

Lense-Thirring-Effekt Gravitoelectromagnetism

June 12, 2025

1 Aufgabe

1.0.1 Annahmen & Konventionen

Im Folgenden werden Natürliche Einheiten für die Zeit und Masse gewählt, sodass $c = 1$ und $G = 1$. Später wird zusätzlich die natürliche Einheit der Länge mit $R = 1$ verwendet.

Falls nicht anders spezifiziert, wird bei nicht vorgegebenen doppelten Indices die Einsteinsche Summenkonvention für $\{0, 1, 2, 3\}$ verwendet.

Es wird $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ als lineare Näherung der Metrik verwendet. Hierbei ist η_{ab} die Minkowski-Metrik:

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hierbei soll h_{ab} eine kleine Störung sein, sodass nur Terme erster Ordnung $\mathcal{O}(h_{ab})$ betrachtet werden.

Es wird im Folgenden angenommen, dass $h_{ab} = 0$ für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt.

Außerdem gilt aufgrund der Symmetrie der Metrik $h_{ab} = h_{ba}$.

Als letztes wird angenommen, dass die Störung nicht direkt Zeitabhängig ist, d.h. $\frac{\partial h_{ab}}{\partial t} = 0$.

1.1 Teil a)

Damit lassen sich die linearisierten Christoffel-Symbole wie folgt schreiben:

$$\Gamma^i_{kl} \approx \frac{1}{2} \eta^{ii} \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

Wir nehmen nun an, dass die Bewegung sehr viel langsamer als mit Lichtgeschwindigkeit stattfindet, d.h. die Eigenzeit entspricht in etwa der Koordinatenzeit t . Dafür kann die Geodätengleichung formuliert werden:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt}$$

Einsetzen liefert nun für $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^i}{dt^2} &= -\frac{1}{2} \eta_{ii} \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} \\
&= +\frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} \\
&= + \frac{\partial h_{i0}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial h_{i0}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{dt} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial x^l} \frac{dx^k}{dt} \\
&= -(\vec{\nabla} \Phi)_i - ((\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{v})_i \\
&= \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_i
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\Phi = -\frac{1}{2} h_{00}$ und $(\vec{A})_i = -h_{0i}$. Ersetzt man nun $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und fordert $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung) erhält man folgende Gleichungen (wobei hier $-\Delta h_{00} = 8\pi\rho$ und $-\Delta h_{0i} = 16\pi j_i$ verwendet wird (anders als auf den Aufgabenzettel)):

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{2} \Delta h_{00} = -4\pi\rho \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= -\Delta \vec{A} = -16\pi \vec{j}
\end{aligned}$$

1.2 Teil b)

Nun wird eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierende homogene Kugel betrachtet:

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \rho_0 \Theta(R - r) \\
\vec{j} &= \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{r} \Theta(R - r)
\end{aligned}$$

Für h_{00} gilt hier die folgende Poisson-Gleichung:

$$\Delta h_{00} = -8\pi\rho_0 \Theta(R - r)$$

Es wird folgender Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned}
h_{00} &= \frac{K}{r} \\
\vec{\nabla} h_{00} &= -K \frac{\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

Wobei K eine noch zu bestimmende Konstante ist. Diese lässt sich über das Gaußsche Gesetz bestimmen:

$$\int_{S_R} -\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{A} = \int_{B_R} -\Delta\Phi dV = 4\pi \int_{B_R} \rho_0 dV = 4\pi M$$

Hier ist M die Gesamtmasse der Kugel. Eine andere Möglichkeit ist es das Integral über die Kugeloberfläche zu berechnen:

$$\int_{S_R} -\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{A} = \frac{K}{2} \int_{S_R} \frac{1}{r^2} dA = 2\pi K$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke erhält man $K = 2M$ und somit:

$$h_{00} = \frac{2M}{r}$$

Für h_{0i} bzw. für \vec{A} gilt:

$$\Delta h_{0i} = -16\pi j_i = -16\pi \rho_0 \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k \Theta(R - r)$$

Es wird der folgende Ansatz gemacht:

$$h_{0i} = -\varepsilon_{ijk} \omega_j \frac{\partial a}{\partial x_k}$$

Wendet man hierauf den Laplace Operator an, ergibt sich:

$$\Delta h_{0i} = -\varepsilon_{ijk} \omega_j \frac{\partial(\Delta a)}{\partial x_k}$$

Aus dem Vergleich mit der vorherigen Gleichung ergibt sich:

$$\vec{\nabla}(\Delta a) = 16\pi \rho_0 \vec{r} \Theta(R - r)$$

Diese Gleichung wird nun unter der Forderung $\Delta a = 0$ für $r \rightarrow \infty$ aufintegriert:

$$\int_{\infty}^r \vec{\nabla}(\Delta a) \cdot d\vec{r} = \Delta a = 16\pi \rho_0 \int_{\infty}^r r' \Theta(R - r') dr' = 8\pi \rho_0 (r^2 - R^2) \Theta(R - r)$$

Es wird nun erneut der folgende Ansatz gewählt:

$$a = \frac{2I}{r}$$

$$\vec{\nabla}a = -2I \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Wobei I hier wieder über die Randbedingung zu bestimmen ist.

Hierzu wird erneut folgende Betrachtung angestellt:

$$\int_{S_R} \vec{\nabla}a \cdot d\vec{A} = \int_{B_R} \Delta a dV = 8\pi \int_{B_R} \rho_0 (r^2 - R^2) dV$$

$$\int_{S_R} \vec{\nabla} a \cdot d\vec{A} = -2I \int_{S_R} \frac{1}{r^2} dA = -8\pi I$$

Woraus folgt, dass I das Trägheitsmoment der Kugel ist:

$$I = \int_{B_R} \rho_0 (R^2 - r^2) dV = \frac{2}{5} MR^2$$

Damit ergibt sich nun h_{0i} durch Einsetzen:

$$h_{0i} = 2I \frac{\varepsilon_{ijk} \omega_j x_k}{r^3} = 2 \frac{I(\vec{\omega} \times \vec{r})_i}{r^3} = 2 \frac{(\vec{S} \times \vec{r})_i}{r^3}$$

Wobei hier $\vec{S} = I\vec{\omega}$ der Drehimpuls von der Kugel ist.

1.3 Teil c)

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} = -\frac{M\vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = -2\vec{\nabla} \times \frac{\vec{S} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{2}{r^3} \left[\vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} \right] \end{aligned}$$

Hiermit lässt sich nun die Kraft auf ein Testteilchen der Masse m schreiben als:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{E} + m\vec{v} \times \vec{B} = \frac{m}{r^3} \left[-M\vec{r} + 2\vec{v} \times \vec{S} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{v} \times \vec{r} \right]$$

1.3.1 Kraft auf radial senkrecht zu \vec{S} einfallendes Teilchen

Befindet sich ein Teilchen in der Ebene senkrecht zu \vec{S} und bewegt sich in radiale Richtung mit Geschwindigkeit v , wirkt folgende Kraft:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{r^3} \left[-Mr\hat{r} + \frac{4}{5} Mv\omega\hat{\varphi} \right]$$

Daher erfährt das Teilchen zusätzlich zur newtonschen Gravitationskraft eine ein senkrecht wirkende Kraft. Das Verhältnis der Kraftbeträge ist:

$$\frac{\frac{2}{5} Mv\omega}{Mr} = \frac{4}{5} \frac{v\omega}{r}$$

Diese Kraft kann als frame-dragging verstanden werden und wirkt in Drehrichtung.

1.3.2 Kraft auf ein senkrecht über den Pol fliegendes Teilchen

Angenommen ein Teilchen befindet sich auf der z -Achse und hat eine Geschwindigkeit v in positive x -Richtung, dann wirkt folgende Kraft:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{r^3} \left[-Mr\hat{z} + \frac{8}{5} M\omega v\hat{y} \right]$$

Daher erfährt das Teilchen zusätzlich zur newtonschen Gravitationskraft eine ein senkrecht wirkende Kraft. Das Verhältnis der Kraftbeträge ist:

$$\frac{\frac{4}{5} Mv\omega}{Mr} = \frac{8}{5} \frac{v\omega}{r}$$

2 Präzession

Angenommen ein rotierendes Objekt befindet sich in festem Abstand \vec{r}_S zu dem gravitativen Körper.

Das Objekt rotiere oBdA um die z -Achse, d.h. $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

Das Objekt hat eine Massendichte von $P(\rho, z)$, die Dichte sei also konstant im Winkel φ .

Dann ist das Drehmoment gegeben durch $\frac{d\vec{L}}{dt} = \int \int \int d^3r \vec{r} \times \vec{f}_{LT}$.

Hierbei ist \vec{f}_{LT} die folgende Kraftdichte:

$$\vec{f}_{LT} = P(\rho, z) \left[2\vec{v} \times \vec{\Omega} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r}_S)}{r_S^5} \vec{v} \times \vec{r} \right]$$

Dies ergibt sich durch Einsetzen von $\vec{r}_G = \vec{r}_S + \vec{r}$ in die oben hergeleitete Kraft des Lense-Thirring-Effekts. Hierbei werden die Annahmen $r_G \approx r_S$ und $\vec{S} \cdot \vec{r}_G \approx \vec{S} \cdot \vec{r}_S$ gemacht. Der newtonsche Anteil wirkt nur auf den Schwerpunkt und geht deswegen nicht mit ein.

Die Größe $\vec{\Omega}$ dient der Übersichtlichkeit. Sie hängt nur von \vec{S} und \vec{r}_S ab und ist gegeben durch:

$$\vec{\Omega} = \frac{B(\vec{r}_S)}{2} = \frac{1}{r_S^3} \left(\vec{S} - \frac{3(\vec{S} \cdot \vec{r}_S)}{r_S^2} \vec{r}_S \right)$$

Einsetzen in die Gleichung für das Drehmoment führt zu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int \int \int d^3r \, 2P(\rho, z) \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r}_S)}{r_S^5} \int \int \int d^3r \, P(\rho, z) \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r})$$

Mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = a^2 \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}$ und $\vec{v} = \omega \rho \hat{\varphi}$ folgt dann:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \omega \int \int \int d^3r \, 2P(\rho, z) \rho (\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) \hat{\varphi} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r}_S) \omega}{r_S^5} \int \int \int d^3r \, P(\rho, z) \rho r^2 \hat{\varphi}$$

Der zweite Term verschwindet bei der Integration über φ . Damit ergibt sich:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 2\pi\omega (\hat{z} \times \vec{\Omega}) \int \int \rho^3 P(\rho, z) dz dr$$

Man erkennt hier das Trägheitsmoment $I = 2\pi \int \int \rho^3 P(\rho, z) dz dr$ wieder. Es folgt final:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L} \times \vec{\Omega}$$

Wobei hier $\vec{L} = I\vec{\omega}$ verwendet wurde.

Dies stimmt mit dem Ergebnis aus Gravitation von Misner & Thorne überein.

2.0.1 Präzession einer Akkretionsscheibe um ein Schwarzes Loch

Die Akkretionsscheibe wird als fest angenommen. Die Masse des Schwarzen Lochs wird auf $M = 1$ fixiert.

1. Gegebene Größen und Annahmen

- Ortsvektor:

$$\vec{r}(r, \phi) = r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Geschwindigkeit der Akkretionsscheibe (Kepler-Geschwindigkeit):

$$\vec{v}(r, \phi) = \sqrt{\frac{M}{r}} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Drehimpuls des Schwarzen Lochs:

$$\vec{S} = S \begin{pmatrix} \sin \epsilon \\ 0 \\ \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

- Massendichte der Scheibe:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(z)$$

2. Kraftdichte Die Lense-Thirring-Kraftdichte lautet:

$$\vec{f}_{\text{LT}} = \rho(\vec{r}) \left[\frac{2}{r^3} \vec{v} \times \vec{S} - \frac{6(\vec{S} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{v} \times \vec{r} \right].$$

Mit $\rho = \sigma \delta(z)$ und $\vec{S} \cdot \vec{r} = Sr \sin \epsilon \cos \phi$ ergibt sich:

$$\vec{f}_{\text{LT}} = \sigma \delta(z) \left[\frac{2}{r^3} \vec{v} \times \vec{S} - \frac{6S \sin \epsilon \cos \phi}{r^4} \vec{v} \times \vec{r} \right].$$

3. Drehmoment Da $\rho = \sigma \delta(z)$, reduziert sich das Volumenintegral auf eine Fläche in der $z = 0$ -Ebene:

$$\vec{M} = \int_0^{2\pi} \int_1^R \vec{r} \times \left[\frac{2}{r^2} \vec{v} \times \vec{S} - \frac{6S \sin \epsilon \cos \phi}{r^3} \vec{v} \times \vec{r} \right] dr d\phi.$$

Mit den Ausdrücken für \vec{v} und \vec{S} ergibt sich nach Auswertung der Kreuzprodukte und Integration:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8\pi S \sigma \sin \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{R}} - 1 \right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Drehimpuls der Akkretionsscheibe Der Drehimpuls ist:

$$\vec{L} = \int \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v} d^3r = \sigma \int_0^{2\pi} \int_1^R \vec{r} \times \vec{v} r dr d\phi.$$

Mit $r\vec{r} \times \vec{v} = r^{3/2} \hat{z}$ folgt:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{5} (R^{5/2} - 1) \end{pmatrix}.$$

5. Präzession Setze $\vec{L} = L_z \hat{z}$ und $\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{x} + \Omega_z \hat{z}$. Dann ist:

$$\vec{L} \times \vec{\Omega} = L_z \hat{z} \times (\Omega_x \hat{x} + \Omega_z \hat{z}) = L_z \Omega_x \hat{y}.$$

Vergleich mit $\vec{M} = M_y \hat{y}$ liefert:

$$\Omega_x = \frac{M_y}{L_z}.$$

Einsetzen der Ausdrücke für M_y und L_z ergibt:

$$\Omega_x = \frac{8\pi S \sigma \sin \epsilon (R^{-1/2} - 1)}{\frac{4\pi\sigma}{5} (R^{5/2} - 1)} = \frac{10S \sin \epsilon (R^{-1/2} - 1)}{R^{5/2} - 1}.$$

Vereinfachung mit $R^{5/2} - 1 = (R^{1/2} - 1)(R^2 + R^{3/2} + R + R^{1/2} + 1)$ führt zu:

$$\Omega_x = \frac{-10S \sin \epsilon}{R^{1/2} + R + R^{3/2} + R^2 + R^{5/2}}.$$

Damit folgt dann für $\vec{\Omega}$ unter der Annahme, dass $\vec{\Omega} \parallel \vec{S}$:

$$\vec{\Omega} = \frac{10S}{R^{1/2} + R + R^{3/2} + R^2 + R^{5/2}} \begin{pmatrix} -\sin \epsilon \\ 0 \\ -\cos \epsilon \end{pmatrix}.$$

Dies bestätigt die ursprüngliche Gleichung $\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\Omega}$.

2.0.2 Zusammenfassung

Die Lense-Thirring-Präzession einer Akkretionsscheibe um ein rotierendes Schwarzes Loch wird durch das Drehmoment $\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\Omega}$ beschrieben. Die Herleitung nutzt die gegebene Kraftdichte \vec{f}_{LT} , integriert über die Scheibe und löst die Gleichung $\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\Omega}$ für $\vec{\Omega}$. Das Ergebnis zeigt, dass die Präzessionsfrequenz $\vec{\Omega}$ proportional zum Spin \vec{S} des Schwarzen Lochs ist und mit der Größe des Schwarzen Lochs R abnimmt.

3 Umrechnung in SI-Einheiten

Aufgrund der natürlichen Einheiten ($c = 1$, $G = 1$, $R = 1$) gelten folgende Umrechnungsregeln für die drei Basiseinheiten Zeit T , Länge L und Masse M (wobei die gestrichenen Größen sowie c und G SI-Einheiten verwenden):

$$\begin{aligned} r &= r' R^{-1} \\ \Rightarrow L &= L' R^{-1} \\ v &= v' c^{-1} = L T^{-1} = L' T'^{-1} c^{-1} \\ \Rightarrow T &= T' c R^{-1} \\ L^3 M^{-1} T^{-2} &= L'^3 M'^{-1} T'^{-2} G^{-1} \\ \Rightarrow M &= M' G c^{-2} R^{-1} \end{aligned}$$

Daher gilt für den Drehimpuls:

$$S = M L^2 T^{-1} = M' L'^2 T'^{-1} G c^{-3} R^{-2} = S' G c^{-3} R^{-2}$$

4 Freie Parameter und Beispiele zur Einschätzung der Größenordnungen

Die freien Parameter sind M, ω .

4.0.1 Beispiel Erde

Die Erde hat eine Masse von $M' = 5.9722 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega' = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = \frac{2\pi}{86400} \frac{1}{\text{s}}$.

Der Erdradius beträgt etwa $6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Damit ergibt sich in natürlichen Einheiten:

$$M = M' G c^{-2} R^{-1} = 6.96 \cdot 10^{-10}$$

$$\omega = \omega' c^{-1} R = 1.55 \cdot 10^{-6}$$

Mit $m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2}$ ergibt sich eine Abschätzung für die größtmögliche theoretische Winkelgeschwindigkeit in natürlichen Einheiten:

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{M}$$

Was in natürlichen Einheiten etwa $\omega_{\text{max}} = 2.64 \cdot 10^{-5}$ entspricht.

Da die Kräfte des Lense-Thirring-Effekts aber $\propto \frac{v\omega}{r}$ sind, lässt sich der Einfluss nur für sehr kleine Radien r bemerken. Allerdings gilt die Formel für die Kraft nur außerhalb der Kugel für $r > 1$. Für die Parameter der Erde, kann man also nur einen sehr kleinen Effekt beobachten.

4.0.2 Beispiel Neutronenstern

Ein Neutronenstern hat typischerweise eine Masse von etwa $M' = 1.5M_0 = 3 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Der am schnellsten rotierende bekannte Neutronenstern hat eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega' = 2\pi \cdot 716 \frac{1}{\text{s}}$.

Der Radius beträgt etwa 10^4 m .

Damit ergibt sich in natürlichen Einheiten:

$$M = M' G c^{-2} R^{-1} = 0.22$$

$$\omega = \omega' c^{-1} R = 0.15$$

Auch hier ist der zusätzliche Kraftterm maximal 15 % der Newtonschen Gravitationskraft und hat geringe Auswirkungen.

4.0.3 Extremfall

Die theoretisch höchste mögliche Winkelgeschwindigkeit wird für eine am Außenrand mit Lichtgeschwindigkeit rotierende Kugel erreicht, d.h. $\omega_{\text{max}} = \frac{c}{R}$. In den gewählten natürlichen Einheiten gilt also $\omega_{\text{max}} = 1$. Selbst in diesem Fall ist der zusätzliche Kraftterm noch kleiner als der klassische. Der Lense-Thirring-Effekt lässt sich also nicht besonders gut anhand von Trajektorien beobachten, da hier der Einfluss zu gering ist. Die durch den Lense-Thirring-Effekt verursachte Präzession lässt sich hingegen beobachten (vgl. Gravity Probe B).