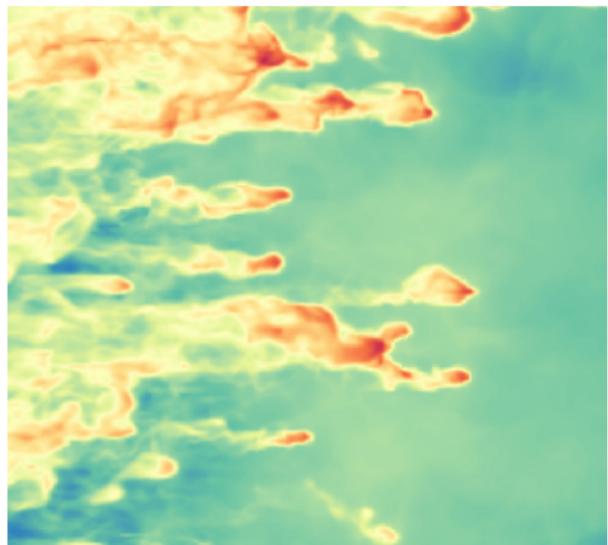


Abbildung 4: Menon u. a., 2020: Einfluss ionisierender Strahlung auf das interstellare Medium

Numerik - Überblick

- Fluidsimulation in Zylinderkoordinaten in *Pluto 4.4* (Mignone u. a., 2007)
- *Finite Volumen Methode* zum Lösen des Gleichungssystems aus:
 - Kontinuitätsgleichung (vgl. Gl. (1))
 - Impulsgleichung/Navier-Stokes-Gleichung (vgl. Gl. (2))

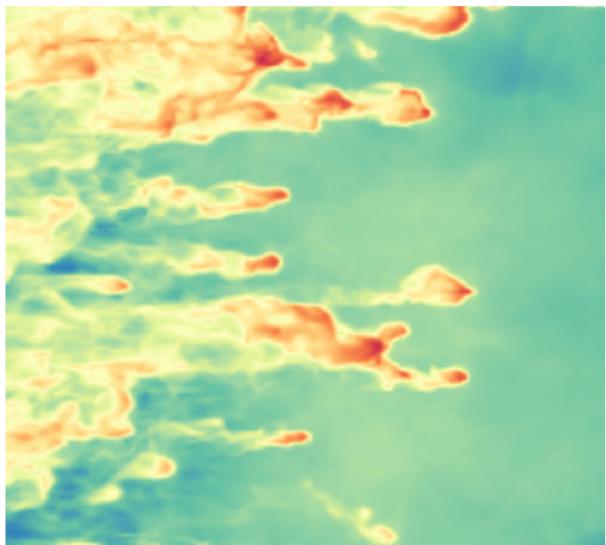


Abbildung 4: Menon u. a., 2020: Einfluss ionisierender Strahlung auf das interstellare Medium

Numerik - Überblick

- Fluidsimulation in Zylinderkoordinaten in *Pluto 4.4* (Mignone u. a., 2007)
- *Finite Volumen Methode* zum Lösen des Gleichungssystems aus:
 - Kontinuitätsgleichung (vgl. Gl. (1))
 - Impulsgleichung/Navier-Stokes-Gleichung (vgl. Gl. (2))
 - Energiegleichung

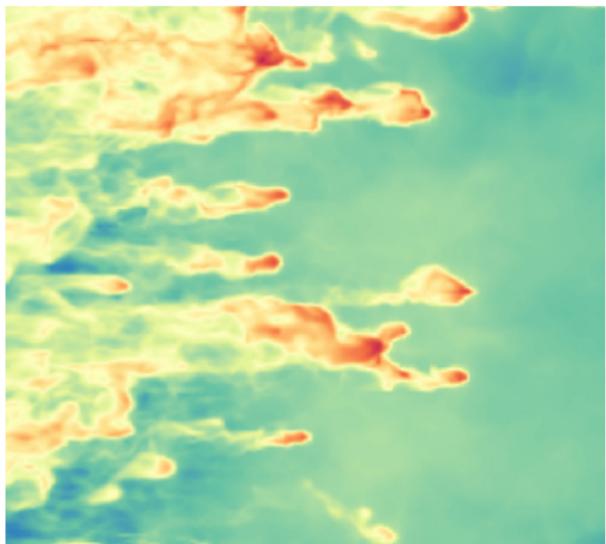


Abbildung 4: Menon u. a., 2020: Einfluss ionisierender Strahlung auf das interstellare Medium

Numerik - Überblick

- Fluidsimulation in Zylinderkoordinaten in *Pluto 4.4* (Mignone u. a., 2007)
- *Finite Volumen Methode* zum Lösen des Gleichungssystems aus:
 - Kontinuitätsgleichung (vgl. Gl. (1))
 - Impulsgleichung/Navier-Stokes-Gleichung (vgl. Gl. (2))
 - Energiegleichung
 - Zustandsgleichung

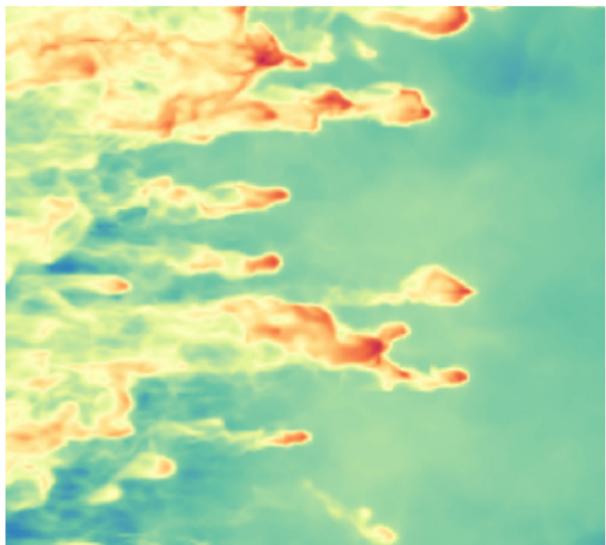


Abbildung 4: Menon u. a., 2020: Einfluss ionisierender Strahlung auf das interstellare Medium

Numerik - Überblick

- Fluidsimulation in Zylinderkoordinaten in *Pluto 4.4* (Mignone u. a., 2007)
- *Finite Volumen Methode* zum Lösen des Gleichungssystems aus:
 - Kontinuitätsgleichung (vgl. Gl. (1))
 - Impulsgleichung/Navier-Stokes-Gleichung (vgl. Gl. (2))
 - Energiegleichung
 - Zustandsgleichung
- Fehler in Raum und Zeit von dritter Ordnung

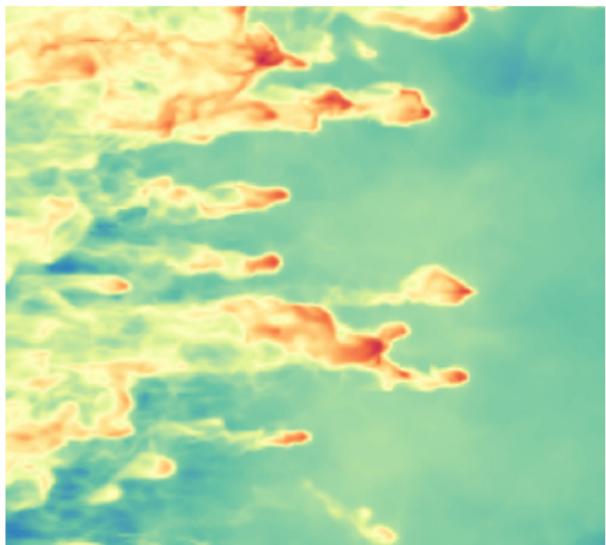


Abbildung 4: Menon u. a., 2020: Einfluss ionisierender Strahlung auf das interstellare Medium

Simulationsparameter und Randbedingungen

Randbedingungen

- Simulationsgebiet: $(r, \varphi) \in [R, R_\infty] \times [0, 2\pi)$ mit $R = 1$ und $R_\infty = 10$

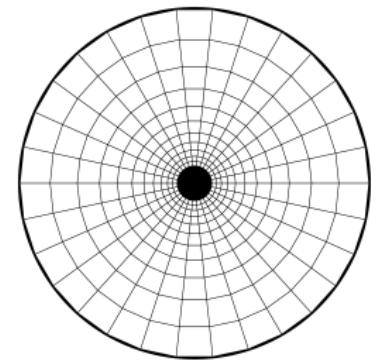


Abbildung 5: 11×30 Gitter

Simulationsparameter und Randbedingungen

Randbedingungen

- Simulationsgebiet: $(r, \varphi) \in [R, R_\infty] \times [0, 2\pi)$ mit $R = 1$
und $R_\infty = 10$
- äußerer Rand: $\mathbf{v}_{\text{ext}} = -v_{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_x$, $\rho_{\text{ext}} = 1$, $p_{\text{ext}} = \frac{c^2 \rho_{\text{ext}}}{\gamma}$
mit $c = 1$ und dem Isentropenexponent $\gamma = 1 + \frac{2}{f} = \frac{5}{3}$

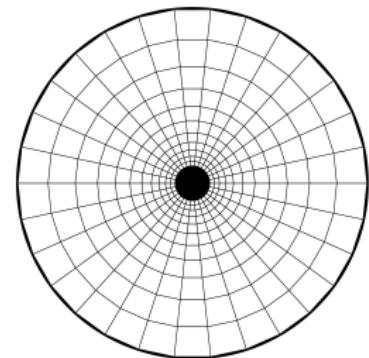


Abbildung 5: 11×30 Gitter

Simulationsparameter und Randbedingungen

Randbedingungen

- Simulationsgebiet: $(r, \varphi) \in [R, R_\infty] \times [0, 2\pi]$ mit $R = 1$
und $R_\infty = 10$
- äußerer Rand: $\mathbf{v}_{\text{ext}} = -v_{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_x$, $\rho_{\text{ext}} = 1$, $p_{\text{ext}} = \frac{c^2 \rho_{\text{ext}}}{\gamma}$
mit $c = 1$ und dem Isentropenexponent $\gamma = 1 + \frac{2}{f} = \frac{5}{3}$
- innerer Rand: no-slip Randbedingung ($\mathbf{v}_{\text{int}} = 0$)

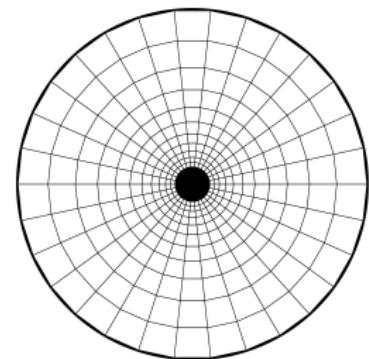


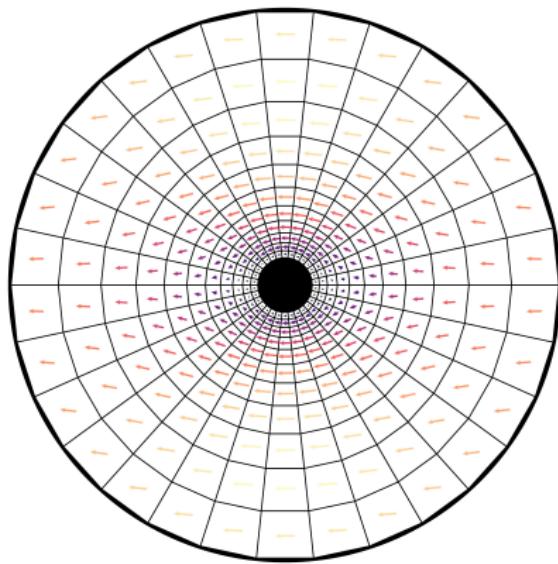
Abbildung 5: 11×30 Gitter

Auswertung und Ergebnisse

Methodik: Kriechregime → Vortexregime

Merkmale

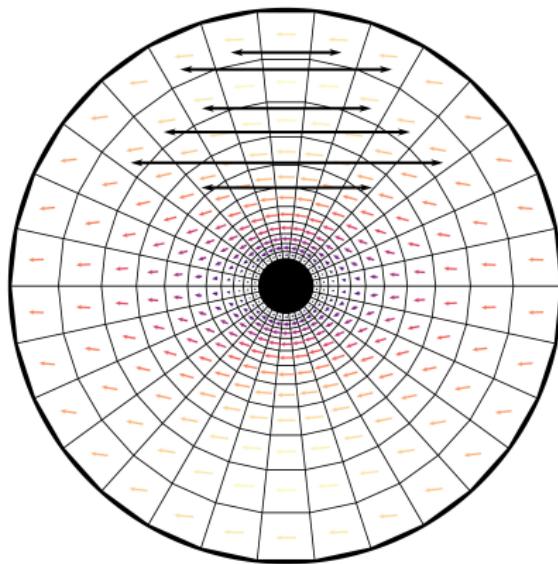
Symmetrieverlust bezüglich der y -Achse, da hinter dem Zylinder Wirbel entstehen.



Methodik: Kriechregime → Vortexregime

Merkmale

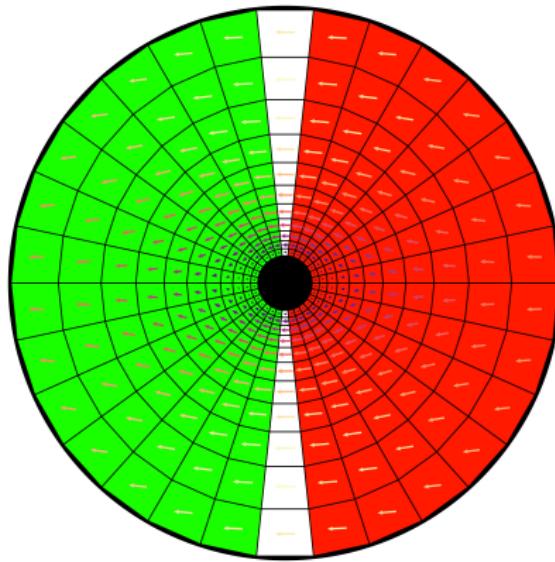
Symmetrieverlust bezüglich der y -Achse, da hinter dem Zylinder Wirbel entstehen.



Methodik: Kriechregime → Vortexregime

Merkmale

Symmetrieverlust bezüglich der y -Achse, da hinter dem Zylinder Wirbel entstehen.



Methodik: Kriechregime → Vortexregime

Merkmale

Symmetrieverlust bezüglich der y -Achse, da hinter dem Zylinder Wirbel entstehen.

Symmetrie

Maß für die Symmetrie eines Skalarfelds $s(r, \varphi, t)$ (z.B. $\rho(r, \varphi, t)$):

$$S(s) := 1 - \left\langle \frac{\left\langle (s(r, \varphi^*, t) - s(r, \pi - \varphi^*, t))^2 \right\rangle_{r, \varphi^*}}{\langle s^2(r, \varphi, t) \rangle_{r, \varphi}} \right\rangle_t \quad (3)$$

Wobei $\varphi^* \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Simulation: Kriechregime → Vortexregime

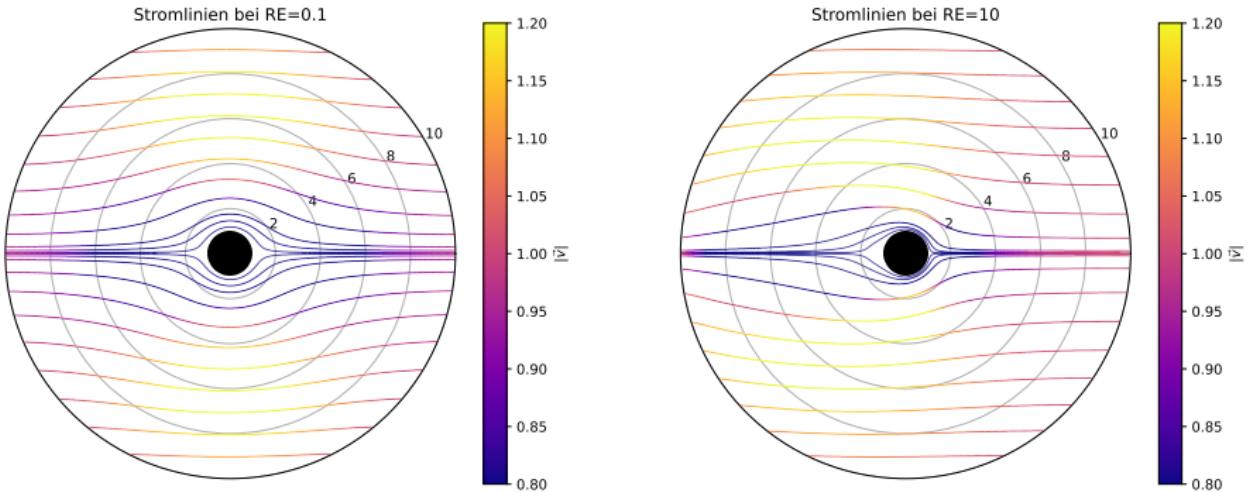


Abbildung 6: Übergang Kriechregime → Vortexregime bei $Re = 0.1 \rightarrow Re = 10$

Ergebnisse: Kriechregime → Vortexregime

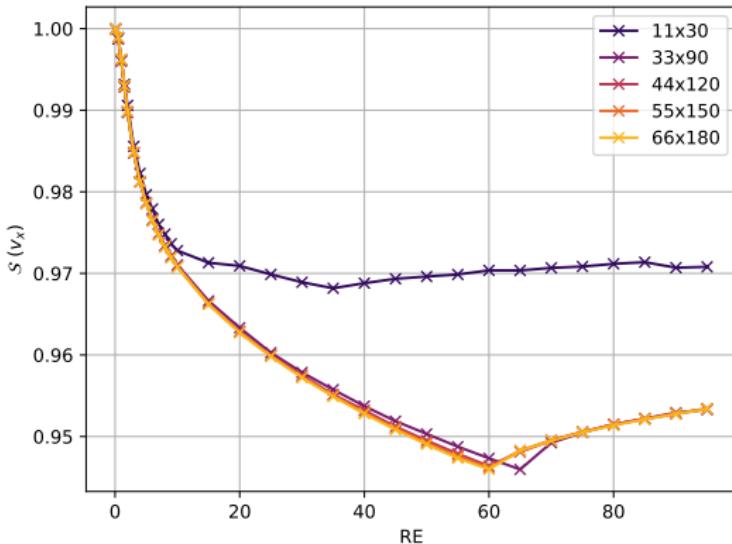


Abbildung 7: Symmetrie $S(v_x)$ für verschiedene Re und verschiedene Gitter

Ergebnisse: Kriechregime → Vortexregime

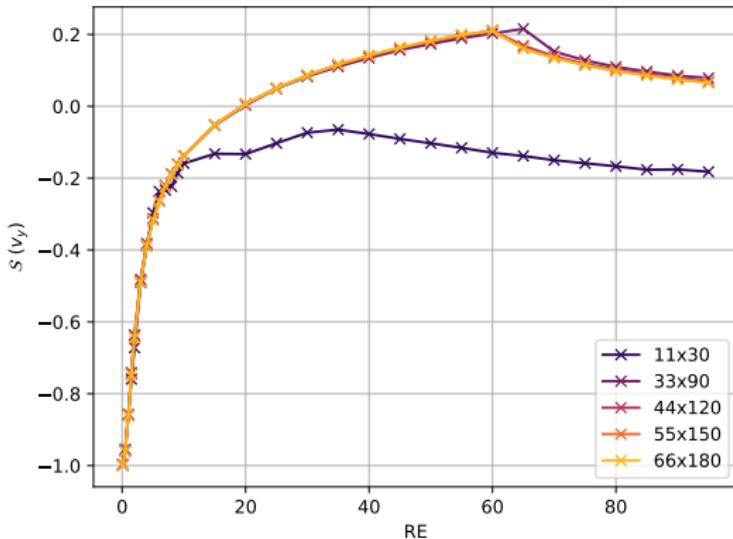


Abbildung 8: Symmetrie $S(v_y)$ für verschiedene Re und verschiedene Gitter

Methodik: Vortexregime → periodisch laminar

Merkmale

Aufhebung des stationären Zustands, da die Strömungskenngrößen anfangen in der Zeit zu oszillieren

Zeitableitung

Maß für die Zeitableitung eines Skalarfelds $s(r, \varphi, t)$ (z.B. $\rho(r, \varphi, t)$):

$$\mathcal{C}_t(s) := \frac{\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} s(r, \varphi, t) \right)^2 \right\rangle_{r, \varphi, t}}{\left(\frac{v_{\text{ext}}}{R} \right)^2 \langle s^2(r, \varphi, t) \rangle_{r, \varphi, t}} \quad (4)$$

Wobei hier $v_{\text{ext}} = 0.01c$ und $R = 1$.

Simulation: Vortexregime → periodisch laminar

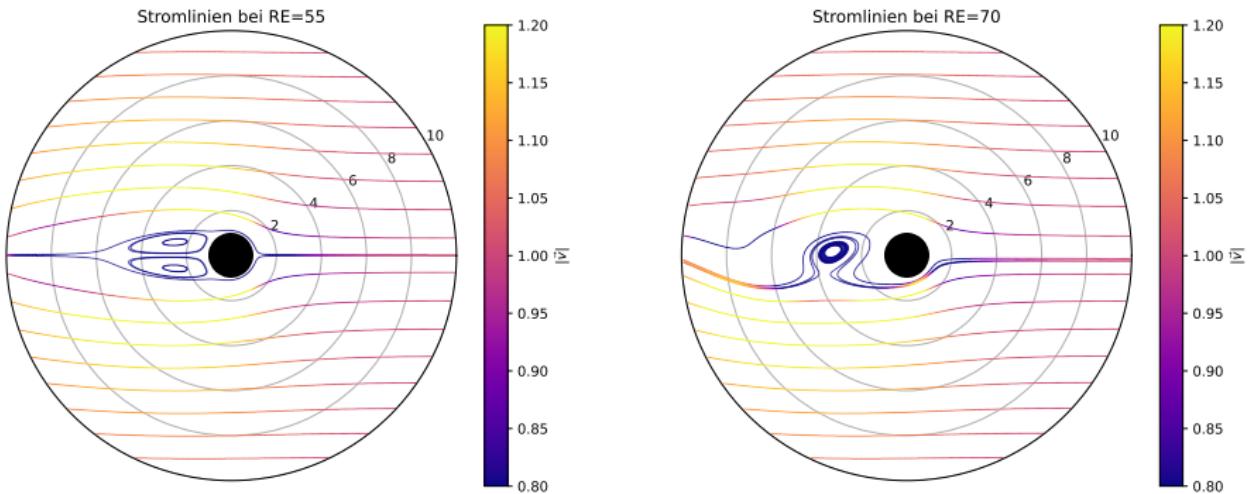


Abbildung 9: Übergang Vortexregime → periodisch laminar bei $Re = 55 \rightarrow Re = 70$

Ergebnisse: Vortexregime → periodisch laminar

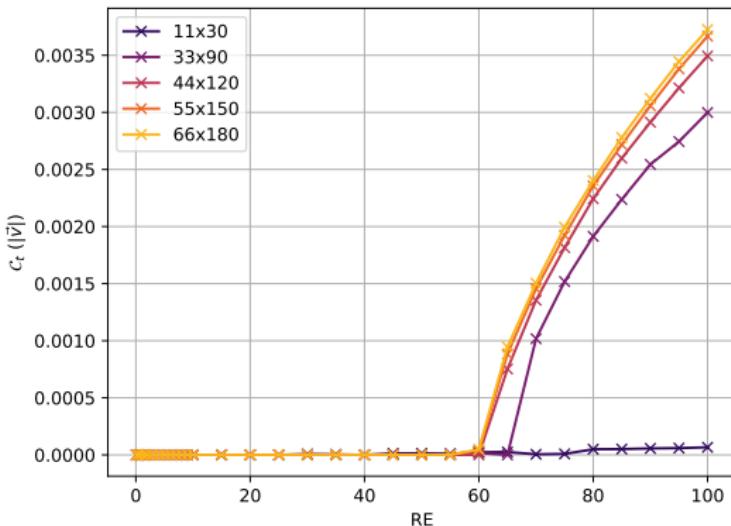


Abbildung 10: Zeitableitung $C_t(|\vec{v}|)$ für verschiedene Re und verschiedene Gitter

Projektplanung

Projektplanung

Woche		
1	Installation von VisIt, Pluto und Testen der Simulationen	✓
2	Pythonscript programmieren	✓
3	Simulationen für $0 < \text{Re} \leq 100$ und Methodik zur Bestimmung der ersten beiden Regime entwickeln	✓
4	Auswertung der Daten & Erstellen der Präsentation	✓
5	Präsentation & Pythonscript verbessern und für $\text{Re} > 100$ Simulationen starten	✓
6	Daten auswerten und Präsentation finalisieren	(✓)
7	Bachelorseminar	
8 - 12	letzte Simulationen, Auswertung und Hauptteil der Arbeit schreiben	

Ausblick

Ausblick

1. Überprüfen verschiedener Randbedingungen (In-/Outflow, größeres R_∞)
2. Untersuchung des nächsten Regimeübergangs

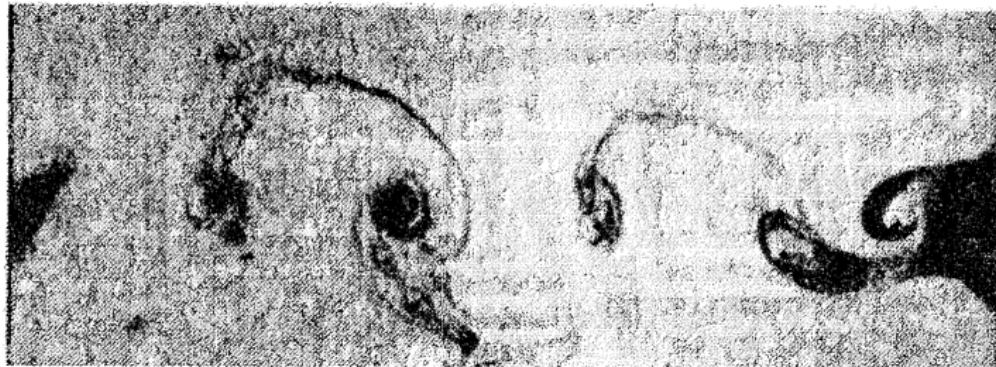


Abbildung 11: $Re = 190$ - Entstehung turbulenter Eddies, entnommen aus Zdravkovich und Bearman, 1998

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Literaturverzeichnis I

Landau, L. D. und E. M. Lifshitz (1987). *Fluid Mechanics*. 2. Aufl. Bd. 6. Course of Theoretical Physics. Pergamon.

Menon, Shyam H u. a. (Feb. 2020). „On the turbulence driving mode of expanding H₂ regions“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 493.4, S. 4643–4656.

Mignone, A. u. a. (Mai 2007). „PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics“. In: 170.1, S. 228–242.

Van Dyke, M. (1982). *An Album of Fluid Motion*. An Album of Fluid Motion Teil 2. Parabolic Press. ISBN: 9780915760022.

Zdravkovich, M. M. und P. W. Bearman (März 1998). „Flow Around Circular Cylinders—Volume 1: Fundamentals“. In: *Journal of Fluids Engineering* 120.1, S. 216–216.